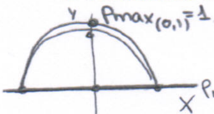
MATEMÁTICAS II, 1º grado Ingeniería Química Test 6, 22/4/2013

N

9'8

1.- Una lámina delgada con densidad $\rho(x,y) = y/(1-x^2)$, está limitada por el arco de parábola $y = 1 - x^2$ y el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

- Esboza la lámina en el plano xy, indicando los puntos de mayor y menor densidad.
- Determina la masa de la lámina



$\rho_{max}(0,1) = 1$ $y = 0 \to \rho_{min} = \frac{0}{1-x^2} = 0$

ρ_{min} $y = 1,\ x = 0 \to \rho_{max} = \frac{1}{1} = 1$

error

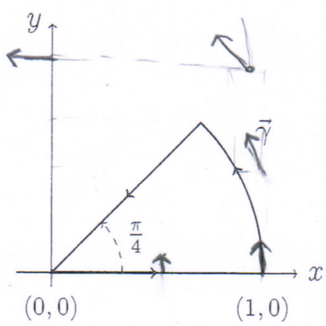
$M_L = \iint_R \frac{y}{1-y^2}\,dx\,dy \Rightarrow R \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x^2 \end{cases} \to \int_{-1}^{1}\left[\int_0^{y=1-x^2} \frac{y}{1-x^2}\,dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2(1-x^2)}\right]_0^{y=1-x^2} dx =$

$\int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-x^2)}}\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx - x^2\,dx = [x]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = [1-(-1)] - \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = 2 - \frac{2}{3} =$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$

(salvo error $\frac{1}{2}$)

2.- Esboza el campo $\vec{\mathbf{v}} = (-y^3, x^3)$ y calcula la circulación a lo largo de la curva $\vec{\gamma}$ del dibujo



$F(0,0) = (0,0)$
$F(1,0) = (0,1)$
$F(0,1) = (-1,0)$
$F(1/2,0) = (0,\frac{1}{6})$
$F(1,1) = (-1,1)$
$F(1,1/2) = (-\frac{1}{6},1)$

Como es un camino cerrado aplicamos Green $\to \iint_R \left(-\left(\frac{\partial -y^3}{\partial y}\right) + \frac{\partial x^3}{\partial x}\right)dx\,dy = \iint_R (3y^2 + 3x^2)\,dx\,dy$ *

$= \iint_R 3(\underbrace{y^2+x^2}_{r^2})\,dx\,dy = \int_0^1 3r^2 \cdot \frac{\pi}{4} r\,dr = 2\pi \int_0^1 3r^3\,dr = \frac{2\pi}{4}\left[\frac{3r^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{3\pi}{16}}$

* polares

Lo hago en polares.

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \end{cases} \to 3\int_0^1 \int_0^{\pi/4} (r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = 3\int_0^1 r^3\,dr \cdot \int_0^{\pi/4} 1\,d\theta =$

$3\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\theta]_0^{\pi/4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{16}}$