ZÉROS DE FONCTIONS HOLOMORPHES ET CONTRE-EXEMPLES EN THÉORIE DES RADARS

GUSTAVO GARRIGÓS, PHILIPPE JAMING & JEAN-BAPTISTE POLY

Résumé. Nous montrons comment les solutions aux problèmes de type reconstruction de phase sont liées aux zéros de fonctions holomorphes. En particulier, le problème d'ambiguïté radar se sépare en deux problèmes distincts.

Le premier, que nous appelons problème restreint, ne fait pas intervenir les zéros de fonctions holomorphes et est entièrement résolu dans [9].

Pour le second, nous apportons une réponse partielle via une discrétisation du problème. On montre ainsi que les solutions qui ne sont pas déjà des solutions du problème restreint sont rares, mais existent.

1. Introduction.

Les problèmes de reconstruction de phase apparaissent dans de nombreux domaines de la physique (optique, cristallographie, physique quantique ... *cf.* [5] [7], [11]). Il s'agit de reconstruire un signal à partir de la seule donnée du module de sa transformée de Fourier, la phase étant en général perdue quand on mesure ces signaux. De tels problèmes sont en général mal posés et, sans hypothèses supplémentaires, ils ont une infinité de solutions.

Il se trouve que l'étude de zéros de fonctions holomorphes entre en jeu dans la description des solutions de tels problèmes (voir section 2.1).

Dans cet article, nous nous concentrons sur le problème d'ambiguïté radar ou, plus précisément, sur une version en dimension finie de celui-ci :

Étant donné un polynôme trigonométrique $f(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n e^{int}$, *déterminer tous les polynômes trigonométriques* $g(t)=\sum_{n=0}^{N} b_n e^{int}$ *tels que*

$$(\mathcal{P}_N)\qquad |\mathcal{A}f(k,t)|=|\mathcal{A}g(k,t)|\qquad \text{pour tout } k\in\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R}$$

où $\mathcal{A}f(k,t)=\sum_{n} a_n\overline{a_{n-k}}e^{int}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 42B10, 81S30, 94A12.

Key words and phrases. radar ambiguity problem.

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude à A. Bonami pour son aide lors de la rédaction de cet article.

Recherche partiellement financée par : *European Commission* (TMR 1998-2001 Network *Harmonic Analysis*).

Notre principal résultat est que, pour $N \geq 3$, le problème $\mathcal{P}_N$ est bien posé (*i.e.* qu'il n'a que des solutions triviales) à moins que les coefficients $(a_0, \ldots, a_N)$ de f n'appartiennent à un certain ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui est non vide et de codimension réelle au moins 1. De plus, nous décrivons entièrement cet ensemble dans les petites dimensions ($N = 3$ et $N = 4$) et montrons qu'il est de codimension réelle respectivement 1 et 2.

Cet article est organisé comme suit : dans le prochain chapitre, nous décrivons quelques problèmes de reconstruction de phase, la section 2.3 étant consacrée au problème d'ambiguïté radar. Le rôle de cette partie, qui reprend les résultats du second auteur [9], est essentiellement introductif. Ensuite, nous expliquons le passage du problème d'ambiguïté radar au problème $(\mathcal{P}_N)$. Les sections 4 et 5 sont respectivement consacrées à la description complète des solutions pour $N = 3$ et $N = 4$. Enfin, nous concluons dans la section 6 par le théorème principal et sa preuve, le cas lacunaire étant exposé en 6.4.

2. Problèmes de reconstruction de phase.

2.1. Le problème général. Le plus simple des problèmes de reconstruction de phase, qui survient en optique, est le suivant :

Problème 1. *Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ deux fonctions à support compact telles que $|\mathcal{F}u(x)| = |\mathcal{F}v(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\mathcal{F}$ étant la transformée de Fourier). Peut-on déduire v de u ?*

Des solutions triviales à ce problème sont $v(t) = cu(t+a)$ et $v(t) = \overline{cu(-t+a)}$ avec $c \in \mathbb{T}$ et $a \in \mathbb{R}$, où $\mathbb{T}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1. Toutefois, il peut y avoir d'autres solutions. Décrivons les brièvement :

Comme u est à support compact, d'après le théorème de Paley-Wiener, $\mathcal{F}u$ est une fonction entière d'ordre 1 de type fini. D'après le théorème de Hadamard, $\mathcal{F}u$ admet donc une factorisation de la forme :

$$e^{\alpha_0+\alpha_1 z} z^m \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

avec $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ et (z_k) les zéros complexes de $\mathcal{F}u$. Comme v est également à support compact, $\mathcal{F}v$ admet une factorisation de la même forme. Comme pour x réel :

$$\left|\left(1 - \frac{x}{z_k}\right) e^{x/z_k}\right| = \left|\left(1 - \frac{x}{\overline{z_k}}\right) e^{x/\overline{z_k}}\right|$$

on en déduit facilement que (théorème dû à Walther [12]) :

Une fonction $v \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact vérifie $|\mathcal{F}v(x)| = |\mathcal{F}u(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{T}$, $a \in \mathbb{R}$ et un choix $\zeta_k \in \{z_k, \overline{z_k}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}v(z) = ce^{iaz} e^{\alpha_0+\alpha_1 z} z^m \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right) e^{z/\zeta_k}.$$

Le choix $\zeta_k \in \{z_k, \overline{z_k}\}$ sera appelé *zero flipping*.

Dans ce théorème, c, a ainsi que le choix $\zeta_k = \overline{z_k}$ pour tout k, correspondent aux solutions triviales. On voit donc que, dès que $\mathcal{F}u$ a au moins deux zéros non réels et non conjugués, il existe des solutions non triviales pour le problème 1. On peut donc se demander si des conditions supplémentaires peuvent impliquer l'unicité de la solution. Par exemple, ni la positivité de u, ni la régularité $\mathcal{C}^\infty$, ne suffisent à garantir l'unicité (*cf.* [9]).

2.2. **Le problème de Pauli.** Une autre question de ce type survient par exemple en mécanique quantique, où Pauli a énoncé le problème suivant :

Problème 2. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des fonctions $v \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $|u(x)| = |v(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|\mathcal{F}u(\xi)| = |\mathcal{F}v(\xi)|$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on dira que v est un* Pauli-partenaire *de u.*

Ici les seules solutions triviales sont $v = cu$ avec $c \in \mathbb{T}$.

La conjecture de Pauli était qu'il n'en existait pas d'autres. Ceci semblait raisonnable étant donné que si $v(x) = |v(x)|e^{i\alpha(x)}$, il ne reste plus qu'à déterminer $\alpha(x)$ et il paraissait possible que l'information manquante se trouve dans $|\mathcal{F}v(x)|$. Des contre-exemples dus à Bargman montrent que ceci n'est pas le cas. Toutefois ces contre-exemples sont encore des solutions triviales du problème de reconstruction de phase. Friedmann ([6]) avait conjecturé que tous les contre-exemples étaient des solutions triviales du problème de reconstruction de phase. Là encore, ce n'est pas le cas. Plus précisément, on a le théorème suivant ([9]) :

Théorème 2.1. *Il existe $u \in L^2(\mathbb{R})$ ayant une infinité non-dénombrable de Pauli-partenaires qui ne sont pas des solutions triviales du problème de reconstruction de phase pour u.*

Preuve. La preuve se fait en utilisant une discrétisation du problème. Soient $H \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $[0,1]$ et a une suite *réelle* dans ℓ^2. Soit F définie par le produit de Riesz $F(x) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1 + ia_n \sin 3^n x)$ qu'on écrit $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{ikx}$.

Pour $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, on définit de même $F^\varepsilon(x) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1 + i\varepsilon_n a_n \sin 3^n x)$ et on écrit $F^\varepsilon(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^\varepsilon e^{ikx}$. Alors

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k H(t-k) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k^\varepsilon H(t-k)$$

sont des partenaires de Pauli. □

Remarque : La construction utilisée dans cette preuve est une itération du procédé suivant.

Soient $G \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ une fonction 2π-périodique, qui peut donc s'écrire $G(x) = \sum_k \beta_k e^{ikx}$, $H \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $[0,1]$ et $\alpha \neq 0$ un réel.

$$\begin{aligned} \text{Soient} \quad F_0(x) &= (1 + i\alpha\cos x)G(3x) = \sum_k b_k^{(0)} e^{ikt} \\ \text{et} \quad F_1(x) &= (1 - i\alpha\cos x)G(3x) = \sum_k b_k^{(1)} e^{ikt}. \end{aligned}$$

Alors les fonctions u_0 et u_1 définies par $u_j(t) = \sum_k b_k^{(j)} H(t-k)$ $(j=0,1)$ sont des partenaires de Pauli.

2.3. **Le problème d'ambiguïté radar (version continue).** Un radar émet un signal $u \in L^2(\mathbb{R})$ qui, après réflexion sur une cible et modification par effet Döpler, revient sur l'antenne du radar. Là, ce signal est corrélé avec le signal émis. Sous certaines conditions physiques sur le signal (u à bande étroite), le radar mesure la quantité

$$A(u)(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(t+\frac{x}{2}\right)\overline{u\left(t-\frac{x}{2}\right)}e^{2i\pi yt}dt$$

appelée fonction d'ambiguïté radar de u.

Malheureusement, au moment de la mesure du signal, la phase de $A(u)$ est perdue, donc seul $|A(u)|$ est mesuré. On est donc amené à se poser le problème de reconstruction de phase suivant :

Problème 3. *Etant donné $u \in L^2(\mathbb{R})$, quel est l'ensemble des $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que*

$$|A(u)(x,y)| = |A(v)(x,y)| \tag{1}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?

Nous dirons alors que v est un partenaire d'ambiguïté *de u.*

Des solutions triviales à ce problème sont d'une part $v(t) = ce^{i\omega t}u(t-a)$ et d'autre part $v(t) = ce^{i\omega t}u(-t-a)$ ($c \in \mathbb{T}$ et $a, \omega \in \mathbb{R}$). Dans ce cas, nous dirons que v est Heisenberg relié à u.

Pour plus de précision sur le rôle de la fonction d'ambiguïté en théorie des radars et sur les propriétés de cette fonction, nous nous référons à [13], [1] et [9].

Remarque : $A(u)(x,y)$ étant une transformée de Fourier dans la variable y, le problème d'ambiguïté radar revient donc à résoudre une famille (continue) de problèmes de reconstruction de phase. Ce problème étant entièrement résolu pour les fonctions à support compact, on pourrait penser que la résolution de ce problème est facile. La difficulté ici est de retrouver (après zero-flipping) une fonction d'ambiguïté $A(v)$. Or, n'importe quelle fonction sur $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être une fonction d'ambiguïté. En guise d'illustration, citons les deux résultats suivants :

— Si $A(u) + A(v)$ est une fonction d'ambiguïté $A(h)$, alors $v = \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) et $h = \sqrt{1+|\lambda|^2}u$. Ce résultat, ainsi qu'un certain nombre d'autres résultats sur la structure de l'ensemble des fonctions d'ambiguïté, se trouve dans [1].

— Si le support de $A(u)$ est de mesure de Lebesgue fini, alors $u = 0$ ([8],[10]). Ce théorème d'incertitude répond à une question de Folland et Sitaram et généralise le théorème de Benedicks : *si f et sa transformée de Fourier ont tous deux un support de mesure de Lebesgue fini, alors $f = 0$.*

Nous allons ici résumer les travaux sur le problème d'ambiguïté radar pour les fonctions à support compact de [9]. Notre premier lemme est un résultat de «stabilité» :

Lemme 2.2. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Soit v un partenaire d'ambiguité de u, alors v est également à support compact.*

De plus, si le support de u est contenu dans un intervalle de longueur $2a$, alors le support de v est également contenu dans un intervalle de longueur $2a$.

D'après le théorème de Paley-Wiener, $A(u)(x,y)$ et $A(v)(x,y)$ sont maintenant des fonctions entières d'ordre 1 de type fini dans la variable y. Par le théorème de factorisation de Hadamard, pour x fixé, ces fonctions sont donc presque caractérisées par leurs zéros. Toutefois, $A(u)$ et $A(v)$ peuvent avoir des zéros distincts. L'étude de tels exemples fait l'objet des sections suivantes de cet article.

Il est toutefois exclu de donner une caractérisation aussi simple des changements de zéros autorisés que pour le problème de reconstruction de phase. Ceci nous conduit à considérer le problème restreint suivant :

Problème 4. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Quels sont les partenaires d'ambiguïté v de u tels que $A(u)$ et $A(v)$ aient mêmes zéros ?*

De tels v seront appelés partenaires d'ambiguïté restreints.

Ce problème a été résolu dans [9], nous allons maintenant brièvement exposer sa solution. Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant sur le support de $A(u)$:

Proposition 2.3. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ et S l'ensemble des points de densité du support de u. Soit Ω l'ensemble des x tels que $A(u)(x,.)$ ne soit pas identiquement 0, alors Ω est ouvert et $\Omega = S - S$.*

Nous pouvons maintenant donner la solution du problème d'ambiguïté radar restreint :

Théorème 2.4. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à support compact et v un partenaire d'ambiguïté restreint de u. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{T}$, x_0 point de Lebesgue de u et ψ une fonction localement constante sur Ω à valeurs dans $\mathbb{T}$ qui vérifie pour tous $t_0, t_1, t_2 \in S$*

$$\psi(t_2 - t_0) = \psi(t_2 - t_1)\,\psi(t_1 - t_0) \tag{2}$$

tels que

$$v(x) = c\psi(x - a - x_0)e^{i\omega x}u(x - a) \tag{3}$$

Inversement, toute fonction v de cette forme est un partenaire d'ambiguïté restreint de u.

Remarque : *Sur Ω, la fonction ψ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Comme $\Omega = S - S$, alors 0 est un point de l'ouvert Ω et (2) implique que $\psi(0) = 1$, de sorte que $\psi = 1$ sur la composante connexe I_0 de Ω qui contient 0.

Supposons que ψ prenne une infinité de valeurs $\big(\psi(t_n - s_n)\big)_{n \geq 0}$. Comme $\overline{S} \times \overline{S}$ est compact, on peut extraire de la suite (t_n, s_n) une sous-suite convergente que nous notons encore (t_n, s_n). Mais alors, d'après (2),

$$\psi(t_{n+1} - s_{n+1}) = \psi(t_{n+1} - t_n)\,\psi(t_n - s_n)\,\psi(s_n - s_{n+1})$$

or, pour n assez grand,

$$\psi(t_{n+1} - t_n) = \psi(s_n - s_{n+1}) = 1$$

de sorte que $\psi(t_{n+1} - s_{n+1}) = \psi(t_n - s_n)$, ce qui contredit l'hypothèse.

3. Du problème continu au problème en dimension finie.

3.1. Le problème discret. Nous nous intéressons maintenant à la construction de fonctions u ayant des partenaires non triviaux. Dans [9], un tel exemple a été construit, basé sur une méthode de discrétisation. Cette méthode est actuellement développée dans des travaux en commun de A. Bonami, G. Garrigós et P. Jaming [3]. Exposons brièvement quelques uns des résultats déjà obtenus :

Soit $H \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, soit $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, et soit enfin $u(t) = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j H(t-j)$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, lorsque $k - \frac{1}{2} \leq x \leq k + \frac{1}{2}$,

$$A(u)(x,y) = e^{-ik\pi y}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\overline{a_{j-k}}e^{2i\pi jy}\right) A(H)(x-k,y).$$

A partir de cette expression, dans [9], on construit deux suites $(a_0, a_1, 0, a_3, a_4)$ et $(b_0, b_1, 0, b_3, b_4)$ telles que les fonctions u et v correspondantes soient des partenaires d'ambiguïté avec zero-flipping.

Ceci nous invite à définir la fonction d'ambiguïté discrète associée à la suite $a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\mathcal{A}(a)(k,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\overline{a_{j-k}}e^{2i\pi jy},$$

et à poser :

Problème 5. *Etant donné $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$, quel est l'ensemble des suites $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ telles que*

$$|\mathcal{A}(b)(k,y)| = |\mathcal{A}(a)(k,y)| \tag{4}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}$?

Si b est une telle suite, nous dirons que b est un partenaire d'ambiguïté discret *de a et nous écrirons $b \simeq a$.*

Evidemment $\simeq$ est une relation d'équivalence. Pour a fixé, la classe d'équivalence de a contient :

1. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $b_j = ca_j$ avec $c \in \mathbb{T}$ fixé,
2. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $b_j = a_{j-l}$ avec $l \in \mathbb{Z}$ fixé,
3. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $b_j = \omega^j a_j$ avec $\omega \in \mathbb{T}$ fixé,
4. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $b_j = a_{-j}$,

et toute composition de telles transformations.

Dans ce cas, nous dirons que b est un *partenaire d'ambiguïté discret trivial* et nous écrirons $b \equiv a$. Si $b \simeq a$ mais $b \not\equiv a$, nous dirons que b est un *partenaire d'ambiguïté discret étrange* et nous écrirons $b \sim a$.

Comme la suite de cet article est consacrée au problème d'ambiguïté discret, nous dirons simplement partenaires pour $\simeq$, partenaires triviaux pour $\equiv$ et partenaires étranges pour $\sim$.

L'exemple dans [9] montre l'existence de suites finies a, b telles que $b \sim a$.

Remarque : Si a est une suite finie de longueur N, alors à une transformée $(a_j) \mapsto (a_{j-l})$ près, on peut supposer que $\operatorname{supp} a \subset \{0, \dots, N\}$ avec $a_0 \neq 0$, $a_N \neq 0$. Dans ce cas, nous écrirons $a \in \mathcal{S}(N)$.

Lemme 3.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, si $a \in \mathcal{S}(N)$,*

$$\operatorname{supp} \mathcal{A}(a) = \{k \ : \ \mathcal{A}(a)(k, y) \text{ ne soit pas identiquement } 0\} \subset \{-N, \dots, N\}$$

et $\mathcal{A}(a)(-N, y) = a_0\overline{a_N}$, $\mathcal{A}(a)(N, y) = a_N\overline{a_0}e^{2i\pi Ny}$.

En particulier, si $a \in \mathcal{S}(N)$ et $b \simeq a$, alors il existe $c \equiv b$ tel que $c \in \mathcal{S}(N)$.

3.2. **La méthode de Bueckner.** Nous allons maintenant étudier le problème discret en nous inspirant de la méthode de Bueckner [4] pour le cas continu. Pour cela notons que, pour $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(a)(k, y)|^2 &= \sum_{n,n'} a_n \overline{a_{n-k} a_{n'}} a_{n'-k} e^{2i\pi(n-n')y} \\ &= \sum_j \left(\sum_{n-n'=j} a_n \overline{a_{n-k} a_{n'}} a_{n'-k} \right) e^{2i\pi jy}. \end{aligned}$$

Ainsi, b est un partenaire d'ambiguïté de a si et seulement si

$$\sum_{n-n'=j} a_n \overline{a_{n-k} a_{n'}} a_{n'-k} = \sum_{n-n'=j} b_n \overline{b_{n-k} b_{n'}} b_{n'-k}$$

pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$. Considérons donc cette quantité

$$\mathcal{A}_{j,k} = \sum_{n-n'=j} a_n \overline{a_{n-k} a_{n'}} a_{n'-k}.$$

En posant $n + n' = l + k$, on voit que sommer sur tous les n, n' avec $n - n' = j$ revient à sommer sur tous les l de même parité que $j + k$. De plus, comme

$$n = \frac{l+j+k}{2} \quad , \quad n-k = \frac{l+j-k}{2} \quad , \quad n' = \frac{l-j+k}{2} \quad , \quad n'-k = \frac{l-j-k}{2},$$

si on pose, pour des entiers s et t,

$$d_{s,t} = \begin{cases} a_{\frac{s+t}{2}} a_{\frac{s-t}{2}} & s, t \text{ de même parité,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

il vient

$$\mathcal{A}_{j,k} = \sum_l d_{l,j+k} \overline{d_{l,j-k}}.$$

Soit alors K_a l'opérateur sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ dont la matrice infinie est donnée par $d_{s,t}$. Son adjoint a pour matrice $\overline{d_{t,s}}$ et on voit que

$$\mathcal{A}_{j,k} = (K_a^* K_a)_{j-k,j+k}.$$

Définition. *L'opérateur K_a est appelé* opérateur d'ambiguïté *associé à a.*

K_a est un opérateur de Hilbert-Schmidt. De plus a et b sont des partenaires d'ambiguïté si et seulement si $K_a^*K_a = K_b^*K_b$.
Remarque : Puisque $d_{s,t} = d_{s,-t}$, la matrice de K_a est symétrique par rapport à la colonne médiane.

3.3. **Le problème en dimension finie.** Dans cet article nous allons plus particulièrement nous intéresser au problème pour les suites finies (ou de façon équivalent au problème $(\mathcal{P}_N)$ sur les problèmes trigonométriques).

Soit $a = (a_0, \ldots, a_N)$ et soit K_a sa matrice d'ambiguïté. Alors, les seuls coefficients non nuls sont pour $0 \leq s+t \leq 2N$ et $t = -N, \ldots, N$. Ainsi, K_a s'identifie à une application linéaire en dimension $2N+1$. En général, la matrice de K_a est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_{N-2} & \ldots & a_1^2 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0a_{N-1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_0a_N & 0 & a_1a_{N-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_Na_0 \\ 0 & a_1a_N & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_2a_N & \ldots & a_{N-1}^2 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_N^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous donnerons plus bas la forme explicite de la matrice de K_a pour $N = 3$ et $N = 4$. En général,

$$\text{Card}\big\{j \in \{0, \ldots, N\} \ : \ a_j \neq 0 \text{ ou } a_{N-j} \neq 0\big\} \leq \operatorname{rang} K_a \leq N+1. \tag{5}$$

En particulier, si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in [0, N]$, le rang de K_a est $N+1$, et nous dirons alors que a est *non lacunaire*.

Le problème auquel nous nous intéressons maintenant est donc :

Problème 6. *Étant donné une suite finie $(a_0, \ldots, a_N)$, trouver toutes les suites finies $(b_0, \ldots, b_N)$ telles que les matrices d'ambiguïté associées vérifient*

$$K_a^*K_a = K_b^*K_b.$$

Notons par $A_0, A_1, \ldots, A_{2N}$ les vecteurs colonnes de la matrice de K_a et par $B_0, B_1, \ldots, B_{2N}$ ceux de la matrice de K_b. Comme $\langle A_i, A_j\rangle = (K_a^*K_a)_{i+j,i-j}$, (en particulier, $\langle A_i, A_j\rangle = 0$ si i, j sont de parité opposée), on peut évidemment reformuler le problème sous la forme suivante :

Lemme 3.2. *Soient $a, b \in \mathcal{S}(N)$. Pour que a et b soient des partenaires, il faut et suffit que soient satisfaites pour tous $0 \leq i \leq j \leq N$, i et j ayant la même parité, les conditions suivantes :*

$$\langle A_i, A_j\rangle = \langle B_i, B_j\rangle. \tag{i,j}$$

Cette reformulation du problème d'ambiguïté va nous permettre de montrer que la plupart des suites finies $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$, de longueur N fixée, n'ont que des partenaires triviaux.

Utilisant les conditions (i,j), il résulte de quelques calculs simples que *lorsque* $N = 1, 2$, *tout* $a \in \mathcal{S}(N)$ *n'a que des partenaires triviaux*. Désormais, nous supposons $N \geq 3$ et nous nous proposons d'étudier *l'ensemble* $\mathcal{E}(N)$ *des suites* $a \in \mathcal{S}(N)$ *qui possèdent des partenaires étranges.*

Pour cela, il est commode de disposer du lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soit a et b des partenaires dans $\mathcal{S}(N)$. Quitte à remplacer b par un de ses partenaires triviaux, on peut supposer que*

$$A_0 = B_0 \quad \text{et} \quad A_1 = B_1 \tag{6}$$

ce qui équivaut à l'existence d'un unique $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$b = \big(za_0, za_1, b_2, \ldots, b_{N-2}, \frac{1}{z}a_{N-1}, \frac{1}{z}a_N\big). \tag{7}$$

Nous dirons alors que a et b sont des partenaires normalisés.

La preuve, comme la plupart des preuves qui vont suivre, repose sur la remarque suivante :

Remarque 3.4. *Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{C}^4$ tel que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2.$$

Alors,

$$\text{ou bien} \quad \alpha_1 = \beta_1 \text{ et } \alpha_2 = \beta_2 \qquad \text{ou bien} \quad \alpha_1 = \beta_2 \text{ et } \alpha_2 = \beta_1.$$

Ce choix possible entre deux solutions va remplacer le "zero-flipping" du premier paragraphe.

Preuve du lemme 3.3. Rappelons les conditions

$$|a_0a_N| = |b_0b_N|, \tag{0,0}$$

$$a_0a_N\overline{a_1a_{N-1}} = b_0b_N\overline{b_1b_{N-1}}, \tag{0,2}$$

$$|a_0a_{N-1}|^2 + |a_1a_N|^2 = |b_0b_{N-1}|^2 + |b_1b_N|^2. \tag{1,1}$$

Supposons d'abord que $a_1a_{N-1} \neq 0$. Notons que la condition $(0,2)$ implique que $b_1b_{N-1} \neq 0$. D'après la remarque 3.4, les conditions $(1,1)$ et $(0,2)$ impliquent que $|a_0a_{N-1}| = |b_0b_{N-1}|$ ou $|a_0a_{N-1}| = |b_1b_N|$. Quitte à remplacer $(b_0, \ldots, b_N)$ par son partenaire trivial $(b_N, \ldots, b_0)$ (son *symétrique*), ce qui n'altère pas la condition $(0,0)$, nous pouvons supposer que

$$|a_0a_N| = |b_0b_N| \quad \text{et} \quad |a_0a_{N-1}| = |b_0b_{N-1}|.$$

Posons $a_0a_N = z_Nb_0b_N$ et $a_0a_{N-1} = z_{N-1}b_0b_{N-1}$. Comme $|z_N| = |z_{N-1}| = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{T}$ tels que $z_N = u^2v^N$ et $z_{N-1} = u^2v^{N-1}$. Définissons β par $\beta_j = uv^jb_j$ pour tout $j \in [0, N]$. Alors β est un partenaire trivial de b, donc un partenaire de a, et par construction, nous avons

$$\beta_0\beta_N = u^2v^Nb_0b_N = a_0a_N \quad \text{et} \quad \beta_0\beta_{N-1} = u^2v^{N-1}b_0b_{N-1} = a_0a_{N-1}. \tag{8}$$

Utilisant la condition $(0,2)$ pour a et β, la relation $\beta_0\beta_N = a_0a_N$ implique $\beta_1\beta_{N-1} = a_1a_{N-1}$, ce qui, compte tenu des égalités (8), implique

$$\beta_1\beta_N = a_1a_N$$

de sorte que β est un partenaire normalisé de a.

Supposons maintenant que $a_1 = a_{N-1} = 0$. Il résulte alors de $(1,1)$ que $b_1 = b_{N-1} = 0$. Grâce à $(0,0)$, il existe un complexe u de module 1 tel que $a_0 a_N = u^2 b_0 b_N$. Alors, $\beta = ub$ est un partenaire trivial de b et par construction $\beta_0\beta_N = u^2 b_0 b_N = a_0 a_N$, de sorte que β est un partenaire normalisé de a.

Enfin, quitte à remplacer a par son symétrique, on peut maintenant supposer que $a_1 = 0$, mais $a_{N-1} \neq 0$. Alors, il résulte de $(0,2)$ que $b_1 b_{N-1} = 0$. Quitte à remplacer b par son symétrique, ce qui n'altère pas la condition $(0,0)$, nous pouvons supposer que $b_1 = 0$. Ainsi, il ne reste plus que les conditions

$$|a_0 a_N| = |b_0 b_{N-1}| \quad \text{et} \quad |a_0 a_{N-1}| = |b_0 b_{N-1}|.$$

On en déduit que $b_{N-1} \neq 0$. On peut alors reprendre la construction précédente d'un partenaire trivial β de b vérifiant les relations voulues (8) qui assurent que β est un partenaire normalisé de a. □

Remarque : Il découle des lemmes 3.1 et 3.3 que, pour déterminer tous les partenaires d'un signal donné $a \in \mathcal{S}(N)$, il suffit d'en déterminer les partenaires normalisés.

Remarque 3.5. *Pour que a et $b \in \mathcal{S}(N)$ soient des partenaires triviaux,* comme $a_0 a_N \neq 0$ et $b_0 b_N \neq 0$, *il faut et suffit que soit satisfaite l'une des deux conditions suivantes*

$$(T_1) \qquad b_n = uv^n a_n \quad \text{pour tout } n \in [0, N],$$

$$(T_2) \qquad b_n = uv^n a_{N-n} \quad \text{pour tout } n \in [0, N],$$

où $u, v \in \mathbb{T}$.

Afin d'éviter des redites dans l'étude des cas $N = 3, 4$, nous donnons dans les deux lemmes qui suivent quelques précisions sur ces conditions de trivialité (T_1) et (T_2).

Lemme 3.6. *Soit $a \in \mathcal{S}(N)$ tel que a_1 ou a_{N-1} sont non nuls. Alors, les seuls partenaires normalisés b de a tels que a et b satisfassent les conditions de trivialité (T_1) sont $b = \pm a$.*

Preuve. Quitte à remplacer a par son symétrique, nous pouvons supposer que $a_1 \neq 0$. Les relations

$$\begin{array}{rclcl} b_0 & = & z a_0 & = & u a_0, \\ b_1 & = & z a_1 & = & uv a_1, \\ b_N & = & \frac{1}{z} a_N & = & uv^N a_N \end{array}$$

impliquent successivement $u = z$, $v = 1$ et $u = \frac{1}{z}$, d'où $u^2 = 1$, et les relations (T_1) entraînent $b = \pm a$. □

Lemme 3.7. *Soient $a, b \in \mathcal{S}(N)$ des partenaires normalisés. Pour que a et b satisfassent les relations de trivialité (T_2), il est nécessaire que*

$$(i) \qquad a_1 a_{N-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad |a_0 a_{N-1}| = |a_1 a_N| \quad \text{et} \quad z^2 = \Big(\frac{a_0}{a_N}\Big)^{N-2} \Big(\frac{a_{N-1}}{a_1}\Big)^N$$

ou

(*ii*) $$a_1 = a_{N-1} = 0 \quad \text{et} \quad |z| = \left|\frac{a_N}{a_0}\right|.$$

Réciproquement, (i) ou (ii) impliquent l'existence de $u, v \in \mathbb{T}$ tels que soient satisfaites les quatre relations (T_2^*)

$$\begin{array}{lccccc}
\textit{(1)} & b_0 & = & za_0 & = & ua_N, \\
\textit{(2)} & b_1 & = & za_1 & = & uva_{N-1}, \\
\textit{(N-1)} & b_{N-1} & = & \frac{1}{z}a_{N-1} & = & uv^{N-1}a_1, \\
\textit{(N)} & b_N & = & \frac{1}{z}a_N & = & uv^N a_0.
\end{array}$$

Preuve. Supposons $a_1 a_{N-1} \neq 0$. Si a et b sont des partenaires normalisés satisfaisant (T_2), les conditions *(1)*, *(2)* et *(N-1)* impliquent successivement

$$u = \frac{za_0}{a_N},\ v = \frac{a_1 a_N}{a_0 a_{N-1}} \quad \text{et} \quad z^2 = \big(\frac{a_0}{a_N}\big)^{N-2}\big(\frac{a_{N-1}}{a_1}\big)^N$$

donc en particulier les conditions (i). Réciproquement, si les conditions (i) sont satisfaites, on a $|z| = \left|\frac{a_N}{a_0}\right|$. Alors, $u = \frac{za_0}{a_n}$ et $v = \frac{a_1 a_N}{a_0 a_{N-1}}$ ont bien pour module 1 et l'on vérifie aisément que les conditions (T_2^*) sont satisfaites.

Supposons $a_1 a_{N-1} = 0$. Si a et b sont des partenaires normalisés satisfaisant (T_2), les conditions *(2)* ou *(N-1)* impliquent $a_1 = a_{N-1} = 0$. Il résulte de *(1)* que nécessairement $u = \frac{za_0}{a_N}$, d'où (ii). Réciproquement, si les conditions (ii) sont satisfaites, il existe $u, v \in \mathbb{T}$ tels que $u = \frac{za_0}{a_N}$ et $v^N = \frac{a_N^2}{z^2 a_0^2}$, ce qui assure les conditions (T_2^*). □

Dans les deux sections qui suivent, nous commençons par l'étude exhaustive des cas $N = 3$ et $N = 4$, déterminant tous les partenaires normalisés d'un signal donné $a \in \mathcal{S}(N)$, en précisant s'ils sont des partenaires triviaux ou étranges. Nous montrerons ensuite que la plupart des résultats obtenus s'étendent au cas où N est quelconque.

Dans ces mêmes sections,

— nous désignons par H l'union dans $\mathbb{C}^{N+1}$ des hyperplans de coordonnées $H_n = \{a_n = 0\}$, $n = 0, \ldots, N$.

— si $J = (j(1), j(2), \ldots, j(p))$ est un multi-indice strictement croissant à valeurs dans $[0, N]$, nous posons

$$H_J = \bigcup_{k=1}^{p} H_{j(k)}.$$

4. Le cas $N = 3$

Soit $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{S}(3)$, autrement dit $a_0 a_3 \neq 0$. La matrice de l'opérateur d'ambiguïté K_a s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_1 & 0 & a_0a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0a_2 & 0 & a_1^2 & 0 & a_0a_2 & 0 \\ a_0a_3 & 0 & a_1a_2 & 0 & a_1a_2 & 0 & a_0a_3 \\ 0 & a_1a_3 & 0 & a_2^2 & 0 & a_1a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2a_3 & 0 & a_2a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et, d'après le lemme 3.3, les partenaires normalisés b de a sont les signaux

$$b = (za_0, za_1, \frac{1}{z}a_2, \frac{1}{z}a_3) \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{C}^*$$

qui satisfont les relations :

$$a_0a_2\overline{a_1}^2 + a_1a_3\overline{a_2}^2 = b_0b_2\overline{b_1}^2 + b_1b_3\overline{b_2}^2 \tag{1,3}$$

$$|a_0a_1|^2 + |a_1a_2|^2 + |a_2a_3|^2 = |b_0b_1|^2 + |b_1b_2|^2 + |b_2b_3|^2 \tag{2,2}$$

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 \tag{3,3}$$

puisque sont trivialement satisfaites les conditions $(0,0)$, $(0,2)$ et $(1,1)$.

4.1. **Le cas non lacunaire.** Soit $a \in \mathbb{C}^4 \setminus H$. Commençons par déterminer les partenaires normalisés b de a autres que $\pm a$.

La condition $(1,3)$ s'écrit

$$a_0a_2\overline{a_1}^2 + a_1a_3\overline{a_2}^2 = \overline{z}^2 a_0a_2\overline{a_1}^2 + \frac{1}{\overline{z}^2} a_1a_3\overline{a_2}^2$$

et comme $z^2 \neq 1$, il découle de la remarque 3.4 que

$$z^2 = \frac{\overline{a_1a_3}a_2^2}{\overline{a_0a_2}a_1^2} \qquad \text{d'où} \qquad |z|^2 = \left|\frac{a_2a_3}{a_0a_1}\right| \tag{9}$$

ce qui assure également la condition $(2,2)$.

Montrons que la condition $(3,3)$ implique des conditions algébriques sur a. Cette condition s'écrit :

$$\big(|a_0|^2 + |a_1|^2\big) + \big(|a_2|^2 + |a_3|^2\big) = |z|^2\big(|a_0|^2 + |a_1|^2\big) + \frac{1}{|z|^2}\big(|a_2|^2 + |a_3|^2\big)$$

et il découle à nouveau de la remarque 3.4 que

— ou bien $|z| = 1$, ce qui implique $|a_0a_1| = |a_2a_3|$,

— ou bien $|a_2|^2 + |a_3|^2 = |z|^2\big(|a_0|^2 + |a_1|^2\big)$.

Dans ce dernier cas, comme $|a_2a_3| = \big|z^2a_0a_1\big|$, il résulte à nouveau de la remarque 3.4 que

— ou bien $|z| = \left|\dfrac{a_3}{a_0}\right| = \left|\dfrac{a_2}{a_1}\right|$, ce qui implique $|a_0a_2| = |a_1a_3|$,

— ou bien $|z| = \left|\dfrac{a_2}{a_0}\right| = \left|\dfrac{a_3}{a_1}\right|$, ce qui implique $|a_0a_3| = |a_1a_2|$.

Afin de simplifier les énoncés qui suivent, introduisons les ensembles algébriques réels de $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{|a_0a_1| = |a_2a_3|\} \\ M_2 &= \{|a_0a_2| = |a_1a_3|\} \\ M_3 &= \{|a_0a_3| = |a_1a_2|\} \\ L &= \{a_0a_2\overline{a_1}^2 = a_1a_3\overline{a_2}^2\}. \end{aligned}$$

Notons que L est inclus dans M_1. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Pour qu'un signal $a \in \mathbb{C}^4 \setminus H$ possède des partenaires normalisés autres que $\pm a$, il faut et suffit que*

$$a \in \big(M_1 \cup M_2 \cup M_3\big) \setminus \big(L \cup H\big).$$

Ces deux partenaires normalisés sont les deux signaux définis par

$$b = (za_0, za_1, \frac{1}{z}a_2, \frac{1}{z}a_3) \quad \text{où} \quad z^2 = \frac{\overline{a_1a_3}a_2^2}{\overline{a_0a_2}a_1^2} \neq 1. \tag{10}$$

Preuve. Il suffit de montrer que les points b définis par (10) satisfont la condition $(3,3)$.

Cela est trivial pour $a \in M_1$, puisque $|z| = 1$. Pour $a \in M_2$, il suffit de remarquer que les relations $|z|^2 = \left|\frac{a_2a_3}{a_0a_1}\right|$ et $|a_0a_2| = |a_1a_3|$ impliquent alors $|z| = \left|\frac{a_3}{a_0}\right| = \left|\frac{a_2}{a_1}\right|$, d'où résulte immédiatement $(3,3)$. Le cas $a \in M_3$ se traite de la même façon. □

Ces partenaires exceptionnels de a sont-ils des partenaires triviaux de a ?

Lemme 4.2. *Soit $a \in \big(M_1 \cup M_2 \cup M_3\big) \setminus \big(L \cup H\big)$. Pour que les deux partenaires exceptionnels b de a définis par (10) soient triviaux, il faut et suffit que $a \in M_2$.*

Preuve. Il résulte du lemme 3.6 que a et b ne peuvent satisfaire (T_1). D'après le lemme 3.7(i), si a et b satisfont (T_2), alors $|a_0a_2| = |a_1a_3|$, donc $a \in M_2$. Réciproquement, si $a \in M_2$, les relations $|a_0a_2| = |a_1a_3|$ et $z^2 = \frac{\overline{a_1a_3}a_2^2}{\overline{a_0a_2}a_1^2}$ impliquent $z^2 = \frac{a_0}{a_3}(\frac{a_2}{a_1})^3$, ce qui d'après 3.7$(i)$ assure que a et b satisfont (T_2^*) qui ici n'est autre que (T_2). □

Compte-tenu des lemmes qui précèdent, nous obtenons la

Proposition 4.3. *L'ensemble des signaux non lacunaires $a \in \mathbb{C}^4 \setminus H$ qui possèdent des partenaires étranges est l'ensemble semi-algébrique [1] réel de $\mathbb{C}^4$*

$$\mathcal{E}(3) \setminus H = \big(M_1 \cup M_3\big) \setminus \big(L \cup M_2 \cup H\big).$$

[1] Une bonne introduction aux ensembles semi-algébriques se trouve par exemple dans [2].

Remarque : *L'ensemble $\mathcal{E}(3)\setminus H$ n'est pas fermé dans $\mathbb{C}^4\setminus H$.* D'autre part $\mathcal{E}(3)\setminus H$ est de codimension (réelle) 1.

Soit en effet $a\in L\setminus\big(M_2\cup H\big)$. Alors a n'admet que des partenaires triviaux. Considérons le cercle paramétré par $a_u=(ua_0,a_1,a_2,a_3)$ où $u\in\mathbb{T}$. Si $u\neq\pm1$, alors $a_u\in M_1\setminus\big(L\cup M_2\cup H\big)$ et, d'après la proposition 4.3, le signal $a_u\in\mathcal{E}(3)\setminus H$. Comme $\lim_{u\to1}a_u=a$, nous obtenons bien la non fermeture annoncée.

4.2. **Le cas lacunaire.** Soit $a\in\mathcal{S}(3)$ un signal lacunaire, *i.e.* $a_0a_3\neq0$ mais $a_1a_2=0$, et b un partenaire normalisé de a.

Si $a_1=a_2=0$, les conditions $(1,3)$, $(2,2)$ et $(3,3)$ se réduisent à

$$|a_0|^2+|a_3|^2=|z|^2|a_0|^2+\frac{1}{|z|^2}|a_3|^2. \tag{3,3}$$

D'après la remarque 3.4,

— ou bien $|z|=1$, soit $|a_0|=|b_0|$ et $|a_3|=|b_3|$ et l'on en déduit aisément que a et b satisfont (T_1) ;

— ou alors $|z|=\left|\dfrac{a_3}{a_0}\right|$ et a et b satisfont (T_2^*), donc (T_2), cela d'après le lemme 3.7(ii).

Quitte à remplacer a par son symétrique, supposons maintenant $a_1=0$, mais $a_2\neq0$, alors $b=(za_0,0,\overline{z}a_2,\overline{z}a_3)$ avec $z\in\mathbb{T}$. En effet, la condition $(2,2)$ s'écrit $|a_2a_3|=\dfrac{1}{|z|^2}|a_2a_3|$, de sorte que $|z|=1$, ce qui assure la dernière relation non triviale, à savoir $(3,3)$. Il résulte des lemmes 3.6 et 3.7 que a possède des partenaires normalisés étranges, ceux qui sont définis par $z\in\mathbb{T}$, mais $z\neq\pm1$.

Notons que si $z_1\neq\pm z_2$, les partenaires b_1 et b_2 de a correspondants sont des partenaires étranges. Autrement dit, dans le quotient $\mathcal{S}(3)\,/\equiv$, *la classe $[a]$ de a admet comme partenaires étranges tous les points de l'arc défini par les classes $[(za_0,0,\overline{z}a_2,\overline{z}a_3)]$ où $z=x+iy\in\mathbb{T}$ et $y>0$.*

Nous obtenons ainsi la proposition :

Proposition 4.4. *L'ensemble des signaux lacunaires $a\in\mathcal{S}(3)$ qui possèdent des partenaires étranges est l'ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^4$*

$$\mathcal{E}(3)\cap H=\big(H_1\setminus H_{0,2,3}\big)\bigcup\big(H_2\setminus H_{0,1,3}\big).$$

En rassemblant les propositions 4.3 et 4.4, nous obtenons en conclusion

Proposition 4.5. *L'ensemble $\mathcal{E}(3)$ des signaux $a\in\mathcal{S}(3)$ qui possèdent des partenaires étranges est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{C}^4$ qui est de codimension (réelle) 1.*

5. Le cas $N = 4$

Soit $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathcal{S}(4)$, autrement dit $a_0 a_4 \neq 0$. La matrice de l'opérateur d'ambiguïté K_a s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0a_1 & 0 & a_0a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0a_2 & 0 & a_1^2 & 0 & a_0a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0a_3 & 0 & a_1a_2 & 0 & a_1a_2 & 0 & a_0a_3 & 0 \\ a_0a_4 & 0 & a_1a_3 & 0 & a_2^2 & 0 & a_1a_3 & 0 & a_0a_4 \\ 0 & a_1a_4 & 0 & a_2a_3 & 0 & a_2a_3 & 0 & a_1a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_2a_4 & 0 & a_3^2 & 0 & a_2a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3a_4 & 0 & a_3a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si b est un partenaire normalisé de a, la condition

$$(0,4) \qquad a_0 a_4 \overline{a_2}^2 = a_0 a_4 \overline{b_2}^2$$

implique $a_2^2 = b_2^2$. Quitte à remplacer b par $-b$, ce qui n'altère pas les relations de normalisation, on peut supposer que $a_2 = b_2$. Nous dirons alors que b est un *partenaire privilégié* de a.

Les partenaires privilégiés b de a sont les signaux

$$b = (za_0, za_1, a_2, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4)$$

avec $z \in \mathbb{C}^*$ qui satisfont les relations :

$$(1,3) \qquad a_0a_3\overline{a_1a_2} + a_1a_4\overline{a_2a_3} = b_0b_3\overline{b_1b_2} + b_1b_4\overline{b_2b_3}$$

$$(2,2) \qquad |a_0a_2|^2 + |a_1a_3|^2 + |a_2a_4|^2 = |b_0b_2|^2 + |b_1b_3|^2 + |b_2b_4|^2$$

$$(2,4) \qquad a_0a_2\overline{a_1}^2 + a_1a_3\overline{a_2}^2 + a_2a_4\overline{a_3}^2 = b_0b_2\overline{b_1}^2 + b_1b_3\overline{b_2}^2 + b_2b_4\overline{b_3}^2$$

$$(3,3) \quad |a_0a_1|^2 + |a_1a_2|^2 + |a_2a_3|^2 + |a_3a_4|^2 = |b_0b_1|^2 + |b_1b_2|^2 + |b_2b_3|^2 + |b_3b_4|^2$$

$$(4,4) \quad |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 + |b_4|^2$$

puisque sont déjà satisfaites les conditions $(0,0)$, $(0,2)$, $(0,4)$ et $(1,1)$.

Comme nous suivons la même démarche que dans le cas $N = 3$, nous nous bornons ici à donner le schéma des démonstrations.

5.1. Le cas non lacunaire. Soit $a \in \mathbb{C}^5 \setminus H$. *Nous commençons par déterminer les partenaires privilégiés b de a qui sont différents de a, i.e. $z \neq 1$.*

Il résulte de la condition $(1,3)$ que, comme $z \neq 1$,

$$(11) \qquad z = \frac{\overline{a_1}a_3}{a_1\overline{a_3}}\,\frac{\overline{a_4}}{\overline{a_0}} \qquad \text{d'où} \qquad |z| = \left|\frac{a_4}{a_0}\right|.$$

Montrons que la condition $(2,4)$ implique des conditions algébriques sur a. En effet, cette condition implique

— ou $z\overline{z}^2 = 1$, d'où successivement $|z|^3 = 1$, $|z| = 1$ et donc $z = 1$, ce que nous avons exclu ;

— ou $z\overline{z}^2 = \dfrac{\overline{a_3}^2 a_4}{\overline{a_1}^2 a_0}$, ce qui implique $|z|^3 = \left|\dfrac{a_3^2 a_4}{a_1^2 a_0}\right|$ et d'après (11), nécessairement $\left|\dfrac{a_4}{a_0}\right| = \left|\dfrac{a_3}{a_1}\right|$, de sorte que le point a doit satisfaire $|a_0a_3| = |a_1a_4|$.

Nous introduisons les ensembles algébriques réels suivants de $\mathbb{C}^5$:

$$\begin{aligned} M =& \{|a_0a_3| = |a_1a_4|\} \\ L =& \{a_0a_3\overline{a_1} = a_1a_4\overline{a_3}\} \end{aligned}$$

dont l'intersection est décrite par

$$M \cap L = \{a_3 = ua_1 \text{ et } a_4 = u^2 a_0 \quad \text{avec } u \in \mathbb{T}\}.$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer le lemme suivant :

Lemme 5.1. *Pour qu'un signal $a \in \mathbb{C}^5 \setminus H$ possède des partenaires privilégiés autres que a, il faut et suffit que*

$$a \in M \setminus \big(L \cup H\big).$$

L'unique partenaire exceptionnel de a est le signal défini par

$$b = (za_0, za_1, a_2, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4) \quad \text{où} \quad z = \frac{\overline{a_1}a_3}{a_1\overline{a_3}}\,\frac{\overline{a_4}}{\overline{a_0}} \neq 1. \tag{12}$$

Preuve. Il suffit de montrer que le point b défini par (12) satisfait les conditions $(2,4)$, $(2,2)$, $(3,3)$ et $(4,4)$, ce qui résulte aisément de $|z| = \left|\dfrac{a_4}{a_0}\right| = \left|\dfrac{a_3}{a_1}\right|$. □

Cela dit, *contrairement au cas* $N = 3$, nous constatons que :

Proposition 5.2. *Tout point $a \in \mathbb{C}^5 \setminus H$ n'admet que des partenaires triviaux.*

Preuve. Il suffit de montrer que le partenaire exceptionnel b de a défini par (12) satisfait (T_2). Or, comme $a \in M$, on s'assure aisément que

$$|a_0a_3| = |a_1a_4| \quad \text{et} \quad z^2 = \big(\frac{a_0}{a_4}\big)^2\big(\frac{a_3}{a_1}\big)^4$$

ce qui d'après 3.7(i), montre que a et b satisfont $(T_2)^*$ avec $u = \dfrac{za_0}{a_4}$ et $v = \dfrac{a_1a_4}{a_0a_3}$. Mais, d'après (12), on a $uv^2 = 1$, de sorte que a et b satisfont bien (T_2). □

5.2. **Le cas lacunaire.** Soit $a \in \mathcal{S}(4)$ un signal lacunaire, *i.e.* $a_0a_4 \neq 0$ mais $a_1a_2a_3 = 0$. On montre sans difficultés que si $a_2 \neq 0$, alors a n'admet que des partenaires triviaux.

Supposons donc $a_2 = 0$. Soit b un partenaire privilégié de a, autrement dit $b = (za_0, za_1, 0, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4)$ où $z \in \mathbb{C}^*$ satisfait les seules relations non triviales $(3,3)$ et $(4,4)$ qui s'écrivent alors

$$|a_0a_1|^2 + |a_3a_4|^2 = |z|^4|a_0a_1|^2 + \frac{1}{|z|^4}|a_3a_4|^2 \tag{3,3}$$

$$\big(|a_0|^2 + |a_1|^2\big) + \big(|a_3|^2 + |a_4|^2\big) = |z|^2\big(|a_0|^2 + |a_1|^2\big) + \frac{1}{|z|^2}\big(|a_3|^2 + |a_4|^2\big). \tag{4,4}$$

Si $a_1 = a_3 = 0$, seule reste la condition

$$|a_0|^2 + |a_4|^2 = |z|^2|a_0|^2 + \frac{1}{|z|^2}|a_4|^2 \tag{4,4}$$

et on montre aisément que a et b sont des partenaires triviaux.

Supposons donc $a_1 \neq 0$ ou $a_3 \neq 0$.

— Le système $(3,3)$ et $(4,4)$ admet toujours la solution évidente $|z| = 1$. En utilisant les lemmes 3.6 et 3.7(i), on montre que $a = (a_0, a_1, 0, a_2, a_3)$ admet comme partenaires privilégiés étranges les points $b = (za_0, za_1, 0, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4)$ avec $|z| = 1$, mais $z \neq \pm 1$ et éventuellement $z \neq \pm\dfrac{a_0 a_3^2}{a_4 a_1^2}$.

— Par ailleurs, le même système admet éventuellement une solution $|z| \neq 1$, ce qui d'après $(3,3)$ suppose $a_1 a_3 \neq 0$. En utilisant la remarque 3.4, on obtient en effet

$$|z|^2 = \frac{|a_3 a_4|}{|a_0 a_1|} = \frac{|a_3|^2 + |a_4|^2}{|a_0|^2 + |a_1|^2} \neq 1$$

On montre aisément que les conditions algébriques sur a se scindent en les conditions suivantes :

(i) $|a_0 a_3| = |a_1 a_4|$ mais $|a_0| \neq |a_4|$ et $|a_1| \neq |a_3|$. Dans ce cas, le point $a = (a_0, a_1, 0, a_2, a_3)$ admet comme partenaires privilégiés étranges les points $b = (za_0, za_1, 0, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4)$ avec $|z| = \left|\dfrac{a_3}{a_1}\right| = \left|\dfrac{a_4}{a_0}\right|$, à l'exception de $z = \pm\dfrac{a_0 a_3^2}{a_4 a_1^2}$, cela d'après le lemme 3.7(i).

(ii) $|a_0 a_4| = |a_1 a_3|$ mais $|a_0| \neq |a_3|$ et $|a_1| \neq |a_4|$. Dans ce cas, le point $a = (a_0, a_1, 0, a_2, a_3)$ admet comme partenaires privilégiés étranges les points $b = (za_0, za_1, 0, \frac{1}{z}a_3, \frac{1}{z}a_4)$ avec $|z| = \left|\dfrac{a_3}{a_0}\right| = \left|\dfrac{a_4}{a_1}\right|$, et là, d'après le lemme 3.7(i), à l'exception éventuelle de $z = \pm\dfrac{a_0 a_3^2}{a_4 a_1^2}$.

En conclusion, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 5.3. *L'ensemble $\mathcal{E}(4)$ des signaux $a \in \mathcal{S}(4)$ qui possèdent des partenaires étranges est l'ensemble des signaux lacunaires*

$$a \in H_2 \setminus \left(H_{0,1,4} \cap H_{0,3,4}\right)$$

lequel est un ouvert non vide de l'hyperplan H_2, donc un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^5$ de codimension (réelle) 2.

6. Le cas général

L'objet de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 6.1. *L'ensemble $\mathcal{E}(N)$ est un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui est de codimension (réelle) au moins 1 et qui est non vide dès que $N \geq 3$.*

6.1. **Semi-algébricité de $\mathcal{E}(N)$.**

Proposition 6.2. *L'ensemble $\mathcal{E}(N)$ est un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$.*

Preuve. Soit Π l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathcal{S}(N)\times\mathcal{S}(N)$ qui sont des partenaires et soit Θ_1 et Θ_2 l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$ qui vérifient respectivement les relations de trivialité :

$$(T_1)\qquad b_n = uv^n a_n \quad \text{pour tout } n\in[0,N]$$

$$(T_2)\qquad b_n = uv^n a_{N-n} \quad \text{pour tout } n\in[0,N]$$

où $u,v\in\mathbb{T}$.

Il est clair que Π est un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$ puisqu'il est défini par $a_0a_N\neq 0$ et les égalités

$$\langle A_i,A_j\rangle = \langle B_i,B_j\rangle$$

pour tous $0\leq i\leq j\leq N$, i et j ayant la même parité.

Montrons que Θ_1 est un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$. Pour cela, soit Γ_1 l'ensemble des points $(u,v,a,b)\in\Lambda_1=\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$ qui vérifient les relations (T_1). L'ensemble Γ_1 est une sous-variété algébrique réelle lisse de Λ_1 comme graphe de l'application

$$(u,v,a)\mapsto(ua_0,uva_1,\dots,uv^Na_N)$$

donc une sous-variété algébrique réelle lisse de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$. Comme Θ_1 est l'image de Γ_1 par la projection $(u,v,a,b)\mapsto(a,b)$, il résulte du théorème de Tarski-Seidenberg que Θ_1 est bien un ensemble semi-algébrique réel du produit $\mathbb{C}^{N+1}\times\mathbb{C}^{N+1}$. De même pour Θ_2.

Comme $\mathcal{E}(N)$ est l'image de $\Pi\setminus(\Theta_1\cup\Theta_2)$ par la projection $(a,b)\mapsto a$, un nouvel appel au théorème de Tarski-Seidenberg montre que $\mathcal{E}(N)$ est bien un ensemble semi-algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$. □

6.2. **Rareté de $\mathcal{E}(N)$.**

Proposition 6.3. *L'ensemble $\mathcal{E}(N)$ est inclus dans un ensemble algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui est de dimension $2N+1$.*

Preuve. Cela est clair pour $N\leq 4$, d'après les descriptions explicites que nous avons données plus haut de $\mathcal{E}(N)$. *Nous supposons donc désormais $N\geq 5$.*

Comme l'union H des hyperplans de coordonnées est un ensemble algébrique réel de $\mathbb{C}^{N+1}$ de dimension $2N$, il suffit de montrer que $\mathcal{E}(N)\setminus H$ est inclus dans un ensemble algébrique réel V de $\mathbb{C}^{N+1}$ de dimension $2N+1$, ce qu'on démontre en trois étapes.

Soit $a\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus H$ un signal non lacunaire et b un partenaire de a que nous pouvons supposer normalisé. Soit M l'entier défini par $N=2M$ si N est pair et par $N=2M-1$ si N est impair, *de sorte qu'on a $M\geq 3$.*

Première étape : identification des b_n.

Pour $i=1,\dots,M$, la relation $(0,2i)$ s'écrit

$$\overline{a_0a_N}a_ia_{N-i} = \overline{b_0b_N}b_ib_{N-i}$$

d'où grâce à la normalisation

$$a_i a_{N-i} = b_i b_{N-i}. \tag{13}$$

En particulier, aucun des b_i n'est nul.

Pour $i = 2, \ldots, M$, la relation $(1, 2i-1)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \overline{a_0 a_{N-1}} a_{i-1} a_{N-i} + \overline{a_1 a_N} a_i a_{N-i+1} &= \overline{b_0 b_{N-1}} b_{i-1} b_{N-i} + \overline{b_1 b_N} b_i b_{N-i+1} \\ &= \overline{a_0 a_{N-1}} b_{i-1} b_{N-i} + \overline{a_1 a_N} b_i b_{N-i+1} \end{aligned} \tag{14}$$

grâce à la normalisation.

Mais alors (13) et (14) impliquent qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

◇ ou bien

$$\begin{cases} a_{i-1} a_{N-i} & = & b_{i-1} b_{N-i} \\ a_i a_{N-i+1} & = & b_i b_{N-i+1} \end{cases} \tag{$\mathcal{B}.i$}$$

qui est le cas le plus simple ;

◇ ou alors

$$\begin{cases} a_{i-1} a_{N-i} & = & b_i b_{N-i+1} \overline{\left(\frac{a_1}{a_{N-1}}\right)\left(\frac{a_N}{a_0}\right)} \\ & & \\ a_i a_{N-i+1} & = & b_{i-1} b_{N-i} \overline{\left(\frac{a_0}{a_N}\right)\left(\frac{a_{N-1}}{a_1}\right)}. \end{cases} \tag{$\mathcal{M}.i$}$$

Deuxième étape : Montrons que si b est un partenaire étrange de a, alors il existe $i \in [2, M]$ tel qu'on ait $(\mathcal{M}.i)$.

Sinon, on aurait $(\mathcal{B}.i)$ pour $i = 2, \ldots, M$. Rappelons que par normalisation, il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$b_i = z a_i \quad \text{et} \quad b_{N-i} = \frac{1}{z} a_{N-i} \tag{15}$$

pour $i = 0, 1$. En utilisant les relations $(\mathcal{B}.i)$, on montre de proche en proche que les égalités (15) s'étendent à $i = 2, \ldots, M$. En particulier, si $N = 2M$ est pair, on obtient pour $i = M$

$$b_M = z a_M = \frac{1}{z} a_M$$

de sorte que $z = \pm 1$ et donc $b = \pm a$, ce qui contredit l'hypothèse. Une preuve similaire est valable si $N = 2M - 1$ est impair.

Cela étant, pour $a \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus H$, si nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a) = \{ b \in \mathcal{S}(N) \ : \ & b \simeq a \\ & \text{et} \quad (\mathcal{M}.i) \text{ se produit au moins une fois pour } i = 2, \ldots, M \}. \end{aligned} \tag{16}$$

nous venons de montrer que si a appartient à $\mathcal{E}(N) \setminus H$, alors $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a)$ est non vide.

Troisième étape : Il reste donc à démontrer le

Lemme 6.4. *L'ensemble des $a \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus H$ tels que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a) \neq \emptyset$ est inclus dans un ensemble algébrique réel V de $\mathbb{C}^{N+1}$ qui est de dimension $2N + 1$.*

Preuve. La preuve nécessite de distinguer trois cas :

Cas 1 : Supposons qu'il existe $b \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a)$ tel que $(\mathcal{B}.2)$ se produise.

Ainsi, on peut supposer qu'il existe $3 \leq j \leq M$ tel que $(\mathcal{B}.2), \ldots, (\mathcal{B}.j-1)$ et $(\mathcal{M}.j)$ se produisent. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} b_i & = & z a_i & 0 \leq i \leq j-1 \\ b_{N-i} & = & \dfrac{1}{z} a_{N-i}, & 0 \leq i \leq j-1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b_j & = & \dfrac{\lambda\lambda_{j-1}}{\lambda_j} z a_j \\ b_{N-j} & = & \dfrac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}} \dfrac{1}{z} a_{N-j}. \end{array} \right.$$

où λ_i pour $i = 0, 1, \ldots, N$ et λ sont définis par

$$\lambda_i a_{N-i} = a_i \text{ et } \lambda_1 \overline{\lambda} = \lambda_0.$$

De la condition (j, j) on déduit :

$$\begin{array}{rcl} |a_0 a_{N-j}|^2 + |a_j a_N|^2 & = & |b_0 b_{N-j}|^2 + |b_j b_N|^2 \\ & = & \left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right|^2 |a_0 a_{N-j}|^2 + \left|\frac{\lambda\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\right|^2 |a_j a_N|^2. \end{array}$$

En réarrangeant la somme, ceci nous conduit à :

$$\left(1 - \left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right|^2\right) |a_0 a_{N-j}|^2 = \frac{\left(1 - \left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right|^2\right)}{\left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right|^2} |a_j a_N|^2. \tag{17}$$

Ainsi, ou bien $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right| = 1$, ce qui implique $|\lambda_1 \lambda_j| = |\lambda_0 \lambda_{j-1}|$, et ceci définit bien une variété algébrique propre $\mathcal{V}_j$ de $\mathbb{C}^{N+1}$. Ou alors, $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda\lambda_{j-1}}\right| \neq 1$, qui, après simplification dans (17) conduit à :

$$\left|\frac{\lambda_1 \lambda_j}{\lambda_0 \lambda_{j-1}}\right|^2 = \left|\frac{a_j a_N}{a_0 a_{N-j}}\right|^2, \quad \text{soit} \quad |\lambda_1| = |\lambda_{j-1}|.$$

L'hypothèse $j \geq 3$ rend cette condition non vide, et permet donc de définir une nouvelle variété algébrique propre de $\mathbb{C}^{N+1}$.

Pour compléter la preuve, il nous faut maintenant regarder les cas où $(\mathcal{M}.2)$ se produit. On peut de plus supposer que $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1}\right| = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right| \neq 1$, puisque l'équation $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right| = 1$ définit une variété algébrique.

Cas 2 : Supposons que pour un certain $b \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a)$, $(\mathcal{M}.2)$ et $(\mathcal{B}.3)$ se produisent. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_2 & = & \dfrac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2} z a_2 \\ b_{N-2} & = & \dfrac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1} \dfrac{1}{z} a_{N-2}. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} b_3 & = & \dfrac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2} z a_3 \\ b_{N-3} & = & \dfrac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1} \dfrac{1}{z} a_{N-3}. \end{array} \right.$$

Ainsi, comme $a_1 a_{N-1} \overline{a_2 a_{N-2}} = b_1 b_{N-1} \overline{b_2 b_{N-2}}$, la condition $(2, 4)$ se réduit à :

$$\begin{aligned} a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}+a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}} &= b_0b_{N-2}\overline{b_1b_{N-3}}+b_2b_N\overline{b_3b_{N-1}} \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1}\overline{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1}\right)}a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}+\frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2}\overline{\left(\frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2}\right)}a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}}. \end{aligned}$$

En réarrangeant la somme et en utilisant $|\lambda_2|\neq|\lambda_0|$, on obtient :

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right|^2=\frac{a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}}}{a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\overline{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)}.$$

Ceci implique $\lambda_1\lambda_2=\lambda_0\lambda_3$, ce qui définit une sous-variété algébrique propre $\mathcal{W}_2$ puisque $N>3$.

Cas 3 : Finalement, supposons que pour un certain $b\in\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(a)$, $(\mathcal{M}.2)$ et $(\mathcal{M}.3)$ se produisent. Alors :

$$\left\{\begin{array}{lll} b_2 &=& \dfrac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2}za_2 \\ b_{N-2} &=& \dfrac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1}\dfrac{1}{z}a_{N-2}. \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lll} b_3 &=& \dfrac{\lambda^2\lambda_1}{\lambda_3}za_3 \\ b_{N-3} &=& \dfrac{\lambda_3}{\lambda^2\lambda_1}\dfrac{1}{z}a_{N-3}. \end{array}\right.$$

À nouveau, la condition $(2,4)$ se réduit à :

$$\begin{aligned} a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}+a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda\lambda_1}&\overline{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda^2\lambda_1}\right)}a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}} \\ &+\frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2}\overline{\left(\frac{\lambda^2\lambda_1}{\lambda_3}\right)}a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}}. \end{aligned}$$

En réarrangeant, on obtient :

$$\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_3}{\lambda_0|\lambda_0|^2}\right)a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_3}{\lambda_0|\lambda_0|^2}\right)}{\frac{\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_3}{\lambda_0|\lambda_0|^2}}a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}}.$$

Ainsi, ou bien $|\lambda_0|^3=|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|$, ce qui définit une variété algébrique propre $\tilde{\mathcal{V}}_2$. Ou alors $|\lambda_0|^3\neq|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|$, et donc :

$$\frac{\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda}_3}{\lambda_0|\lambda_0|^2}=\frac{a_2a_N\overline{a_3a_{N-1}}}{a_0a_{N-2}\overline{a_1a_{N-3}}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\overline{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)}.$$

Après simplification ceci implique $|\lambda_1|=|\lambda_0|$, ce qui définit une nouvelle variété algébrique propre $\tilde{\mathcal{W}}_2$. Ceci établit le lemme. $\square$

La preuve de la proposition 6.3 est donc complète. $\square$

6.3. $\mathcal{E}(N)\setminus H$ **est-il vide ?** Soit $n\geq 1$ et $(\alpha_k)_{k=0,\dots,n}\in\mathcal{S}(n)$ une suite de nombres complexes. Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Définissons les nouvelles suites $(a_k)_{k=0,\dots,2n+1}$ et $(b_k)_{k=0,\dots,2n+1}$ par

$$\begin{cases} a_{2k} &= \alpha_k \\ a_{2k+1} &= \lambda\alpha_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_{2k} &= \overline{\lambda}\alpha_k \\ b_{2k+1} &= \alpha_k \end{cases}$$

c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k z^k = (1+\lambda z)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n+1} b_k z^k = (\overline{\lambda}+z)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^{2k}.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a)(2k,t) =&(1+|\lambda|^2 e^{it})\mathcal{A}(\alpha)(k,2t)\\ \mathcal{A}(b)(2k,t) =&(|\lambda|^2+e^{it})\mathcal{A}(\alpha)(k,2t)\\ \mathcal{A}(a)(2k+1,t) =&\mathcal{A}(b)(2k+1,t) = \lambda\mathcal{A}(\alpha)(k+1,2t)+\overline{\lambda}e^{it}\mathcal{A}(\alpha)(k,2t)\end{aligned}$$

de sorte que a et b sont des partenaires d'ambiguïté.

Une application simple des lemmes 3.6 et 3.7 montre que, si $|\lambda|\neq 1$ et

$$\left(\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right)^{N-1} \neq \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n}\right)^2,$$

alors a et b sont des partenaires étranges.

En particulier, dans le cas $n=1$, soit $N=3$, ces conditions se résument à $a\in M_3\setminus(M_2\cup L\cup H)$ et cet exemple généralise donc un des exemples du cas $N=3$.

Par ailleurs, si on prend une suite $(\alpha_k)_{k=0,\dots,n}$ telle que $\alpha_k\neq 0$ pour tout $k=0,\dots,n$, cet exemple montre que :

Proposition 6.5. *Si $N\geq 3$ est impair, alors $\mathcal{E}(N)\setminus H$ est non vide.*

Le calcul précédent ne s'applique pas lorsque N est pair. De plus le résultat pour $N=4$ (proposition 5.2) ainsi que les calculs que nous avons effectué sans succès pour $N=2M$ nous amènent à poser la conjecture suivante :

Conjecture. *Soit $N\geq 4$ un entier pair, alors $\mathcal{E}(N)\setminus H$ est vide.*

6.4. **Le cas lacunaire.** *Nous allons montrer ici comment construire des suites ayant des partenaires étranges. A nouveau, nous renverrons le lecteur à* [3] *pour les preuves des résultats énoncés dans cette section.*

Notre objectif est de présenter une méthode pour construire des partenaires étranges basée sur les propriétés du produit de Kronecker. Rappelons que si $A=[a_{i,j}]\in\mathcal{M}_n$ et $B\in\mathcal{M}_m$, alors le produit de Kronecker de A par B est la matrice $A\otimes B\in\mathcal{M}_{nm}$ définie par

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B\\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B\end{bmatrix}.$$

Les propriétés essentielles pour nous seront alors :

i: $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

ii: $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.

Le lemme clé sera le suivant :

Lemme 6.6. *Soient $a = (a_0, \dots, a_N)$ et $b = (b_0, \dots, b_M)$ deux suites finies et K_a, K_b leurs matrices d'ambiguïté respectives. Soit alors c la suite finie définie par*

$$c_i = \begin{cases} a_k b_l & \text{si } i = k(2M+1)+l,\ 0 \le k \le N,\ 0 \le l \le M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est à dire la suite donnée par :

$$\sum_j c_j z^j = \left(\sum_k a_k \left(z^{2M+1}\right)^k \right) \left(\sum_l b_l z^l \right).$$

Alors,

$$K_a \otimes K_b = K_c.$$

En particulier, pour $i = k(2M+1)+l$ avec $0 \le k \le N$ et $0 \le l \le N$,

$$\mathcal{A}(c)(i,y) = \mathcal{A}(a)(k,y)\mathcal{A}(b)(l,y).$$

Dans la suite, on notera $c = a \otimes b$.

Proposition 6.7. *Soient $a = (a_0, \dots, a_N)$ et $b = (b_0, \dots, b_M)$ deux suites finies. Si $\alpha \simeq a$ et $\beta \simeq b$, alors $\alpha \otimes \beta \simeq a \otimes b$.*

Inversement, si $b \in \mathcal{S}(1)$, alors pour tout $a \in \mathcal{S}(N)$, $c \simeq a \otimes b$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{S}(N)$ et $\beta \in \mathcal{S}(1)$ tels que $\alpha \simeq a$ et $\beta \simeq b$ et $c = \alpha \otimes \beta$.

Preuve. Si $\alpha \simeq a$ et $\beta \simeq b$, alors $K_\alpha^* K_\alpha = K_a^* K_a$ et $K_\beta^* K_\beta = K_b^* K_b$. Ainsi, en utilisant le lemme précédent et les propriétés du produit de Kronecker, il vient :

$$K^*_{\alpha\otimes\beta} K_{\alpha\otimes\beta} = (K_\alpha \otimes K_\beta)^* (K_\alpha \otimes K_\beta) \tag{18}$$

$$= (K_\alpha^* \otimes K_\beta^*)(K_\alpha \otimes K_\beta) = (K_\alpha^* K_\alpha) \otimes (K_\beta^* K_\beta) \tag{19}$$

$$= (K_a^* K_a) \otimes (K_b^* K_b) = K^*_{a\otimes b} K_{a\otimes b}. \tag{20}$$

Nous ne donnerons pas la preuve de la réciproque ici. □

Concluons maintenant en montrant que cette proposition permet de construire des partenaires étranges :

Soit $a = (1,2)$, $b = (1,2)$ et $c = (2,1)$, alors $a \otimes b \simeq c \otimes b$ mais

$$a \otimes b = (1,2,0,2,4)$$

alors que

$$c \otimes b = (2,4,0,1,2)$$

et $a \otimes b$ et $c \otimes b$ ne sont pas des partenaires triviaux. De plus, en remplaçant $b = (1,2)$ par $b = (1,2,0,\dots,0) \in \mathbb{C}^{M+1}$, cet exemple montre que $\mathcal{E}(2M+2)$ est non vide pour $M \ge 1$. Ceci, joint à la proposition 6.5, montre que $\mathcal{E}(N)$ est non vide dès que $N \ge 3$.

Références

[1] Auslander L. and Tolimieri R. Radar ambiguity functions and group theory. *SIAM J. Math Anal*, 16 :577–6, 1985.

[2] Bierstone E. and Milman P.D. Semianalytic and subanalytic sets. *IHES Publ. Math.*, 67 :5–42, 1988.

[3] Bonami A., Garrigós, G and Jaming Ph. The discrete radar ambiguity problem. *en préparation*, 2000.

[4] Bueckner H.F. Signals having the same ambiguity functions. Technical Report 67-C-456, General Electric, Research and Development Center, Schnectady, N.Y., 1967.

[5] Fernández Gallardo P. *La convergencia de las series de Fourier y su conexión con la Cristalografía.* Thèse, Universidad Autónoma de Madrid, 1997.

[6] Friedman C. N. Some remarks on Pauli data in quantum mechanics. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 30 :298–303, 1989.

[7] Hurt N.E. *Phase Retrieval and Zero Crossing (Mathematical Methods in Image Reconstruction).* Math. and Its Appl. Kluwer Academic Publisher, 1989.

[8] Jaming Ph. Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 327 :249–254, 1998.

[9] Jaming Ph. Phase retrieval techniques for radar ambiguity functions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 5 :313–333, 1999.

[10] Janssen A.J.E.M. Proof of a conjecture on the supports of Wigner distributions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4 :723–726, 1998.

[11] Klibanov M. V., Sacks P.E. and Tikhonravov A.V. The phase retrieval problem. *Inverse problems*, 11 :1–28, 1995.

[12] Walther A. The question of phase retrieval in optics. *Opt. Acta*, 10 :41–49, 1963.

[13] Woodward P.M. *Probability and Information Theory with Applications to RADAR.* Pergamon, 1953.

G. Garrigós & P. Jaming, Université d'Orléans, Faculté des Sciences, MAPMO - Département de Mathématiques, BP 6759, F 45067 Orléans Cedex 2, FRANCE
E-mail address: gustavo@labomath.univ-orleans.fr, jaming@labomath.univ-orleans.fr

J.B. Poly, Mathématiques SP2MI, BP 179, 86960 Futuroscope Cedex, FRANCE
E-mail address: poly@wallis.sp2mi.univ-poitiers.fr