UNIVERSIDAD
DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

Licenciatura en Química

Curso 2004–2005

Notas de clase

Disponibles en la red a través de SUMA
`https://suma.um.es/sumav2/`

Alberto del Valle — `alberto@um.es`
Luis Oncina — `luis@um.es`

Preámbulo

El siguiente texto recoge las notas de clase de la asignatura "Matemáticas"de la Licenciatura en Química de la Universidad de Murcia del curso 2004/2005, impartida por los profesores del Departamento de Matemáticas Luis Oncina y Alberto del Valle.

Los temas tratados vienen condicionados por los descriptores de la asignatura que refleja el Plan de Estudios de la Licenciatura, y la profundidad con que se tratan es la que permite la duración del curso. El orden en el que se presentan nos parece el más razonable teniendo en cuenta el nivel de conocimientos previos (bastante heterogéneo) que suelen tener los alumnos.

De algunos resultados se presentarán demostraciones (casi siempre en una nota al pie) y de otros no. El enfoque de la asignatura es eminentemente práctico y, al evaluar a los alumnos, no se les exigirá que conozcan estas demostraciones ni que sean capaces de elaborar otras parecidas, por lo que en realidad podrían haberse omitido todas, en clase y en estas notas.

Las que hemos incluido nos parezcan a la vez sencillas e instructivas, y a veces hemos sacrificado algo de rigor en los detalles técnicos.

Además de las demostraciones, con frecuencia se hacen en clase comentarios que pueden ser útiles para los alumnos más interesados, pero que no se consideran parte de la materia que se examinará. Tales comentarios se reflejan en estos apuntes como notas a pie de página o como apéndices.

Al final de cada capítulo se propone una serie de problemas con soluciones que serán los mismos que se tratarán en las clases prácticas.

Bibliografía

1. Bradley, Smith. *Cálculo en una y varias variables (2 vols.)*. Prentice Hall, 1998.
   ISBN 84-89600-76-X (77-8)

2. Cockett, Doggett. *Maths for Chemists (2 vols.)*. Royal Society of Chemistry, 2003.
   ISBN 0-85404-677-1 (495-7)

3. Steiner. *The chemistry maths book*. Oxford University Press, 1998.
   ISBN 0-19-855913-5

4. Stewart. *Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
   ISBN 970-625-028-X

Índice general

Tema 1

Números, ecuaciones y funciones

1.1. Números

1.1.1. Números naturales, enteros y racionales

Llamamos *números naturales* a los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; es decir, a los números que usamos para contar. En muchas ocasiones es conveniente añadir el cero a este conjunto, y se suele emplear entonces la notación $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

Para resolver problemas de contar (por ejemplo ¿cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con 1,2,3,4,5 y 6?) son útiles las fórmulas de la *combinatoria*. Recordamos las dos más sencillas, que nos permitirán escribir la fórmula del binomio de Newton:

Definición 1.1.1. Consideramos números $m, n, k \in \mathbb{N}_0$. El *factorial* de k es el número

$$k! = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (0! = 1)$$

Supongamos que elegimos elementos de un conjunto que tiene n elementos. El número de listas ordenadas con m elementos distintos ($m \leq n$) que se pueden formar se denota por $V(n, m)$ y se llama *variaciones sin repetición* o *permutaciones* de n elementos tomados de m en m. Tenemos n formas de elegir el primero de la lista; hecho esto tenemos $n - 1$ formas de elegir el segundo, y de este modo se observa que

$$V(n, m) = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad \text{en particular } V(n, n) = n!$$

El número de subconjuntos con m elementos que se pueden formar ($m \leq n$) se denota por $C(n, m)$ o por $\binom{n}{m}$ o por y se llama *combinaciones* de n elementos tomados de m en m. Cada uno de estos conjuntos da lugar a $m!$ listas ordenadas, luego

$$C(n, m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

A estos números se les llama *números combinatorios.*

Ejemplo 1.1.2. *Describir todos los subconjuntos con tres elementos y todas las listas ordenadas con tres elementos distintos que tiene el conjunto* $\{a, b, c, d, e\}$.

Solución. El número de subconjuntos es $C(5, 3) = 10$, y éstos son:

$$\{a, b, c\},\ \{a, b, d\},\ \{a, b, e\},\ \{a, c, d\},\ \{a, c, e\},\ \{a, d, e\},\ \{b, c, d\},\ \{b, c, e\},\ \{b, d, e\},\ \{c, d, e\}$$

Las listas ordenadas son muchas más, $V(5, 3) = 60$, pues cada uno de los conjuntos anteriores da lugar a $3! = 6$ listas ordenadas, que para el primer conjunto son

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a) \qquad \blacksquare$$

Estos números combinatorios aparecen en la fórmula del *binomio de Newton*[1]:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} \binom{n}{n} b^n$$

Ejemplo 1.1.3. *Calcular* $(x + y)^3$, $(a - b)^4$ *y* $(2z + 3t)^5$.

Solución. Calculando los coeficientes por la fórmula o usando el triángulo de Tartaglia (véase la nota al pie), y teniendo en cuenta que $(uv)^n = u^n v^n$, y en particular $(-b)^n = \pm b^n$ (con signo menos para exponentes impares, se tiene

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(2z+3t)^5 = 32z^5 + 240z^4 t + 720z^3 t^2 + 1080z^2 t^3 + 810zt^4 + 243t^5 \qquad \blacksquare$$

---

[1] El cálculo de estos números combinatorios se simplifica si se tienen en cuenta las siguientes propiedades (las tres primeras se siguen directamente de las definiciones; la última es más laboriosa):

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \qquad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

Estas propiedades permiten usar el *triángulo de Tartaglia (o de Pascal)* para encontrar los coeficientes del binomio de Newton sin hacer más que unas pocas sumas. El triángulo empieza así:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Cada fila empieza y termina en 1, y el resto de números se obtienen sumando los dos de arriba. Entonces, por ejemplo, en la fila 1 4 6 4 1 los números se corresponden en orden con $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{4}{4}$, que son precisamente los que se necesitan en el desarrollo de $(a + b)^4$.

Ecuaciones tan sencillas como $x+3=1$ no tienen soluciones en $\mathbb{N}$. Para resolver este problema (entre otros motivos) surge el conjunto

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

de los *números enteros*. Obviamente $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$, es decir, todo número natural es entero.

Los enteros tampoco bastan, por ejemplo, para resolver la ecuación $3x=2$, y es conveniente ampliarlos al conjunto de los *números racionales* (o quebrados)

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{n}{m}\ :\ n,m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0\right\}\qquad \left(\text{con } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si } ad=bc\right)$$

Cada entero n se puede ver como el racional $\frac{n}{1}$, y por tanto $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$. Las operaciones con racionales se definen del modo conocido:

$$\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}=\frac{mq\pm np}{nq}\qquad \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}\qquad \frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}$$

1.1.2. Números reales

Todas las ecuaciones *lineales* $ax+b=0$ con coeficientes $a,b\in\mathbb{Q}$ tienen solución en $\mathbb{Q}$, pero no ocurre lo mismo con ecuaciones *cuadráticas* como $x^2=2$. Es decir, $\sqrt{2}$ no es un número racional[2].

Para encontrar soluciones a ecuaciones como esa se amplía el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Una descripción formal de $\mathbb{R}$ excede los límites de este curso[3], y nos limitaremos a interpretar intuitivamente los números reales como los puntos de una recta (la “recta real”). Por tanto cualquier “longitud” es un número real, y en particular lo es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, o sea $\sqrt{2}$.

---

[2]Este hecho se demuestra por el método “de reducción al absurdo”, que consiste en negar “la tesis” (lo que se quiere demostrar) y deducir de ello una situación absurda o contradictoria; esto muestra que la negación de la tesis es errónea y por tanto la tesis es cierta.

Así pues, hemos de buscar una contradicción tras suponer que existe $\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$ con $(\frac{n}{m})^2=2$. Podemos asumir que la fracción es *irreducible*, es decir, que n y m no tienen ningún factor común (¿por qué?). De la igualdad inicial obtenemos $n^2=2m^2$; en particular n^2 es par y en consecuencia lo es n (¿por qué?). Por tanto, existe $t\in\mathbb{Z}$ con $n=2t$, y sustituyendo en $n^2=2m^2$ obtenemos $4t^2=2m^2$, luego $m^2=2t^2$ es par y en consecuencia lo es m. Esta es la contradicción que buscábamos, pues hemos afirmado que la fracción n/m es irreducible y sin embargo hemos visto que n y m son ambos divisibles por 2.

[3]El conjunto $\mathbb{R}$ admite por ejemplo una descripción *axiomática*: es un conjunto con unas operaciones y un orden que tienen las mismas propiedades que las operaciones y el orden de $\mathbb{Q}$ a las que se añade una propiedad extra, conocida como el *Axioma del Supremo*: en $\mathbb{R}$, todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene un *supremo* (una cota superior menor que cualquier otra).

Por ejemplo, el conjunto $\{x\in\mathbb{Q}:x^2<7\}$ está acotado superiormente (por ejemplo por 3), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $\{x\in\mathbb{R}:x^2<7\}$ sí tiene supremo: $\sqrt{7}$.

A los números reales que no son racionales, como $\sqrt{2}$, se les llama *irracionales*, y se dividen a su vez en dos tipos: los que son raíces de polinomios con coeficientes enteros (es decir, soluciones de ecuaciones $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ con cada $a_i\in\mathbb{Z}$), que se llaman *algebraicos*, y los que no lo son, que se llaman *trascendentes*. Por ejemplo, $\sqrt{3}$ ó $\sqrt[5]{4+\sqrt{21}}$ son algebraicos, mientras que π y e son trascendentes.

Orden y valor absoluto

En la representación de los números reales como puntos de la recta real, en el "centro" estaría el cero, a la izquierda los números negativos y a la derecha los positivos. Un número a es menor que otro b si a está a la izquierda de b. Esta relación de orden cumple las siguientes propiedades de "compatibilidad con las operaciones":

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$; en particular $-a > -b$.
- Si $a < b$ y ambos son positivos, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

El *valor absoluto* o *módulo* de un número real a se define como $|a| := \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$
Lo podemos interpretar como la distancia entre a y 0, y cumple las siguientes propiedades:

- $|a| \geq 0$.
- $|-a| = |a|$.
- $|a|^2 = a^2$.
- $+\sqrt{a^2} = |a|$.
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$.
- $|ab| = |a||b|$.
- $|a - b|$ es la distancia entre a y b.
- $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.
- $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ ó $a < -b$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular).

Dados dos números reales $a < b$, se definen distintos *intervalos* con extremos a, b ó $\pm\infty$:

- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- Intervalos semi-abiertos: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
- Intervalos infinitos: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Ejemplo 1.1.4. *Hallar todos los números reales x que cumplen:*

1. $|2x-6| = x$.
2. $|x+8| = |3x-4|$.
3. $|x-5| \leq 3$.
4. $|3-2x| < 4$.

Solución. 1. La igualdad $|2x-6| = x$ es cierta cuando $2x-6 = x$ y también cuando $2x-6 = -x$, es decir cuando $x = 6$ y cuando $x = 2$.

2. La igualdad $|x+8| = |3x-4|$ es cierta cuando $x+8 = 3x-4$ y también cuando $x+8 = -(3x-4) = 4-3x$, es decir cuando $x = 6$ y cuando $x = -1$.

3. $|x-5| \leq 3$ equivale a $-3 \leq x-5 \leq 3$, ó a $2 \leq x \leq 8$ (sumando 5), o sea $x \in [2,8]$. También podemos observar que los puntos con $|x-5| \leq 3$ son los que distan no menos de 3 del punto 5, lo que nos lleva al mismo intervalo.

4. $|3-2x| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3-2x < 4 \Leftrightarrow -7 < -2x < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < x < \frac{7}{2}$ (las desigualdades cambian de sentido al multiplicar por $\frac{-1}{2}$), es decir $x \in (\frac{-1}{2}, \frac{7}{2})$. ■

Representación decimal y redondeo

Nuestra forma de escribir los números es *posicional decimal*[4] (o *en base 10*). Por ejemplo

$$34{,}748 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

y los dos cuatros que aparecen tienen un valor distinto (. . . cuatro mil . . . cuarenta y . . .) que depende de la posición que ocupan.

Cuando escribimos un numero *decimal* hacemos lo mismo, pero permitiendo potencias negativas de 10 (para las décimas, centésimas, milésimas. . .). Por ejemplo:

$$48'507 = 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10 + 8 + \frac{5}{10} + \frac{7}{1{,}000}$$

Todo número con una cantidad finita de cifras decimales es un número racional. Por ejemplo $3'456 = 3{,}456/1{,}000$. Pero también hay números racionales en cuya representación decimal aparecen infinitas cifras decimales, por ejemplo: $1/3 = 0'33333\ldots$

[4] Históricamente se han usado sistemas posicionales con otras bases. Por ejemplo, los babilonios usaban la base 60 y los computadores trabajan en base 2 (representaciones *binarias*). En general, dados $a, b \in \mathbb{N}$, la expresión de a en base b es $a \equiv c_n\, c_{n-1}\, \ldots c_2\, c_1\, c_0$ (con $0 \leq c_i < b$) si

$$a = c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \cdots + c_2 b^2 + c_1 b + c_0$$

Algunos ejemplos de representaciones binarias son:

$$0 \equiv 0 \qquad 1 \equiv 1 \qquad 2 \equiv 10 \qquad 3 \equiv 11 \qquad 4 \equiv 100 \qquad 7 \equiv 111 \qquad 357 \equiv 101001101$$

De hecho, un número real es racional si y sólo si su representación decimal es *periódica*, es decir, a partir de un cierto lugar la expresión decimal consiste en la repetición indefinida de un cierto grupo de cifras.

Por ejemplo, para escribir en forma de fracción los números $a = 16'\widehat{12345}$ (periódico puro) y $b = 2'123\widehat{45}$ (periódico mixto) hacemos:

$$10^5 a = 1{,}612{,}345'\widehat{12345} \quad \Rightarrow \quad 10^5 a - a = 1{,}612{,}329 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1{,}612{,}329}{99{,}999}$$

$$\left.\begin{array}{r} 10^5 b = 212{,}345'\widehat{45} \\ 10^3 b = 2{,}123'\widehat{45} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 10^5 b - 10^3 b = 210{,}222 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{210{,}222}{99{,}000} = \frac{11{,}679}{5{,}500}$$

Los números irracionales se caracterizan porque no se pueden representar de esta forma. Por ejemplo

$$\sqrt{2} = 1'4142135623\ldots \qquad \pi = 3'1415926535\ldots \qquad e = 2'71828182\ldots$$

y **no** se puede encontrar ningún grupo de cifras que se repita a partir de un cierto lugar.

Errores de redondeo

Lo que sí podemos hacer con cualquier número real, usando su representación decimal, es *aproximarlo* por números racionales, tomando algunas de sus primeras cifras decimales. Por ejemplo, $3'14$, $3'141$, $3'1415\ldots$ son aproximaciones cada vez más precisas de π. El número de cifras con las que se ha de trabajar en cada caso puede depender de los datos o de las herramientas de cálculo que se tengan, de la precisión de los equipos de medida, etc.

En lo que sigue supondremos, por fijar ideas, que trabajamos con cuatro cifras decimales. La aproximaciones se pueden hacer *por truncamiento*, como las que acabamos de dar para π, pero los errores son menores si se hacen *por redondeo*, es decir, aumentando en una unidad la cuarta cifra decimal si la quinta es 5, 6, 7, 8 ó 9. Por ejemplo, las aproximaciones por redondeo hasta la cuarta cifra de $\sqrt{2}$, π, e y $\sqrt{96} = 9'797958\ldots$ son

$$\sqrt{2} \approx 1'4142 \qquad \pi \approx 3'1416 \qquad e \approx 2'7183 \qquad \sqrt{96} \approx 9'7980$$

El *error* cometido al estimar un número b mediante la aproximación b^* es $|b - b^*|$. Dar este error con precisión sería tanto como dar b con precisión, por lo que en general se busca una *cota del error*, un valor (pequeño) es para el que se pueda afirmar que $|b - b^*| < \epsilon$.

Por ejemplo, al redondear con n cifras decimales nos equivocamos como mucho en “la mitad”de la última cifra, por lo que la cota del error es $5 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Si hemos aproximado dos cantidades a y b por los valores a^* y b^* y queremos estimar $a + b$ es razonable tomar como aproximación $a^* + b^*$, pero hay que observar que entonces la cota de error es la suma de las cotas que tengamos para ϵ_a y ϵ_b, pues se tiene

$$a^* - \epsilon_a \leq a \leq a^* + \epsilon_a \qquad b^* - \epsilon_b \leq b \leq b^* + \epsilon_b$$

y sumando estas desigualdades obtenemos

$$(a^* + b^*) - (\epsilon_a + \epsilon_b) \leq a + b \leq (a^* + b^*) + (\epsilon_a + \epsilon_b)$$

1.1.3. Números complejos

Aunque hemos "creado"los números reales para encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas como $x^2 = 2$, otras similares como $x^2 + 1 = 0$ no tienen solución en $\mathbb{R}$, porque $x^2 + 1$ es positivo para cualquier x real. En la definición que sigue parece que sólo se pretende crear una solución para esa ecuación concreta, pero de hecho se crean soluciones para todas las ecuaciones polinómicas (véase más adelante el Teorema Fundamental del Álgebra, Teorema 1.3.8).

Llamaremos *unidad imaginaria* a una solución de $x^2 + 1 = 0$; es decir, a un número i con

$$i^2 = -1$$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los *números complejos* consiste en los números de la forma

$$z = a + bi \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Se dice que a es la *parte real* de z y que b es su *parte imaginaria*. Cuando $b = 0$ obtenemos los números reales (y así $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), y cuando $a = 0$ los *imaginarios puros*.

Geométricamente, los números complejos se representan en un plano con ejes coordenados. El número $z = a + bi$ se identifica con el punto (a, b), de modo que en el eje horizontal queda la recta real, y en el eje vertical los números imaginarios puros.

La suma de números complejos se define "coordenada a coordenada":

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

de manera que en la representación geométrica coincide con la suma usual de vectores.

El producto se define usando básicamente la propiedad asociativa y la igualdad $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Para calcular cocientes conviene introducir el concepto del *conjugado* $\bar{z}$ de z como

$$z = a + bi \quad \rightsquigarrow \quad \bar{z} = a - bi$$

Por la definición del producto se tiene

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$$

y para calcular el cociente $(a + bi)/(c + di)$ con $c + di \neq 0 (= 0 + 0i)$ basta entonces con multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, pues se obtiene:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ca - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}\, i$$

En particular, el inverso de $a + bi \neq 0$ es

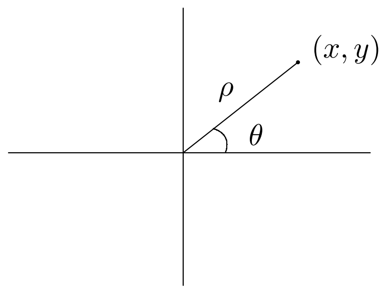
$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$$

Forma polar

Otra forma de representar los números complejos es la siguiente (compárese con las coordenadas polares que veremos en el apartado 1.2.4).

Dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definimos su *módulo* ρ como su distancia al origen, y su *argumento* θ como el ángulo que forma el vector (x, y) con el eje real positivo:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



Advertencia: Los valores de $\arctan(z)$ se suelen dar en el intervalo $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ver la página 24), y así por ejemplo los dan las calculadoras. Si el punto (x, y) está en el segundo o en el tercer cuadrante, hay que sumar π al valor que dé la calculadora para $\arctan(y/x)$, y si (x, y) está en el cuarto cuadrante hay que sumar 2π.

Decimos que ρ_θ es la *forma polar* o *módulo-argumental* de $z = x + yi$. Conocida ésta, podemos recuperar x e y gracias a las fórmulas

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \qquad \text{o sea} \quad \rho_\theta = \rho(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta)$$

Con esta representación ciertas operaciones son más sencillas:

$$\rho_\theta \rho'_{\theta'} = (\rho\rho')_{\theta+\theta'} \qquad (\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta} \qquad (\rho_\theta)^{-1} = (\rho^{-1})_{-\theta} \qquad \sqrt[n]{\rho_\theta} = (\sqrt[n]{\rho})_{\theta/n}$$

En particular, de la última fórmula se deduce que cualquier número complejo tiene raíces de cualquier orden[5]. Esto, y más generalmente el Teorema Fundamental de la Aritmética, es "la gran ventaja" de $\mathbb{C}$ con respecto a $\mathbb{R}$, mientras que "su gran desventaja" es el hecho de no admitir un orden que sea compatible con las operaciones (es decir, que tenga propiedades análogas a las que vimos en la página 4).

[5] Hay una fórmula para calcular raíces cuadradas que sólo requiere el cálculo del módulo ρ, y no el del argumento θ. Como $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$, deducimos que $\rho \pm x$ son números reales positivos; entonces

$$\left[\sqrt{\frac{\rho + x}{2}} \pm \sqrt{\frac{\rho - x}{2}}\, i\right]^2 = \frac{\rho + x}{2} - \frac{\rho - x}{2} \pm 2\sqrt{\frac{\rho + x}{2}\frac{\rho - x}{2}}\, i = x \pm \sqrt{y^2}\, i = x \pm |y| i$$

por lo que $\sqrt{\frac{\rho+x}{2}} \pm \sqrt{\frac{\rho-x}{2}}\, i$ (con signo menos cuando y sea negativo) es una raíz cuadrada de $x + yi$.

1.2. Gráficas de ecuaciones

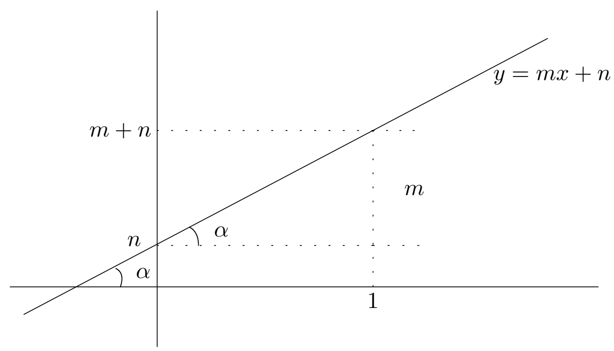
Dada una ecuación en dos variables $P(x, y) = 0$, el conjunto de pares (x, y) que satisfacen la ecuación se llama *gráfica de la ecuación*, y su representación en el plano es una *curva* (un objeto unidimensional). Describimos a continuación algunos tipos de curvas sencillas.

1.2.1. Rectas

La ecuación *general o implícita* de una recta es $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$.

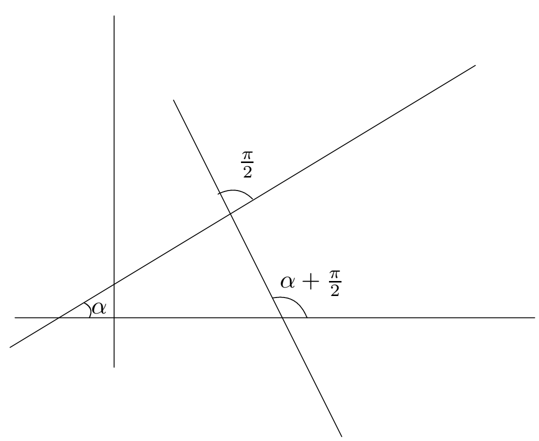
Cuando $a = 0$ se obtiene una recta horizontal $y = -c/b$, y cuando $b = 0$ se obtiene una recta vertical $x = -c/a$.

Cuando $b \neq 0$ podemos despejar y para obtener una ecuación del tipo $y = mx + n$, que se denomina *ecuación explícita de la recta*; en este caso m es la *pendiente* de la recta, es decir, la tangente del ángulo que forma con el eje horizontal positivo.



Dos rectas son *paralelas* precisamente si tienen la misma pendiente. Así, si una recta tiene ecuación general $ax + by + c = 0$, sus paralelas son las del tipo $ax + by + c' = 0$. Y si una recta tiene ecuación explícita $y = mx + n$ sus paralelas son las del tipo $y = mx + n'$.

Por otra parte, de la fórmula $\tan(\alpha)\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -1$ se deduce que, si una recta tiene pendiente m, sus perpendiculares tienen pendiente $-1/m$.



Así, si una recta tiene ecuación general $ax + by + c = 0$, sus perpendiculares son las del tipo $bx - ay + c' = 0$. Y si una recta tiene ecuación explícita $y = mx + n$ sus perpendiculares son las del tipo $y = \frac{-1}{m}x + n'$.

Ejemplo 1.2.1. *Determinar la ecuación de las rectas siguientes:*

1. *La de pendiente* $1/2$ *que pasa por el punto* $(-1, 1)$.

2. *La paralela a* $2x + 3y - 2 = 0$ *que pasa por el punto* $(1, 1)$.

3. *La perpendicular a* $y = 2x + 1$ *que pasa por el punto* $(0, 2)$.

4. *La que pasa por los puntos* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2).

Solución. 1. Todas las rectas de pendiente $\frac{1}{2}$ tienen por ecuación: $y = \frac{1}{2}x + b$, donde b depende del punto por donde pase cada recta. Sustituyendo las coordenadas del punto $(-1, 1)$ en la ecuación obtenemos $b = \frac{3}{2}$, por lo que la ecuación pedida es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

2. Las rectas paralelas a $2x+3y-2 = 0$ tienen por ecuación $2x+3y+c = 0$. Sustituyendo $(1, 1)$ obtenemos $c = -5$, luego la ecuación pedida es $2x + 3y - 5 = 0$.

3. La ecuación será de la forma $y = -\frac{1}{2}x + b$, y sustituyendo el punto se ve que es $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

4. La recta pedida tiene una ecuación genérica del tipo $y = mx + b$, que podemos poner como $b = y - mx$. Sustituyendo ambos puntos obtenemos $b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$, y de aquí podemos despejar $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (no se divide por cero, pues si fuera $x_1 = x_2$ la recta pedida sería la recta vertical $x = x_1$).

Sustituyendo ahora $b = y_1 - mx_1$ en la ecuación genérica se obtiene $y = mx + y_1 - mx_1$, o sea $y - y_1 = m(x - x_1)$. Por tanto, la ecuación pedida es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{donde} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Finalmente, podemos sustituir el valor de m y dividir por $x_2 - x_1$ para obtener la ecuación más simétrica

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \blacksquare$$

1.2.2. Ecuaciones de grado dos

Una ecuación *cuadrática* en dos variables x e y es una ecuación de la forma

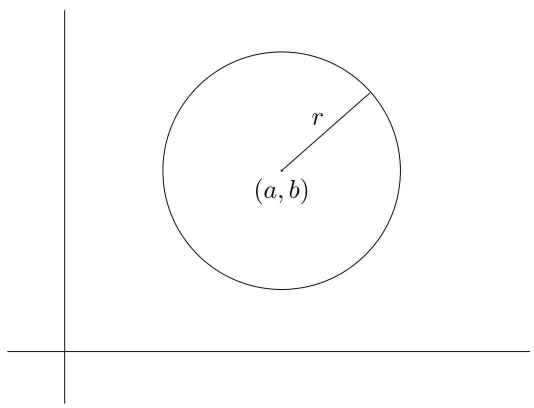
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E, F son constantes y $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Sus gráficas se llaman *cónicas* porque coinciden con las distintas curvas que se obtienen al intersecar un cono con un plano.

Circunferencias

La *circunferencia de centro* (a, b) y *radio* r está formada por los puntos (x, y) del plano cuya distancia a (a, b) es r, o sea, los que verifican $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Al desarrollar la ecuación general se obtiene una ecuación cuadrática con $A = B = 1$ y $C = 0$. Recíprocamente, cualquier ecuación cuadrática de este tipo es la de una circunferencia, cuyo centro y radio se pueden determinar como muestran los siguientes ejemplos. En ellos se usa la técnica de *completar cuadrados*: si en un lado de una ecuación aparece $x^2 + ax$ (más otras cosas) y sumamos $(a/2)^2 = a^2/4$ en ambos miembros, aparecerá entonces la expresión $x^2 + ax + (a/2)^2$, que coincide con $(x + \frac{a}{2})^2$.

Ejemplo 1.2.2. *Determinar los centros y los radios de las siguientes circunferencias:*

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.
2. $x^2 - x + y^2 + 4y + 2 = 0$.

Solución. 1. La ecuación equivale a $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 2 = 1 + 1$, o sea a $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, y por tanto el centro es $(1, -1)$ y el radio es 2.

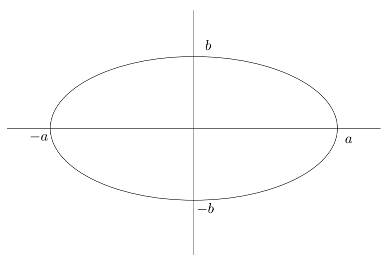
2) La ecuación equivale a $x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 + 2 = \frac{1}{4} + 4$, o sea a $(x - \frac{1}{2})^2 + (y+2)^2 = 4 + \frac{1}{4} - 2 = \frac{9}{4}$, y por tanto el centro es $(1/2, -2)$ y el radio es $3/2$. ■

Otras cónicas

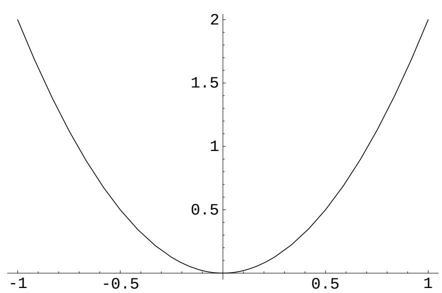
Hay tres tipos más de cónicas: las elipses (cerradas), las parábolas (abiertas con una sola rama) y las hipérbolas (abiertas con dos ramas). Todas admiten casos particulares en los que la ecuación cuadrática es especialmente sencilla por tener muchos coeficientes nulos:

- La circunferencia centrada en el origen de radio r es $x^2 + y^2 = r^2$.
- La elipse centrada en el origen de ejes a y b es $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.
- Las parábolas con vértice en el origen son del tipo $y = ax^2$ ó $x = by^2$.
- Las hipérbolas "normalizadas"son del tipo $(x/a)^2 - (y/b)^2 = \pm 1$.

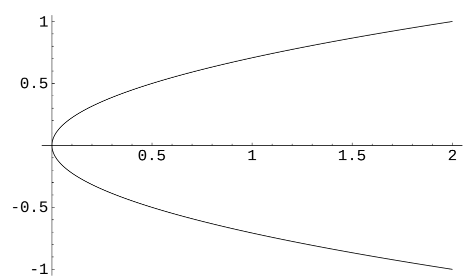
Por ejemplo:



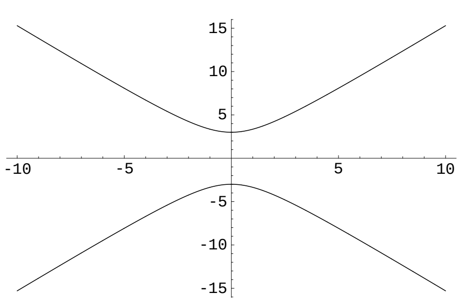
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



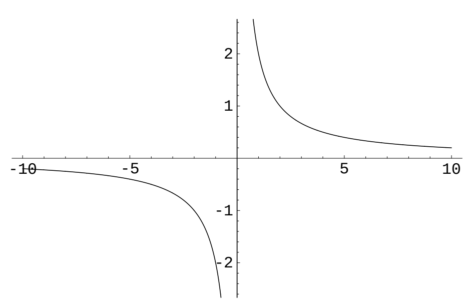
$$y = 2x^2$$



$$x^2 = 2y$$



$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 = -1$$

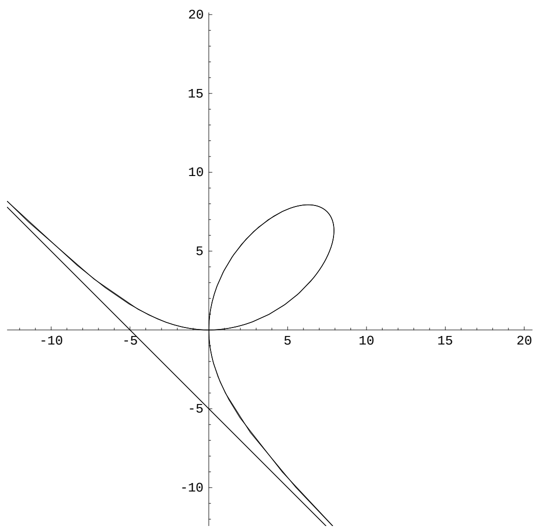


$$xy = 2$$

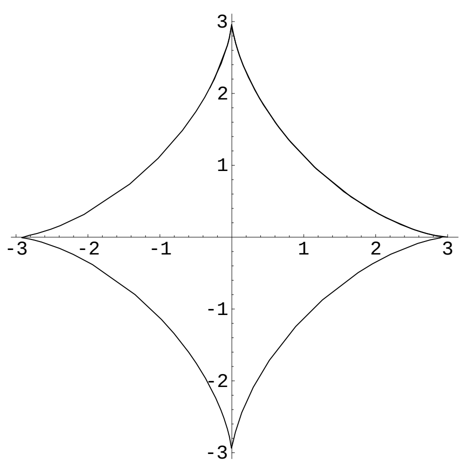
1.2.3. Otras ecuaciones

Para ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos, y más aún para las no polinómicas, las gráficas pueden ser muy complicadas. Vamos a ver como ejemplo dos de ellas:

Folium de Descartes: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (en el gráfico $a = 5$).



Astroide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, (en el gráfico $a = 3$).

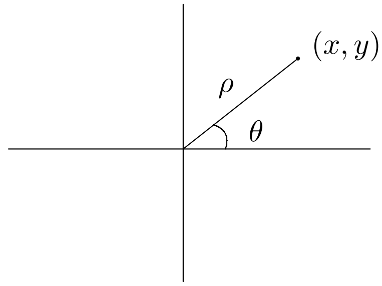


1.2.4. Coordenadas polares

El siguiente procedimiento es análogo al que usamos al definir la forma polar de un número complejo. Dado un punto $P \neq (0, 0)$ del plano cuyas coordenadas cartesianas sean (x, y), definimos sus *coordenadas polares* (ρ, θ) por las fórmulas

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan(y/x)$$

es decir, ρ es la distancia de P al origen de coordenadas y θ es el ángulo formado por el vector de posición de P con el eje positivo de las x (medido en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj; para el cálculo de $\arctan(y/x)$ vale la advertencia de la página 8):

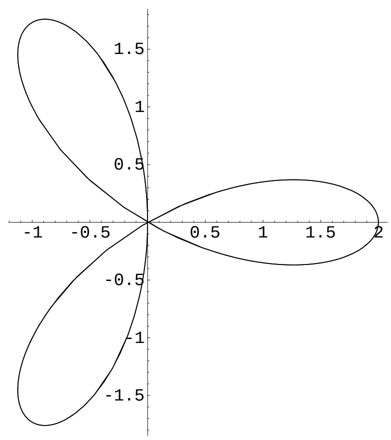


Si conocemos las coordenadas polares (ρ, θ) de un punto, sus coordenadas cartesianas (x, y) vienen dadas por

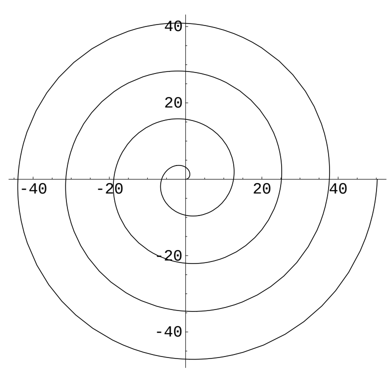
$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Una ecuación en coordenadas polares $f(\rho, \theta) = 0$ se puede representar en el plano y da lugar a una curva. No vamos a estudiar la representación gráfica de curvas en coordenadas polares, y nos limitamos a dar aquí dos ejemplos:

Rosa de tres pétalos: $\rho = 2\cos(3\theta)$.



Espiral de Arquímedes: $\rho = 2\theta$.



1.3. Funciones

1.3.1. Funciones y gráficas; operaciones con funciones

Definición 1.3.1. Una *función* f de un conjunto X en otro Y (notación $f : X \to Y$) es una "regla" que asigna a cada elemento x de X un único elemento $f(x)$ de Y.

Cuando X e Y son subconjuntos de $\mathbb{R}$ decimos que f es una *función real de variable real*. En el resto de este capítulo y en los tres siguientes trataremos sólo con este tipo de funciones, por lo que la palabra *función* significará *función real de variable real*.

Cuando se define una función mediante una fórmula, su *dominio* $\mathrm{Dom}(f)$ es el conjunto de valores reales x para los que tiene sentido el cálculo de $f(x)$, y su *rango* $\mathrm{Rg}(f)$ es el conjunto de valores que toma la función, de manera que podemos interpretar f como una función $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Rg}(f)$. También podemos verla como una función $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$; es decir, podemos no preocuparnos mucho del rango, pero siempre que se defina una función hay que tener claro cuál es su dominio.

Ejemplo 1.3.2.

1. $f(x) = 2x^3$; su dominio y su rango son todo $\mathbb{R}$; es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$ (raíz cuadrada positiva[6]) es una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ tiene dominio $[-3, 3]$ y rango $[0, 3]$.
4. El dominio de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ consiste en los números reales donde no se anule el denominador: $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
5. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} x & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ El dominio es todo $\mathbb{R}$ (y el rango también).
6. El espacio x recorrido por un cuerpo que cae en el vacío depende del tiempo t según la función $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la constante de gravitación terrestre. En este caso la función se llama x y la variable se llama t. El dominio de x es toda la recta real, pero si atendemos al fenómeno físico que representa, su dominio debería consistir en los números reales positivos.
7. La ecuación de estado de un gas ideal ($VP = nRT$) relaciona los valores de su volumen V, su temperatura T y su presión P (R es una constante y la cantidad de sustancia n suele ser fija en un experimento). Si un experimento se realiza con un volumen constante, podemos interpretar que la presión depende de la temperatura según la función $P(T) = \frac{nR}{V}T$, o que la temperatura depende de la presión: $T(P) = \frac{V}{nR}P$.

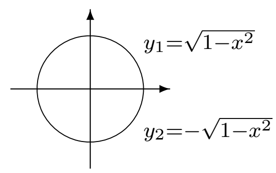
   Por supuesto, se pueden hacer variaciones si lo que se supone constante es la temperatura o la presión. Incluso, si ninguna se supone constante, se puede interpretar que una de las variables es función de las otras dos, lo que nos llevaría al concepto de "función de varias variables"que estudiaremos más adelante.

[6] $\sqrt{x}$ denotará siempre la raíz cuadrada positiva. En general, de una igualdad como $a^2 = b$ deduciremos que $a = \pm\sqrt{b}$, y sólo podremos precisar el signo atendiendo a otras cosas que podamos saber sobre a (por ejemplo, si a es una longitud elegiremos el signo más).

Gráficas de funciones

Dada una función $f(x)$, su *gráfica* es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ (o $y - f(x) = 0$), es decir, el conjunto de puntos (a, b) del plano que cumplen $b = f(a)$.

Como las funciones son *univaluadas*, es decir, para cada x del dominio existe un único y tal que $y = f(x)$, toda recta vertical corta a la gráfica en un único punto. Así, por ejemplo, la circunferencia unidad, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, no puede ser la gráfica de una función. Podemos verla sin embargo como la yuxtaposición de las gráficas de las dos funciones $y_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ e $y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.



Si conocemos la gráfica de una función $f(x)$, las de otras funciones como $f(-x), f(x+a)$ ó $f(x) + a$ se pueden obtener por simetrías o por traslaciones. Explícitamente:

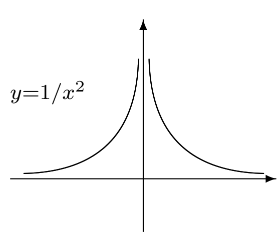
Proposición 1.3.3. *Si conocemos la gráfica* Γ *de* $y = f(x)$ *y* $a > 0$ *es una constante, entonces la gráfica de...*

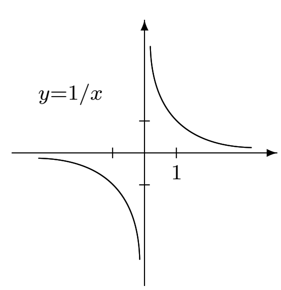
- $y = -f(x)$ *es la simétrica de* Γ *con respecto al eje horizontal.*
- $y = f(-x)$ *es la simétrica de* Γ *con respecto al eje vertical.*
- $y = -f(-x)$ *es la simétrica de* Γ *con respecto al origen (giro de* 180^o*).*
- $y = f(x+a)$ *se obtiene trasladando* Γ *hacia la izquierda una longitud* a*.*
- $y = f(x-a)$ *se obtiene trasladando* Γ *hacia la derecha una longitud* a*.*
- $y = f(x) + a$ *se obtiene trasladando* Γ *hacia arriba una longitud* a*.*
- $y = f(x) - a$ *se obtiene trasladando* Γ *hacia abajo una longitud* a*.*

Definición 1.3.4. La función f es *par* si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in Dom(f)$. En este caso la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje de vertical.

La función f es *impar* si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in Dom(f)$. En este caso la gráfica de la función es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 1.3.5. 1. La función $f(x) = 1/x^2$ es par, mientras que $f(x) = 1/x$ es impar. Sus gráficas son:





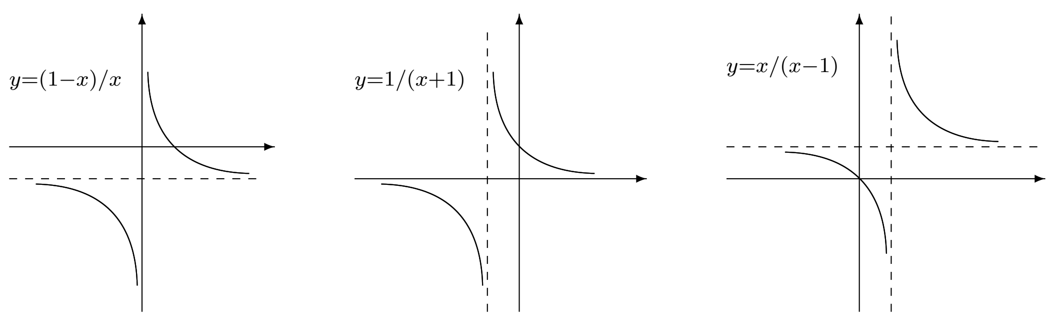
2. Consideremos las tres funciones siguientes:

$$g_1(x) = \frac{1-x}{x} \qquad g_2(x) = \frac{1}{x+1} \qquad g_3(x) = \frac{x}{x-1}$$

Podríamos obtener sus gráficas estudiando cortes con los ejes, crecimiento, asíntotas, etc. Pero acabamos mucho antes si las relacionamos adecuadamente con la gráfica Γ de $y = f(x) = 1/x$ que acabamos de representar. En efecto, es fácil ver que

$$g_1(x) = f(x) - 1 \qquad g_2(x) = f(x+1) \qquad g_3(x) = f(x-1) + 1$$

por lo que la gráfica de $y = g_1(x)$ se obtiene trasladando Γ una unidad hacia abajo, la de $y = g_2(x)$ trasladando Γ una unidad hacia la izquierda, y la de $y = g_3(x)$ trasladando Γ una unidad hacia arriba y una hacia la derecha:



Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales f y g definimos las siguientes funciones:

Suma $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Producto $(fg)(x) := f(x)g(x)$ para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ con $g(x) \neq 0$.

Composición $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ para cualquier $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $g(x) \in \mathrm{Dom}(g)$.

Por ejemplo, si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$ entonces

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1 \qquad (g \circ f)(x) = g(x+1) = x^2 + 2x + 1$$

Como vemos la composición de funciones **no** es conmutativa.

Inversa Diremos que g es la función inversa de la función f, y lo denotaremos por $g = f^{-1}$, si su composición en cualquier orden es la función identidad (la que lleva cada punto a sí mismo). Es decir, si:

$$g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{y} \quad f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \in \mathrm{Dom}(g)$$

En este caso el dominio de g coincide con el rango de f, y sus gráficas son simétricas con respecto a la diagonal $y = x$.

En general, una función no tiene por qué tener inversa[7]; por ejemplo ninguna función constante $f(x) = k$ tiene inversa, pues ésta no sería univaluada: tendría que llevar k a todos los x del dominio de f.

Si f tiene inversa, entonces $y = f(x)$ equivale a $f^{-1}(y) = x$; por tanto, si en $y = f(x)$ podemos *despejar* x, tendremos la expresión de $f^{-1}(y)$, e intercambiando y por x tendremos la de $f^{-1}(x)$.

Ejemplo 1.3.6. *Calcular la inversa de* $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

Solución. $y = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow xy = 1 - x \Leftrightarrow x(y+1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y+1}$. Por tanto $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Como acabamos de representar las gráficas de ambas funciones, se puede comprobar que son simétricas con respecto a la diagonal $y = x$. También se puede comprobar, como ejercicio, que las composiciones en ambos sentidos dan la identidad. ■

1.3.2. Funciones polinómicas

Una *función polinómica* de grado n es una función del tipo

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

donde los a_i son constantes reales con $a_n \neq 0$.

Las funciones polinómicas de grado 0 son constantes, y su gráfica es una recta horizontal. Las de grado 1 son del tipo $y(x) = mx + n$, y su gráfica es la de una recta de pendiente $m \neq 0$. Veamos con más detalle qué pasa en otros grados:

Grado 2. Son parábolas $y = ax^2 + bx + c$, que podemos representar si conocemos sus puntos de corte con los ejes, el vértice y si las ramas están abiertas hacia arriba o hacia abajo.

- La abscisa del vértice es $x = -b/2a$.
- Si $a > 0$ las ramas van hacia arriba, y si $a < 0$ van hacia abajo.
- El corte con el eje vertical se produce cuando $x = 0$ y por tanto $y = c$. Así la gráfica pasa por el punto $(0, c)$.

  Los cortes con el eje horizontal ($y = 0$) se producen cuando[8]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[7]Existe f^{-1} si y sólo si f es *inyectiva* (es decir, $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$). Para funciones continuas, esta condición equivale a que f sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

[8]El lector puede verificar la igualdad $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ desarrollando su segundo miembro, y puede deducir de ella la fórmula para los puntos de corte con el eje horizontal. Además, la igualdad nos dice que la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es la de $y = ax^2$ desplazada $\frac{b}{2a}$ unidades hacia la izquierda y $\frac{b^2-4ac}{4a}$ unidades hacia abajo, y de esto se deducen las afirmaciones sobre la abscisa del vértice y las ramas de la parábola.

Llamando $\Delta = b^2 - 4ac$ ("discriminante") tenemos varias posibilidades:

- $\Delta = 0$. Hay sólo un punto de corte que coincide con el vértice.
- $\Delta > 0$. Hay dos puntos de corte: los dos que distan $\sqrt{\Delta}$ de la abscisa del vértice.
- $\Delta < 0$. No hay puntos de corte con el eje horizontal.

Grado $\geq$3. Dejaremos para el Tema 2 un estudio más detallado de las gráficas de polinomios de grado mayor o igual que 3 (crecimiento, extremos, etc.), y nos limitaremos ahora a hacer algunos comentarios sobre sus raíces (cortes con el eje horizontal).

Diremos que a es una *raíz* del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

En general no es posible conocer las raíces de un polinomio con exactitud, aunque veremos métodos generales para aproximarlas con mucha precisión. Con mucha frecuencia los coeficientes de los polinomios son números enteros, y en este caso sí tenemos por dónde empezar a buscar sus raíces racionales (aunque lo que sigue no afirma nada sobre las raíces irracionales):

Proposición 1.3.7. *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros (y $a_n \neq 0$). Los únicos números racionales que pueden ser raíces de $P(x)$ son los de la forma r/s, donde r es un divisor de a_0 y s es un divisor de a_n.*

En particular, para $a_n = 1$, se deduce que los únicos candidatos a raíces racionales de $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ son los divisores de a_0.

Por ejemplo, dado el polinomio $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$, sus candidatos a raíces racionales son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 1/3, \quad \pm 2/3 \quad \text{y} \quad \pm\, 4/3$$

y sustituyendo se ve que sólo $2/3$ es una raíz. También $\pm\sqrt{2}$ son raíces (irracionales) del polinomio, pero este método no las detecta.

Si a es raíz de $P(x)$ entonces este polinomio es *divisible* por $x - a$, es decir, existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - a)Q(x).$$

Este polinomio $Q(x)$ lo podemos hallar haciendo la división de polinomios por el *método de Ruffini*. Si, a su vez, conocemos una raíz b de $Q(x)$, entonces existe un polinomio $R(x)$ tal que $Q(x) = (x-b)R(x)$ y así $P(x) = (x-a)(x-b)R(x)$. Siguiendo este proceso hasta donde sea posible obtenemos una factorización de $P(x)$ como producto de polinomios más simples, aunque en general no podemos llegar a un producto de polinomios de grado 1. Por ejemplo, si el polinomio es de grado 2 con discriminante negativo (es decir, $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$) entonces no tiene raíces y no podemos factorizarlo.

Pero, al menos en teoría, esto es "todo lo malo"que nos puede ocurrir. Si llamamos *polinomios irreducibles* a los de los tipos $x - a$ y $x^2 + bx + c$ con $b^2 < 4c$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.3.8. Teorema fundamental del álgebra *Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales es el producto de una constante por polinomios irreducibles. Es decir, existen coeficientes tales que*

$$P(x) = a(x-a_1)\cdots(x-a_r)(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_sx+c_s) \qquad (b_i^2 < 4c_i)$$

Usando potencias para agrupar los factores repetidos también podemos poner

$$P(x) = a(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_r)^{n_r}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{m_s} \qquad (b_i^2 < 4c_i)$$

Obsérvese que un polinomio irreducible de grado 2 tiene dos raíces complejas conjugadas, luego se factoriza como dos polinomios de grado 1 con coeficientes complejos. Por tanto, si admitimos coeficientes complejos, un polinomio arbitrario es producto de una constante por polinomios del tipo $x - a$.

Ejemplo 1.3.9. *Factorizar los siguientes polinomios:*

1. $P(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.
2. $P(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$.
3. $P(x) = x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 10x^2 + x + 5$.
4. $P(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 7x + 3$.

Solución. 1. Los candidatos a raíces son los divisores de 12. El 1 no es raíz, pero el 2 sí lo es y dividiendo queda $P(x) = (x-2)(x^3+2x^2-5x-6)$. De nuevo el 2 es raíz del polinomio cúbico y dividiendo queda $P(x) = (x-2)^2(x^2+4x+3)$. Usando la fórmula para los polinomios de grado 2 obtenemos finalmente $P(x) = (x-2)^2(x+1)(x+3)$.

2. El 1 no es raíz, pero el -1 lo es del polinomio dado y de los dos primeros cocientes, lo que nos lleva a $P(x) = (x+1)^3(x^2-x+1)$, que es la factorización en polinomios simples. Si se admiten coeficientes complejos tenemos $P(x) = (x+1)^3(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2})$.

3. El -5 es raíz y queda $P(x) = (x+5)(x^4+2x^2+1)$. El segundo factor no tiene raíces enteras (los únicos candidatos ± 1 fallan); en general, en estos casos no podemos hacer nada, pero en este caso concreto es fácil darse cuenta de que ese factor es el desarrollo de un cuadrado, y así $P(x) = (x+5)(x^2+1)^2$, que es la factorización en polinomios simples. Si se admiten coeficientes complejos tenemos $P(x) = (x+5)(x-i)^2(x+i)^2$.

4. Es un caso parecido al anterior, aunque es más difícil detectar el desarrollo de un cuadrado. En primera instancia se tiene $P(x) = (x+3)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)$, y si se observa que el segundo factor es el desarrollo de un cuadrado se llega a $P(x) = (x+3)(x^2+x+1)^2$. Si se admiten coeficientes complejos $P(x) = (x+3)(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^2(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^2$. ■

1.3.3. Funciones racionales

Una *función racional* es una del tipo $f(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Sus gráficas pueden ser muy variadas, y se estudiarán mejor tras conocer los resultados sobre crecimiento y extremos que proporcionarán las derivadas.

Hay dos tipos especialmente sencillos de funciones racionales: los polinomios (que se obtienen cuando $Q(x) = 1$), y las *fracciones simples*, que son de dos tipos:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \qquad\qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} \quad (b^2 < 4c)$$

Es decir, en el denominador hay una potencia de un *polinomio irreducible*, y en el numerador hay un polinomio de grado 0 (constante) o de grado 1, según si el polinomio irreducible tiene grado 1 ó 2.

La importancia de las fracciones simple estriba en dos hechos, que permiten integrar cualquier función racional: las fracciones simples son fáciles de integrar, y cualquier función racional puede ponerse como la suma de un polinomio y ciertas fracciones simples (siempre que sepamos factorizar el denominador). La primera afirmación la veremos en el Tema 3, y la segunda la resolveremos ahora en dos pasos.

1º. En la suma que buscamos aparece un polinomio precisamente si $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$, donde gr denota el grado de un polinomio. En este caso se divide con resto $P(x)$ entre $Q(x)$, y se obtiene

$$P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$$

donde $C(x)$ es el cociente, $R(x)$ es el resto y $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$. Entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C(x)Q(x)+R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

2º. Las fracciones simples se obtienen a partir de un cociente $P(x)/Q(x)$ con $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$, que si no es la situación que nos dan es la que encontramos tras haber dado el paso anterior.

Si conocemos la factorización de $Q(x)$, hay que poner $P(x)/Q(x)$ como una suma donde:

- Por cada factor $(x-a)^n$ de $Q(x)$, hay que proponer n sumandos del tipo

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- Por cada factor $(x^2+bx+c)^n$ (con $b^2 < 4c$) de $Q(x)$, hay que proponer n sumandos

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

- Finalmente, hay que igualar $P(x)/Q(x)$ a la suma de todos esos sumandos para determinar el valor de las constantes A_i, B_i, C_i.

Ejemplo 1.3.10. *Descomponer en fracciones simples las siguientes funciones racionales:*

$$1)\quad \frac{3x+1}{(x+3)^2} \qquad 2)\quad \frac{x^4+x^3-11x^2+2x-10}{x^2+x-12} \qquad 3)\quad \frac{3x^2+x-1}{x^3+4x^2+4x+3}$$

Solución. 1) Hay que proponer una suma del tipo:

$$\frac{3x+1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} = \frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}$$

Igualando numeradores tenemos la igualdad de polinomios $3x+1 = A(x+3)+B$, que ha de ser cierta para todo x. En particular lo es para $x=-3$, de donde $B=-8$, y para $x=0$, de donde $1 = 3A-8$ y así $A=3$. Otra forma de determinar A y B consiste en igualar coeficientes en $3x+1 = Ax+(3A+B)$, lo que nos da $3=A$ y $1 = 3A+B = 9+B$, de donde $B=-8$. En cualquier caso obtenemos finalmente

$$\frac{3x+1}{(x+3)^2} = \frac{3}{x+3} - \frac{8}{(x+3)^2}$$

2) Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, comenzamos haciendo la división con resto:

$$x^4+x^3-11x^2+2x-10 = (x^2+x-12)(x^2+1)+(x+2)$$

luego

$$\frac{x^4+x^3-11x^2+2x-10}{x^2+x-12} = x^2+1+\frac{x+2}{x^2+x-12}$$

El denominador se factoriza como $x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$, luego hay que buscar constantes A y B que verifiquen

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

Igualando denominadores obtenemos $5 = 7A$ (para $x=3$) y $-2=-7B$ (para $x=-4$), por lo que finalmente

$$\frac{x^4+x^3-11x^2+2x-10}{(x-3)(x+4)} = x^2+1+\frac{5/7}{x-3}+\frac{2/7}{x+4}$$

3) El denominador se factoriza como $x^3+4x^2+4x+3 = (x+3)(x^2+x+1)$, por lo que hay que buscar constantes A, B, C tales que

$$\frac{3x^2+x-1}{x^3+4x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+x+1)^2}$$

Igualando denominadores obtenemos $23 = 7A$ (para $x=-3$), $-1 = A+3C$ (para $x=0$), y $3 = 3A+4B+4C$ (para $x=1$), de donde $A = 23/7$, $C=-10/7$ y $B=-2/7$, y así

$$\frac{3x^2+x-1}{x^3+4x^2+4x+3} = \frac{1}{7}\left[\frac{23}{x+3} - \frac{2x+10}{x^2+x+1}\right]$$

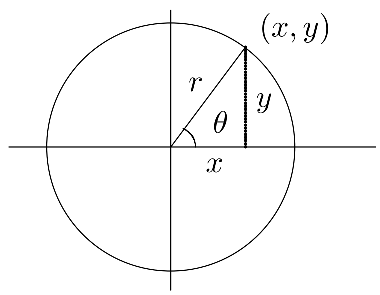
1.3.4. Funciones trigonométricas

En general, todos los ángulos que usemos estarán medidos en radianes. Recordemos que el ángulo de 1 *radián* es el que abarca un arco de longitud igual al radio. Como el ángulo que abarca la circunferencia es de 2π radianes, ó 360^o, podemos pasar de grados a radianes y viceversa mediante una regla de tres. Así por ejemplo:

$$30^o \equiv \frac{\pi}{6} \qquad 45^o \equiv \frac{\pi}{4} \qquad 60^o \equiv \frac{\pi}{3} \qquad 90^o \equiv \frac{\pi}{2} \qquad 180^o \equiv \pi \qquad 270^o \equiv \frac{3\pi}{2}$$

Cuando trabajemos con coordenadas, entenderemos que los ángulos tienen su vértice en el origen y los mediremos en sentido antihorario desde la parte positiva del eje horizontal. Un ángulo no cambia si le sumamos un múltiplo de 2π, y por lo general consideraremos ángulos en el intervalo $[0, 2\pi)$, aunque a veces será conveniente considerar ángulos negativos "pequeños"entendiendo que $-\alpha := 2\pi - \alpha$.

Recordaremos cómo se definen geométricamente las distintas razones trigonométricas. Consideramos una circunferencia de radio arbitrario r, un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ y el punto (x, y) de la figura:



Se definen el seno, el coseno y la tangente de θ de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$$

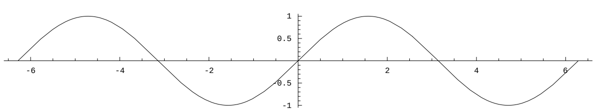
Cuando $\cos(\theta) = 0$ la tangente de θ no está definida. Usando semejanza de triángulos se observa que esta definición es independiente del radio r de la circunferencia elegida, por lo que, cuando nos interese, podemos suponer que el radio es 1. Algunas propiedades que se deducen fácilmente de la definición son:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \\
&-1 \leq \operatorname{sen}(\theta) \leq 1 && 1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \\
&\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta) && \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\
&\operatorname{sen}(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\theta) && \cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(\theta) \\
&\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}(\theta) && \cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)
\end{aligned}$$

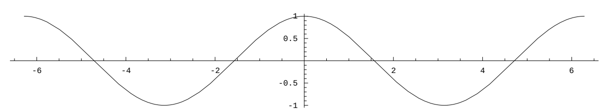
Los valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos notables se recogen en la siguiente tabla:

ángulo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0	

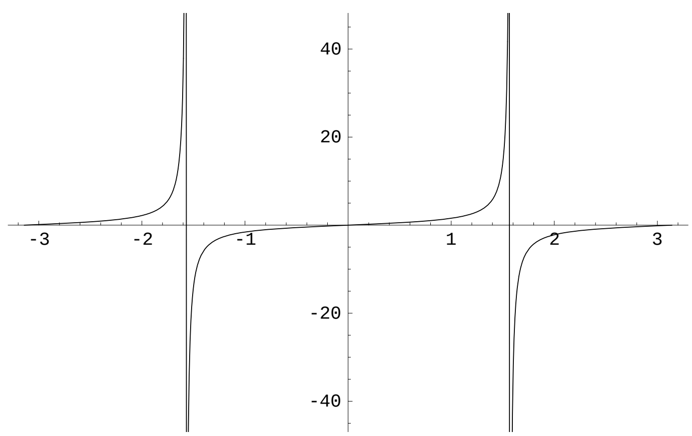
Usando estos valores, la periodicidad y las simetrías, podemos deducir que las gráficas de las funciones trigonométricas son las siguientes (obsérvense las escalas de los ejes):



$y = \operatorname{sen} x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

Se definen también la cosecante $\csc x$, la secante $\sec x$ y la cotangente $\cot x$ en los puntos donde no se anulan los denominadores:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

y las funciones inversas de las tres principales:

- $y = \operatorname{arc\,sen} x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ como el valor de y tal que $\operatorname{sen} y = x$.
- $y = \arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ como el valor de y tal que $\cos y = x$.
- $y = \arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ como el valor de y tal que $\tan y = x$.

Algunas fórmulas de la trigonometría nos harán falta más adelante; recordamos algunas:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Ejemplo 1.3.11. *Resolver las ecuaciones:*

1. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\tan x + \sqrt{3} = \sec x$, *para* $x \in [0, 2\pi)$.

Solución. 1. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ equivale a $\operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0$. Esto ocurre cuando $\operatorname{sen} x = 0$ y también cuando $\cos x = \frac{1}{2}$. La primera posibilidad se da cuando $x = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), y la segunda cuando $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y cuando $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

2. Elevamos al cuadrado la ecuación para poder aplicar otra de las fórmulas anteriores:

$$\tan^2 x + 3 + 2\sqrt{3} \tan x = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las soluciones en $[0, 2\pi)$ son $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ y $x_2 = \frac{11\pi}{6}$, pero al elevar la ecuación al cuadrado pueden aparecer *soluciones falsas*, y de hecho en este caso sólo x_2 es válida. ■

1.3.5. Funciones exponenciales y logarítmicas

Potencias y logaritmos

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. El producto de a consigo mismo n veces se indica por a^n (la *potencia* de *base* a y *exponente* n). También se define la potencia de exponente negativo a^{-n} como el inverso de a^n, y la de exponente racional $a^{\frac{m}{n}}$ como la raíz n-ésima de a^m. Es decir:

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ veces}) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$$

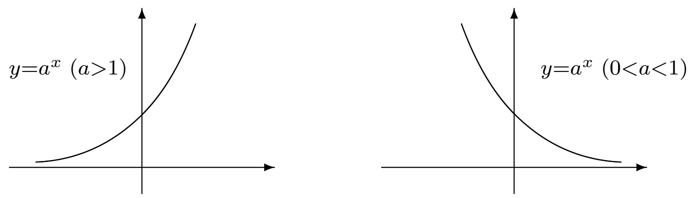
Esta última expresión no es un número real cuando a^m es negativo y n es par; por ejemplo $(-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$ no es un número real. Cuando la base a es positiva no se presenta este problema, y por eso sólo consideraremos funciones exponenciales con base $a > 0$.

Para $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$ con $a, b > 0$ se verifican las siguientes propiedades:

$$a^0 = 1 \qquad a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = a^x / a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

También es posible definir potencias de base $a > 0$ con exponente real (a^x con $x \in \mathbb{R}$) que cumplen las mismas propiedades que las de exponente racional. Sin entrar en detalles, diremos que para el cálculo práctico habría que aproximar x por un racional n/m, y entonces $a^{n/m}$ sería una aproximación de a^x. Obsérvese que este cálculo no es fácil, pues implica calcular raíces m-ésimas con m arbitrario.

Dado $a \in \mathbb{R}$ positivo, la *función exponencial de base* a es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$. Su gráfica se comporta de modo distinto según si $a < 1$ ó $a > 1$:



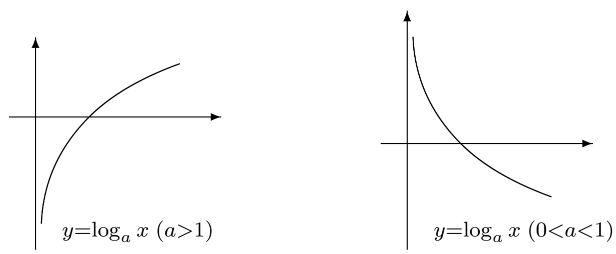
El *logaritmo en base* a de x (con $x > 0$), denotado por $\log_a x$, es el número real al que hay que elevar a para obtener x, lo que se puede reescribir de cualquiera de estas tres formas:

$$z = \log_a x \Leftrightarrow a^z = x \qquad a^{\log_a x} = x \qquad \log_a(a^x) = x$$

De las propiedades de los exponentes se deduce que

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \quad \log_a(x^y) = y \log_a x$$

Por otra parte, de las igualdades $a^{\log_a x} = x$ y $\log_a(a^x) = x$ se deduce que la *función logarítmica* $f(x) = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial a^x. El dominio de esta función es el intervalo $(0, +\infty)$, y su gráfica depende de si es $a < 1$ ó $a > 1$:



El número e, función exponencial y logaritmo neperiano

Hemos comentado que en la práctica puede resultar difícil no ya calcular, sino aproximar el valor de una potencia a^x de exponente real. Precisamente en este contexto se explica la importancia del número

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2'71828182845905\ldots$$

Resulta que el valor de e^x se puede expresar en términos de potencias de x como una *serie* o suma infinita[9]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

[9]Una *serie* o *suma infinita* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es *convergente* si el límite de las *sumas parciales* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ existe con un valor finito; este valor es entonces la *suma* de la serie.

Por ejemplo, si $0 < r < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1+r+r^2+r^3+\cdots$ converge y su suma vale $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \dfrac{1}{1-r}$. En efecto, si a $S_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n$ le restamos $rS_n = r+r^2+\cdots+r^n+r^{n+1}$ resulta $(1-r)S_n = 1-r^{n+1}$, de donde $S_n = (1-r^{n+1})/(1-r)$, cuyo límite es $1/(1-r)$ puesto que $0 < r < 1$.

Para $r = 1/2$ se obtiene $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^n = 2$, lo que se puede ver gráficamente marcando las sumas parciales en el intervalo $[0, 2]$: tras sumar $1/2^k$ nos falta exactamente $1/2^k$ para alcanzar el 2, y al añadir el siguiente sumando $1/2^{k+1}$ sólo rellenamos la mitad de lo que falta, por lo que nos acercamos a 2 todo lo que queramos pero sin alcanzarlo nunca.

Esta expresión tiene una gran ventaja: sólo involucra sumas, productos y cocientes, y en particular no nos obliga a hacer raíces m-ésimas para calcular e^x.

También tiene un inconveniente obvio: en la práctica es imposible hacer infinitas sumas, luego nos tenemos que conformar con sumar por ejemplo los primeros 10 sumandos para tener una aproximación. En el Tema 2 veremos que estas aproximaciones son bastante rápidas y que su error se controla muy bien, por lo que en definitiva esa es una buena expresión para el cálculo de e^x.

Por ejemplo, para $x = 1$ obtenemos $e = 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + \cdots$, y los 10 primeros sumandos (hasta $1/9!$) ya nos dan la aproximación $e \approx 986{,}410/9! = 2'7182815\ldots$ que es buena hasta la sexta cifra decimal.

El logaritmo en base e se llama logaritmo *neperiano* o *natural* y se denota por $\ln x$ (también se suele escribir como $\log x$, $\mathrm{Ln}x$); por tanto

$$z = \ln x \Leftrightarrow e^z = x \qquad e^{\ln x} = x \qquad \ln(e^x) = x$$

Los valores de $\ln(1 + x)$ también se pueden expresar como una serie:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

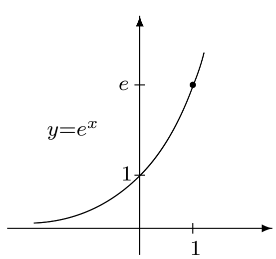
lo que facilita su cálculo. De hecho estas series permiten el cálculo de cualquier función exponencial o logarítmica en una base a, pues éstas se pueden poner en función de e^x y de $\ln x$ gracias a las fórmulas:

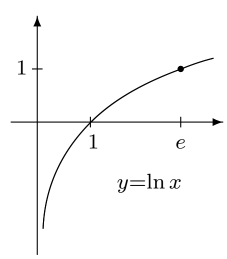
$$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Las propiedades y las gráficas de e^x y de $\ln x$ son casos particulares de los ya vistos, y se resumen así:

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = e^x/e^y \qquad e^{xy} = (e^x)^y$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln(x/y) = \ln x - \ln y \qquad \ln(x^y) = y \ln x$$





Funciones hiperbólicas

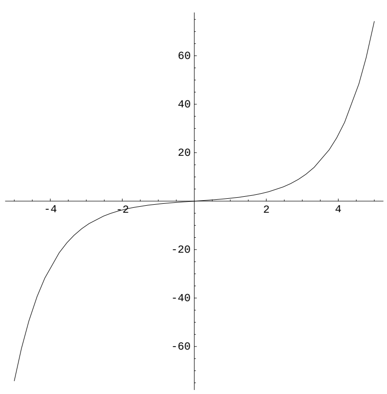
Las funciones *seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica* se definen como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

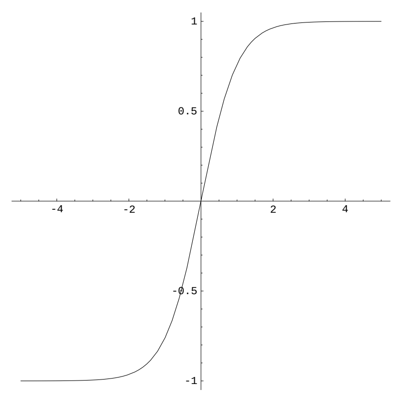
y verifican relaciones similares a las de las funciones trigonométricas; por ejemplo:

$$\begin{aligned} &\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \\ &|\cosh(x)| \geq 1 \qquad\qquad |\tanh(x)| < 1 \\ &\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) \qquad \cosh(-x) = \cosh(x) \\ &\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y) \\ &\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y) \end{aligned}$$

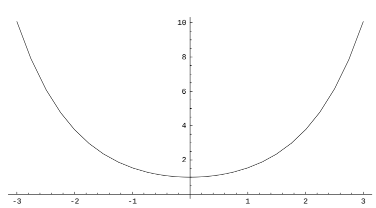
Sus gráficas son:



$y = \operatorname{senh} x$



$y = \tanh x$



$y = \cosh x$ (la catenaria)

Sus inversas se llaman *argumento seno hiperbólico, argumento coseno hiperbólico y argumento tangente hiperbólica*, y se denotan como sigue (incluimos además el dominio y el rango de cada una, que se deducen fácilmente de las gráficas anteriores):

$$\arg\operatorname{senh} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \arg\cosh x : [1, +\infty) \to [0, +\infty) \qquad \arg\operatorname{senh} x : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.3.12. *Expresar las funciones inversas de las funciones hiperbólicas en términos de logaritmos neperianos (recuérdese el método para calcular inversas de la página 18).*

Solución. Poniendo $z = e^x$ tenemos:

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{z - z^{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y = z - z^{-1} \quad \Rightarrow \quad 2yz = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 - (2y)z - 1 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado en z con dos soluciones

$$z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

pero $y - \sqrt{y^2 + 1}$ es negativa, y no puede ser el valor de $z = e^x$, por lo que hay que elegir el signo más, y tomando logaritmos obtenemos finalmente $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Con el coseno se llega a $z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, y hemos de tomar el signo positivo por la siguiente razón: sabemos que $y = \cosh x \geq 1$, y además es $x \geq 0$ porque ha de estar en el dominio de la función coseno hiperbólico; entonces $y^2 - 1 \geq (y-1)^2$ (desarrollando el cuadrado y aplicando $y \geq 1$), de donde $\sqrt{y^2 - 1} \geq y - 1$ y así $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$, que no es un valor posible para $z = e^x$ con $x \geq 0$.

Con la tangente tenemos

$$y = \frac{z - z^{-1}}{z + z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad (z + z^{-1})y = z - z^{-1} \quad \Rightarrow \quad z^2 y + y = z - 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 + y = z^2(1 - y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1+y}{1-y} = z^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln(z^2) = 2\ln z = 2x$$

En resumen:

$$\operatorname{arg\,senh} x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

■

1.4. Ejercicios

1. Calcular y simplificar:

$$a = \frac{4}{3} \times \frac{7}{6} \qquad b = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \qquad c = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \qquad d = \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{2}{3}$$

$$e = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \div \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} \qquad f = a^4 \times a^3 \qquad g = (a^4)^3 \qquad h = \frac{a^5}{a^{-2}} \qquad i = \left(\frac{1}{a^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$j = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \qquad k = 36^{\frac{1}{2}} \qquad l = 8^{\frac{2}{3}} \qquad m = 32^{\frac{3}{5}} \qquad n = 81^{-\frac{3}{4}}$$

2. Desarrollar y simplificar las siguientes expresiones:

   a) $x^2 - (3x(x^2 - 2) - 2x^2(x + 1))$
   b) $4a((1 - a)2a^2 + (3a + 1)3a^2)$
   c) $5a(4a - 2(3a - 4b) + 5(4a - 3b))$
   d) $-4x(2x^2 + 3x((x - 1) - 5(x - 2)))$

3. Desarrollar y reducir las expresiones siguientes:

   a) $\left(\frac{3}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{4}{3}x + x^2\right)$
   b) $\left(x - \frac{3}{4}\right)(5x^2 - 1)(4x + 3)$
   c) $(ax^2 - b)(ax^2 - 2b) + 3b(ax^2 - b) + b(b - 1)$
   d) $(a - 1)(a - 2)(a - 3) + 6(a - 1)(a - 2) + 7(a - 1)$
   e) $\left(\frac{1}{3}a^2b - \frac{5}{6}ab^2 + 10b^3 + 20\right)\left(-\frac{4}{5}a^2b\right)$

4. Simplificar las siguientes expresiones (suponiendo que los denominadores no son nulos):

$$A = \frac{4ax - 2a^2x}{2a^3 - 8a} \qquad B = \frac{a}{a^2 + ab} \qquad C = \frac{3y + 1}{9y^2 - 1} \qquad D = \frac{a - 2}{a^2 - 4a + 4}$$

$$E = \frac{\frac{m}{n} - \frac{3n}{m}}{\frac{m}{n} + \frac{3n}{m}} \qquad F = \frac{p^4 - q^4}{(p - q)^2} \cdot \frac{p - q}{p^2 + pq} \cdot \frac{p^2}{p^2 + q^2} \qquad G = \frac{a + 1}{a - 1} - \frac{(a^2 + 1)^2}{a^2 - 1}$$

$$H = \frac{x}{3x - 2y} - \frac{y}{2x + 3y} \qquad I = \frac{3m}{2n^3} + \frac{m^2}{n^2} \qquad J = \frac{9x^2y}{4 - 9x^2} \cdot \left(\frac{2}{3x} - 1\right) \cdot \frac{2 + 3x}{4y^3}$$

$$K = \left(x - 1 - \frac{3}{x}\right) : \left(x + 1 + \frac{x}{x - 3}\right)$$

5. La *razón áurea* es un número positivo que, entre otras propiedades, presenta la peculiaridad de que al restarle la unidad se obtiene su inverso. Hallar su valor.

6. Resolver las ecuaciones siguientes, comprobando los resultados:

$$(a)\quad x+2\sqrt{x-1}-4=0 \qquad (b)\quad \sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$$

$$(c)\quad \frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-5} \qquad (d)\quad \sqrt{a^2-x}+\sqrt{a^2+x}=2a$$

7. Completar las siguientes expresiones:

$$\sqrt[3]{\ldots}=a^2bc^4 \qquad \sqrt[4]{\ldots}=5a^3c \qquad \sqrt{\ldots}=7+a \qquad \frac{\ldots}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

8. Efectuar las sumas indicadas, simplificando al máximo el resultado:

   a) $4\sqrt{4}-2\sqrt{2}+3\sqrt{25}-5\sqrt{49}$
   b) $5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}+2\sqrt{8}$
   c) $4\sqrt{\dfrac{2}{25}}-3\sqrt{18}+6\sqrt{\dfrac{2}{9}}-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{18}{16}}$
   d) $\sqrt{\dfrac{3}{10}}-\sqrt{\dfrac{5}{6}}$
   e) $\sqrt{\dfrac{5x}{y}}+\sqrt{\dfrac{5y}{x}}+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{5xy}$

9. Calcular, simplificando el resultado:

   a) $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3)$
   b) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$
   c) $(3\sqrt{2}-3\sqrt{3}+6\sqrt{5})(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{5})$
   d) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}+3\sqrt{5})-(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})(\sqrt{3}+2\sqrt{5})$
   e) $\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

10. Calcular, simplificando el resultado:

$$a=\sqrt{192} \qquad b=\sqrt[3]{108} \qquad c=\frac{1}{4}\sqrt[3]{-64(a+b)^3(a-b)} \qquad d=\sqrt[5]{640y^3}$$

$$e=\sqrt{5a^4+10a^3x+5a^2x^2} \qquad f=2\sqrt[3]{9}\cdot 5\sqrt[3]{15} \qquad g=3\sqrt[4]{4}\cdot 2\sqrt{10} \qquad h=\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{10}$$

$$i=2\sqrt[6]{27}:\sqrt[4]{9} \qquad j=3\sqrt[3]{500ab^3}:\sqrt[3]{4a} \qquad k=\sqrt[6]{a^5b^7}:\sqrt[3]{a^2b^3}$$

11. Calcular el valor de las siguientes expresiones:

$$a=(-8)^{1/3} \quad b=16^{-0'25} \quad c=0'0001^{-3/2} \quad d=\sqrt{\frac{81^{-1/2}}{3^{-2}}} \quad e=(\sqrt{81}\cdot 27^{-5/3})^{1/3}$$

12. Encontrar la representación decimal periódica de los números

$$a = \frac{2}{7} \qquad b = \frac{1}{3} \qquad c = \frac{11}{6} \qquad d = \frac{1}{21} \qquad e = \frac{300{,}001}{90{,}000}$$

13. Escribir en potencias de 10 los siguientes números:

$$a = 0'001 \quad b = \sqrt[3]{10{,}000} \quad c = \frac{1}{0'0001}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[4]{10{,}000}} \quad e = (10^{1/3} \cdot 10^{-3})^{-1} \quad f = \frac{0'01}{0'0001}100$$

14. Escribir los siguientes números en forma de producto de un entero por una potencia de 10: $a = 30^4$, $\qquad b = 20{,}000^{-3}$, $\qquad c = 0'025^2$

15. Encontrar los valores numéricos de los factoriales $5!$, $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ Y $10!$.

16. Calcular los valores de $a = \dfrac{5!}{3!}$, $b = \dfrac{15!}{12!}$, $c = \dbinom{5}{3}$ y $d = \dfrac{7!}{5!\,2!}$.

17. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 3 y terminan en 6?

18. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1,3,4,5,6,8? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

19. Expandir los siguientes sumatorios:

$$a = \sum_{n=0}^{2}(n+1)x^n \qquad b = \sum_{k=1}^{3} k(k+1)x^{2k} \qquad c = \sum_{n=2}^{4} n^2 x^{2n+1} \qquad d = \sum_{j=1}^{3} \frac{j}{j^2+1} x^{2^j}$$

20. Calcular el valor de las siguientes sumas:

$$a = \binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \cdots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15} \qquad b = \binom{15}{0} - \binom{15}{1} + \cdots + \binom{15}{14} - \binom{15}{15}$$

21. Hallar el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(5x - x^{-1})^7$.

22. Hallar todos los valores reales de x que cumplen las siguientes desigualdades:

    (a) $x^2 > x$

    (b) $x\sqrt{3} - 1 < x - 3$

    (c) $\dfrac{2}{3}(4x-6) + \dfrac{1}{2}(3x+2) \leq \dfrac{3}{4}(2x-7)$

    (d) $\dfrac{3}{4} < \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6}x \leq \dfrac{9}{4}$

(e) $x^2 \geq 2x + 3$

(f) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

(g) $|4x + 12| < 36$

(h) $-12 \geq |3x - 4|$

(i) $5 < |2x - 7| < 35$

(j) $|x + 1| + |x - 1| \leq 4$

23. Calcular el número complejo $\dfrac{(2-i)(1+3i)^2 + (5+3i)(5-3i)}{(2+i)^2}$.

24. Sea P el punto de intersección de la recta de ecuación $x + y = 9$ con la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio $2\sqrt{2}$. Sea s la recta de ecuación $x + 2y + 1 = 0$ y sea r la recta perpendicular a s que pasa por P. Calcular el punto de corte de r y s.

25. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2+6x+y^2-5y+13 = 0$.

26. Dada la función polinómica $f(x) = x^2 + 2x + 4$, evaluar f en los puntos 0, 1, -1, 2 y -2, y encontrar las expresiones polinómicas de $f(a + 1)$ y $f(x - 3)$.

27. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2^x + 1$, calcular $f(g(x))$.

28. Obtener el cociente y el resto de las divisiones indicadas a continuación:

a) $(x^2 - 3x - 18) : (x - 6)$

b) $(3a^3 + 10a^2 - 5a + 12) : (a + 4)$

c) $(4x^4 + 6x^3 - 3x + 9) : (x^2 + 4x - 3)$

29. Factorizar los siguientes polinomios:

$$a(x) = 3x^3 + 2x \qquad b(x) = x^2 - 25 \qquad c(x) = 4x^2 + 9 \qquad d(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$$

30. Encontrar las raíces y hacer un esquema de la gráfica de los siguientes polinomios:

$$a(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad b(x) = 4x^2 + 4x + 1 \qquad c(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

$$d(x) = 3x^2 - 3x - 1 \qquad e(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2 \qquad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

31. Expresar las siguientes funciones racionales como suma de fracciones simples:

$$A(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)} \qquad B(x) = \frac{x+2}{x(x+3)} \qquad C(x) = \frac{x-2}{x^2+3x+2}$$

$$D(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} \qquad E(x) = \frac{x^3+2x+2}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

32. Expresar $\cos(5x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ en términos de los senos y cosenos de $2x$ y $3x$.

33. Resolver la ecuación $2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \sqrt{3}\cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

34. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, \pi/3)$ y $(3, 2\pi/3)$.

35. Hallar las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son $(3, -2)$ y $(-3, -2)$.

36. Escribir el desarrollo de $e^{-x/3}$ en potencias de x hasta el término en x^5. Usar este desarrollo para aproximar el valor de $e^{-1/3}$ con 5 cifras decimales.

37. Simplificar las expresiones siguientes:

$$a = \ln(x^3) - \ln(x) \qquad b = \ln(2x^3 - 3x^2) + \ln(x^{-2})$$

$$c = \ln(e^{x^2+3}) - \ln(e^3) \qquad d = \ln(x^5 - 3x^2) + 2\ln(x^{-1}) - \ln(x^3 - 3)$$

38. Calcular la función inversa de las siguientes funciones:

$$a(x) = \frac{x}{x-1} \qquad b(x) = \frac{x-1}{3x+1} \qquad c(x) = \operatorname{sen}(3x)$$

$$d(x) = e^{\operatorname{sen}(x)} \qquad f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) \qquad g(x) = \operatorname{sen}(e^{-x^2})$$

39. La fórmula barométrica $p = p_0 e^{-Mgh/RT}$ da la presión de un gas de masa molar M a una altura h y una temperatura T, donde p_0 es la presión a nivel del mar. Expresar h en términos de las otras variables.

40. El potencial químico de un gas a presión p y temperatura T viene dado por la fórmula $\mu = \mu_0 + RT\ln(f/p_0)$, donde $f = \gamma p$ es la fugacidad y γ es el coeficiente de fugacidad. Expresar p como función explícita de las otras variables.

1.5. Soluciones de los ejercicios

1. $a = \frac{14}{9}$ $b = \frac{-3}{16}$ $c = \frac{3}{8}$ $d = -\frac{9}{8}$ $e = \frac{-19}{24}$ $f = a^7$ $g = a^{12}$
$h = a^7$ $i = a^2$ $j = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ $k = \pm 6$ $l = 4$ $m = 8$ $n = \frac{1}{27}$

2. (a) $6x + 3x^2 - x^3 = x(6 + 3x - x^2)$ (b) $20a^3 + 28a^4 = 4a^3(5 + 7a)$
(c) $90a^2 - 35ab = 5a(18a - 7b)$ (d) $40x^3 - 108x^2 = 4x^2(10x - 27)$

3. (a) $\frac{15}{8}x^6 + \frac{3}{4}x^5 - 6x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{19}{6}x^2 - \frac{2}{3}x$ (b) $20x^4 - \frac{61}{4}x^2 + \frac{9}{4}$ (c) $a^2x^4 - b$
(d) $a^3 - 1$ (e) $-\frac{4}{15}a^4b^2 + \frac{2}{3}a^3b^3 - 8a^2b^4 - 16a^2b = \frac{2}{15}a^2b(5ab^2 - 2a^2b - 60b^3 - 120)$

4. $A = -\dfrac{x}{a+2}$ $B = \dfrac{1}{a+b}$ $C = \dfrac{1}{3y-1}$ $D = \dfrac{1}{a-2}$ $E = \dfrac{m^2 - 3n^2}{m^2 + 3n^2}$ $F = p$
$G = -a\dfrac{a^2 + a + 2}{a+1}$ $H = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(3x - 2y)(2x + 3y)}$ $I = m\dfrac{3 + 2mn}{2n^3}$ $J = \dfrac{3x}{4y^2}$
$K = \dfrac{x-3}{x}$

5. $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

6. (a) $x = 2$ (b) $x = 5$ (c) $x = 121$ (d) $x = 0$ si $a \geq 0$; para $a < 0$ no hay solución.

7. $\sqrt[3]{a^6b^3c^{12}} = a^2bc^4$ $\sqrt[4]{5^4a^{12}c^4} = 5a^3c$ $\sqrt{49 + 14a + a^2} = 7 + a$ $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

8. $a = -12 - 2\sqrt{2}$ $b = 8\sqrt{2}$ $c = -\dfrac{67}{10}\sqrt{2}$ $d = -\dfrac{1}{15}\sqrt{30} = -\sqrt{\dfrac{2}{15}}$ $e = \dfrac{2\sqrt{5xy}}{x}$

9. $a = 41\sqrt{6} - 71\sqrt{3}$ $b = 42\sqrt{10} - 174$ $c = 114 + 24\sqrt{10}$ $d = 32 + \sqrt{15}$ $e = \sqrt{1-x}$

10. $a = 8\sqrt{3}$ $b = 3\sqrt[3]{4}$ $c = (a+b)\sqrt[3]{b-a}$ $d = 2\sqrt[5]{20y^3}$ $e = \sqrt{5}a(a+x)$
$f = 30\sqrt[3]{5}$ $g = 12\sqrt{5}$ $h = \sqrt[12]{2^2 5^5}$ $i = 2$ $j = 15b$ $k = \sqrt[6]{ab}$

11. $a = -2$ $b = \dfrac{1}{2}$ $c = 10^6$ $d = 1$ $e = \dfrac{1}{3}$

12. $a = 0'\widehat{285714}$ $b = 0'\widehat{3}$ $c = 1'8\widehat{3}$ $d = 0'0\widehat{47619}$ $d = 3'3333\widehat{4}$

13. $a = 10^{-3}$ $b = 10^{4/3}$ $c = 10^4$ $d = 10^{-1}$ $e = 10^{8/3}$ $f = 10^4$

14. $a = 81 \cdot 10^4$ $b = 125 \cdot 10^{-15}$ $c = 625 \cdot 10^{-6}$

15. $5! = 120$ $6! = 720$ $7! = 5{,}040$ $8! = 40{,}320$ $9! = 362{,}880$ $10! = 3{,}628{,}800$

16. $a = 20$ $b = 2{,}730$ $c = 10$ $d = 21$

17. $V(6,3) = 120$. Un número es múltiplo de 3 si y sólo si lo es la suma de sus cifras; si acaba en 6, las dos primeras cifras tienen que elegirse entre 1 y 5 y sumar un múltiplo de tres. Las opciones son 8, a saber 126, 156, 216, 246, 426, 456, 516 y 546.

18. Hay $6^3 = 216$ números así (no se excluyen repeticiones; de ser así la respuesta sería 120, como antes). Un número es múltiplo de 4 si y sólo si lo son sus dos últimas cifras, por lo que las posibles terminaciones son 44, 64, 84, 16, 36, 56, 48, 68 y 88. Hay pues 9 opciones para las dos últimas cifras y 6 para la primera, luego hay 54 múltiplos de 4.

19. $a = 1+2x+3x^2 \qquad b = 2x^2+6x^4+12x^6 \qquad c = 4x^5+9x^7+16x^9 \qquad d = \frac{1}{2}x^2+\frac{2}{5}x^4+\frac{3}{10}x^8$

20. $a = 2^{15} \qquad b = 0$

21. $-7 \cdot 5^6 = -109{,}375$

22. $(a)\ x < 0$ ó $x > 1 \qquad (b)\ x < -\sqrt{3} - 1 \qquad (c)\ x \leq -\dfrac{27}{32} \qquad (d)\ -\dfrac{19}{10} \leq x < -\dfrac{1}{10}$
$(e)\ x \leq -1$ ó $x \geq 3 \qquad (f)\ 1 \leq x \leq 4 \qquad (g)\ -12 < x < 6 \qquad (h)$ Ninguno
$(i)\ -14 < x < 1$ ó $6 < x < 21 \qquad (j)\ -2 \leq x \leq 2$

23. $\dfrac{152}{25} - \dfrac{36}{25}i$

24. $P = (4,5)$, la ecuación de r es $y = 2x - 3$ y el punto pedido es $(1,-1)$.

25. El centro es $(-3, \frac{5}{2})$ y el radio es $\dfrac{3}{2}$.

26. $f(0) = 4 \qquad f(1) = 7 \qquad f(-1) = 3 \qquad f(2) = 12 \qquad f(-2) = 4$
$f(a+1) = a^2 + 4a + 7 \qquad f(x-3) = x^2 - 4x + 7.$

27. $f(g(x)) = 2^{2x} + 2^{x+2} + 2.$

28. Los cocientes son $x+3$, $3a^2-2a+3$ y $4x^2-10x+52$. Los restos son 0, 0 y $-241x+165$.

29. $a(x) = x(3x^2+2) = x(\sqrt{3}x + \sqrt{2}i)(\sqrt{3}x - \sqrt{2}i) \qquad b(x) = (x+5)(x-5)$
$c(x) = 4x^2 + 9 = (2x+3i)(2x-3i) \qquad d(x) = x(x+1)(x+5)$

30. $a(x)$ tiene raíces 1 y 2 y es una parábola con mínimo en $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4})$.

 $b(x)$ tiene raíz $-1/2$ (doble) y es una parábola con mínimo en $(\frac{-1}{2}, 0)$.

 $c(x)$ tiene raíces (complejas) $\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$ y es una parábola con mínimo en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

 $d(x)$ tiene raíces $\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$ y es una parábola con mínimo en $(\frac{1}{2}, \frac{-7}{4})$ (es la de c desplazada 2 unidades hacia abajo).

 $e(x)$ tiene raíces 1 (doble) y $-2/3$. Tiene un máximo relativo en $(\frac{-1}{9}, \frac{500}{243})$ y un mínimo relativo en $(1,0)$.

 $f(x)$ tiene raíces 1 y -1 (ambas dobles). Tiene un máximo relativo en $(0,1)$ y dos mínimos relativos en $(\pm 1, 0)$.

31. $A(x) = \dfrac{1/5}{x-2} + \dfrac{-1/5}{x+3}$ $\quad B(x) = \dfrac{2/3}{x} + \dfrac{1/3}{x+3}$ $\quad C(x) = \dfrac{-3}{x+1} + \dfrac{4}{x+2}$

    $D(x) = \dfrac{10/9}{x-1} + \dfrac{2/3}{(x-1)^2} + \dfrac{-1/9}{x+2}$ $\quad E(x) = 1 + \dfrac{5/3}{x-1} + \dfrac{(-5/3)x - (4/3)}{x^2+x+1}$

32. $\cos(5x) = \cos(2x+3x) = \cos(2x)\cos(3x) - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(3x)$

    $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(3x-2x) = \operatorname{sen}(3x)\cos(2x) - \cos(3x)\operatorname{sen}(2x)$

33. Hay cuatro soluciones: $x = \pi/3$, $x = 2\pi/3$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$.

34. $(3\cos(\frac{\pi}{3}), 3\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})) = (\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ y $(3\cos(\frac{2\pi}{3}), 3\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})) = (\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

35. $(\sqrt{3^2+2^2}, \arctan(\frac{-2}{3}) + 2\pi) = (3'6055\ldots, 5'6951\ldots)$ y

    $(\sqrt{3^2+2^2}, \arctan(\frac{2}{3}) + \pi) = (3'6055\ldots, 3'7295\ldots)$

36. $e^{-x/3} = 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{18} - \dfrac{x^3}{162} + \dfrac{x^4}{1{,}944} - \dfrac{x^5}{29{,}160}$, $\quad e^{-1/3} \simeq \dfrac{20{,}894}{29{,}160} \simeq 0'71653.$

37. $a = 2\ln(x)$ $\quad b = \ln(2x-3)$ $\quad c = x^2$ $\quad d = 0$

38. $a^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $\quad b^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-3x}$ $\quad c^{-1}(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{3}$ $\quad d^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln(x))$

    $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,cos}(e^{-x})$ $\quad g^{-1}(x) = \sqrt{-\ln(\operatorname{arc\,sen}(x))}$

39. $h = \dfrac{-RT\ln(p/p_0)}{Mg}$

40. $p = \dfrac{p_0}{\gamma}\exp\left(\dfrac{\mu - \mu_0}{RT}\right)$

Tema 2

Cálculo diferencial en una variable

2.1. Límites

2.1.1. Tipos de límites. Asíntotas

Límite finito en un punto

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real, y sean $b, L \in \mathbb{R}$. La notación

$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

("$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a b") significa[1] que los valores de $f(x)$ se acercan a L tanto como se quiera si x se acerca lo suficiente a b, sin tener en cuenta el valor de $f(b)$.

Como veremos en la Sección 2.2 (sobre continuidad), si en una función "normal" está definido $f(b)$ entonces ése es el valor del límite, por ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{6} \qquad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \qquad \lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$$

pero en muchas ocasiones $f(b)$ no está definido y entonces hay que usar otros argumentos.

Por ejemplo, al sustituir $x = 0$ para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

obtenemos una *indeterminación* del tipo $0/0$. Como veremos, cuando se resuelven indeterminaciones así se pueden obtener límites con cualquier valor real o límites infinitos. Por ahora nos conformaremos con calcular $f(x)$ para valores de x cada vez más cercanos a 0:

$$f(\pm 0'1) = 0'998334\ldots \qquad f(\pm 0'01) = 0'999983\ldots \qquad f(\pm 0'001) = 0'9999998\ldots$$

lo que parece indicar que el límite vale 1 (más tarde confirmaremos esto rigurosamente).

[1] La condición formal, que no emplearemos, es que para cualquier valor (pequeño) $\varepsilon > 0$, existe otro valor (pequeño) $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - b| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Al punto b donde queremos calcular el límite podemos acercarnos por la derecha, es decir, considerando sólo valores $x > b$, o por la izquierda, con valores $x < b$. Aparecen así los conceptos de *límite lateral* por la derecha y por la izquierda[2]:

$$\lim_{x \to b^+} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

El límite "global" en b existe y vale L si y sólo si los dos límites laterales existen y valen L.

Por ejemplo, para $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|/x$ se tiene

$$f(0'1) = 0'9983\ldots \quad f(-0'1) = -0'9983\ldots \quad f(0'01) = 0'9999\ldots \quad f(-0'01) = -0'9999\ldots$$

por lo que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, y en consecuencia no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Los dos ejemplos siguientes ilustran situaciones con las que podemos encontrarnos al calcular límites. En el primero podemos "retocar" la expresión dada de $f(x)$ y calcular el límite sin problemas, y en el segundo podemos demostrar que el límite no existe.

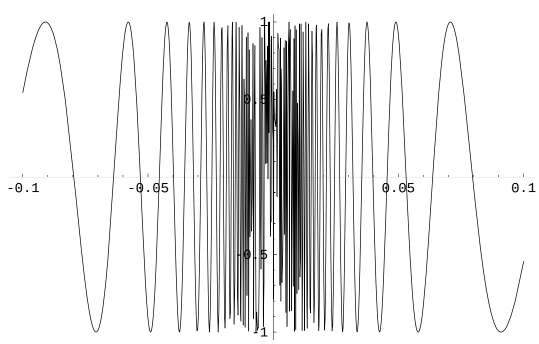
Ejemplo 2.1.1. *Calcular* $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

Solución. Al sustituir en la fracción $x = 1$ obtenemos una indeterminación $0/0$. Por tanto ambos polinomios tienen a $x = 1$ por raíz y son divisibles por $x - 1$. Dividiendo y cancelando $x - 1$ se tiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+3x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{6} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.1.2. *Demostrar que no existe el límite* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$.

Solución. La gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(1/x)$



sugiere que, cerca de $x = 0$, la función oscila sin aproximarse a ningún valor concreto. Por ejemplo, los valores

$$x = \frac{1}{\pi} \qquad x = \frac{1}{2\pi} \qquad x = \frac{1}{3\pi} \qquad x = \frac{1}{4\pi} \qquad \ldots$$

[2]La condición formal de límite por la derecha es como la anterior con $0 < x - b < \delta$, y en la de límite por la izquierda hay que usar $0 < b - x < \delta$.

se aproximan a 0 tanto como queramos, y en ellos se tiene $f(x) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$, pero también los valores

$$x = \frac{1}{\pi/2} \qquad x = \frac{1}{2\pi + \pi/2} \qquad x = \frac{1}{4\pi + \pi/2} \qquad x = \frac{1}{6\pi + \pi/2} \qquad \ldots$$

se aproximan a 0 y en ellos se tiene $f(x) = \operatorname{sen}(2k\pi + \pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, por lo que no podemos encontrar un valor de L al que la función se aproxime "siempre", y en consecuencia el límite no existe. ∎

Límite infinito en un punto; asíntotas verticales

Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la notación

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty$$

("$f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a b") significa[3] que los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes como queramos (en valor absoluto) si x se acerca lo suficiente a b, sin tener en cuenta el valor de $f(b)$.

Si nos preocupamos del signo de $f(x)$ y de si x se acerca a b por la derecha o por la izquierda, podemos ser más precisos y usar expresiones del tipo

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$$

con el significado obvio. Por ejemplo, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

o, recordando las propiedades de las funciones elementales que vimos en el Tema 1,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty$$

Geométricamente, $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$ significa que la gráfica de $y = f(x)$ "se pega en el infinito" a la recta vertical $x = b$, lo que se expresa diciendo que esa recta es una *asíntota vertical* de la función (o de la gráfica).

Si se tiene información sobre es signo de $f(x)$ se puede ser más preciso; por ejemplo, si $\lim_{x \to b^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (como ocurre con $f(x) = \tan(x)$ en $b = \pi/2$) podemos decir que la gráfica se pega a la asíntota "por arriba a la izquierda y por abajo a la derecha".

[3]La condición formal es que para cualquier valor (grande) $M > 0$, existe otro valor (pequeño) $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - b| < \delta$ entonces $|f(x)| > M$.

Límite finito en el infinito; asíntotas horizontales

Dados $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, la notación

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

("$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a infinito por la derecha") significa[4] que los valores de $f(x)$ se acercan a L tanto como queramos para valores suficientemente grandes de x. Geométricamente, esto significa que $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la función $f(x)$ (o de la gráfica $y = f(x)$).

De modo análogo se define y se interpreta la notación $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. Por ejemplo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x+1} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x+1} = -1 \qquad \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} (1/3)^x = 0$$

y por tanto el eje horizontal $y = 0$ es una asíntota de la función $1/x$ (por la derecha y por la izquierda), mientras que la función $|x|/(x+1)$ tiene dos asíntotas horizontales, una a la que se pega por la derecha ($y = 1$) y otra a la que se pega por la izquierda ($y = -1$). Exactamente esto mismo le pasa a la función $\tanh(x)$, como vimos al final del Tema 1.

Como ocurría con los límites en un punto, los límites en el infinito pueden no existir. Por ejemplo no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x)$, pues en puntos del tipo $x = k\pi$ la función vale 0, mientras que en puntos del tipo $x = 2k\pi + \pi/2$ vale 1.

Límite infinito en el infinito; asíntotas oblicuas

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notación

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

("$f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito por la derecha") significa[5] que los valores de $f(x)$ se hacen tan grandes como queramos para valores suficientemente grandes de x.

De modo análogo se interpretan notaciones análogas con otros signos. Por ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^3) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (1 - x^3) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (1/3)^x = +\infty$$

En estos casos $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales, pero puede ocurrir que tenga por asíntota una recta oblicua $y = mx + b$ con $m \neq 0$. Esto ocurre precisamente cuando existen, con valor finito, los límites

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

(véase el Ejemplo 2.1.4).

[4] La condición formal es que para cualquier valor (pequeño) $\varepsilon > 0$, existe otro valor (grande) $K > 0$ tal que si $x > K$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

[5] La condición formal es que para cualquier valor (grande) $M > 0$, existe otro valor (grande) $K > 0$ tal que si $x > K$ entonces $|f(x)| > M$.

2.1.2. Cálculo de límites; indeterminaciones y equivalencias

Las siguientes propiedades son básicas para el cálculo de límites:

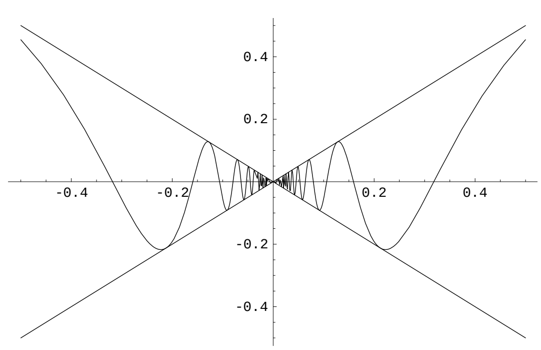
Proposición 2.1.3. *Si los siguientes límites existen y son finitos (excepto L_g en el punto 9)*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_f \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L_g$$

(a puede ser un número real ó $\pm\infty$), y si k es una constante, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} k\, f(x) = k\, L_f$.
2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_f \pm L_g$.
3. $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\, g(x)) = L_f\, L_g$.
4. *Si* $L_g \neq 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_f}{L_g}$.
5. *Si* L_f *y* L_g *no son ambos nulos entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L_f^{L_g}$.
6. *(Regla del sándwich) Si* $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ *y* $L_f = L_g = L$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.
7. *(Cero por acotada es cero) Si* $L_f = 0$ *y* $g(x)$ *está acotada*[6] *entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$.
8. *(Constante no nula entre cero es infinito) Si* $L_f \neq 0$ *y* $L_g = 0$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
9. *(Constante entre infinito es cero) Si* $L_f \neq \infty$ *y* $L_g = \infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Por ejemplo, usando el apartado 7 se tiene $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$, lo que también es claro en vista de la gráfica:



[6] Es decir, si existe $M > 0$ con $|g(x)| \leq M$; de hecho vale con que esto ocurra "cerca de a", es decir, para los valores x de algún intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ centrado en a.

Indeterminaciones

En situaciones no cubiertas por la Proposición 2.1.3 se tienen indeterminaciones como

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad 1^\infty$$

que se resuelven manipulando las expresiones, o usando equivalencias o la regla de l'Hôpital.

Un caso típico de indeterminaciones que se resuelven manipulando las expresiones es el las funciones racionales (cocientes de polinomios). El siguiente ejemplo muestra las situaciones que se pueden presentar:

Ejemplo 2.1.4. *Estudiar las asíntotas de la función* $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$.

Solución. Las asíntotas verticales están en los puntos donde la función tiende a infinito. Para que esto ocurra, en vista de los apartados 4 y 8 de la Proposición 2.1.3, es necesario que el denominador valga 0, lo que ocurre para los valores $x = \pm 1$.

Para $x = 1$, por el apartado 8, el límite es infinito, y analizando los signos del numerador y el denominador se tiene

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

de modo que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $f(x)$; la función "se pega a la asíntota por abajo a la izquierda y por arriba a la derecha".

Para $x = -1$ aparece una indeterminación del tipo $0/0$. Por tanto -1 es raíz de los polinomios $x^3 + x^2$ y $x^2 - 1$, de modo que ambos son divisibles por $x + 1$. Así pues:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$$

Por tanto $\lim_{x \to -1} f(x) = -1/2$ y la recta $x = -1$ no es una asíntota de $f(x)$.

Habrá asíntotas horizontales si $\lim_{x \to \infty} f(x)$ es finito; dividiendo la mayor potencia de x que aparezca (en este caso por por x^3) se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + (1/x)}{(1/x) - (1/x^3)} = \frac{1+0}{0+0} = \infty$$

y por tanto no hay asíntotas horizontales. Pero sí se obtienen límites finitos al hacer

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2}{x^3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + (1/x)}{1 - (1/x^2)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

y

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + (1/x)}{1 + (1/x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+0}{1+0} = 1$$

por lo que $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x)$. ∎

Añadimos aquí otras indeterminaciones que se resuelven de modo muy general. Los resultados serán evidentes cuando conozcamos la regla de l'Hôpital y se les puede dar la siguiente interpretación: Los polinomios se acercan a infinito o a cero "mucho más despacio que las funciones exponenciales" y "mucho más deprisa que las funciones logarítmicas".

Proposición 2.1.5. *Se tiene*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n\, e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Equivalencias

Se dice que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son *equivalentes* en a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Usando la Proposición 2.1.3 es fácil ver que, si dos funciones son equivalentes en a, al hacer un límite en a podemos sustituir una por otra siempre que aparezcan multiplicando o dividiendo; expresamente:

Proposición 2.1.6. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en a y si $h(x)$ es cualquier función:*

$$\lim_{x\to a} f(x)\, h(x) = \lim_{x\to a} g(x)\, h(x) \qquad y \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Usando la regla de l´Hôpital será muy fácil obtener las siguientes equivalencias:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2} = 1$$

que nos permiten por tanto sustituir el numerador por el correspondiente denominador (que es más sencillo) al tomar límites con $x \to 0$. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(x)}{(1-\cos(x))\ln(1+x)} = \lim_{x\to0} \frac{x^3}{x^3/2} = 2$$

Las equivalencias se pueden usar de modo más general: por ejemplo, si $h(x)$ es un *infinitésimo* en $x = a$, es decir, si

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0$$

entonces las equivalencias anteriores nos dan las siguientes equivalencias en a:

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)} = 1 \quad \lim_{x\to a} \frac{\ln(1+h(x))}{h(x)} = 1 \quad \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(h(x))}{h(x)} = 1 \quad \lim_{x\to a} \frac{1-\cos(h(x))}{h(x)^2/2} = 1$$

Por ejemplo, para calcular

$$\lim_{x\to-1} \frac{e^{x^2-x-2} - 1}{\operatorname{sen}(2x^2-2x-4)}$$

podemos hacer $t = x^2 - x - 2$, de modo que $t \to 0$ cuando $x \to -1$ y así

$$\lim_{x\to-1} \frac{e^{x^2-x-2} - 1}{\operatorname{sen}(2x^2-2x-4)} = \lim_{t\to0} \frac{e^t - 1}{\operatorname{sen}(2t)} = \lim_{t\to0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

2.2. Continuidad

2.2.1. Funciones continuas

Definición 2.2.1. Diremos que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua* en $a \in D$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

y diremos que $f(x)$ es continua en D si lo es en cada $a \in D$.

Obsérvese que la definición de continuidad en a requiere tres condiciones:

- existste $f(a)$
- existe $\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ con valor finito pero falla una de las otras condiciones, decimos que en $x = a$ hay una *discontinuidad evitable*, pues definiendo $f(a) := \lim_{x\to a} f(x)$ obtenemos una función continua en $x = a$ que es idéntica a la inicial salvo en $x = a$.

Si no existe $\lim_{x\to a} f(x)$ porque los límites laterales son distintos y finitos, se dice que f presenta en a una *discontinuidad de salto finito.*

Finalmente, si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe por otras causas (como en el caso de $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$) o es infinito se dice que f presenta en a una *discontinuidad esencial.*

El siguiente resultado nos dice que las funciones continuas son muy abundantes:

Proposición 2.2.2. *Las funciones elementales del Tema 1, y sus sumas, diferencias, productos, cocientes y composiciones, son continuas en sus dominios de definición.*

Ejemplo 2.2.3. *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.*

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x < 2 \\ 3x-1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, *definida para* $x \neq 1$.

3. $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si \quad x \leq 5 \\ 2x & si \quad x > 5 \end{cases}$

Solución. 1. En $x \neq 2$ es continua por la proposición. Como $f(2)$ no está definido pero

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 5 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

la discontinuidad es evitable definiendo $f(2) = 5$.

2. Como antes, sólo es discontinua en $x = 1$, y la discontinuidad es evitable definiendo

$$f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

3. Ahora la función sí está definida en $x = 5$, y como los límites laterales valen

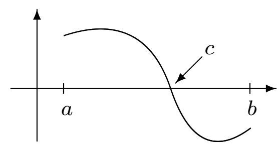
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} 3x-2 = 13 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} 2x = 10$$

la discontinuidad es de salto finito. ■

2.2.2. Teoremas sobre continuidad: Bolzano y Weierstrass

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede trazar "sin levantar el lápiz del papel". Por tanto es muy fácil admitir el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4 (de Bolzano). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$ (es decir, si f cambia de signo entre a y b su gráfica corta al eje).*



Otro asunto es demostrar formalmente el teorema. Una manera de hacerlo consiste en usar el "Principio de Cantor de los intervalos encajados": dada una sucesión de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

cuyas longitudes $|b_n - a_n|$ tienden a cero, existe un único punto en la intersección de todos los intervalos. Esta demostración sugiere un algoritmo para hallar raíces de ecuaciones que desarrollaremos en la Sección 2.5.

El siguiente resultado es una generalización sencilla del anterior (esto significa que el Teorema de Bolzano es un caso particular del que sigue con $\alpha = 0$).

Teorema 2.2.5 (de los valores intermedios). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < f(b)$, entonces para cualquier α en el intervalo $(f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = \alpha$.*

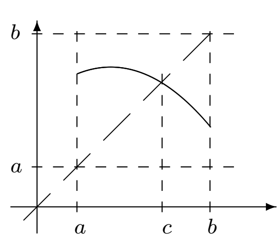
Es decir, la gráfica de $f(x)$ "pasa por todas las alturas" comprendidas entre $f(a)$ y $f(b)$. Cuando $f(a) > f(b)$ se obtiene un resultado análogo.

Demostración. La función $g(x) = f(x) - \alpha$ es continua y cambia de signo en en $[a, b]$. Por el teorema de Bolzano existe $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$, o sea con $f(c) = \alpha$. ■

Con una idea similar se demuestra:

Teorema 2.2.6 (del punto fijo). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y toma valores en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ con $f(c) = c$. Se dice que f tiene un* punto fijo *en c, lo que equivale a que la gráfica de f corte a la diagonal $y = x$ en el punto (c, c).*

Demostración. Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$ ya está. En otro caso, como cualquier $f(x) \in [a, b]$, se tiene $f(a) > a$ y $f(b) < b$, y así la función $g(x) = f(x) - x$ es continua y cambia de signo en $[a, b]$. Por el teorema de Bolzano existe $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$, o sea con $f(c) = c$. ■



Para el último teorema sobre funciones continuas necesitamos unas definiciones:

Definición 2.2.7. *Dada una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que:*

1. $f(x)$ *está* acotada *en D si existe $K > 0$ con $|f(x)| \leq K$ para cualquier $x \in D$.*

2. $f(x)$ alcanza su máximo absoluto *en D en el punto $x_0 \in D$ con valor $f(x_0)$ si para cualquier $x \in D$ se tiene $f(x) \leq f(x_0)$.*

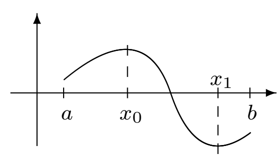
3. $f(x)$ alcanza su mínimo absoluto *en D en el punto $x_1 \in D$ con valor $f(x_1)$ si para cualquier $x \in D$ se tiene $f(x) \geq f(x_1)$.*

Por ejemplo, la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$ alcanza su máximo absoluto en $x = 0$ con valor $f(0) = 1$, y alcanza su mínimo absoluto en los puntos $x = \pm\pi$ con valor $f(\pm\pi) = -1$.

En general, una función no tiene por qué alcanzar sus extremos absolutos en un conjunto D, pero sí lo hacen las funciones continuas cuando D es de la forma $[a, b]$:

Teorema 2.2.8 (de Weierstrass). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza sus extremos absolutos (y por tanto está acotada) en $[a, b]$.*

Es decir, existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in [a, b]$.

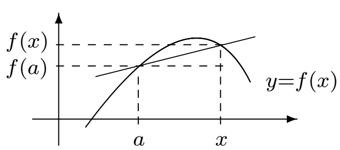


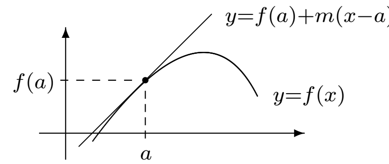
Cuando estudiemos las derivadas tendremos un modo de encontrar efectivamente los puntos en los que se alcanzan los extremos absolutos.

2.3. Derivadas

2.3.1. Derivadas y rectas tangentes

Dadas $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D$, consideremos un punto variable $x \in D$ cerca de a y la recta secante a $y = f(x)$ que pasa por $(a, f(a))$ y por $(x, f(x))$. En vista del triángulo en la figura de la izquierda, esta recta tiene pendiente $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.





Cuando x se aproxima a a, la secante se aproxima a la recta tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto $(a, f(a))$. Por tanto, si existe $m = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, éste será el valor de la pendiente de dicha recta, que tendrá en consecuencia la ecuación de la figura de la derecha.

Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.3.1. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D$. Si existe con valor finito el límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se dice que f *es derivable* en $x = a$, el valor $f'(a)$ es la *derivada* o la *pendiente* de $f(x)$ en a, y la *recta tangente* a la curva $y = f(x)$ por el punto $(a, f(a))$ (o en $x = a$) es la que tiene por ecuación

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

Poniendo $h = \Delta x = x - a$ se tienen las siguientes descripciones alternativas de la derivada:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

A veces no existe el "límite global", pero sí los límites laterales. Se dice entonces que f es *derivable por la derecha o por la izquierda* en $x = a$ y se definen las *derivadas laterales*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad\qquad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

que pueden interpretarse como las pendientes de las rectas tangentes "por cada lado".

El límite de la definición de derivada es una indeterminación del tipo $0/0$, y puede existir o no dependiendo de $f(x)$ y de a. Veamos algunos ejemplos.

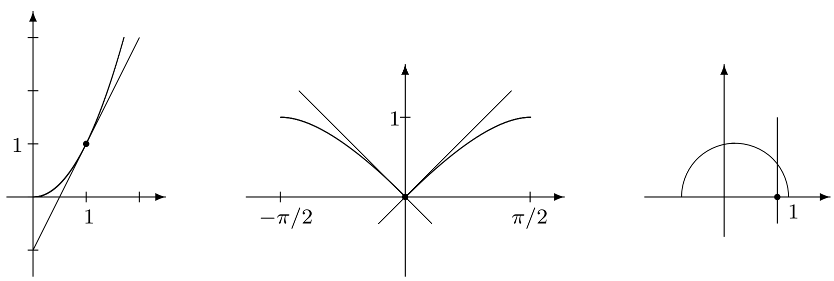
Ejemplo 2.3.2. *Calcular las siguientes derivadas e interpretar gráficamente los resultados:*

1. $f'(1)$*, donde* $f(x) = x^2$.
2. $g'(0)$*, donde* $g(x) = \operatorname{sen}(|x|)$.
3. $h'_-(1)$*, donde* $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ *está definida en* $D = [-1, 1]$.

Solución. 1. $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$, luego la recta tangente por $(1, 1)$ es $y = 2x - 1$ (figura de la izquierda).

2. $g'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ y $g'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\operatorname{sen}(x)}{x} = -1$, luego no existe la derivada, pero $y = x$ es una recta tangente en $(0, 0)$ "por la derecha" e $y = -x$ lo es "por la izquierda" (figura central).

3. Se tiene $m = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{h(x)}{x-1} = -\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = -\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{0} = -\infty$, luego no existe la derivada pero $x = 1$ es una recta vertical tangente en $(1, 0)$ (derecha). ■



Ejemplo 2.3.3. *Hallar la recta tangente a la curva* $y = x^2$ *en un punto arbitrario* $x = a$.

Solución. Como en el apartado 1 del Ejemplo 2.3.2 tenemos

$$y'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a$$

y por tanto la recta tiene por ecuación $y = a^2 + 2a(x-a)$ ó $y = 2ax - a^2$. ■

El apartado 2 del Ejemplo 2.3.2 nos muestra que hay funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto. Lo contrario no puede ocurrir:

Proposición 2.3.4. *Si* $f(x)$ *es derivable en* $x = a$ *entonces es continua en* $x = a$.

Demostración. Definiendo $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ se tiene $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, luego

$$0 = f'(a) \cdot 0 = \lim_{x\to a} [g(x)\,(x-a)] = \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] - f(a)$$

por lo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ y por tanto $f(x)$ es continua en $x = a$. ■

2.3.2. Cálculo de derivadas

Derivación de las funciones elementales

El siguiente resultado recoge las propiedades básicas para el cálculo de derivadas:

Proposición 2.3.5. *Sean f y g funciones derivables, y sea k una constante. Entonces:*

1. $[k]' = 0$.
2. $[kf]'(x) = k\, f'(x)$.
3. $[f \pm g]'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
4. $[fg]'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
5. $[f/g]'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$.
6. $[1/f]'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.
7. $[f \circ g]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ *(regla de la cadena).*
8. $[f^{-1}]'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ *(si existe la función inversa $f^{-1}(x)$).*

A continuación usamos la definición de derivada, las propiedades de los límites y la proposición anterior para calcular las derivadas de las funciones elementales. Los tres primeros ejemplos serán casos particulares de uno posterior para el que necesitaremos la "derivación logarítmica":

Todos los límites se toman con $h \to 0$.

✓ $y(x) = x^n$ (con $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$y'(x) = \lim \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}$$

✓ $y(x) = \sqrt{x}$

$$y'(x) = \lim \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

✓ $y(x) = 1/x$

$$y'(x) = \lim \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim \frac{-h}{xh(x+h)} = \lim \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

✓ $y = \operatorname{sen} x$

Usaremos la fórmula $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$y'(x) = \lim \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \lim \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(h/2)}{h} =$$

$$\lim \left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right] \cdot \lim \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

✓ $y = \cos x$

Usaremos la fórmula $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$y'(x) = \lim \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\lim \frac{2\operatorname{sen}(x+\frac{h}{2})\operatorname{sen}(h/2)}{h} =$$

$$-\lim \left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right] \cdot \lim \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = -\operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x$$

✓ $y = \tan x$

$$y'(x) = \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} 1 + \tan^2 x \\ \text{ó} \\ 1/\cos^2 x \end{cases}$$

✓ $y = \operatorname{arc\,sen} x$

Poniendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = \cos x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✓ $y = \arccos x$

Poniendo $f(x) = \cos x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

✓ $y = \arctan x$

Poniendo $f(x) = \tan x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

✓ $y = e^x$

$$y'(x) = \lim \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

✓ $y = a^x$

Usamos $a^x = e^{x \ln a}$ y la regla de la cadena: $\quad y'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$

✓ $y = \ln x$

Poniendo $f(x) = e^x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = e^x$, luego: $\quad y'(x) = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$

✓ $y = \log_a x$

Como $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ se tiene: $\quad y'(x) = \dfrac{1/x}{\ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$

✓ $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Usamos la técnica llamada **derivación logarítmica**: Primero tomamos logaritmos en la expresión inicial, luego derivamos ambos miembros (en el primero hay que usar la regla de la cadena) y finalmente despejamos el valor de $y'(x)$:

$$\ln y(x) = \alpha \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)}\, y'(x) = \alpha \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) \;=\; \alpha\, y(x)\, \frac{1}{x} \;=\; \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

Obsérvese que, para $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha = 1/2$ y $\alpha = -1$ se obtienen los tres primeros ejemplos.

✓ $y = \operatorname{senh} x$

Usando la regla de la cadena se tiene $[e^{-x}]' = -e^{-x}$, luego:

$$y'(x) = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

✓ $y = \cosh x$

$$y'(x) = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

✓ $y = \tanh x$

$$y'(x) = \left[\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \begin{cases} 1 - \tanh^2 x \\ \text{ó} \\ 1/\cosh^2 x \end{cases}$$

✓ $y = \operatorname{arg\,senh} x$

Poniendo $f(x) = \operatorname{senh} x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = \cosh x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arg\,senh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(\operatorname{arg\,senh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

✓ $y = \arg\cosh x$

Poniendo $f(x) = \cosh x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = \operatorname{senh} x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\arg\cosh x)} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arg\cos x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

✓ $y = \arg\tanh x$

Poniendo $f(x) = \tanh x$ se tiene $y(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(x) = 1 - \tanh^2 x$, luego:

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\arg\tanh x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$

La siguiente tabla resume los resultados de los cálculos anteriores:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$(\ln a)/x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = 1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$1/\sqrt{1 - x^2}$
$\operatorname{arc\,cos} x$	$-1\sqrt{1 - x^2}$
$\arctan x$	$1/(1 + x^2)$
$\arg\operatorname{senh} x$	$1/\sqrt{1 + x^2}$
$\arg\cosh x$	$1/\sqrt{x^2 - 1}$
$\arg\tanh x$	$1/(1 - x^2)$

Derivación implícita

Terminamos este apartado mostrando una técnica de derivación que se usa cuando cierta ecuación $f(x,y)=0$ define a y como función implícita de x (es decir, no podemos despejar y, pero para cada valor de x hay una de y para el que se satisface la ecuación). En este caso se puede derivar la ecuación $f(x,y)=0$ con respecto a x, y aplicando la regla de la cadena al derivar cualquier función de $y=y(x)$.

Ejemplo 2.3.6. *La ecuación $y^3-3x^3y-3x+1=0$ define a y como función implícita de x con $y(1)=2$. Calcular $y'(x)$ en función de $y(x)$ y dar el valor preciso de $y'(1)$.*

Solución. En efecto se tiene $y(1)=2$, pues la ecuación se satisface para los valores $x=1$, $y=2$. Derivando la ecuación se tiene

$$3y^2y'-9x^2y-3x^3y'-3=0 \quad\Rightarrow\quad (y^2-x^3)y'=1+3x^2y \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1+3x^2y}{y^2-x^3}$$

y por tanto $y'(1)=\dfrac{1+3\cdot 1^2\cdot y(1)}{y(1)^2-1^3}=\dfrac{1+3\cdot 2}{2^2-1}=\dfrac{7}{3}$. ■

2.3.3. La función derivada

Definición 2.3.7. Diremos que una función $f(x)$ es *derivable en un conjunto D* si es derivable en cada punto $x\in D$ (si $D=[a,b]$ es un intervalo cerrado, en a sólo consideramos la derivabilidad por la derecha y en b sólo por la izquierda).

En este caso queda definida del modo obvio una función $f':D\to\mathbb{R}$, llamada la *función derivada* de f, que también se denota por Df o por $\frac{df}{dx}$.

Si $f'(x)$ es continua en D diremos que f es *de clase C^1* en D.

Ejemplo 2.3.8. *Dadas las siguientes funciones, definir su valor en $x=0$ para que sean continuas y estudiar la continuidad en $x=0$ de sus funciones derivadas:*

$$f(x)=x\,\mathrm{sen}(1/x) \qquad\qquad g(x)=x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$$

Solución. Los límites con $x\to 0$ de ambas son del tipo "cero por acotada" y por tanto valen 0, por lo que hay que definir $f(0)=0$ y $g(0)=0$ para que sean continuas.

En puntos $x\neq 0$ las derivadas se calculan directamente usando la regla de la cadena:

$$f'(x)=\mathrm{sen}(1/x)+x\cos(1/x)(-1/x^2)=\mathrm{sen}(1/x)-\frac{\cos(1/x)}{x}$$

$$g'(x)=2x\,\mathrm{sen}(1/x)+x^2\cos(1/x)(-1/x^2)=2x\,\mathrm{sen}(1/x)-\cos(1/x)$$

Estas fórmulas no valen para calcular $f'(0)$ ni $g'(0)$; hay que usar la definición:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\,\mathrm{sen}(1/h)}{h}=\lim_{h\to 0}\mathrm{sen}(1/h)$$

y este límite no existe, por lo que $f(x)$ no es derivable en $x = 0$ y $f'(x)$ tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$.

Para g se tiene

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} \, h \operatorname{sen}(1/h) = 0$$

luego $g(x)$ es derivable en cualquier punto. Pero $g'(x)$ también tiene una discontinuidad esencial en $x = 0$, ya que no existe $\lim_{x\to 0} g'(x)$ por no existir $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$. Por tanto g no es de clase C^1 en ningún conjunto que contenga al cero. ∎

2.3.4. Aproximación de valores usando la recta tangente

A menudo, para una función conocemos los valores de $f(a)$ y $f'(a)$ pero no podemos calcular $f(x)$ para otros valores.

En estos casos conocemos la recta tangente, y podemos usarla para aproximar los valores de $f(x)$ cerca de a. Si usamos el símbolo $\approx$ para indicar "aproximadamente" tenemos:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{ó} \qquad f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$$

(con $h = x - a$; la primera expresión vale cuando $x \to a$ y la segunda cuando $h \to 0$).

Ejemplo 2.3.9. *Para $f(x) = e^{x^2-x}$, calcular $f(0)$ y $f'(0)$ y aproximar $f(0'1)$ y $f(0'01)$.*

Solución. $f(0) = e^0 = 1$, y como $f'(x) = (2x - 1)e^{x^2-x}$ entonces $f'(0) = -1$.

Por tanto la recta tangente en $x = 0$ es $y = 1 - x$ y así $f(0'1) \approx 0'9$ y $f(0'01) \approx 0'99$.

Los valores reales son $f(0'1) = e^{-0'09} = 0'913931\ldots$ y $f(0'01) = e^{-0'0099} = 0'990148\ldots$, luego el error es del orden de 10^{-2} en el primer caso y del orden de 10^{-4} en el segundo.

En general, cuanto más cerca está x de a (de 0 en este caso) mayor es la precisión. ∎

Ejemplo 2.3.10. *Aproximar los valores de $\sqrt{25'1}$, $\sqrt{25'2}$, $\sqrt{25'3}$ eligiendo adecuadamente la función $f(x)$ y el punto a.*

Solución. En vista de los valores que se piden, tomamos $f(x) = x^{1/2}$ y $a = 25$, de modo que $f(a) = 5$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ y $f'(25) = 1/10 = 0'1$. Por tanto

$$\sqrt{25 + h} = f(a + h) \approx 5 + 0'1\, h$$

y las aproximaciones correspondientes, con los valores reales entre paréntesis, son

$$5'01(\approx 5'009990020\ldots) \qquad 5'02(\approx 5'019960159\ldots) \qquad 5'03(\approx 5'029910536\ldots)$$

Los errores respectivos son menores que 10^{-5}, $4 \cdot 10^{-5}$ y $9 \cdot 10^{-5}$, y de nuevo vemos que el error aumenta cuando nos alejamos de a. ∎

A veces, más que el valor de $f(x)$ interesa conocer cómo cambia ese valor para pequeñas variaciones o *incrementos* del valor de x. Si usamos $\Delta x = x - a$ para el incremento de x y $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ para el de f, se tiene:

$$\Delta f(x) \approx f'(a)\,\Delta x$$

En otras ocasiones se conoce el *error relativo* máximo que se comete al medir x. Por ejemplo, si medimos x con un aparato cuya precisión es del 5 % podemos asegurar que $\frac{\Delta x}{x} < 0'05$. En estas circunstancias es posible acotar el error que se comete al calcular $f(x)$, como muestra el segundo apartado del ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.3.11. *El volumen de una esfera de radio R es $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. Si tenemos una esfera de aproximadamente 2 metros de radio, se pide:*

1. *Si al medir el radio cometemos un error aproximado de* 1cm*, ¿qué error aproximado tenemos para el volumen?*

2. *Si al medir el radio cometemos un error relativo máximo del* 2 %*, ¿qué cota de error relativo tenemos para el volumen?*

Solución. 1. La hipótesis nos dice que $\Delta R \approx 0'01$. Además tenemos $V'(R) = 4\pi R^2$ y así $V'(2) = 16\pi$, luego

$$\Delta V \approx 16\pi \cdot \Delta R \approx 16\pi \cdot 0'01 = 0'502654\ldots$$

es decir, el error aproximado es de $0'5\,m^3$.

2. Por hipótesis $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leq 0'02$, y así

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{16\pi \cdot \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right| = \frac{12}{R^2}\left|\frac{\Delta R}{V}\right| = 3 \cdot \left|\frac{\Delta R}{R}\right| \leq 3 \cdot 0'02 = 0'06$$

por lo que el error relativo al calcular el volumen es del 6 %. ■

En este tipo de problemas también podemos usar la derivación implícita:

Ejemplo 2.3.12. *La ecuación $y^3 - 3x^3y - 3x + 1 = 0$ define a y como función implícita de x con $y(1) = 2$. Calcular un valor aproximado de $y(0'98)$.*

Solución. En el Ejemplo 2.3.6 vimos que $y'(1) = 7/3$, luego $y(1+h) \approx 2 + \frac{7}{3}h$, y para $h = -0'02$ se tiene $y(0'98) \approx 2 - \frac{7}{3}\,0'02 = 1'953333\ldots$. ■

2.4. Teoremas sobre funciones derivables

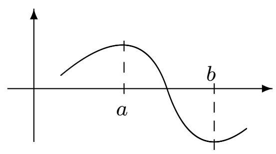
2.4.1. Extremos relativos y puntos críticos

Definición 2.4.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f presenta en $a \in D$ un:

- *máximo relativo* si existe $\delta > 0$ con $f(x) \leq f(a)$ para cualquier $x \in (a-\delta, a+\delta)$.
- *máximo relativo* si existe $\delta > 0$ con $f(x) \geq f(a)$ para cualquier $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Un punto se dice que es un *extremo relativo* si es un máximo o un mínimo relativo.

La definición significa que $f(a)$ es mayor (o menor) que $f(x)$ para x cerca de a, y no importa lo que ocurra lejos de a. Por ejemplo, la siguiente función presenta en a un máximo relativo y en b un mínimo relativo.

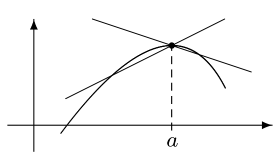


Definición 2.4.2. Se dice que a es un *punto crítico* de la función $f(x)$ si $f'(a) = 0$.

Es decir, los puntos críticos de una función son aquellos donde la tangente a la curva es horizontal. Calcularlos es tan sencillo o complicado como lo sea derivar $f(x)$ y resolver la ecuación $f'(x) = 0$. Éstos son los únicos puntos donde se pueden presentar extremos relativos:

Teorema 2.4.3. *Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y presenta en $a \in D$ un extremo relativo, entonces a es un punto crítico de f, es decir $f'(a) = 0$.*

Demostración. Supongamos que el extremo es un máximo relativo (para el caso de un mínimo el razonamiento es análogo). Si $x \to a^+$ entonces $f(x) - f(a)$ es negativo y $x - a$ es positivo, luego $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es negativo y por tanto $f'_+(a) \leq 0$. De modo análogo se ve que $f'_-(a) \geq 0$, y como ambas derivadas laterales deben coincidir sólo puede ser $f'(a) = 0$.



Gráficamente, las secantes trazadas a la izquierda tienen pendiente positiva y las trazadas a la derecha la tienen negativa, luego la tangente debe tener pendiente nula. ∎

En la práctica, un punto crítico puede o no ser un extremo. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = x^3$ tienen un punto crítico en $a = 0$, en el que se alcanza un máximo relativo para f, un mínimo relativo para g y ninguna de las dos cosas para h.

Más tarde veremos cómo decidir si se tiene o no un extremo, y de qué tipo es. Por ahora podemos resolver el problema más sencillo de los extremos absolutos:

Extremos absolutos

Por el teorema de Weierstrass, una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza sus extremos absolutos en $[a, b]$. Si es derivable, podemos encontrarlos como sigue:

1. Se calculan los valores de f en los extremos del intervalo: $f(a)$ y $f(b)$.
2. Se calculan los puntos críticos de f en (a, b), y los valores de f en esos puntos.
3. El mayor de esos valores es el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

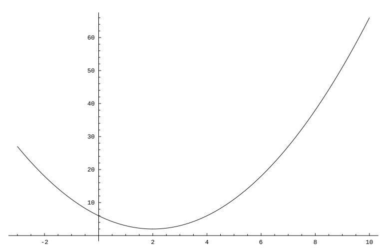
Un extremo absoluto no tiene por qué ser relativo, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.4. *Hallar el máximo y mínimo absolutos de* $f(x) = x^2 - 4x + 6$ *en* $[-3, 10]$.

Solución. En los extremos del intervalo se tiene $f(-3) = 27$ y $f(10) = 66$. Como la derivada vale $f'(x) = 2x - 4$, el único punto crítico de la función es $x = 2$, con $f(2) = 2$.

Por tanto el máximo absoluto se alcanza en $x = 10$ y vale 66, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en $x = 2$ y vale 2.

Geométricamente tenemos una parábola con vértice en $(2, 2)$ y gráfica



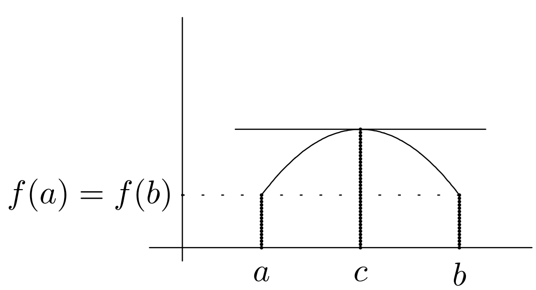
lo que está de acuerdo con el resultado obtenido. ∎

2.4.2. El teorema de Rolle; consecuencias

Teorema 2.4.5 (de Rolle). *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b). *Si* $f(a) = f(b)$, *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostración. Si $f(x)$ es constante $f'(x) = 0$ parta todo $x \in (a, b)$. En otro caso alcanza un extremo absoluto (y por tanto relativo) en un punto $c \in (a, b)$, luego $f'(c) = 0$. ∎

Gráficamente:

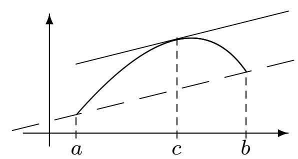


Usando este teorema podemos obtener otros resultados importantes:

Teorema 2.4.6 (del Valor Medio o de los incrementos finitos de Lagrange). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ con*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad ó \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Es decir, la tangente en $x = c$ es paralela a la recta que une los extremos de la gráfica:



Demostración. La siguiente función satisface las hipótesis del Teorema de Rolle:

$$g(x) = f(a) - f(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad \text{con} \qquad g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$$

y por tanto existe $c \in (a,b)$ con $g'(c) = 0$, o sea con $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Teorema 2.4.7 (del Valor Medio de Cauchy). *Sean f y g continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) \qquad ó \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(la segunda expresión sólo es válida cuando los denominadores no son nulos).

Demostración. Aplíquese Rolle a $h(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))$. ■

Teorema 2.4.8. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b).*

(i) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es constante $[a,b]$.

(ii) Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f y g "se diferencian en una constante", es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in (a,b)$.

Demostración. 1. Veamos que $f(x) = f(a)$ para cualquier $x \in (a,b]$. Aplicando el teorema de los incrementos finitos en $[a,x]$ se obtiene $c \in (a,x)$ con $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0$, de donde $f(x) = f(a)$.

2. La función $h(x) = f(x) - g(x)$ verifica $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para $x \in [a,b]$. Por el apartado anterior existe $k \in \mathbb{R}$ con $h(x) = k$, o sea $f(x) = g(x) + k$, para $x \in [a,b]$. ■

2.4.3. La regla de l'Hôpital; cálculo de límites

Teorema 2.4.9 (Regla de l'Hôpital). *Supongamos que el límite* $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x))$ *(donde* c *puede ser* ∞*) es una indeterminación del tipo* $0/0$ *o* ∞/∞*. Si* f *y* g *son derivables y existe* $\lim_{x\to c}(f'(x)/g'(x))$ *entonces se tiene*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 2.4.10. *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}$$

Solución. En el primero hay que aplicar repetidamente la regla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

El segundo no es del tipo $0/0$ ó ∞/∞, pero podemos convertirlo en uno de ellos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\operatorname{sen}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen}x}=\frac{0}{2}=0$$

En el último no podemos aplicar la regla de L'Hôpital ya que al derivar numerador y denominador se obtiene $\frac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$, cuyo límite en ∞ no existe. Pero el límite se puede calcular directamente, dividiendo por x en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

■

2.5. Métodos numéricos de resolución de ecuaciones

2.5.1. Localización y unicidad de soluciones

Sea f una función continua. Una *raíz* de $f(x)$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$. *Localizar* una raíz de $f(x)$ es encontrar un intervalo $[a, b]$ en el que la función cambia de signo; en él habrá una raíz por el teorema de Bolzano.

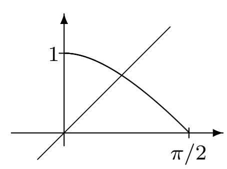
En general, esta solución no será única, pero en muchas ocasiones sí podemos asegurar que lo es, gracias al siguiente resultado:

Proposición 2.5.1. *Si $f(x)$ es derivable en un intervalo (a, b) con $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = 0$ tiene a lo sumo una raíz en (a, b).*

Demostración. Supongamos que existieran $c < d \in (a, b)$ con $f(c) = 0 = f(d)$. Entonces por el teorema de Rolle habría un punto del intervalo (c, d) con derivada nula, en contra de la hipótesis. En consecuencia no puede haber más de una solución. ■

Ejemplo 2.5.2. *Demostrar que la ecuación $x = \cos x$ tiene una única solución en $[0, \pi/2]$.*

Solución. Buscamos raíces de $f(x) = x - \cos x$, que es es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Como $f(0) = -1$ y $f(\pi/2) = 1$, el teorema de Bolzano nos asegura que existe una raíz en $(0, \pi/2)$, que es única pues $f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x \neq 0$ para $x \in (0, \pi/2)$. ■

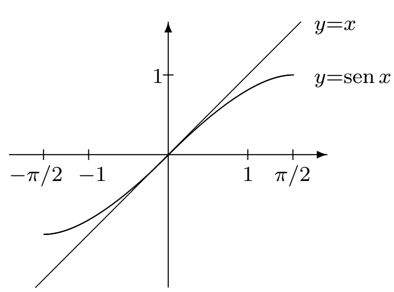


La Proposición 2.5.1 también puede usarse para demostrar que se verifican ciertas desigualdades; por ejemplo:

Ejemplo 2.5.3. *Demostrar que se tiene:* $\begin{cases} x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x < x \\ x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x > x \end{cases}$

Solución. Veamos el caso $x > 0$ (el otro es entonces elemental pues $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$).

Supongamos, en busca de una contradicción, que para cierto $a > 0$ se tuviera $a \leq \operatorname{sen} a$ (y por tanto $a \leq 1$). Entonces la función $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ verificaría $f(a) \leq 0$ y $f(1) > 0$, luego tendría una raíz en $[a, 1)$. Como $f(0) = 0$, tendríamos dos raíces en $(-1, 1)$, pero no puede haber más de una pues $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ para $x \in (-1, 1)$, y esta es la contradicción que buscábamos. ■



Ejemplo 2.5.4. *Localizar todas las raíces del polinomio* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$.

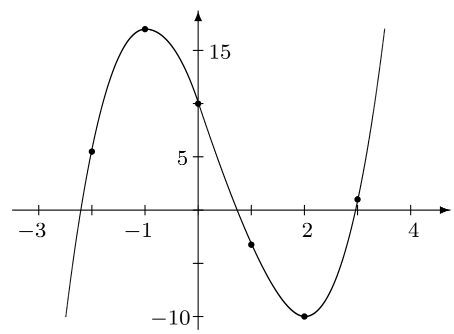
Solución. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$ es una parábola que se anula en $x = -1$ y en $x = 2$, es negativa en el intervalo $(-1, 2)$ y es positiva en $(-\infty, -1)$ y en $(2, +\infty)$. Por tanto, en cada uno de esos intervalos hay a lo sumo una raíz.

Como $f(-1) = 17$ y $f(2) = -10$, hay una raíz en $(-1, 2)$; podemos hilar más fino calculando $f(0) = 10$ y $f(1) = -3$ para deducir que esa raíz está en el intervalo $(0, 1)$.

Como $f(3) = 1$, hay una raíz en $(2, 3)$, que es la única en $(2, +\infty)$.

Como $f(-2) = 6$ tiene el mismo signo que $f(-1)$, hay que buscar más a la izquierda. Como $f(-3) = -35$, hay una raíz en $(-3, -2)$, que es la única en $(-\infty, -1)$.

Así, hay exactamente tres raíces, localizadas en los intervalos $(-3, -2)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$. ∎



2.5.2. Método de bisección

Es un algoritmo muy simple, aunque bastante lento, para hallar las raíces de una función continua, y consiste en:

1º. Localizar un intervalo de la recta real $[a, b]$ donde f cambie de signo ($f(a)f(b) < 0$). El teorema de Bolzano nos asegura que en el intervalo $[a, b]$ hay una raíz.

2º. Calcular $f(\frac{a+b}{2})$, el valor de f en el punto medio del intervalo. Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ hemos terminado. En caso contrario elegimos el subintervalo en el que f cambia de signo.

3º. Repetir el proceso para ir "acorralando" a la raíz.

Ejemplo 2.5.5. *Aproximar una raíz de* $f(x) = x^3 + x - 1$ *con 2 cifras decimales.*

Solución. Como $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, hay una raíz en $I_0 = [0, 1]$.
En el punto medio se tiene $f(0'5) < 0$, luego la raíz está en el intervalo $I_1 = [0'5, 1]$.
En el punto medio se tiene $f(0'75) > 0$, luego la raíz está en el intervalo $I_2 = [0'5, 0'75]$.
Continuando así se obtienen los intervalos

$$I_3 = [0'625, 0'75] \quad I_4 = [0'625, 0'6875] \quad I_5 = [0'65625, 0'6875] \quad I_6 = [0'671875, 0'6875]$$

$$I_7 = [0'6796875, 0'6875] \quad I_8 = [0'6796875, 0'68359375] \quad I_9 = [0'681640625, 0'68359375]$$

por lo que la aproximación pedida es $0'68$.

Si nos pidieran 4 decimales habría que llegar hasta $I_{14} = [0'682312\ldots, 0'682373\ldots]$, o mejor hasta $I_{15} = [0'682312\ldots, 0'682342\ldots]$ para estar seguros de que la quinta cifra decimal no es superior a 5 (en ese caso habría que redondear a $0'6824$). ∎

2.5.3. Método de iteración (puntos fijos)

Vimos tras el Teorema de Bolzano que toda función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ tiene un punto fijo, es decir, una solución de $f(x) = x$. El *método de iteración* es un algoritmo muy sencillo para encontrar esos puntos fijos:

Se elige un punto $x_0 \in [a, b]$, y llamamos $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Si la sucesión (x_n) así obtenida *converge* a un punto c (es decir, si sus valores "se van centrando" en cierto valor c) entonces[7] c es un punto fijo de f.

Ejemplo 2.5.6. *Aproximar con 4 cifras decimales una solución de* $\cos x = x$.

Solución. Ya localizamos una solución en $[0, 1]$. Llamamos $f(x) = \cos x$ y aplicamos el método a partir de $x_0 = 0'5$. Se obtiene así $x_1 = \cos(0'5) = 0'87758\ldots$ y sucesivamente

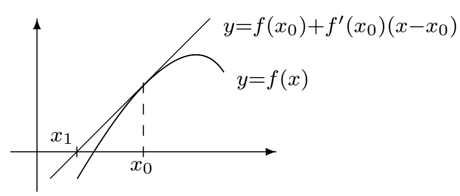
$$\begin{array}{rlrlrlrl}
x_2 &= 0'63901\ldots & x_8 &= 0'73008\ldots & x_{14} &= 0'73824\ldots & x_{20} &= 0'73900\ldots \\
x_3 &= 0'80268\ldots & x_9 &= 0'74512\ldots & x_{15} &= 0'73964\ldots & x_{21} &= 0'73913\ldots \\
x_4 &= 0'69477\ldots & x_{10} &= 0'73500\ldots & x_{16} &= 0'73870\ldots & x_{22} &= 0'73904\ldots \\
x_5 &= 0'76819\ldots & x_{11} &= 0'74182\ldots & x_{17} &= 0'73934\ldots & x_{23} &= 0'73910\ldots \\
x_6 &= 0'71916\ldots & x_{12} &= 0'73723\ldots & x_{18} &= 0'73891\ldots & x_{24} &= 0'73906\ldots \\
x_7 &= 0'75235\ldots & x_{13} &= 0'74032\ldots & x_{19} &= 0'73920\ldots & x_{25} &= 0'73909\ldots
\end{array}$$

a partir de este momento se estabilizan las cuatro primeras cifras decimales, y la quinta es superior a 5, por lo que la aproximación pedida es $0'7391$. ■

2.5.4. Método de Newton-Raphson

Se utiliza para hallar raíces de una función derivable f. La idea es sólo un poco más elaborada que la del método de bisección, pero es igualmente fácil de programar (si se conoce la expresión de $f'(x)$) y mucho más rápido.

La idea es la siguiente: Si x_0 es una primera aproximación de la raíz (por ejemplo, el punto medio de un intervalo donde la función cambie de signo), consideramos la recta tangente a $y = f(x)$ en x_0, de ecuación $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, y tomamos como siguiente aproximación x_1 la raíz de esta recta, que vale $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



Repitiendo esta idea, las siguientes aproximaciones siguen la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{ó} \qquad x_{sig} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

A veces esta sucesión no converge, pero cuando lo hace se estabiliza rápidamente.

[7]La demostración usa el hecho de que las funciones continuas se llevan bien con las sucesiones, en el sentido de que $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$, y así para la sucesión dada $f(c) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = c$.

Ejemplo 2.5.7. *Aproximar con 6 decimales una solución de la ecuación* $5x^3 - 20x + 3 = 0$.

Solución. Sea $f(x) = 5x^3 - 20x + 3$. Como $f(0) = 3$ y $f(1) = -12$, hay una solución en $[0, 1]$, por lo que tomaremos $x_0 = 0'5$. Por otra parte

$$x_{sig} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{5x^3 - 20x + 3}{15x^2 - 20} = \frac{10x^3 - 3}{15x^2 - 20}$$

y así se obtienen las aproximaciones sucesivas

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0'10769230\ldots & x_3 = 0'15085831\ldots \\ x_2 = 0'15068621\ldots & x_4 = 0'15085831\ldots \end{array}$$

por lo que la aproximación pedida es $0'150858$. ■

Ejemplo 2.5.8. *Aproximar con 10 cifras decimales una solución de la ecuación* $x^2 = e^x$.

Solución. Buscamos raíces de $f(x) = e^x - x^2$, para la que se tiene $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$. En consecuencia empezamos con $x_0 = -0'5$, y las siguientes aproximaciones siguen la fórmula

$$x_{sig} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - x^2}{e^x - 2x} = \frac{(x-1)\,e^x - x^2}{e^x - 2x}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = -0'721925835997\ldots & x_4 = -0'703467422498\ldots \\ x_2 = -0'703600833868\ldots & x_5 = -0'703467422498\ldots \\ x_3 = -0'703467429540\ldots & \end{array}$$

por lo que la aproximación pedida es $-0'7034674225$. ■

Veamos dos ejemplos que ilustran cuánto más rápido es este método que los anteriores:

Ejemplo 2.5.9. *Hallar una raíz del polinomio* $x^3 + x - 1 = 0$. *(Véase el Ejemplo 2.5.5).*

Solución. Como vimos, hay una raíz en $[0, 1]$. Tomamos pues $x_0 = 0'5$ y

$$x_{sig} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + x - 1}{3x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}$$

y así:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0'7142857143\ldots & x_4 = 0'6823278038\ldots \\ x_2 = 0'6831797235\ldots & x_5 = 0'6823278038\ldots \\ x_3 = 0'6823284233\ldots & \end{array}$$

de modo que tras 5 pasos ya podemos dar una aproximación con 10 cifras decimales. ■

Ejemplo 2.5.10. *Resolver la ecuación* $\cos x = x$. *(Véase el Ejemplo 2.5.6).*

Solución. Como vimos, la raíz de $f(x) = x - \cos x$ está en $[0, 1]$. Así $x_0 = 0'5$ y

$$x_{sig} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0'7552224171056364\ldots & x_4 = 0'7390851332151607\ldots \\ x_2 = 0'7391416661498792\ldots & x_5 = 0'7390851332151607\ldots \\ x_3 = 0'7390851339208067\ldots & \end{array}$$

Ahora en el quinto paso ya tenemos 16 cifras decimales. ■

2.6. Polinomios de Taylor

2.6.1. Derivadas sucesivas

Definición 2.6.1. Sea $f(x)$ una función derivable en un conjunto D. Si $f'(x)$ es derivable en D, podemos de nuevo calcular su función derivada, que se denota por $f''(x)$ y se llama la *derivada segunda* de f.

Del mismo modo se definen la derivada tercera, cuarta, y en general la *derivada n-ésima* (o *de orden* n) de f, denotadas por $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$ y en general por $f^{(n)}(x)$.

Si $f^{(n)}$ es continua en D se dice que f es *de clase* C^n en D, y si existen las derivadas sucesivas de f de cualquier orden se dice que f es *de clase* C^∞ en D.

Ejemplo 2.6.2. *Calcular la derivada n-ésima de las funciones siguientes:*

- $y = 2x^3 - 3x + 2$: $\quad y' = 6x^2 - 3, \quad y'' = 12x, \quad y''' = 12$ y para $n \geq 4 \quad y^{(n)} = 0$.
- $y = e^{3x}$: $\quad y' = 3e^{3x}, \quad y'' = 9e^{3x}, \quad y''' = 27e^{3x}$ y en general $y^{(n)} = 3^n e^{3x}$.
- $y = \ln(1+x)$:
  $y' = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad y'' = -(1+x)^{-2}, \quad y''' = 2(1+x)^{-3}, \quad y^{iv} = -3!(1+x)^{-4}$
  y en general $\quad y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$.
- $y = (1-ax)^{-1}$:
  $y' = -(1-ax)^{-2}(-a) = a(1-ax)^{-2}, \quad y'' = 2a^2(1-ax)^{-3}, \quad y''' = 3!\,a^3(1-ax)^{-4}$,
  y en general $\quad y^{(n)} = n!\,a^n(1-ax)^{-(n+1)}$.
- $y = \operatorname{senh}(bx)$: $\quad y' = b\cosh(bx), \quad y'' = b^2\operatorname{senh}(bx), \quad y''' = b^3\cosh(bx)$, y así
  $$y^{(n)} = b^n \operatorname{senh}(bx) \text{ si } n \text{ es par} \qquad \text{e} \qquad y^{(n)} = b^n\cosh(bx) \text{ si } n \text{ es impar}$$

Observación 2.6.3. Consideremos el siguiente polinomio de grado n y sus derivadas:

$$\begin{aligned}
P(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n \\
P'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} \\
P''(x) &= 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)(x-a)^{n-2} \\
P'''(x) &= 3!\,c_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} \\
&\vdots \\
P^{(n)}(x) &= n!\,c_n
\end{aligned}$$

Sustituyendo $x = a$ y despejando se tiene

$$c_0 = P(a) \qquad c_1 = P'(a) \qquad c_2 = \frac{1}{2}P''(a) \qquad c_3 = \frac{1}{3!}P'''(a) \qquad \cdots \qquad c_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(a)$$

de modo que el polinomio queda determinado si conocemos sus derivadas sucesivas en a. Obsérvese que además podemos poner $c_0 = \dfrac{1}{0!}P(a)$, $c_1 = \dfrac{1}{1!}P'(a)$ y $c_2 = \dfrac{1}{2!}P''(a)$.

2.6.2. Polinomios de Taylor

Cerca de $x = a$, una función derivable $f(x)$ "se parece" a su recta tangente

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

que es un polinomio de grado 1 que claramente verifica

$$g(a) = f(a) \qquad \text{y} \qquad g'(a) = f'(a)$$

Si además conocemos $f''(a), f'''(a), \dots, f^{(n)}(a)$, es razonable pensar que un polinomio de grado n que tenga esos mismos valores para sus n primeras derivadas en a se parecerá mucho a la función $f(x)$, al menos cerca de $x = a$. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 2.6.4. Sea $f(x)$ una función de clase C^n en D, y sea $a \in D$.

El *polinomio de Taylor* de grado n de f en a es el único polinomio $P_n(x)$ de grado n con

$$P_n(a) = f(a) \quad P_n'(a) = f'(a) \quad P_n''(a) = f''(a) \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

En virtud de la Observación 2.6.3 se tiene

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

o, haciendo $h = x - a$,

$$P_n(a + h) = f(a) + f'(a)\,h + \frac{f''(a)}{2}\,h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,h^n$$

En particular, el polinomio de grado 1 es la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$.

El *resto de orden* n del polinomio de Taylor es la diferencia

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$$

y por tanto su valor absoluto mide el error que se comete si se usa el polinomio para aproximar el valor de la función en x.

Veamos cómo se usa el polinomio de Taylor para aproximar valores de funciones, y cómo estas aproximaciones son mejores que las obtenidas con la recta tangente:

Ejemplo 2.6.5. *Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ en $a = 25$, y usarlo para aproximar los valores de $\sqrt{25'1}$, $\sqrt{25'2}$, $\sqrt{25'3}$. (Véase el Ejemplo 2.3.10).*

Solución. $f(a) = 5$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f'(25) = 1/10$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ y $f''(25) = -1/500$. Por tanto

$$P_2(25 + h) = 5 + \frac{h}{10} - \frac{h^2}{1000}$$

y las aproximaciones correspondientes, con los valores reales entre paréntesis, son

$$5'00999 (\approx 5'009990020\dots) \quad 5'01996 (\approx 5'019960159\dots) \quad 5'02991 (\approx 5'029910536\dots)$$

y los errores respectivos son menores que $2 \cdot 10^{-8}$, $2 \cdot 10^{-7}$ y $6 \cdot 10^{-7}$. ∎

2.6.3. Cálculo de polinomios de Maclaurin

Definición 2.6.6. El *polinomio de Maclaurin* de grado n de f no es más que el correspondiente polinomio de Taylor en $a=0$, o sea:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Ejemplo 2.6.7. *Calcular el polinomio de Maclaurin de grado n las funciones:*

- $f(x)=e^x$: Como $f^{(n)}(x)=e^x$ y $f^{(n)}(0)=1$, se tiene

$$f(x)=e^x \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

- $f(x)=e^{bx}$: Vimos que $f^{(n)}(x)=b^n e^{bx}$, luego $f^{(n)}(0)=b^n$ y así

$$f(x)=e^{bx} \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 1 + bx + \frac{(bx)^2}{2} + \frac{(bx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(bx)^n}{n!}$$

- $f(x)=\ln(1+x)$: Vimos que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, de modo que $f(0)=0$ y $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, luego

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}$$

- $f(x)=(1-x)^{-1}$: Vimos que $f^{(n)}(x)=n!\,(1-x)^{-(n+1)}$, luego $f^{(n)}(0)=n!$ y así

$$f(x)=(1-x)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

- $f(x)=\operatorname{sen}(x)$: Las derivadas sucesivas valen $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $-\operatorname{sen}(x)$, $-\cos(x)$ y vuelta a empezar. Sus valores en 0 son 0, 1, 0, -1, etc., de modo que

$$f(x)=\operatorname{sen}(x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

  y análogamente

$$f(x)=\cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$f(x)=\operatorname{senh}(x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$f(x)=\cosh(x) \qquad \Rightarrow \qquad P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Proposición 2.6.8. *Sean $F(x)$ y $G(x)$ los polinomios de Maclaurin de grado n de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Entonces:*

1. *El polinomio de Maclaurin de grado n de $b \cdot f(x)$ es $b \cdot F(x)$.*
2. *El polinomio de Maclaurin de grado n de $f(bx)$ es $F(bx)$.*
3. *El polinomio de Maclaurin de grado n de $f(x) \pm g(x)$ es $F(x) \pm G(x)$.*
4. *El polinomio de Maclaurin de grado n de $f(x) \cdot g(x)$ se obtiene "truncando $F(x) \cdot G(x)$ en grado n", es decir, despreciando los términos de grado mayor que n.*
5. *El polinomio de Maclaurin de grado n de $f(x)/g(x)$ se obtiene truncando en grado n el cociente $F(x)/G(x)$ cuando se calcula escribiendo los grados de menor a mayor.*

Observación 2.6.9. Este resultado es útil porque ahorra los cálculos de las derivadas sucesivas. Sin embargo, cuando además de conocer el polinomio queramos controlar el resto, necesitaremos conocer la expresión general de derivada de orden $n+1$, por lo que tendremos que calcular las anteriores y entonces este resultado perderá su utilidad.

Ejemplo 2.6.10. *Calcular los polinomios de Maclaurin que se indican.*

- $e^x \cos(2x)$, grado 3. El polinomio de e^x ya lo conocemos, y es $F(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. El de $\cos(x)$ es $1 - \frac{x^2}{2}$ (no tiene término en x^3), luego el de $\cos(2x)$ es $G(x) = 1 - 2x^2$, por el apartado 2 anterior. Truncando $F(x) \cdot G(x)$ en grado 3 se obtiene finalmente
$$1\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - 2x^2(1 + x + \cdots) \;=\; 1 + x - \frac{3x^2}{2} - \frac{11x^3}{6}$$

- $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, grado n. Se tiene $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1+(-x))$, luego el polinomio es
$$\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right] - \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \cdots\right] = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots$$

- $(1-x)^{-1}$, grado n. La función es $1/(1-x)$, y los polinomios de Maclaurin del numerador y el denominador son 1 y $1-x$. Dividiendo como se indica en el apartado 5:
$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - x \\ \cline{2-2}
\underline{-1 + x} & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\quad x & \\
\quad \underline{-x + x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{-x^2 + x^3} & \\
\qquad\quad x^3 \quad \cdots &
\end{array}$$
y por tanto el polinomio (que ya habíamos calculado antes usando la definición) es $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$.

- $e^x/\cos(x)$, grado 3. Dividiendo $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ entre $1 - \frac{1}{2}x^2$ como en el ejemplo anterior y truncando en grado 3 se obtiene el polinomio $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$.

2.6.4. Fórmula del resto de Lagrange; acotación de errores

El polinomio de Taylor $P_n(x)$ se introduce con la idea de aproximar valores de la función $f(x)$, por lo que esencial controlar el error cometido en estas aproximaciones, es decir, es el valor absoluto del resto $R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$.

Dar el valor exacto del error sería tanto como dar el valor exacto de $f(x)$, por lo que nos conformamos con acotarlo por un valor pequeño para tener una medida del error máximo cometido. Para encontrar esa cota se suele usar el resultado siguiente:

Teorema 2.6.11 (Fórmula del resto de Lagrange). *Sea $f(x)$ una función de clase C^{n+1} en D, sea $a \in D$ y sea $R_{n+1}(x)$ el resto de orden n del polinomio de Taylor de f en a. Entonces existe un punto ξ entre x y a tal que*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Observación 2.6.12. Como $f^{(n+1)}(x)$ es continua y ξ está en el intervalo cerrado determinado por a y x, el teorema de Weierstrass asegura que el valor de

$$f^{(n+1)}(\xi)$$

está acotado. Si somos capaces de encontrar explícitamente una cota (en función de x) entonces tendremos también una cota para el error, como veremos en los ejemplos.

Por otra parte, como $f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ está acotado, se tiene

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a) = 0$$

lo que nos dice que el error es "mucho menor" que $(x-a)^n$, y en particular (cerca de a) es menor cuanto mayor es el grado del polinomio.

Para acotar un resto son pues importantes el grado del polinomio y el punto x cuyo valor se quiere aproximar. Vemos a continuación tres tipos de problemas que se nos pueden presentar. En uno tenemos prescrito un punto x y un error máximo, y buscamos el menor grado n para el que no se supera ese error. En otro conocemos el grado y buscamos los valores x para los que no se supera cierto error prefijado. En el último conocemos el grado y el punto en el que queremos aproximar el valor, y hallamos una cota para el error cometido.

Ejemplo 2.6.13. *Se quiere usar el polinomio de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para aproximar el valor de $e = f(1)$ con un error menor que 10^{-5}. ¿Qué grado hay que tomar? ¿Qué valor aproximado se obtiene para e? (Nota: se supone conocida la cota $e < 3$).*

Solución. El polinomio es $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ con resto $R_{n+1}(x) = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ para cierto ξ entre 0 y x. Para $x = 1$ se tiene $0 < \xi < 1$, luego $|e^\xi| < e < 3$ y así

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{3}{(n+1)!}$$

Buscamos por tanto el menor n para el que se tenga $3/(n+1)! < 10^{-5}$, ó $(n+1)! > 3\cdot 10^5$, por lo que hemos de tomar grado $n=6$. La aproximación vale:

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5{,}040}+\frac{1}{40{,}320} = \frac{109{,}601}{40{,}320} = 2'718278\ldots$$

de modo que, redondeando en la quinta cifra decimal, tenemos $e \approx 2'71828$. ■

Ejemplo 2.6.14. *¿Para qué valores positivos de x se comete un error menor que 10^{-3} al aproximar la función $\sqrt{1+x}$ por su polinomio de Maclaurin de grado 3?*

Solución. Las derivadas sucesivas de $y=(1+x)^{1/2}$ valen

$$y' = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \qquad y'' = \frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2} \qquad y''' = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \qquad y^{iv} = \frac{-15}{16}(1+x)^{-7/2}$$

por lo que el polinomio es $P_3(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$ con error

$$R_4(x) = \frac{1}{4!}\,\frac{15}{16}\,(1+\xi)^{-7/2}x^4 = \frac{5}{128}\,(1+\xi)^{-7/2}x^4$$

donde $0<\xi<x$. Como la función $(1+\xi)^{-7/2}$ es positiva y decreciente, alcanza su máximo a la izquierda del intervalo $[0,x]$, y ese máximo vale 1. Por tanto $R_4(x) = \frac{5}{128}\,x^4$, que es menor que 10^{-3} cuando $5x^4 < 0'128$, o sea cuando $x < \sqrt[4]{0'0256} = 0'4$.

En consecuencia, para los valores de x en $[0,0'4]$ se tiene asegurado ese error máximo. ■

Ejemplo 2.6.15. *Usar el polinomio de Maclaurin de grado 3 de $f(x) = e^x\cos(2x)$ para aproximar el valor de $f(0'1)$, acotando el error cometido.*

Solución. El polinomio ya lo hemos calculado usando la Proposición 2.6.8, y de él obtenemos el valor aproximado:

$$P_3(x) = 1+x-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3 \quad \Rightarrow \quad f(0'1)\approx P_3(0'1) = 1'08316\hat{6}$$

Para acotar el error necesitamos calcular las primeras derivadas sucesivas hasta obtener $f^{iv}(x) = e^x\,(24\operatorname{sen}(2x)-7\cos(2x))$, y así

$$|R_4(0'1)| = \frac{1}{4!}\,|24\operatorname{sen}(2\xi)-7\cos(2\xi)|\,0'1^4$$

con $\xi\in(0,0'1)$. Usando las desigualdades $|a+b|\le|a|+|b|$, $|\operatorname{sen} z|\le 1$ y $|\cos z|\le 1$ obtenemos una cota para el error

$$|R_4(0'1)| \le \frac{1}{24}(24+7)10^{-4} < 1'3\cdot 10^{-4}$$

que puede mejorarse un poco si en lugar de $|\operatorname{sen} z|\le 1$ usamos la desigualdad $|\operatorname{sen} z|<|z|$, que aplicada a nuestra situación nos da $|\operatorname{sen}(2\xi)| < 2\xi < 2\cdot 0'1 = 0'2$ y así

$$|R_4(0'1)| \le \frac{1}{24}(4'8+7)10^{-4} < \frac{12}{24}10^{-4} < 0'5\cdot 10^{-4}$$

El valor “real” de $f(0'1)$ es $e^{0'1}\cos(0'2) = 0'8314108\ldots$, por lo que el error “real” es menor que $0'26\cdot 10^{-4}$ y no está muy lejos del error teórico. ■

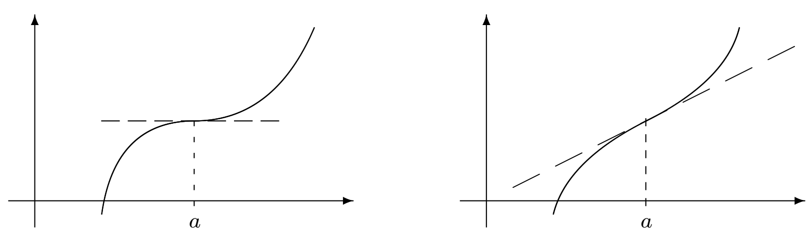
2.7. Crecimiento y representación gráfica de funciones

2.7.1. Crecimiento, concavidad e inflexión

Definición 2.7.1. Sean $f(x)$ una función, D un conjunto y a un punto. Se dice que:

- f *crece* o *es creciente* en D si para $x_1 < x_2$ en D se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.
- f *decrece* o *es decreciente* en D si para $x_1 < x_2$ en D se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.
- f es creciente o decreciente en a si lo es en un intervalo de la forma $(a - \delta, a + \delta)$.
- f es *cóncava* en a si la recta tangente en a queda por debajo de la curva $y = f(x)$.
- f es *convexa* en a si la recta tangente en a queda por encima de la curva $y = f(x)$.
- f tiene en a un *punto de inflexión* si la recta tangente en a "atraviesa" a la curva.

Por ejemplo, las dos siguientes curvas son crecientes, tienen un punto de inflexión en a, son convexas a la izquierda de a y son cóncavas a la derecha de a:



Proposición 2.7.2. *Para una función $f(x)$ de clase C^1 en D y para $a \in D$ se tiene:*

1. *Si $f'(a) > 0$ entonces f es creciente en a.*
2. *Si $f'(a) < 0$ entonces f es decreciente en a.*

Proposición 2.7.3. *Para una función $f(x)$ de clase C^2 en D y para $a \in D$ se tiene:*

1. *Si $f''(a) > 0$ entonces f es cóncava en a.*
2. *Si $f''(a) < 0$ entonces f es convexa en a.*
3. *Si f tiene un punto de inflexión en a entonces $f''(a) = 0$.*
4. *Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en a.*

Los resultados que siguen nos permiten decidir si un punto crítico de una función es o no un extremo relativo.

En el primero de ellos, que suele ser suficiente a efectos prácticos, escribiremos $f'(a^+) > 0$ para indicar que $f'(x) > 0$ "a la derecha de a", es decir, que $f'(x) > 0$ para los x de cierto intervalo $(a, a+\delta)$. En un sentido análogo escribiremos $f'(a^-) > 0$, $f'(a^+) < 0$ y $f(a^-) < 0$.

Proposición 2.7.4. *Sea $f(x)$ una función de clase C^1 en D con un punto crítico $a \in D$:*

1. *Si $f'(a^-) > 0$ y $f'(a^+) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en a.*
2. *Si $f'(a^-) < 0$ y $f'(a^+) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en a.*
3. *Si $f'(a^-) > 0$ y $f'(a^+) > 0$ entonces f crece y tiene un punto de inflexión en a.*
4. *Si $f'(a^-) < 0$ y $f'(a^+) < 0$ entonces f decrece y tiene un punto de inflexión en a.*

Ejemplo 2.7.5. *Analizar los puntos críticos de $f(x) = (x-3)^5\,(x+1)$.*

Solución. La derivada vale

$$f'(x) = 5(x-3)^4(x+1) + (x-3)^5 = (x-3)^4(5x+5+x-3) = 2(x-3)^4(3x+1)$$

y por tanto los puntos críticos son 3 y $\frac{-1}{3}$. Claramente se tiene $f'(3^-) > 0$ y $f(3^+) > 0$, por lo que f crece y tiene un punto de inflexión en $x = 3$. En cambio se tiene $f'((\frac{-1}{3})^-) < 0$ y $f((\frac{-1}{3})^+) > 0$, y en consecuencia f alcanza un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{3}$. ■

Proposición 2.7.6. *Sea $f(x)$ una función de clase C^2 en D con un punto crítico $a \in D$:*

1. *Si $f''(a) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en a.*
2. *Si $f''(a) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en a.*

Cuando $f''(a) = 0$ la proposición anterior no afirma nada, y hay que usar esta otra:

Proposición 2.7.7. *Sea $f(x)$ una función de clase C^n en D con un punto crítico $a \in D$, y sea $f^{(n)}(a)$ la primera derivada que no se anula en a. Es decir, se supone que*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad y \qquad f^{(n)}(a) \neq 0$$

1. *Si n es impar entonces f tiene en a un punto de inflexión.*
2. *Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$ entonces f alcanza en a un máximo relativo.*
3. *Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ entonces f alcanza en a un mínimo relativo.*

2.7.2. Sistematización de la representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función $y = f(x)$ hay que seguir los pasos siguientes:

- Determinar el dominio de la función, es decir, los valores de x para los que está definida.
- Determinar si f es par o impar, o si es la traslación de alguna función conocida, y usar esta información para ahorrar trabajo (apartado 1.3.1).
- Calcular los puntos de corte con el eje horizontal (soluciones de $f(x) = 0$) y el signo de $f(x)$ en cada uno de los intervalos determinados por éstos y por el dominio.
- Determinar si tiene asíntotas verticales (donde "falle" el dominio), horizontales u oblicuas, y por qué lado se pega la gráfica a cada una de ellas (apartado 2.1.1).
- Calcular los puntos críticos (soluciones de $f'(x) = 0$) y el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por éstos y por el dominio. Deducir de esos signos en qué intervalos crece la función y si los puntos críticos son extremos relativos o puntos de inflexión.
- Calcular las soluciones de $f''(x) = 0$, el signo de $f''(x)$ y los intervalos de concavidad.

Ejemplo 2.7.8. *Representar gráficamente la función* $y = x^3 e^{-x}$.

Solución. El dominio de la función es $\mathbb{R}$, y por tanto no tiene asíntotas verticales.
Como $y(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)} = -x^3 e^x$ es distinto de $-y(x)$ y de $y(x)$, no hay simetrías.
El único corte con el eje está en $x = 0$, y el signo de $f(x)$ es el mismo que el de x.
Como $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0$, el eje $y = 0$ es una asíntota horizontal por la derecha, y la función se le pega por arriba. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x = -\infty$, por la izquierda no hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

Calculemos las primeras derivadas:

$$y'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = e^{-x} x^2 (3 - x)$$

$$y''(x) = -e^{-x}(3x^2 - x^3) + e^{-x}(6x - 3x^2) = e^{-x} x (x^2 - 6x + 6)$$

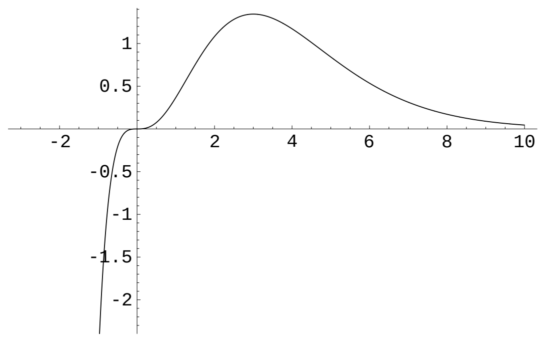
y' se anula en $x = 0$ y $x = 3$, y tiene el signo de $3 - x$. Por tanto f crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$, en $x = 3$ hay un máximo relativo y en $x = 0$ un punto de inflexión.

y'' se anula en $x = 0$ y en $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Para estudiar su signo empleamos la tabla

	$-\infty$ — 0	0 — $3-\sqrt{3}$	$3-\sqrt{3}$ — $3+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{3}$ — $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6x + 6$	$+$	$+$	$-$	$+$
$y''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

de la que deducimos que la función es cóncava en los intervalos $(0, 3+\sqrt{3})$ y $(3+\sqrt{3}, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, 0)$ y $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$, y por tanto en $x = 3 \pm \sqrt{3}$ hay puntos de inflexión.

Calculando los valores de y en los puntos notables y, si se quiere afinar mucho, calculando también $y'(3 \pm \sqrt{3})$, se obtiene la gráfica:



■

Ejemplo 2.7.9. *Representar gráficamente la función* $y = \dfrac{x(x-1)}{(x+1)^2}$.

Solución. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, y no hay simetrías.

Los cortes con el eje $y = 0$ están en $x = 0$ y $x = 1$. Como $(x+1)^2$ es positivo, para estudiar el signo de $y(x)$ basta con considerar la tabla

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
$y(x)$	$+$	$-$	$+$	

de la que deducimos que y es positiva en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y negativa en $(0, 1)$.

En cuanto a las asíntotas, se tiene

$$\lim_{x\to -1} \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 1$$

luego $x = -1$ es una asíntota vertical a la que la gráfica se pega por arriba a ambos lados, e $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha y por la izquierda.

La derivada primera vale

$$y' = \frac{(2x-1)(x+1)^2 - (x^2-x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x-x-1-2x^2+2x}{(x+1)^3} = \frac{3x-1}{(x+1)^3}$$

y por tanto hay un único punto crítico en $x = 1/3$. Estudiamos el signo con la tabla

	$-\infty$	-1	$1/3$	$+\infty$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$	
$(x+1)^3$	$-$	$+$	$+$	
$y'(x)$	$+$	$-$	$+$	

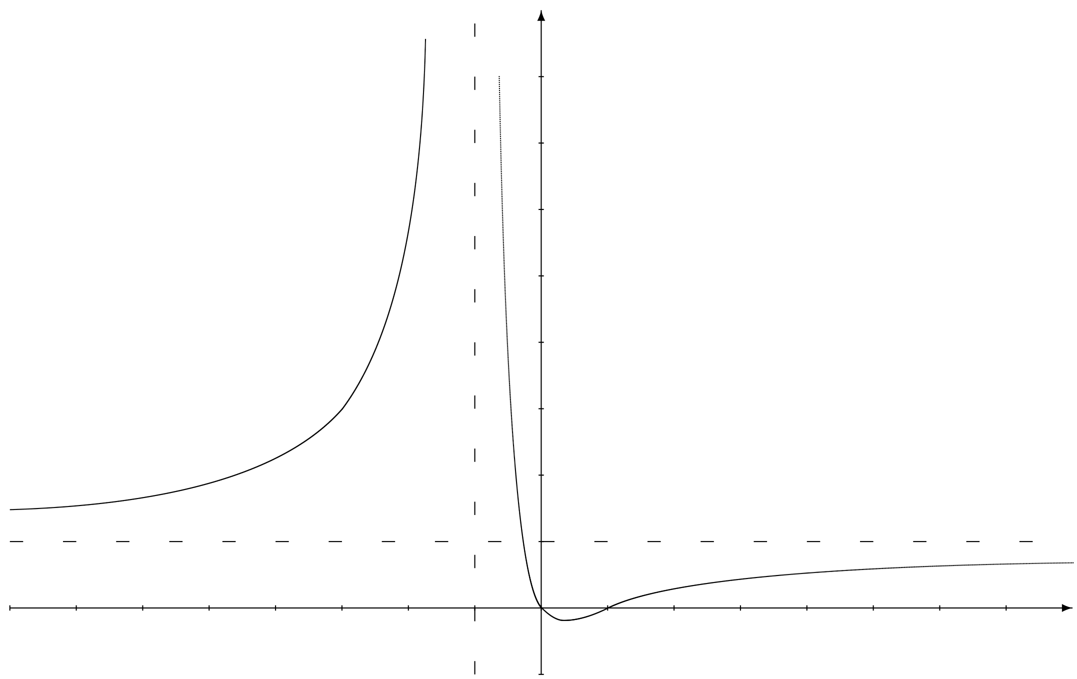
de que la que deducimos que la función crece en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1/3,\infty)$, y decrece en $(-1,1/3)$. Por lo tanto en $x=1/3$ hay un mínimo relativo.

La derivada segunda vale

$$y'' = \frac{3(x+1)^3-(3x-1)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3x+3-9x+3}{(x+1)^4} = \frac{6-6x}{(x+1)^4}$$

luego la función es cóncava en $(-\infty,1)$, es convexa en $(1,+\infty)$, y tiene un punto de inflexión en $x=1$.

Con todos estos datos podemos dibujar la gráfica:



■

2.8. Ejercicios

1. Calcular los valores de a y b para los que

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & (x \leq 1) \\ 3x - b & (x > 1) \end{cases}$$

es derivable en $x = 1$.

2. Derivar las siguientes funciones:

$a(x) = 4x^{1/4}$ $\quad b(x) = \operatorname{arc\,sen}(1 - x^2)$ $\quad c(x) = 3/\sqrt{x^3}$ $\quad d(x) = e^{2x^2 - x - 1}$

$e(x) = \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$ $\quad f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\tan(3x)$ $\quad g(x) = x^3 e^{-x^2}$ $\quad h(x) = 3(x^2 + x + 1)^{-1/2}$

3. Calcular la derivada $\frac{dV}{dp}$ para las siguientes ecuaciones de estado de gases:

$$pV = nRT\left(1 + \frac{nb}{V}\right) \qquad p(V - nb) - nRT = 0 \qquad \left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

4. Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos dados:

(a) $y = \ln|x|$ en $(-e, 1)$ $\qquad$ (b) $y = x^3 + \ln(x)$ en $(1, 1)$

(c) $y = \cos(x)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ $\qquad$ (d) $y = 3e^{3x} - 5x$ en $(0, 3)$

5. Obtener los polinomios de Maclaurin de grado 3 de las siguientes funciones, indicando los valores positivos de x para los que se puede asegurar que el error cometido al aproximar la función por el polinomio es menor que 10^{-3}:

$$a(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} \qquad b(x) = \operatorname{sen}(x/2) \qquad c(x) = \cos(2x) \qquad d(x) = \ln(1 + 2x)$$

6. Encontrar el menor número n para el que las funciones siguientes se aproximan por su polinomio de Maclaurin de grado n con una precisión de 10^{-4}, para los valores de x pertenecientes al intervalo indicado:

$$f(x) = e^x \quad (-2 < x < 2) \qquad\qquad g(x) = \cos(x) \quad (-4 < x < 4)$$

7. La ecuación $y^5 + xy^2 + 2 = 0$ define a y como función implícita de x con $y(-1) = -1$. Dar un valor aproximado de $y(-0{,}99)$ usando el polinomio de Taylor de grado 2 en $x = -1$.

8. Obtener los dos primeros términos no nulos del desarrollo de Maclaurin de:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{arc\,sen}(x) \qquad g(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(x) - \tan(x) \qquad h(x) = x^{-1}\operatorname{sen}(x)$$

9. Obtener los tres primeros términos distintos de cero del desarrollo de Maclaurin de:

$$f(x) = e^{-x}(1+x)^{-1} \qquad g(x) = x^{-2}\ln(1-x)^2$$

10. Obtener los polinomios de Taylor de grado 4 en $x = 1$ de $f(x) = \ln(x)$ y de $g(x) = \sqrt{x}$.

11. La densidad de la energía de radiación de un cuerpo negro a temperatura T está dada por la fórmula de Planck

$$\rho = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]^{-1}$$

donde λ es la longitud de onda. Probar que la fórmula se aproxima a la clásica ley de Rayleigh-James $\rho = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$ tanto si la longitud de onda λ es muy grande ($\lambda \to +\infty$) como si la constante de Planck h es muy pequeña ($h \to 0$).

12. Un cuerpo cuya masa en reposo es m_0 tiene una energía relativista

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

cuando se mueve a la velocidad v, y tiene una energía cinética relativista $T = E - m_0c^2$ (c representa a la velocidad de la luz). Desarrollar T en potencias de v y observar cómo, para valores pequeños de $\frac{v}{c}$, T se aproxima a la energía cinética no relativista $T^* = \frac{1}{2}m_0v^2$.

13. Hacer un esquema de las gráficas de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = x^5 - 3x^4 + 1$ (b) $y = x\ln(x)$ (c) $y = x - \operatorname{sen}(x)$

(d) $y = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$ (e) $y = x^2e^{-x}$ (f) $y = e^{x^2-x}$

14. Determina, en función del parámetro a, el número de raíces del polinomio x^3+x^2-x+a.

15. De todos los triángulos isósceles de área A, determinar el que tiene menor perímetro.

De todos los triángulos isósceles de perímetro P, determinar el que tiene mayor área.

16. De entre todos los botes cilíndricos cerrados en las dos bases, cuyas superficies tienen un mismo área A, determinar el que tiene mayor volumen.

17. Se consideran todos los rectángulos que pueden inscribirse en una semicircunferencia de radio R, es decir, los que tienen dos vértices en el diámetro y dos en la semicircunferencia. ¿Cuál de ellos tiene mayor área? ¿Cuál tiene mayor perímetro?

18. La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T tenga una velocidad dada v viene dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$$

donde k es la constante de Boltzmann. Encontrar la velocidad más probable (aquella para la que $f(v)$ es máxima).

19. La concentración de una sustancia B en el proceso $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ consistente en dos reacciones irreversibles consecutivas ($k_1 \neq k_2$) está dada por

$$[B] = \frac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

Encontrar el tiempo t, en términos de las constantes k_1 y k_2, en el que la concentración de B es máxima y calcular esa concentración máxima.

20. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{2x - \pi}$ (c) $\lim_{x\to +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos(x) - 1}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - e^{x^2}}{x \operatorname{sen}(x)}$ (f) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$

(g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^5 + x + 1}{x^5 - \operatorname{sen}(x)}$ (h) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{-1}{x^2}}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\ln(1 + x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

21. Localizar y aproximar todas las raíces de la ecuación $x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$.

22. Utilizando el método de Newton-Raphson con una calculadora de mano, aproximar las soluciones de las ecuaciones siguientes en los intervalos que se indican:

(a) $x \ln x = -0'3$ en $[0{,}1, 0{,}2]$ (b) $x^4 + x^{1/3} = 1$ en $[0, 1]$ (c) $e^x = 4x^3$ en $[0, 1]$

23. Demostrar que la ecuación $xe^{-x} + 1 = 0$ sólo tiene una solución, y encontrar una aproximación de esa solución utilizando el método de Newton.

2.9. Soluciones de los ejercicios

1. $a = 3$, $b = 2$

2. $a'(x) = x^{-3/4} \quad b'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} \quad c'(x) = \dfrac{-9}{2\sqrt{x^5}} \quad d'(x) = (4x-1)e^{2x^2-x-1}$
   $e'(x) = \dfrac{-5}{x^2 - x - 6} \quad f'(x) = \operatorname{sen}(2x)\tan(3x) + 3\operatorname{sen}^2(x)(1 + \tan^2(3x))$
   $g'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2} \quad h'(x) = \dfrac{-6x-3}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$

3. $\dfrac{dV}{dp} = \dfrac{-V^3}{pV^2 + n^2RTb} \qquad \dfrac{dV}{dp} = \dfrac{nb - V}{p} \qquad \dfrac{dV}{dp} = \dfrac{V^3(nb-V)}{pV^3 + n^2a(2nb - V)}$

4. (a) $y = -x/e$ (b) $y = 4x - 3$ (c) $y = \frac{\pi}{2} - x$ (d) $y = 4x + 3$

5. $a(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$ para $0 < x < \sqrt[4]{\frac{384}{105}10^{-3}} = 0{,}2459\ldots$
   $b(x) \approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3$ para $0 < x < \sqrt[5]{768 \cdot 10^{-3}} = 0{,}9485\ldots$
   $c(x) \approx 1 - 2x^2$ para $0 < x < \sqrt[4]{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}1967\ldots$
   $d(x) \approx 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$ para $0 < x < \sqrt[4]{0{,}25 \cdot 10^{-3}} = 0{,}1257\ldots$

6. La cota de error para $f(x)$ es $e^2 2^{n+1}/(n+1)!$, que es menor que 10^{-4} para $n \geq 11$.
   La cota de error para $g(x)$ es $4^{n+1}/(n+1)!$, menor que 10^{-4} si $n \geq 16$.

7. $P_2(x) = -1 - \frac{1}{7}(x+1) + \frac{6}{343}(x+1)^2$, luego $y(-0{,}99) \approx P(-0{,}99) = -1{,}0014\ldots$

8. $f(x) \approx -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{15}x^5 \qquad g(x) \approx -x^2 - \frac{1}{6}x^5 \qquad h(x) \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$

9. $f(x) \approx 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 \qquad g(x) \approx 1 + x + \frac{11}{12}x^2$

10. $f(x) \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$
    $g(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$

11. $x = \dfrac{hc}{\lambda kT}$ tiende a 0 en ambos casos, luego $e^x - 1 \approx x$ y así $\rho \approx \dfrac{8\pi hc}{x\lambda^5} = \dfrac{8\pi kT}{\lambda^4}$.

12. Llamando $x = \frac{v}{c}$ se tiene $T = m_0c^2[(1-x^2)^{-1/2} - 1]$. El polinomio de Maclaurin de grado 2 de $(1-x^2)^{-1/2}$ es $1 + \frac{1}{2}x^2$ (para valores pequeños de x), luego $T \approx m_0c^2\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$.

13. (a) Máximo relativo en $x = 0$, mínimo relativo en $x = 12/5$, inflexión en $x = 9/5$.

    (b) Definida para $x > 0$, corta ejes en $(1, 0)$, mínimo en el punto $(e^{-1}, -e^{-1})$, convexa. Se acerca al punto $(0, 0)$ por debajo con tangente vertical.

    (c) Impar, creciente. Puntos de inflexión cuando x es múltiplo de π, con tangente horizontal en los múltiplos pares y tangente de pendiente 2 en los múltiplos impares.

(d) Periodo 2π; analizamos en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Cortes con el eje y puntos de inflexión en $\pi/4$ y $-3\pi/4$. Máximo en $(3\pi/4, \sqrt{2})$ y mínimo en $(-\pi/4, -\sqrt{2})$.

(e) Positiva, el eje horizontal es asíntota por la derecha, mínimo en $(0,0)$, máximo relativo en $(2, 4/e^2)$, puntos de inflexión en $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

(f) Positiva, mínimo en$(1/2, e^{-1/2})$, convexa.

14. Hay tres raíces si $a \in (-1, \frac{5}{27})$, dos si $a = -1$ ó $a = \frac{5}{27}$, y una si $a \notin [-1, \frac{5}{27}]$.

15. Si la base mide $2x$, la altura mide h y los lados iguales miden b, se tiene $b^2 = x^2 + h^2$. Fijado el área $A = xh$, el perímetro $P(x) = 2(x + \sqrt{x^2 + (A/x)^2})$ es mínimo para $x = \sqrt[4]{A^2/3}$; la tangente del ángulo es $h/x = \sqrt{3}$, luego el triángulo es equilátero.

    Si el perímetro $P = 2x + 2b$ es fijo entonces el área $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{P^2 - 4Px}$ se minimiza cuando $x = P/6$, que también se corresponde con el triángulo equilátero.

16. Sean x el radio de la base y h la altura. Si el área $A = 2\pi x(x + h)$ es fija, el volumen $V(x) = \frac{1}{2}Ax - \pi x^3$ se maximiza cuando $x = \sqrt{A/6\pi}$, y entonces $h = 2x$.

17. Si centramos el semicírculo en el origen y (x, y) es la esquina del rectángulo, tenemos $x^2 + y^2 = R^2$, luego el área es $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, que es máxima en $x = R/\sqrt{2}(= y)$.

18. $\sqrt{2kT/m}$

19. $t = \dfrac{\ln(k_2) - \ln(k_1)}{k_2 - k_1}, \quad [B]_{max} = \dfrac{k_1}{k_2}[A]_0 e^{-k_1 t}$

20. $a = \dfrac{-1}{6} \quad b = \dfrac{-1}{2} \quad c = 1 \quad d = -2 \quad e = -1 \quad f = \dfrac{1}{2} \quad g = \frac{247}{243 - \operatorname{sen} 3} \quad h = 0 \quad i = 1$

21. Por el teorema de Bolzano, hay soluciones en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, que se pueden calcular por Newton-Raphson y valen $-0{,}481815\ldots$ y $0{,}825109\ldots$

    Como $f'(x) = 4x^3 + 4x - 1$ es creciente (su derivada $f''(x) = 12x^2 + 4$ es positiva) y $f'(-1) < 0 < f'(1)$, deducimos que $f'(x)$ tiene un único cero que está entre -1 y 1. Por tanto, $f(x)$ decrece a la izquierda y crece a la derecha de ese cero, por lo que no puede tener más que las dos raíces señaladas.

22. (a) La sucesión $x_{sig} = \frac{x - 0{,}3}{1 + \ln(x)}$ con $x_0 = 0{,}15$ se estabiliza en $x_4 = 0{,}168412\ldots$

    (b) La sucesión $x_{sig} = \frac{9x^4 - 2x^{1/3} + 3}{12x^3 + x^{-2/3}}$ con $x_0 = 0{,}5$ se estabiliza en $x_5 = 0{,}619670\ldots$

    (c) La sucesión $x_{sig} = \frac{(x-1)e^x - 8x^3}{e^x - 12x^2}$ con $x_0 = 0{,}5$ se estabiliza en $x_7 = 0{,}831031\ldots$

23. Como $f(-1) = -e$ y $f(0) = 1$, hay al menos una solución en el intervalo $(-1, 0)$. Si $x > 0$ es claro que $f(x) > 0$, luego no hay soluciones positivas. Si $x < 0$ entonces $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ es positiva, luego $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y sólo puede tener la raíz señalada. Para calcularla se usa $x_{sig} = \dfrac{x^2 + e^x}{x - 1}$ con $x_0 = -0{,}5$ y la sucesión se estabiliza en $x_3 = -0{,}567143\ldots$

Tema 3

Cálculo integral en una variable

3.1. Integral definida

3.1.1. Definición y primeras propiedades

En lo que sigue, consideramos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $[a, b]$ y *acotada*, es decir, suponemos que existe $M \in \mathbb{R}$ con $|f(x)| \leq M$ para cualquier $x \in [a, b]$.

Por el teorema de Weierstrass sabemos que todas las funciones continuas definidas en intervalos cerrados cumplen esta condición.

Llamaremos *partición* del intervalo $[a, b]$ a cualquier colección de puntos $t_0, t_1, \dots, t_n$ del intervalo de la forma

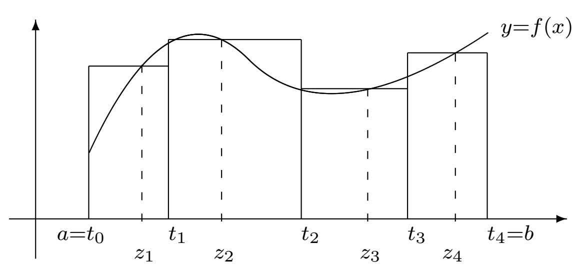
$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

A los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ con $i = 1, 2, \dots, n$ se les conoce como los *subintervalos* de $\mathcal{P}$, y la mayor de sus longitudes (o sea, el máximo de los $t_i - t_{i-1}$) es el *diámetro* de $\mathcal{P}$.

Si se elige en cada uno de ellos un punto $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, la *suma de Riemann* de f para la partición $\mathcal{P}$ y los puntos z_i es

$$S(\mathcal{P}, f, z_i) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$$

Cuando $f(x) > 0$ para cada $x \in [a, b]$, cada sumando $f(z_i)(t_i - t_{i-1})$ es el área de un rectángulo cuya base es el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y cuya altura es $f(z_i)$. La suma de Riemann es por tanto el área encerrada por los rectángulos de la figura



y proporciona una aproximación del área que delimitan la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Esta aproximación será tanto mejor cuanto "más fina" sea la partición, y esta es la idea que desarrollaremos para definir el concepto de *función integrable*.

Antes de ver ejemplos de sumas de Riemann, haremos las observaciones siguientes:

- Se tiene $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$, pues la suma de las longitudes de los subintervalos es la longitud total del intervalo $[a, b]$.
- Recordemos que existe M tal que $f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$. Entonces se tiene
$$|S(\mathcal{P}, f, z_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(z_i)|(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(b - a)$$
es decir, las sumas de Riemann están acotadas en valor absoluto por la constante $M(b - a)$. Esta cota tiene un significado geométrico claro: $M(b - a)$ es el área de un rectángulo de base $[a, b]$ y altura M, y este rectángulo "contiene" a la figura anterior.
- Cuando la partición $\mathcal{P}$ divide $[a, b]$ en n partes iguales, es decir, cuando todos los subintervalos tienen longitud $(b-a)/n$, la suma de Riemann toma la forma más sencilla
$$S(\mathcal{P}, f, z_i) = \frac{b - a}{n} \sum_{1}^{n} f(z_i)$$

Ejemplo 3.1.1. Si $f(x) = k$ (constante), para cualquier elección de puntos z_i se tiene
$$S(\mathcal{P}, f, z_i) = \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k(b - a)$$
que es el área que, sobre el intervalo $[a, b]$, encierran la recta $y = k$ y el eje OX. ■

Ejemplo 3.1.2. Consideramos la función $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0, 1]$, que dividimos en 5 partes iguales, es decir, consideramos la partición $\mathcal{P} = \{0,\ 0'2,\ 0'4,\ 0'6,\ 0'8,\ 1\}$. El área real bajo la curva es la de un triángulo de base 1 y altura 1, y vale por tanto $1/2 = 0'5$. ¿Qué valor se obtiene para la suma de Riemann? Eso depende de la elección de los z_i. Por ejemplo, si en cada intervalo se elige...
el extremo izquierdo, la suma vale $\frac{1}{5}(0 + 0'2 + 0'4 + 0'6 + 0'8) = 0'4$;
el extremo derecho, la suma vale $\frac{1}{5}(0'2 + 0'4 + 0'6 + 0'8 + 1) = 0'6$;
el punto medio, la suma vale $\frac{1}{5}(0'1 + 0'3 + 0'5 + 0'7 + 0'9) = 0'5$. ■

Este ejemplo muestra que la elección de los z_i puede hacer variar notablemente la aproximación que se da del área. Sin embargo, como ocurre en el siguiente ejemplo, esta variación suele ser mínima cuando la partición tiene muchos intervalos muy pequeños:

Ejemplo 3.1.3. Seguimos con $f(x) = x$ sobre el intervalo $[0, 1]$, y dividimos el intervalo en n partes iguales con la partición $\mathcal{P} = (0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1)$. Si en cada subintervalo tomamos, por ejemplo, el extremo derecho $z_i = i/n$ (lo que no era ni mucho menos la mejor elección en el ejemplo anterior) la suma de Riemann vale

$$S(\mathcal{P}, f, z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

(se ha usado la igualdad $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, que es fácil de comprobar por inducción). Cuando n se hace grande, la suma de Riemann se aproxima a $0'5$, que es el valor real del área. ∎

Esta idea de hacer particiones "cada vez más finas" para tomar luego un límite nos lleva a dar la siguiente definición, un poco imprecisa pero suficiente para nuestros propósitos:

Definición 3.1.4. Sea $f(x)$ una función acotada en un intervalo $[a, b]$. Diremos que $f(x)$ es *integrable* (en el sentido de Riemann) en $[a, b]$, y lo denotaremos por $f \in \mathcal{R}[a, b]$, si existe el límite de las sumas de Riemann cuando los diámetros de las particiones tienden a cero, independientemente de las elecciones de los puntos z_i en cada partición.

En este caso, el valor de ese límite se llama la *integral definida* de f en $[a, b]$ y se denota

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim S(\mathcal{P}, f, z_i)$$

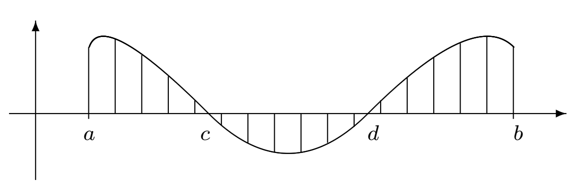
(donde el límite se toma como se acaba de explicar).

En general esos límites son imposibles de calcular, y recurriremos a otros métodos para calcular integrales definidas. Pero en dos casos el cálculo es evidente: Cuando $a = b$ entonces todas las sumas de Riemann valen 0. Cuando $f(x) = k$ (constante) entonces todas las sumas de Riemann valen $k(b - a)$, luego ese será el valor del límite. Por tanto

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0 \qquad\qquad \int_a^b k\, dt = k\,(b - a)$$

Por la construcción que se ha hecho, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$, el valor de la integral es el área encerrada entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$.

Si la función cambia de signo un número finito de veces en $[a, b]$ entonces el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ se calcula como una suma de áreas parciales. Por ejemplo, el área de la siguiente figura es $\int_a^c f(t)\, dt - \int_c^d f(t)\, dt + \int_d^b f(t)\, dt$:



Como vemos en el siguiente ejemplo, no todas las funciones acotadas son integrables; dicho de otra forma, el área que encierra una función no siempre existe.

Ejemplo 3.1.5. Un ejemplo de función no integrable Riemann en $[0,1]$ lo proporciona la función de Dirichlet D_1 definida por

$$D_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P} = (t_0 < t_1 < \cdots < t_n)$ cualquier partición de $[0,1]$. En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ seleccionamos un punto $z_i \in \mathbb{Q}$ y un punto $z_i' \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Por la definición de la función

$$S(\mathcal{P}, D_1, z_i) = 0 \qquad S(\mathcal{P}, D_1, z_i') = 1.$$

Esta elección de puntos siempre se puede hacer, sea cual sea la partición, y por tanto no puede existir el límite de las $S(\mathcal{P}, D_1, z_i)$, es decir, la función no es integrable. ■

Afortunadamente, como puede verse en el ejemplo anterior, las funciones no integrables son bastante raras. El siguiente resultado nos proporciona una gran cantidad de ejemplos de funciones que sí son integrables.

Proposición 3.1.6. *Toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$.*
De hecho, basta con que f tenga una cantidad finita de discontinuidades de salto finito.

Veamos algunas propiedades de la integral.

Proposición 3.1.7. *Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. **Linealidad:** *La función $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^b f(t)\ dt + \beta \int_a^b g(t)\ dt$$

2. **Aditividad respecto del intervalo:** *Si $a < c < b$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt\ +\ \int_c^b f(t)\ dt$$

3. **Monotonía:** *Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\ dt\ \le\ \int_a^b g(t)\ dt$$

4. **Desigualdad triangular:** *La función $|f(x)|$ es integrable y se tiene*

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\ dt$$

3.1.2. Teorema Fundamental del Cálculo

El cálculo de integrales definidas como límites de sumas de Riemann sólo es posible en casos triviales, aunque hay que observar que esas sumas o algunas variantes suyas son muy efectivas para aproximar numéricamente los valores de las integrales definidas.

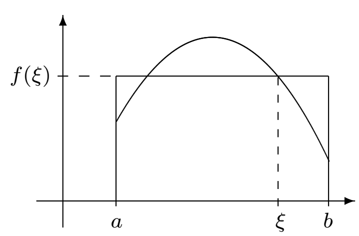
En esta sección desarrollamos la herramienta teórica que permite calcular efectivamente muchas integrales definidas: el Teorema Fundamental del Cálculo.

Comenzamos con un resultado importante y con una interpretación geométrica clara:

Teorema 3.1.8 (del valor medio integral). *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces existe* $\xi \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)\,(b-a)$$

Esto significa que el área bajo la curva $y = f(x)$ coincide con la de un rectángulo cuya base es $[a,b]$ y cuya altura viene marcada por un punto de la curva:



Demostración. Sean m y M el mínimo y máximo absolutos de f en $[a,b]$, que existen por el teorema de Weierstrass. Entonces $m \le f(x) \le M$ para cualquier $x \in [a,b]$; usando la propiedad de monotonía y el valor de la integral de una función constante, se tiene

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dt \le \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b M\,dt = M(b-a)$$

Dividiendo por $b-a$ se observa que el valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ está comprendido entre el mínimo y el máximo de f, y el teorema de los valores intermedios asegura que existe $\xi \in [a,b]$ con

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{o sea} \qquad \int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)\,(b-a) \qquad \blacksquare$$

Para enunciar el teorema fundamental necesitamos dos nuevas definiciones:

Definición 3.1.9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable.

La *función integral indefinida* de f es la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Una *primitiva* (o *antiderivada*) de f es cualquier función derivable $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ que tenga a f por función derivada, es decir, que verifique $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$.

Teorema 3.1.10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:*

1. **Teorema Fundamental del Cálculo** *La función integral definida $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es una primitiva de f.*

2. **Regla de Barrow** *Si G es cualquier primitiva de f entonces $G(x) = F(x) + C$ para cierta constante C y*
$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$$
En los ejemplos emplearemos a veces la notación $[G(t)]_a^b = G(b) - G(a)$.

Demostración. 1. Se trata de ver que para cualquier $c \in [a,b]$ se tiene

$$f(c) = F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

Veamos primero qué ocurre cuando h tiende a 0 por la derecha, es decir, cuando $h > 0$. Por la propiedad de aditividad se tiene

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^{c+h} f(t)\, dt = F(c) + \int_c^{c+h} f(t)\, dt$$

y por tanto

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\, dt$$

Por el Teorema 3.1.8 (del valor medio integral) existe $\xi \in (c, c+h)$, que depende de h, con

$$\int_c^{c+h} f(t)\, dt = f(\xi)(c + h - c) = f(\xi)h$$

Es claro que ξ tiende a c cuando h tiende a 0, y como f es continua se tiene

$$F'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\xi)h}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to c} f(\xi) = f(c)$$

Cuando $h < 0$ se prueba de modo análogo que $F'_-(c) = f(c)$ usando

$$F(c+h) - F(c) = -\int_{c+h}^{c} f(t)\, dt = -f(\xi)(c - (c+h)) = f(\xi)h$$

2. Ya vimos (Proposición 2.4.8) que si dos funciones tienen la misma derivada entonces "se diferencian en una constante", por lo que la primera afirmación es consecuencia del apartado anterior. Entonces

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt \qquad \blacksquare$$

3.2. Cálculo de primitivas

Si conocemos una primitiva de $f(x)$, la regla de Barrow nos permite calcular de inmediato cualquier integral definida $\int_a^b f(t)\,dt$, por lo que el cálculo efectivo de primitivas es clave para el cálculo de integrales definidas, y a él dedicamos esta larga sección.

La notación $\int f(x)\ dx$ (sin los *límites de integración* a y b) representará una primitiva cualquiera de $f(x)$. Así, el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$ es

$$\int f(x)\ dx + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Cabe señalar que, aunque toda función continua admite una primitiva, a veces ésta no se puede expresar como combinación (suma, producto, cociente, composición,...) de las funciones elementales. Ejemplos de tales funciones "imposibles de integrar" son

$$e^{-x^2} \qquad \frac{e^x}{x} \qquad \frac{1}{\ln x} \qquad x^x \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \sqrt{\operatorname{sen} x} \qquad \frac{\cos x}{x} \qquad \sqrt{\cos x}$$

3.2.1. Primitivas inmediatas

Las primitivas siguientes se obtienen directamente de las derivadas que calculamos en el tema anterior (por claridad, se ha suprimido "$+C$" en las primitivas):

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{1}{a+1}\,x^{a+1}$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln a}\,a^x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$(1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} x$
$-(1-x^2)^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$(x^2+1)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arg\,senh} x$
$(x^2-1)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arg\,cosh} x$
$(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$(1-x^2)^{-1} = \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arg\,tanh} x$

Usando esta tabla y la linealidad de la integral podemos calcular otras primitivas sencillas:

✓ $I = \displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x} + 3}{x}\, dx$

$$I = \int x^2\, dx - 2\int x^{-1/2}\, dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} - 4\sqrt{x} + 3\ln x + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \tan^2 x\, dx$

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int 1\, dx = \tan x - x + C$$

3.2.2. Cambios de variable

Supongamos que $G(t)$ es una primitiva de $f(t)$, o sea que $G'(t) = f(t)$. Supongamos además que la variable t es función de otra variable x, digamos $t = u(x)$. Entonces

$$[G(u(x))]' = G'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x)$$

y por tanto $G(u(x))$ es una primitiva de $f(u(x))\, u'(x)$. Es decir

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = G(u(x)) = G(t) = \int f(t)\, dt$$

Esta *fórmula del cambio de variable* transforma unas primitivas en otras más sencillas. Para aplicarla, basta con recordar que el cambio $t = u(x)$ conlleva el cambio $dt = u'(x)\, dx$.

Estos cambios vienen muchas veces sugeridos por la forma del integrando, como los de los ejemplos que siguen. En apartados posteriores veremos otros cambios más sofisticados que se emplean en ciertas situaciones generales.

✓ $I = \displaystyle\int \cos(3x)\, dx$. Hacemos $u = 3x$, $du = 3dx$ y así

$$I = \int \cos u\, \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$. Hacemos $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\, dx$ y así

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\, dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}\, dt = -\frac{1}{2}t^{-1} + C = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1} + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{2x^2\, dx}{\sqrt{9-x^3}}$. Hacemos $u = 9 - x^3$, $du = -3x^2\, dx$ y así

$$I = \int \frac{-\frac{2}{3}\, du}{\sqrt{u}}\, du = -\frac{2}{3}\int u^{-1/2}\, du = -\frac{2}{3}\,\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{9-x^3} + C$$

✓ $I = \displaystyle\int_0^5 \sqrt{3t+1}dt$. Ahora se trata de una integral definida, a la que aplicaremos el cambio $u = 3t + 1$ con $du = 3\,dt$. Podemos calcular una primitiva

$$\int \sqrt{3t+1}\;dt = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{9}\;u^{3/2} = \frac{2}{9}\;(3t+1)^{3/2}$$

y aplicar la regla de Barrow para obtener

$$I = \left[\frac{2}{9}(3t+1)^{2/3}\right]_0^5 = \frac{2}{9}\left(16^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{9}\;(64-1) = 14$$

o podemos aplicar el cambio desde el principio a los límites de integración:

$$I = \frac{1}{3}\int_1^{16} u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^{16} = \frac{2}{9}\left(16^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{9}\;(64-1) = 14$$

La fórmula del cambio de variable permite extender la tabla anterior de primitivas inmediatas a la siguiente tabla de primitivas *semiinmediatas*:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$u(x)^a\,u'(x)$	$\dfrac{1}{a+1}\;u(x)^{a+1}$
$u(x)^{-1}\,u'(x)$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$e^{u(x)}\,u'(x)$	$e^{u(x)}$
$a^{u(x)}\,u'(x)$	$\dfrac{1}{\ln a}\;a^{u(x)}$
$\operatorname{sen}(u(x))\,u'(x)$	$\cos(u(x))$
$\cos(u(x))\,u'(x)$	$-\operatorname{sen}(u(x))$
$\operatorname{senh}(u(x))\,u'(x)$	$\cosh(u(x))$
$\cosh(u(x))\,u'(x)$	$\operatorname{senh}(u(x))$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$	$\tan(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\cosh^2 u(x)}$	$\tanh(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\operatorname{arc\,cos}(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2+1}}$	$\operatorname{arg\,senh}(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2-1}}$	$\operatorname{arg\,cosh}(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{1-u(x)^2}$	$\operatorname{arg\,tanh}(u(x))$

3.2.3. Integración por partes

La fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \qquad \text{ó} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

se deduce de la fórmula de la derivada de un producto, y se utiliza a menudo cuando el integrando contiene un producto de funciones, por ejemplo:

✓ $I = \displaystyle\int \ln x\,dx$. Hacemos $u = \ln x$, $dv = dx$, de donde $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$ y así

$$I = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

✓ $I = \displaystyle\int x^3\,e^x\,dx$. Hacemos $u = x^3$, $dv = e^x\,dx$, de donde $du = 3x^2\,dx$, $v = e^x$ y así

$$I = x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx$$

En esta última primitiva volvemos a aplicar la fórmula de integración por partes: Hacemos $u = 3x^2$, $dv = e^x\,dx$, de donde $du = 6x\,dx$, $v = e^x$, y sustituyendo en la fórmula anterior

$$I = x^3e^x - \left(3x^2e^x - \int 6xe^x\,dx\right) = x^3e^x - 3x^2e^x + \int 6xe^x\,dx$$

haciendo esta última por partes ($u = 6x$, $dv = e^x\,dx$) se tiene finalmente

$$I = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - \int 6e^x\,dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$$

✓ $I = \displaystyle\int x\arctan x\,dx$. Hacemos $u = \arctan x$, $dv = x\,dx$; así $du = \frac{dx}{x^2+1}$, $v = \frac{1}{2}x^2$ y

$$I = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

esta última primitiva es la de una función racional, para las que veremos un método general de resolución, pero podemos también resolverla ya con un truco:

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1} = \int \frac{1+x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan x + C$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{2}\left[x^2\arctan x - x + \arctan x\right] + C = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right] + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \cos^3 x \, dx$. Hacemos $u = \cos^2 x$, $dv = \cos x \, dx$, $du = -2\cos x \operatorname{sen} x$, $v = \operatorname{sen} x$

$$I = \cos^2 x \operatorname{sen} x + 2\int \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx = \cos^2 x \operatorname{sen} x + 2\int \cos x (1-\cos^2 x) \, dx =$$

$$\cos^2 x \operatorname{sen} x + 2\int \cos x \, dx - 2\int \cos^3 x \, dx = \cos^2 x \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x + C - 2I$$

de donde $3I = \cos^2 x \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x + C$ y así finalmente

$$I = \frac{\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 2)}{3} + C$$

Esta primitiva se puede calcular también mediante el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ (y es un ejercicio sencillo comprobar que las dos soluciones que se obtienen son iguales).

$$I = \int (1-t^2) \, dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

✓ $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$. Se trata de una integral definida que podemos resolver por partes haciendo $u = \cos x$, $dv = \cos x \, dx$, $du = -\operatorname{sen} x$, $v = \operatorname{sen} x$.

Ahora podemos hacer un proceso similar al del ejemplo anterior para obtener una primitiva $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\,(x + \operatorname{sen} x \cos x)$ y sustituir entonces los límites de integración, o podemos sustituir los límites al principio para obtener

$$I = [\cos x \operatorname{sen} x]_0^\pi + \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x) \, dx = \int_0^\pi dx - I = \pi - I$$

de donde $2I = \pi$ y así $I = \pi/2$.

Algunas fórmulas generales

✓ $I = \displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx$. Hacemos $u = \operatorname{sen}(bx)$, $dv = e^{ax} dx$, $du = b\cos(bx) \, dx$, $v = \frac{e^{ax}}{a}$

$$I = \frac{1}{a}\, e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos(bx) \, dx$$

Tomando ahora $u = \cos(bx)$, $dv = e^{ax} \, dx$ resulta $du = -b\operatorname{sen}(bx) \, dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ y así

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx\right)$$

Multiplicando por a^2 para quitar denominadores tenemos

$$a^2 I = a\, e^{ax} \operatorname{sen}(bx) - b\, e^{ax} \cos(bx) - b^2 I$$

y despejando I nos queda

$$I = \frac{e^{ax}\,[a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)]}{a^2 + b^2} + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx$. Hacemos $u = \operatorname{sen}(nx)$, $dv = \cos(mx)\,dx$, de donde

$$I = \frac{1}{m}\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) - \frac{n}{m}\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$$

para $m \neq 0$; cuando $m = 0$ la primitiva es inmediata y vale $-\frac{1}{n}\cos(nx)$.
Haciendo ahora $u = \cos(nx)$, $dv = \operatorname{sen}(mx)\,dx$ se tiene

$$I = \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{m} - \frac{n}{m}\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\cos(nx) - \int -\frac{1}{m}\cos(mx)(-n)\operatorname{sen}(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{m} + \frac{n\cos(mx)\cos(nx)}{m^2} + \frac{n^2}{m^2}\,I$$

de donde

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) I = \frac{m^2 - n^2}{m^2}\,I = \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{m} + \frac{n\cos(mx)\cos(nx)}{m^2}$$

y así

$$I = \frac{m\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) + n\cos(mx)\cos(nx)}{m^2 - n^2} + C$$

para $m \neq \pm n$. Cuando $m = \pm n$ se tiene

$$I = \int \operatorname{sen}(nx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2nx)\,dx = \frac{-\cos(2nx)}{4n} + C$$

Fórmulas de reducción

Son fórmulas que expresan una primitiva I_n que depende del entero positivo n en términos de I_{n-1} o de I_{n-2}. Aplicándolas repetidamente expresamos I_n en términos de I_1 o de I_0, que suelen ser inmediatas.

Veamos algunos ejemplos de fórmulas generales y de su aplicación:

✓ $I_n = \displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\,dx$. Las dos primeras son inmediatas: $I_0 = x$ e $I_1 = -\cos x$. Para el caso general tomamos partes $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ y así

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$-\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int(\operatorname{sen}^{n-2} x - \operatorname{sen}^n x)\,dx - \operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

de donde $nI_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}$ y así

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad \text{con} \quad I_0 = x \quad I_1 = -\cos x$$

✓ $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\; dx.$ Análogamente se obtiene

$$I_n = \int \cos^n x\; dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \text{con} \quad I_0 = x \quad I_1 = \operatorname{sen} x$$

✓ $I_4 = \cos^4 x\; dx.$ La fórmula anterior con $n = 4$ y luego con $n = 2$ da

$$I_4 = \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{4} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} + \frac{1}{2}\, x\right) =$$

$$\frac{2\cos^3 x \operatorname{sen} x + 3\cos x \operatorname{sen} x + 3x}{8} + C$$

✓ $I_5 = \operatorname{sen}^5 x\; dx.$ La fórmula para el seno con $n = 5$ y luego con $n = 3$ da

$$I_5 = \frac{-\operatorname{sen}^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} I_3 = \frac{-\operatorname{sen}^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{-\operatorname{sen}^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3}\,(-\cos x)\right) =$$

$$-\frac{3\operatorname{sen}^4 x \cos x + 4\operatorname{sen}^2 x \cos x + 8\cos x}{15} + C$$

✓ $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$ La primera es inmediata, $J_1 = \arctan(x)$. En el caso general comenzamos sustituyendo el numerador por $1 + x^2 - x^2$, y entonces

$$J_n = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}\, dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = J_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx$$

Esta última la integramos por partes: Hacemos $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}$, entonces $du = dx$, y para calcular v hacemos el cambio de variable $t = x^2$:

$$v = \int \frac{x\; dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{\frac{1}{2}\, dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{2}\frac{(1+t)^{1-n}}{1-n} = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\, J_{n-1}$$

y así

$$J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, J_{n-1} \qquad \text{con } J_1 = \arctan x + C$$

✓ $J_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$ La fórmula anterior da directamente

$$J_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right] + C$$

3.2.4. Primitivas de funciones racionales

Ya vimos en el Tema 1 que toda función racional se descompone como la suma de un polinomio y fracciones simples. Como ya sabemos calcular primitivas de polinomios, debemos estudiar las primitivas de las fracciones simples, que son inmediatas cuando el denominador es del tipo $(x-a)^n$:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \qquad (n = 2, 3\ldots)$$

Para el otro tipo de fracciones simples hemos de calcular la primitiva

$$I_n = \int \frac{Mx+N}{p(x)^n}\,dx$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado 2 con raíces complejas $a \pm bi$. Entonces se tiene

$$p(x) = [x-(a+bi)]\cdot[x-(a-bi)] = [(x-a)-bi]\cdot[(x-a)+bi] = (x-a)^2+b^2$$

Esto sugiere el cambio $u = x-a$, que para exponente $n=1$ transforma la primitiva en

$$I_1 = \int \frac{Mx+N}{p(x)}\,dx = \int \frac{M(x-a)+(Ma+N)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \int \frac{Mu+(Ma+N)}{u^2+b^2}\,du$$

El primer sumando es casi inmediato, y en el segundo hacemos $u = bt$. Así

$$I_1 = \frac{M}{2}\int \frac{2u\,du}{u^2+b^2} \;+\; (Ma+N)\int \frac{b\,dt}{b^2(t^2+1)} = \frac{M}{2}\ln(u^2+b^2) + \frac{Ma+N}{b}\arctan(t) + C =$$

$$\frac{M}{2}\ln[p(x)] + \frac{Ma+N}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$$

Para exponente $n \geq 2$, los mismos cambios de variable llevan a

$$I_n = \int \frac{Mu+(Ma+N)}{(u^2+b^2)^n}\,du = \frac{M}{2}\int \frac{2u\,du}{(u^2+b^2)^n} \;+\; (Ma+N)\int \frac{b\,dt}{b^{2n}(t^2+1)^n} =$$

$$\frac{-M}{2\,(n-1)\,p(x)^{n-1}} + \frac{Ma+N}{b^{2n-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

y la última primitiva se resuelve usando la fórmula de reducción

$$J_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,J_{n-1} \qquad \text{con } J_1 = \arctan(t) + C$$

(ver página 95) y deshaciendo el cambio $t = \dfrac{x-a}{b}$.

✓ $I = \displaystyle\int \frac{x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 36x - 27}{x^5 - 12x^4 + 46x^3 - 62x^2 + 45x - 50}\,dx.$

La descomposición en fracciones simples da en este caso tres primitivas inmediatas:

$$I = \int \frac{1}{x-2} + \int \frac{1}{(x-5)^2} + \int \frac{1}{x^2+1} = \ln|x-2| - \frac{1}{x-5} + \arctan x + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{2x^5 - 13x^4 + 48x^3 - 103x^2 + 108x - 29}{x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 28x + 20}\,dx.$

La descomposición en polinomios y fracciones simples da

$$I = \int (2x-1)\,dx + \int \frac{2\,dx}{x-2} + \int \frac{3\,dx}{(x-2)^2} + \int \frac{(6x-1)\,dx}{x^2-2x+5}$$

Las tres primeras primitivas son inmediatas:

$$\int (2x-1)\,dx = x^2 - x \qquad \int \frac{2\,dx}{x-2} = 2\ln|x-2| \qquad \int \frac{3\,dx}{(x-2)^2} = \frac{-3}{x-2}$$

En la cuarta tenemos, con la notación anterior, $M = 6$, $N = -1$, $a = 1$, $b = 2$ y así

$$\int \frac{(6x-1)\,dx}{x^2-2x+5} = 3\ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

por lo que finalmente

$$I = x^2 - x + 2\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + 3\ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{x+5}{(x^2-4x+8)^2}\,dx.$

Con la notación anterior tenemos $M = 1$, $N = 5$, $a = 2$, $b = 2$, $n = 2$, luego

$$I = \frac{-1}{2\,p(x)} + \frac{7}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-1}{2\,p(x)} + \frac{7}{16}\left[\frac{t}{t^2+1} + \arctan(t)\right]$$

donde hemos sustituido la primitiva calculada en la página 95.

Para deshacer los cambios usamos las igualdades $t = \dfrac{x-2}{2}$ y $4(t^2+1) = p(x)$, que dan finalmente

$$I = \frac{-1}{2\,p(x)} + \frac{7(x-2)}{8\,p(x)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) = \frac{7x-18}{8\,p(x)} + \frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

3.2.5. Primitivas de algunas funciones trigonométricas

Las siguientes sugerencias permiten integrar funciones trigonométricas sencillas del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx \qquad (\text{con } n, m \in \mathbb{Z})$$

- Si n es impar, el cambio de variable $t = \cos x$ la transforma en una racional.
- Si n es par, el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$ la transforma en una racional.
- Si n y m son pares, las siguientes fórmulas simplifican el integrando:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad\qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$. Hacemos $t = \operatorname{sen} x$, luego $\cos^2 x = 1 - t^2$ y $dt = \cos x \, dx$ y así

$$I = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

que es una racional sencilla.

✓ $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$. Usando la fórmula de $\operatorname{sen}^2 x$ y más adelante la de $\cos^2 2x$ se tiene

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1+\cos^2 2x - 2\cos 2x}{4}\, dx =$$

$$= \int \frac{dx}{4} - \int \frac{\cos 2x \, dx}{2} + \int \frac{\cos^2 2x \, dx}{4} = \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \int \frac{1+\cos 4x}{8}\, dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + C = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$$

(también se puede usar la fórmula de reducción vista en la página 94).

Para integrar otras funciones trigonométricas, un cambio que las transforma en racionales consiste en hacer

$$t = \tan(x/2) \qquad \text{o sea} \qquad x = 2\arctan(t)$$

y por tanto

$$dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = \frac{\cos^2(x/2)-\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(en el momento adecuado se ha dividido por $\cos^2(x/2)$ en el numerador y el denominador).

✓ $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$. El cambio $t = \tan(x/2)$ transforma la integral en

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t} = \int \frac{2\,dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t} + C = \frac{-2}{1+\tan(x/2)} + C$$

3.2.6. Primitivas de algunas funciones irracionales

Si en el integrando aparecen raíces del tipo

$$\sqrt{a-bx^2} \qquad \sqrt{a+bx^2} \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{bx^2-a}$$

se pueden emplear los siguientes cambios de variable, que aprovechan las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \text{y} \qquad \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

- El cambio $bx^2 = a\operatorname{sen}^2 t$ transforma $\sqrt{a-bx^2}$ en $\sqrt{a(1-\operatorname{sen}^2 t)} = \sqrt{a}\cos t$.
- El cambio $bx^2 = a\operatorname{senh}^2 t$ transforma $\sqrt{a+bx^2}$ en $\sqrt{a(1+\operatorname{senh}^2 t)} = \sqrt{a}\cosh t$.
- El cambio $bx^2 = a\cosh^2 t$ transforma $\sqrt{bx^2-a}$ en $\sqrt{a(\cosh^2 t-1)} = \sqrt{a}\operatorname{senh} t$.

✓ $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2+3}}$. Hacemos el cambio $2x^2 = 3\operatorname{senh}^2 t$, y así:

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh t dt}{\frac{3}{2}\operatorname{senh}^2 t\sqrt{3}\cosh t} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{dt}{\operatorname{senh}^2 t} = \frac{-\sqrt{2}}{3}\frac{\cosh t}{\operatorname{senh} t} + C =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{3}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}x} + C = \frac{-\sqrt{2x^2+3}}{3x} + C$$

✓ $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. Hacemos $x^2 = 4\cosh t$, y así:

$$I = \int \frac{2\operatorname{senh} t}{2\cosh t}2\operatorname{senh} t\;dt = 2\int \frac{\operatorname{senh}^2 t}{\cosh t}\;dt$$

Ahora hacemos un cambio análogo al que vimos para funciones trigonométricas: Como el exponente de $\cosh t$ es impar, ponemos $u = \operatorname{senh} t$ y así

$$I = 2\int \frac{\operatorname{senh}^2 t\cosh t\;dt}{\cosh^2 t} = 2\int \frac{u^2\;du}{1+u^2} = 2\int \frac{1+u^2-1\;du}{1+u^2} =$$

$$= 2u - 2\arctan u + C = \sqrt{x^4-4} - 2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C$$

3.3. Aplicaciones de la integral

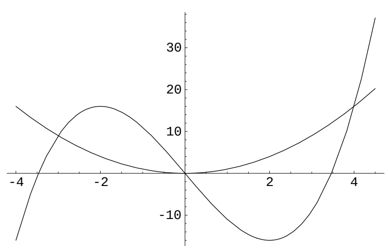
3.3.1. Cálculo del área de una superficie plana

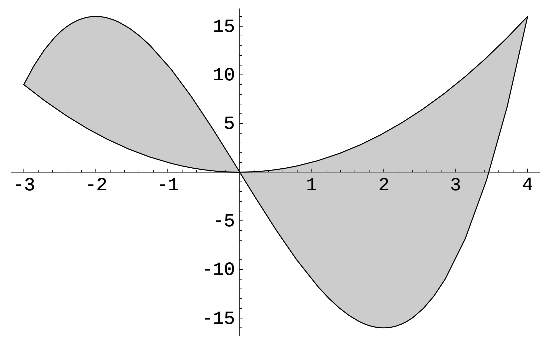
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en $[a, b]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. El área delimitada por las curvas entre a y b es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Ejemplo 3.3.1. *Hallar el área del recinto limitado por las curvas* $y = x^3 - 12x$ *e* $y = x^2$*.*

Solución. Las gráficas de las funciones y el recinto cuyo área hay que calcular son:





Para hallar los puntos de corte de las curvas resolvemos la ecuación

$$x^3 - 12x = x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12) = x(x-4)(x+3)$$

Así el área pedida es

$$A = \int_{-3}^0 [(x^3 - 12x) - x^2]\, dx + \int_0^4 [x^2 - (x^3 - 12x)]\, dx = \frac{937}{12}$$

3.3.2. Longitud de un arco de curva

La longitud de la porción de la curva $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ejemplo 3.3.2. *Hallar la longitud de la circunferencia de radio* R*.*

Solución. La longitud total L será el cuádruple de la del primer cuadrante, donde la ecuación es $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Simplifiquemos primero la raíz del integrando:

$$\sqrt{1 + [y']^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Por tanto
$$L = 4\int_0^R \sqrt{1+[y']^2}\,dx = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$$
y haciendo el cambio $x = R\operatorname{sen} t$ tenemos
$$L = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\cos t\,dt}{\sqrt{R^2-R^2\operatorname{sen}^2 t}} = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\cos t\,dt}{\sqrt{R^2\cos^2 t}} = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4R\frac{\pi}{2} = 2\pi R \qquad \blacksquare$$

3.3.3. Sólidos de revolución

El *sólido de revolución* generado por la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es el cuerpo que se obtiene al girar su gráfica alrededor del eje OX. Su volumen V y su área superficial A valen
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \qquad\qquad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Ejemplo 3.3.3. *Hallar el volumen y el área de la esfera de radio R.*

Solución. La esfera de radio R se genera al hacer girar la circunferencia de radio R, es decir, al hacer girar $y = \sqrt{R^2-x^2}$ entre $[-R,R]$. Así el volumen es
$$V = \pi\int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\,dx = \pi\int_{-R}^R (R^2-x^2)\,dx = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{4}{3}\,\pi R^3$$
Para hallar el área aprovechamos los cálculos del ejercicio anterior, y vale
$$A = 2\pi\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-R}^R R\,dx = 2\pi R\,[x]_{-R}^R = 4\,\pi R^2 \qquad \blacksquare$$

3.3.4. Volumen de un cuerpo por secciones

Supongamos que tenemos un cuerpo y que, para cada $x \in [a,b]$, conocemos la superficie $S(c)$ de su corte con el plano $x = c$. Entonces el volumen del cuerpo entre a y b vale
$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

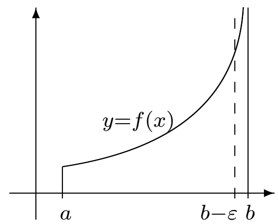
Ejemplo 3.3.4. *Calcular el volumen de una pirámide de altura h y con base cuadrada de área B.*

Solución. Situemos el vértice en el origen y el centro de la base en el eje horizontal (en el punto $(h,0)$). El corte con el plano $x = c$ es un cuadrado cuyo área aumenta proporcionalmente al cuadrado de c, es decir, $S(c) = kc^2$ para cierto k. Podemos determinar k porque tenemos $B = S(h) = kh^2$, y por tanto $k = B/h^2$. Así $S(c) = Bc^2/h^2$ y el volumen vale
$$V = \int_0^h \frac{Bx^2}{h^2}\,dx = \frac{B}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}Bh$$

Obsérvese que no hemos usado la forma de la base; podría haber sido cualquier otro polígono regular o un círculo, y en este caso la pirámide se convertiría en un cono. $\blacksquare$

3.4. Integrales impropias

Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una función con una asíntota vertical en b, es por ejemplo $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. ¿Qué podemos decir del área encerrada por la curva entre a y b? ¿Es infinita?



Si f es continua entonces es integrable en $[a, b-\varepsilon]$ para cualquier $\varepsilon > 0$, y podemos calcular $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Si hacemos que ε tienda a cero, esta integral se acerca cada vez más al área que buscamos. Se define la *integral impropia* de $f(x)$ entre a y b como

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Si el límite es finito decimos que la integral impropia es *convergente*, y en otro caso (si el límite es infinito o no existe) diremos que la integral es *divergente*.

Cuando la asíntota está en a se procede de modo análogo

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

y cuando está en un punto intermedio $c \in (a,b)$ se define la integral impropia

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Ejemplo 3.4.1. *Calcular* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ *y* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$.

Solución. Ambas integrales son impropias porque los integrandos presentan una asíntota vertical en $x = 0$. Para la primera tenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

luego la integral es convergente y vale 2.

Para la segunda tenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = +\infty$$

luego la integral es divergente. ∎

Otro tipo de integrales impropias se presenta cuando consideramos funciones continuas definidas en intervalos infinitos, por ejemplo de la forma $[a, +\infty)$.

Por la continuidad, para cualquier $b > a$ existe $\int_a^b f(x)\,dx$, y podemos definir

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

que será convergente si el límite existe y es finito y divergente en caso contrario. Para intervalos infinitos del tipo $(-\infty, a]$ ó $(-\infty, +\infty)$ definimos

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx := \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ejemplo 3.4.2. *Estudiar el carácter de*

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

Solución. Las dos primeras son convergentes y la última es divergente, pues

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln(b) = +\infty$$ ■

A veces, aunque no conozcamos una primitiva del integrando, podemos averiguar el *carácter* (convergente o divergente) de una integral impropia gracias a:

Proposición 3.4.3 (Criterio de comparación). *Sean $f(x)$ y $g(x)$ definidas en $[a, b]$ (donde a y b pueden ser $\pm\infty$) tales que $0 \le f(x) \le g(x)$ para cualquier $x \in [a, b)$. Entonces:*

- *Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente, también lo es $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*
- *Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es divergente, también lo es $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$.*

Ejemplo 3.4.4. *Estudiar el carácter de $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ y de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.*

Solución. Sabemos que la primitiva de la función e^{-x^2} no es expresable en términos de funciones elementales, pero sí podemos comparar la función con e^{-x}.

Para cualquier $x \ge 1$ se tiene $x^2 \ge x$ luego $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Entonces del ejemplo anterior y del criterio de comparación se deduce que la integral del enunciado es convergente.

Otro problema distinto es saber cuánto vale dicha integral.

Podemos ver que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ es divergente directamente o comparándola con $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$. ■

3.5. Ejercicios

1. Calcular las siguientes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x)}$ (b) $\int \sqrt{9x^2-4}\,dx$ (c) $\int e^x(1+e^x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

   (d) $\int x\cos(4x^2-1)\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\,dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$ (f) $\int \cos(3x)\cos(4x)\,dx$

   (g) $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{(x+3)(x+4)^3}$ (h) $\int (x+1)^2\cos(3x)\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

   (j) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)^2}$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos(x)}$

   (m) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\sqrt{x})\,dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ (ñ) $\int x^2\arctan(x)\,dx$

2. Calcular las siguientes integrales definidas (algunas son impropias):

   (a) $\int_0^{\pi/2}\cos^2(4x)\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(2x)\cos(3x)\,dx$ (c) $\int_0^1\sqrt{x}\ln(x)\,dx$

   (d) $\int_0^\infty e^{-2t}\,dt$ (e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(x-1)}$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(2x-3)}$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (h) $\displaystyle\int_0^{15} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}}$ (i) $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$

   (j) $\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos(3x)\,dx$ (k) $\int_0^1 x^2\ln(x)\,dx$ (l) $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$

   (m) $\int_0^\pi \operatorname{sen}^6(x)\,dx$ (n) $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3(x)\cos^5(x)\,dx$ (ñ) $\int_0^\infty \operatorname{sen}(t)\,dt$

   (o) $\int_0^\infty e^{-at}\cos(bt)\,dt$ (p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)}$ (q) $\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$

3. La forma de las líneas en la espectroscopía de resonancia magnética se describe a menudo por la función de Lorentz

   $$g(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{T}{1+T^2(\omega-\omega_0)^2}$$

   Hallar $\int_{\omega_0}^\infty g(\omega)\,d\omega$.

4. Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calcular $\int_0^\infty e^{-bx^2}dx$ para $b>0$.

5. La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T tenga una velocidad v viene dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann

   $$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

donde k es la constante de Boltzmann. Encontrar la velocidad media $\bar{v}$ y la velocidad en media cuadrática $\sqrt{\overline{v^2}}$, dadas por:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv \qquad\qquad \overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv$$

6. En espectroscopía la forma de las líneas se analiza a veces mediante los momentos segundos. El de una señal centrada en la frecuencia angular ω_0 viene dado por la integral de la izquierda. Calcular esa integral para la curva gaussiana de la derecha:

$$\int_{\omega_0}^\infty (\omega - \omega_0)^2 g(\omega)\, d\omega \qquad\qquad g(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, T\, e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega-\omega_0)^2}$$

7. Encontrar los valores de x para los que la función $F(x) = \int_0^{x^3-x} e^{-t^2}\, dt$ alcanza sus extremos relativos.

8. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 3 de $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt$.

9. Calcular el área limitada por $y = \dfrac{|x|}{1+x^4}$ y su asíntota horizontal.

10. Calcular el área limitada por las curvas $x = 0$, $y = \cosh(x)$ e $y = \operatorname{senh}(x)$.

11. Determinar el valor de a para que la curva $y = ax^2$ divida en dos regiones de igual área el recinto limitado por $x = 1$, $y = \sqrt{x}$ y el eje horizontal.

12. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

13. Dibujar la gráfica de la ecuación $4y^2 = x^2(4 - x^2)$ y calcular el área que encierra.

14. Calcula el área limitada por las curvas $y = \cos(x)$ e $y = 0$ para $x \in [\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, y compárala con la que se obtiene al sustituir $\cos(x)$ por su polinomio de Maclaurin de grado 2.

    Repite el ejercicio para $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y para los polinomios de grados 2 y 4.

15. Un móvil parte del origen de coordenadas y se desplaza $\frac{335}{27}$ unidades sobre la curva $y = x^{3/2}$. ¿Cuál es el punto al que llega?

16. Determinar el área superficial de una esfera de radio R y de un cono de altura h y de base de radio R.

17. Calcular el volumen del sólido que se obtiene cuando gira alrededor del eje horizontal el círculo de ecuación $(x-5)^2 + (y-5)^2 \leq 4$.

18. Calcular el volumen de una pirámide de altura h si su base tiene área B.

3.6. Soluciones de los ejercicios

1. $a = \ln(\ln(x))$ $\quad b = \frac{1}{2}x\sqrt{9x^2-4} - \frac{2}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2-4})$ $\quad c = \frac{2(1+e^x)^{3/2}}{3}$ $\quad d = \frac{\operatorname{sen}(4x^2-1)}{8}$
   $e = -\ln(1-\operatorname{sen}(x))$ $\quad f = \frac{4\cos(3x)\operatorname{sen}(4x)-3\operatorname{sen}(3x)\cos(4x)}{7}$ $\quad g = \ln\left|\frac{x+4}{x+3}\right| - \frac{x+5}{(x+4)^2}$
   $h = \frac{1}{27}\left[(9x^2+18x+7)\operatorname{sen}(3x) + (6x+6)\cos(3x)\right]$ $\quad i = \frac{-1-\ln(x)}{x}$ $\quad j = \ln|x-1| - \frac{4}{x-2}$
   $k = \arctan(x+2)$ $\quad l = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\sqrt{7}\,\tan(\frac{x}{2})\right)$ $\quad m = \frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right]$
   $n = \arctan^2(\sqrt{x})$ $\quad$ ñ $= \frac{1}{3}\left[x^3\arctan(x) - \frac{x^2}{2} + \ln(\sqrt{1+x^2})\right]$

2. $a = \frac{\pi}{4}$ $\quad b = \frac{-2}{5}$ $\quad c = \frac{-4}{9}$ $\quad d = \frac{1}{2}$ $\quad e = \ln(2)$ $\quad f = \frac{1}{7}\ln(\frac{2}{9})$ $\quad g = \frac{\pi}{6}$ $\quad h = \frac{28}{3}$ $\quad i = \frac{1+e^2}{4}$
   $j = \frac{1-3e^{-\pi/2}}{10}$ $\quad k = \frac{-1}{9}$ $\quad l = 2$ $\quad m = \frac{5\pi}{16}$ $\quad n = \frac{1}{24}$ $\quad o = \frac{a}{a^2+b^2}$ $\quad q = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ ñ y p no convergen

3. 1/2.

4. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/b}$.

5. $\bar{v} = 2\sqrt{2kT/m\pi}$, $\quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT/m}$

6. $1/T^2$.

7. Si hacemos $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ entonces $f'(x) = e^{-x^2}$ y $F(x) = f(x^3-x)$, luego $F'(x) = (3x^2-1)e^{-(x^3-x)^2}$ y los puntos críticos son $\pm 1/\sqrt{3}$. Calculando $F''(x)$ o estudiando "a mano" $F'(x)$ se ve que en $x = -1/\sqrt{3}$ hay un máximo y en $x = 1/\sqrt{3}$ hay un mínimo.

8. $8 - \frac{1}{18}x^3$.

9. $\pi/2$.

10. 1.

11. $a = 1$.

12. 27/4.

13. La gráfica sólo existe para $x \in [-2,2]$ y tiene dos "ramas" $y = \frac{\pm x\sqrt{4-x^2}}{2}$. Por simetría, el área es 4 veces la del primer cuadrante, es decir $2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2} = 16/3$.

14. Para $x \in [-\pi/6, \pi/6]$ el área es 1; con el polinomio se obtiene 0,999348.
    Para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ el área es 2; con los polinomios se obtiene 1,849664 y 2,009050.

15. $(5, 5\sqrt{5})$.

16. Esfera $4\pi R^2$. $\quad$ Cono $\pi R\sqrt{R^2+h^2}(+\pi R^2)$.

17. $40\pi^2$.

18. $\frac{1}{3}Bh$.

Tema 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Introducción

Una *ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden* n es una ecuación donde intervienen una variable x, una función $y = y(x)$ y sus n primeras derivadas:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Resolver o integrar la ecuación es hallar las funciones $y(x)$ que cumplen la ecuación; es decir, la *incógnita* de la ecuación es la función $y(x)$.

Ejemplo 4.1.1. *Encontrar todas las soluciones de la EDO de primer orden* $y'(x) = 4x + e^{2x}$*. ¿Cuáles de ellas verifican* $y(0) = 1$*?*

Solución. Por la forma de la ecuación, las soluciones son precisamente las primitivas de la función $4x + e^{2x}$, que se pueden dar en términos de un parámetro C en la forma

$$y(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}\, e^{2x} + C$$

Si exigimos $1 = y(0) = \frac{1}{2} + C$ entonces $C = \frac{1}{2}$ y por tanto la única solución que cumple esa condición extra es

$$y(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}\, e^{2x} + \frac{1}{2} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.1.2. *Encontrar todas las soluciones de la EDO* $(1+x^2)^2\, y''(x) + 2x = 0$*. ¿Cuáles de ellas verifican* $y(0) = 2$ *e* $y'(0) = 0$*?*

Solución. Podemos reescribir la ecuación como $y''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Si consideramos la nueva función $u(x) = y'(x)$ entonces la ecuación se transforma en $u'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ y por tanto $u(x)$ es una primitiva de la función dada, es decir

$$y'(x) = u(x) = \frac{1}{1+x^2} + C$$

Tomando de nuevo primitivas obtenemos

$$y(x) = \arctan(x) + Cx + D$$

Si exigimos que se cumpla $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$ se obtiene fácilmente $D = 2$ y $C = -1$, por lo que la única solución que cumple esas condiciones extra es

$$y(x) = \arctan(x) - x + 2$$ ■

Como sugieren los ejemplos anteriores, una EDO de orden n puede tener una infinidad de soluciones que se expresan mediante n parámetros en la *solución general* de la ecuación, y si se imponen n condiciones iniciales (por ejemplo, si se fijan los valores de $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$) entonces la ecuación tiene una única *solución particular* para esas condiciones iniciales.

4.1.1. Ejemplos de ecuaciones diferenciales en la naturaleza

Veamos a continuación, a modo de ejemplo, cómo las ecuaciones diferenciales aparecen en el estudio de fenómenos naturales.

Caída libre de un cuerpo

Supongamos que un cuerpo de masa m cae libremente, tan sólo bajo la acción de la gravedad, desde una posición inicial y_0 y con una velocidad inicial v_0. En este caso, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es mg, donde g es la aceleración debida a la gravedad terrestre. Si $y(t)$ mide la distancia hacia abajo del cuerpo en función del tiempo t, entonces su aceleración será $y''(t)$, y la *segunda Ley de Newton* nos da

$$m\,y''(t) = mg \qquad \text{o sea} \qquad y''(t) = g$$

Si llamamos $v(t) = y'(t)$ a la velocidad del cuerpo en el instante t, la ecuación se transforma en $v'(t) = g$ y por tanto $y'(t) = v(t) = gt + C$, de donde

$$y(t) = \frac{1}{2}\,gt^2 + Ct + D$$

De la condición $v(0) = v_0$ se deduce que $C = v_0$ y de $y(0) = y_0$ se deduce que $D = y_0$. Por tanto la posición del cuerpo en cada instante viene dada por

$$y(t) = \frac{1}{2}\,gt^2 + v_0 t + y_0$$

Caída retardada de un cuerpo

Supongamos ahora que el aire ejerce sobre el objeto una resistencia a la caída que es, en cada instante, proporcional a la velocidad del cuerpo. Si k es la constante de proporcionalidad de la resistencia del aire, la segunda ley de Newton nos dice que

$$m\,y''(t) = mg - k\,y'(t) \qquad \text{o sea} \qquad y''(t) = g - a\,y'(t)$$

(con $a = k/m$). Para integrar esta ecuación de segundo orden volvemos a hacer $v = y'(t)$, que transforma la ecuación en

$$v'(t) = g - av(t) \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{dt} = g - av \qquad \text{ó} \qquad \frac{dv}{g - av} = dt$$

Tomando primitivas obtenemos

$$\frac{-1}{a}\ln(g - av) = t + C \qquad \text{ó} \qquad g - av = e^{-at-aC} = De^{-at} \qquad \text{ó} \qquad v = \frac{1}{a}\left(g - De^{-at}\right)$$

(con $D = e^{-aC}$). Por tanto $y(t)$ es un primitiva de esta última función, es decir

$$y(t) = \frac{1}{a}\left(gt + \frac{1}{a}De^{-at}\right) + E = \frac{g}{a}\,t + F\,e^{-at} + E$$

(con $F = D/a^2$). La condición sobre la posición inicial nos dice que $y_0 = y(0) = F + E$, y tras calcular $y'(t)$ se obtiene $v_0 = y'(0) = \frac{g}{a} - aF$, de donde

$$F = \frac{g - av_0}{a^2} \qquad \text{y} \qquad E = y_0 - \frac{g - av_0}{a^2}$$

y así finalmente

$$y(t) = y_0 + \frac{g}{a}\,t + \frac{g - av_0}{a^2}\,(e^{-at} - 1)$$

Reacciones químicas de primer orden

Son reacciones en las que una sustancia se descompone espontáneamente a un ritmo que es proporcional en cada instante a la cantidad de sustancia presente. Si $x = x(t)$ es la cantidad de sustancia presente en el instante t (con cantidad inicial $x(0) = x_0$) y $k > 0$ es la constante de proporcionalidad (o *de rapidez*), la ecuación que rige el proceso es

$$-\frac{dx}{dt} = kx \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{x} = -kdt$$

(puesto que dx/dt es el índice de crecimiento de x, $-dx/dt$ nos da el índice de descomposición.) Tomando primitivas en ambos miembros se tiene

$$\ln x = -kt + C \quad \Rightarrow \quad x = Ae^{-kt} \quad (\text{con } A = e^C)$$

De la condición inicial $x(0) = x_0$ se deduce que $A = x_0$, de modo que

$$x(t) = x_0\, e^{-kt}$$

Para controlar estas reacciones, basta con determinar el valor de la constante de rapidez k, y esto se consigue midiendo la *vida media* de la sustancia radiactiva, es decir, el tiempo T que tarda una cierta cantidad de sustancia en reducirse a la mitad. Para ese valor T se tiene $x(T) = x_0/2$, lo que sustituido en la ecuación da

$$\frac{x_0}{2} = x_0\, e^{-kT} \qquad \text{o sea} \qquad kT = \ln 2 \qquad \text{ó} \qquad k = \frac{\ln 2}{T}$$

Si la vida media es muy larga, como ocurre a menudo, basta con ver, por ejemplo, para qué valor T_1 la cantidad inicial se reduce a sus 9 décimas partes, y entonces $k = \dfrac{\ln(10/9)}{T_1}$.

Ley de enfriamiento de Newton

La *ley de enfriamiento* de Newton establece que la variación de temperatura de un cuerpo es proporcional en cada instante a su diferencia de temperatura con el ambiente. Es decir, si $x = x(t)$ mide la temperatura de un cuerpo en el instante t y x_A es la temperatura ambiente, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\,(x - x_A) \qquad \text{ó} \qquad \frac{dx}{x - x_A} = k\, dt$$

para cierta constante k que depende del cuerpo. Tomando primitivas en ambos miembros de la segunda expresión se tiene

$$\ln(x - x_A) = kt + C \qquad \text{ó} \qquad x(t) = x_A + Be^{kt} \qquad (\text{con } B = e^C)$$

Así podemos resolver problemas como el siguiente:

Ejemplo 4.1.3. *Un termómetro se saca de una habitación a la terraza, donde la temperatura es de 10ºC. Un minuto después marca 22ºC y otro minuto más tarde marca 16ºC. ¿Cuál era la temperatura en la habitación?*

Solución. Midiendo el tiempo en minutos y la temperatura en grados centígrados, y empezando a contar el tiempo al sacar el termómetro, los datos nos dicen que $x_A = 10$, $x(1) = 22$ y $x(2) = 16$ y nos están pidiendo $x(0) = x_A + B = 10 + B$. Al sustituir los datos en la ecuación tenemos

$$22 = 10 + Be^k \quad \text{ó} \quad 12 = Be^k \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad 16 = 10 + Be^{2k} \quad \text{ó} \quad 6 = Be^{2k}$$

Dividiendo $6 = Be^{2k}$ entre $12 = Be^k$ se obtiene $e^k = 1/2$ y entonces $12 = Be^k = B/2$, de donde $B = 24$ y así $x(0) = 34$, es decir, la temperatura en la habitación era de 34ºC. ■

4.2. Ecuaciones de primer orden

Son ecuaciones del tipo $f(x, y, y') = 0$. Veamos cómo se integran en algunos casos sencillos.

4.2.1. Ecuaciones de variables separables

Llamamos ecuación de *variables separables* a una que puede llevarse a la forma

$$g(y)\ dy = f(x)\ dx$$

Ya hemos resuelto varias de éstas en los ejemplos anteriores: basta con tomar primitivas en ambos miembros para obtener

$$\int g(y)\, dy = C + \int f(x)\, dx$$

(en principio habría que sumar constantes A y B en ambos miembro, pero podríamos entonces juntarlas en el segundo miembro haciendo $C = B - A$).

Una vez calculadas las primitivas, esa expresión nos da la solución general de la ecuación en términos del parámetro C. En principio tenemos y como función implícita de x, pero en muchos casos es posible despejarla explícitamente.

Si queremos obtener la solución particular para una cierta condición inicial $y(x_0) = y_0$, basta con sustituirla en la solución general para determinar el valor de C en ese caso.

Ejemplo 4.2.1. *Obtener la solución general de la ecuación* $y' = x\, e^{x-y}$.

Solución. Separando las variables y tomando luego primitivas se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x\, e^{x-y} = xe^x e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^y dy = x\, e^x dx \quad \Rightarrow \quad e^y = (x-1)\, e^x + C$$

(la segunda primitiva se calcula fácilmente por partes). Despejando y obtenemos

$$y = \ln\left((x-1)\, e^x + C\right) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.2.2. *Hallar la solución particular de* $(1 + e^x)yy' = e^x$ *con* $y(x_0) = y_0$.

Solución. Separando las variables, tomando primitivas y despejando y se obtiene

$$y\ dy = \frac{e^x}{1+e^x}\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{2\ln(1+e^x) + D}$$

que es la solución general. La condición inicial implica que

$$y_0 = y(0) = \sqrt{2\ln 2 + D} \quad \Rightarrow \quad y_0^2 = 2\ln(1+e^{x_0}) + D \quad \Rightarrow \quad D = y_0^2 - 2\ln(1+e^{x_0})$$

y sustituyendo este valor de D en la solución general obtenemos la solución particular

$$y(x) = \sqrt{y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)} \qquad \blacksquare$$

4.2.2. Ecuaciones homogéneas

Una función de dos variables $f(x, y)$ es *homogénea* si verifica

$$f(tx, ty) = f(x, y) \qquad \text{para cualquier } t \neq 0$$

Por ejemplo:

- $f(x, y) = xe^y$ no es homogénea pues $f(tx, ty) = txe^{ty} \neq xe^y$.
- $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ no es homogénea pues $f(tx, ty) = \dfrac{(tx)^2 + (ty)^2}{tx + ty} = t\, f(x, y) \neq f(x, y)$.
- $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y}$ sí es homogénea pues $f(tx, ty) = \dfrac{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx + ty} = f(x, y)$.
- $f(x, y) = \dfrac{2x^5 - 7x^4y + 29x^2y^3 + xy^4}{x^5 + 2x^2y^2 - xy^4 + 6y^5}$ sí es homogénea, pues en $f(tx, ty)$ aparece t^5 como factor común en el numerador y en el denominador, y podemos cancelarlos.

Una EDO de primer orden es *homogénea* si podemos llevarla a la forma $y' = f(x, y)$ donde $f(x, y)$ es una función homogénea.

Para integrarla, basta con hacer el cambio de variable $u = y/x$ (con $y = ux,\ y' = u + u'x$), que la convierte en una ecuación de variables separables.

Ejemplo 4.2.3. *Resolver la ecuación diferencial* $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución. Despejando y' queda $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x, y)$, que es homogénea pues

$$f(tx, ty) = \frac{ty + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}}{tx} = \frac{ty + t\sqrt{x^2 + y^2}}{tx} = f(x, y)$$

Haciendo el cambio de variable indicado y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$u + u'x = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1 + u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u' = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arg\,senh}(u) = \ln x + C \quad \Rightarrow^{1} \quad u = \operatorname{senh}(\ln x + C) = \frac{Kx - \frac{1}{Kx}}{2}$$

(donde $K = e^C$). Por último, deshacemos el cambio para recuperar la variable y:

$$y = ux = \frac{Kx^2 - \frac{1}{K}}{2} = \frac{K}{2}x^2 - \frac{1}{2K} \qquad \blacksquare$$

[1] Si usamos la fórmula alternativa para $\operatorname{arg\,senh}(u)$ obtenemos $\ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = \ln x + C$, de donde $u + \sqrt{1 + u^2} = Kx$, o sea $\sqrt{1 + u^2} = Kx - u$. Elevando al cuadrado $1 + u^2 = K^2x^2 + u^2 - 2Kxu$, o sea $1 = K^2x^2 - 2Ku$, y se obtiene el mismo valor para u.

4.2.3. Ecuaciones lineales de primer orden

Llamamos ecuaciones lineales de primer orden a las de la forma

$$y' + f(x)\, y = g(x) \qquad (\dagger)$$

donde $f(x), g(x)$ son funciones arbitrarias.

Un caso especialmente sencillo se produce cuando $g(x) = 0$. Entonces la ecuación

$$y' + f(x)\, y = 0 \qquad (\ddagger)$$

(que se llama ecuación *lineal homogénea* asociada a ($\dagger$)) tiene variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -f(x)\, dx$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces $\ln(y) = -F(x) + C$, y si ponemos $K = e^C$ la solución general de ($\ddagger$) es

$$y(x) = Ke^{-F(x)}$$

Este caso sencillo ($\ddagger$) nos da la clave para resolver el caso general ($\dagger$), pues se tiene:

Proposición 4.2.4 (Método de variación de las constantes). *Con las notaciones anteriores, la solución general de* ($\dagger$) *es*

$$y(x) = K(x)\, e^{-F(x)}$$

donde la función $K(x)$ se obtiene sustituyendo esa expresión en la ecuación ($\dagger$)*.*

Es decir, la solución general de ($\dagger$) *es como la de* ($\ddagger$) *pero cambiando la constante K por una función $K(x)$, cuyo valor hay que determinar.*

La derivada de $y(x) = K(x)\, e^{-F(x)}$ es

$$y'(x) = K'(x)\, e^{-F(x)} + K(x)\, e^{-F(x)}(-f(x)) = K'(x)\, e^{-F(x)} - f(x)\, y(x)$$

y al sustituir estas expresiones en ($\dagger$) se obtiene

$$g(x) = y'(x) + f(x)\, y(x) = K'(x)\, e^{-F(x)} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = g(x)\, e^{F(x)}$$

Por tanto $K(x)$ es una primitiva de $g(x)\, e^{F(x)}$, por lo que finalmente

$$y(x) = \left(\int g(x)\, e^{F(x)}\, dx + C \right) e^{-F(x)}$$

Esta es una fórmula general para resolver ($\dagger$), pero no es sencilla de recordar. En los ejemplos repetiremos estos pasos:

- Obtener la solución general de ($\ddagger$) en términos de una constante K.
- Buscar la solución general de ($\dagger$) cambiando la constante K por una función $K(x)$ y sustituyendo en la ecuación para determinar quién es $K(x)$.

Ejemplo 4.2.5. *Hallar la solución particular de la ecuación* $y' = e^x + y$ *con* $y(1) = 5e$.

Solución. La ecuación es lineal, pues podemos reescribirla como $y' - y = e^x$. Primero resolvemos la ecuación $y' - y = 0$ separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = x + C \quad \Rightarrow \quad y = Ke^x$$

Buscamos entonces la solución general de la forma $y = K(x)\, e^x$. Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$e^x = y' - y = K'(x)\, e^x + K(x)\, e^x - K(x)\, e^x = K'(x)\, e^x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad K(x) = x + C$$

y por tanto la solución general es

$$y(x) = (x + C)\, e^x$$

Sustituyendo ahora la condición inicial $5e = y(1) = (1 + C)\, e$ obtenemos $C = 4$, luego la solución pedida es

$$y(x) = (x + 4)\, e^x \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.2.6. *Hallar la solución general de la ecuación* $y' = 2x\,(y + e^{x^2})$.

Solución. La ecuación es lineal, pues podemos reescribirla como $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. Comenzamos resolviendo $y' - 2xy = 0$ separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = Ke^{x^2}$$

Buscamos entonces la solución general de la forma $y = K(x)\, e^{x^2}$. Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$2x\, e^{x^2} = y' - 2xy = K'(x)\, e^{x^2} + K(x)\, e^{x^2} 2x - 2x\, K(x)\, e^{x^2} = K'(x)\, e^{x^2}$$

luego $K'(x) = 2x$ y así $K(x) = x^2 + C$, de modo que la solución general es

$$y(x) = (x^2 + C)\, e^{x^2} \qquad \blacksquare$$

4.2.4. Ecuaciones de Bernoulli

Son ecuaciones de la forma

$$y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n$$

Es decir, se diferencian de las lineales en ese último factor y^n. Una manera de eliminar ese factor molesto consiste en dividir toda la ecuación por y^n, con lo que se obtiene

$$y^{-n}y' + f(x)\,y^{1-n} = g(x)$$

De nuevo buscando una ecuación lineal podemos hacer el cambio de variable $u = y^{1-n}$, que al derivar da $u' = (1-n)y^{-n}y$ y por tanto transforma la ecuación en

$$\frac{1}{1-n}\,u' + f(x)\,u = g(x) \qquad \text{ó} \qquad u' + (1-n)\,f(x)\,u = (1-n)\,g(x)$$

que ya es una ecuación lineal. Resolviendo esta ecuación lineal y deshaciendo el cambio de variable tendremos integrada la ecuación inicial.

Ejemplo 4.2.7. *Encontrar la solución general de la ecuación $xy' + y = -xy^2$.*

Solución. Dividiendo por x obtenemos la ecuación de Bernoulli $y' + \frac{1}{x}\,y = -y^2$, a la que hay que aplicar el cambio $u = y^{-1}$, o sea $y = u^{-1}$ y por tanto $y' = -u^{-2}u'$. Sustituyendo en la ecuación dada y multiplicando luego por $-u^2$ tenemos

$$-u^{-2}\,u' + \frac{1}{x}\,u^{-1} = -u^{-2} \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{1}{x}\,u = 1$$

que es lineal. Separando variables en la homogénea tenemos

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(u) = \ln(x) + C \quad \Rightarrow \quad u = Kx$$

luego hay que buscar una solución del tipo $u = K(x)\,x$, que sustituida en la lineal da

$$1 = u' - \frac{1}{x}\,u = K'(x)\,x + K(x) - K(x) = K'(x)\,x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \ln(x) + C = \ln(Dx) \quad \Rightarrow \quad u = x\ln(Dx) \quad \Rightarrow \quad y(x) = u^{-1} = \frac{1}{x\ln(Dx)} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.2.8. *Encontrar la solución general de la ecuación $y' + \dfrac{2y}{x} = -\dfrac{y^3}{2x^2}$.*

Solución. Aplicando el cambio $u = y^{-2}$, con $y = u^{-1/2}$ e $y' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}u'$, y multiplicando luego por $u^{3/2}$, se obtiene la ecuación lineal

$$u' - \frac{4}{x}\,u = \frac{1}{x^2}$$

cuya solución general es $u = Cx^4 - \dfrac{1}{5x} = \dfrac{Dx^5+1}{5x}$, y por tanto

$$y(x) = \left(\frac{Dx^5+1}{5x}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{5x}{Dx^5+1}} \qquad \blacksquare$$

4.3. Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una de la forma

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$$

donde $f(x), g(x), h(x)$ son funciones de la variable x. A $g(x)$ y $h(x)$ se les llama *coeficientes* y a $f(x)$ el *término independiente*.

Sólo vamos a estudiar las que tengan los coeficientes constantes, es decir, las del tipo

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (\dagger)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ (si y'' lleva un coeficiente constante, la transformamos en una así sin más que dividir toda la ecuación por ese coeficiente).

Cuando $f(x) = 0$ se dice que la ecuación es *homogénea*. Vamos a resolver primero las ecuaciones homogéneas, y después resolveremos (†) para algunos casos particulares de $f(x)$.

4.3.1. El caso homogéneo

La solución general de la ecuación

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\ddagger)$$

depende de cómo sean las raíces de su *polinomio característico*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

y siempre involucra dos constantes arbitrarias C_1 y C_2. Se pueden presentar tres casos:

1. Si $P(\lambda)$ tiene dos raíces reales distintas $r_1 \neq r_2$, la solución general de (‡) es

$$y = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$$

2. Si $P(\lambda)$ tiene una raíz real doble r la solución general es

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$$

3. Si $P(\lambda)$ tiene dos raíces complejas conjugadas $r \pm is$ la solución es

$$y = [C_1 \cos(sx) + C_2 \operatorname{sen}(sx)]\, e^{px}$$

Comprobar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación es un interesante ejercicio de cálculo de derivadas (y de simplificación) que se deja a cargo del lector. Más difícil es asegurar que no hay otras soluciones.

Por otra parte, si se imponen dos condiciones iniciales a la ecuación, se pueden determinar los valores de C_1 y C_2 y se obtiene pues una única solución.

Ejemplo 4.3.1. *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:*

✓ $\left\{ \begin{array}{l} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y(1) = 0 \end{array} \right\}$.

El polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ tiene la raíz doble -2, de modo que la solución general es $y = (C_1 x + C_2)e^{-2x}$. La primera condición inicial nos dice ahora que $1 = y(0) = C_2$, y la segunda que $0 = y(1) = (C_1 + C_2)e^{-2}$, por lo que $C_1 + C_2 = 0$ y así $C_1 = -1$. En definitiva, la solución es

$$y = (1 - x)\, e^{-2x}$$

✓ $\left\{ \begin{array}{l} 16y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y(1) = 1 \end{array} \right\}$.

Podemos reescribir la ecuación como $y'' + (\pi^2/16)y = 0$. Su polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + (\pi^2/16)$ tiene raíces complejas $\pm\pi/4$, de modo que la solución general es $y = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. La primera condición inicial da $1 = y(0) = C_1$, y la segunda $1 = y(1) = (C_1 + C_2)\frac{1}{\sqrt{2}}$, de donde $C_2 = \sqrt{2} - C_1 = \sqrt{2} - 1$. En definitiva

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

✓ $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 + e^2 \quad y(1) = 3e^3 \end{array} \right\}$.

El polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ tiene raíces reales 1 y 3, de modo que la solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Las condiciones iniciales se traducen en

$$2 + e^2 = y(0) = C_1 + C_2 \qquad\qquad 3e^3 = y(1) = C_1 e + C_2 e^3$$

Multiplicando la primera por e y restándole la segunda se deduce que $C_2 = 2$, y entonces por la primera se tiene $C_1 = e^2$. En definitiva, la solución es

$$y = e^{2+x} + 2e^{3x}$$

✓ $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = 5 \end{array} \right\}$.

El polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$ tiene raíces complejas $1 \pm \sqrt{2}$, de modo que la solución general es $y = e^x \left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$. La primera condición inicial da $3 = y(0) = C_1$. Para aplicar la segunda necesitamos calcular primero

$$y' = e^x \left((C_1 + \sqrt{2}C_2) \cos(\sqrt{2}x) + (C_2 - \sqrt{2}C_1) \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$$

Entonces $5 = y'(0) = C_1 + \sqrt{2}C_2 = 3 + \sqrt{2}C_2$, de donde $C_2 = \sqrt{2}$. En definitiva

$$y = e^x \left(3 \cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$$ ■

4.3.2. El caso no homogéneo para $f(x) =$ exponencial por polinomio

Proposición 4.3.2. *La solución general de la ecuación $y'' + ay' + by = f(x)$ es de la forma*

$$y = y_p + y_h$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación e y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada $y'' + ay' + by = 0$.

Como ya sabemos calcular y_h, el problema está en conseguir una solución particular y_p. Esto puede ser muy difícil en general, pero sí lo podemos resolver cuando $f(x)$ tiene algunas formas particulares. Vamos a ver con detalle el caso en que $f(x)$ es el producto de una exponencial por un polinomio, y analizaremos otros casos en un apéndice.

Proposición 4.3.3 (Método de los coeficientes indeterminados). *La ecuación*

$$y'' + ay' + by = e^{rx}g(x)$$

donde $g(x)$ es un polinomio, tiene una solución particular de la forma

$$y_p = x^k e^{rx} G(x)$$

donde k es la multiplicidad de r en $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ y $G(x)$ es un polinomio del mismo grado que $q(x)$, cuyos coeficientes se pueden determinar sustituyendo y_p en la ecuación.

Esta forma de $f(x)$ incluye el caso exponencial $f(x) = Ae^r x$ (pues entonces $g(x) = A$ es un polinomio constante, o sea de grado 0), el caso polinómico $f(x) = g(x)$ (haciendo $r = 0$) e incluso otros como $f(x) = a^x g(x)$ (haciendo $r = \ln a$). Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.3.4. *Calcular la solución general de la ecuación $y'' - y' - 6y = 3x^2 + 2x + 1$.*

Solución. Las raíces de $P(\lambda)$ son 3 y -2, por lo que $y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$. Como $f(x) = e^{0x}(3x^2 + 2x + 1)$ y $r = 0$ no es raíz de $P(\lambda)$, se tiene $k = 0$. Por tanto hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Calculando sus dos primeras derivadas y sustituyéndolas en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 1 &= 2A - (2Ax + B) - 6(Ax^2 + Bx + C) \\ &= -6Ax^2 - (2A + 6B)x + (2A - B - 6C) \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de x^2 deducimos que $A = -1/2$; igualando entonces los de x obtenemos $B = -1/6$, e igualando los términos independientes vemos que $C = 5/36$, por lo que la solución general es

$$y = y_p + y_h = \frac{5}{35} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.5. *Calcular la solución general de la ecuación* $y'' - y' - 6y = 3e^{-2x}$.

Solución. Como antes $y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$, pero ahora $r = -2$ es raíz simple de $P(\lambda)$ y por tanto $k = 1$. Como además hay un polinomio constante, hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^{-2x}$$

Sus dos primeras derivadas valen $y_p' = A(1-2x)e^{-2x}$ e $y_p'' = A(4x-4)e^{-2x}$. Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$3e^{-2x} = Ae^{-2x}\left[(4x-4) - (1-2x) - 6x)\right] = -5Ae^{-2x}$$

por lo que $A = -3/5$ y la solución general es

$$y = y_p + y_h = C_1e^{3x} + \left(C_2 - \frac{3}{5}x\right)e^{-2x} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.6. *Calcular la solución general de la ecuación* $y'' - 2y' + y = 12e^x(x^2 + x + 1)$.

Solución. $P(\lambda)$ tiene a 1 por raíz doble, por lo que $y_h = (C_1x + C_2)e^x$. Como $r = 1$, se tiene $k = 2$ y hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p = x^2e^x(Ax^2 + Bx + C) = e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)$$

Calculando sus dos primeras derivadas y agrupando en potencias de x se tiene

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x\left[Ax^4 + (4A+B)x^3 + (3B+C)x^2 + 2Cx\right] \\ y_p'' &= e^x\left[Ax^4 + (8A+B)x^3 + (12A+6B+C)x^2 + (6B+4C)x + 2C\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación, y volviendo a agrupar en potencias de x, se tiene

$$e^x\left[12x^2 + 12x + 12\right] = y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x\left[12Ax^2 + 6Bx + 2C\right]$$

de donde $A = 1$, $B = 2$, $C = 6$ y así

$$y = y_p + y_h = e^x\left[x^4 + 2x^3 + 6x^2 + C_1x + C_2\right] \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.7. *Calcular la solución particular de la ecuación* $y'' - 2y' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$ *que satisface las condiciones iniciales* $y(0) = 3$ *e* $y'(0) = 1$.

Solución. Como antes, $y_h = (C_1x + C_2)e^x$, pero ahora $r = 2$ y por tanto $k = 0$. Hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

con derivadas

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{2x}\left[2Ax^2 + (2A+2B)x + (B+2C)\right] \\ y_p'' &= e^{2x}\left[4Ax^2 + (8A+4B)x + (2A+4B+4C)\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$e^{2x}\left[x^2+x+1\right] = y_p'' - 2y_p' + y_p = e^{2x}\left[Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B+C)\right]$$

de donde $A = 1$, $B = -3$, $C = 5$ y así la solución general es

$$y = y_p + y_h = e^{2x}(x^2 - 3x + 5) + e^x(C_1x + C_2)$$

Tras calcular su derivada

$$y' = e^{2x}(2x^2 - 4x + 7) + e^x(C_1x + C_2 + C_1)$$

podemos sustituir las condiciones iniciales para obtener

$$3 = y(0) = 5 + C_2 \qquad\qquad 1 = y'(0) = 7 + C_1 + C_2$$

Por tanto $C_2 = -2$ y $C_1 = -4$, y la solución particular pedida es

$$y = e^{2x}(x^2 - 3x + 5) - 2e^x(2x+1) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.8. *Calcular la solución particular de la ecuación $y'' + ay' = g$ (con a y g constantes no nulas) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$.*

(Esta es la ecuación que apareció en el problema de la caída retardada de un cuerpo).

Solución. Las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda$ son 0 y $-a$, luego $y_h = C_1 + C_2e^{-ax}$ y $k = 1$. Buscamos pues una solución particular del tipo $y_p = Ax$ con derivadas $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$. Sustituyendo en la ecuación se tiene $g = aA$ y por tanto $A = g/a$. La solución general es pues

$$y = y_p + y_h = \frac{g}{a}x + C_1 + C_2e^{-ax}$$

con derivada $y' = g/a - aC_2e^{-ax}$. De las condiciones iniciales deducimos que

$$y_0 = y(0) = C_1 + C_2 \qquad\qquad v_0 = y'(0) = \frac{g}{a} - aC_2 \quad (\Rightarrow \quad C_2 = \frac{g - av_0}{a^2})$$

Por tanto la solución particular es

$$y = \frac{g}{a}x + (y_0 - C_2) + C_2e^{-ax} = y_0 + \frac{g}{a}x + C_2(e^{-ax} - 1) = y_0 + \frac{g}{a}x + \frac{g - av_0}{a^2}(e^{-ax} - 1) \ \blacksquare$$

Observación: Si el término independiente de la ecuación es una suma de los anteriores, podemos hallar la solución particular sumando soluciones particulares correspondientes a cada uno de los sumandos. Es decir, si la ecuación es

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

donde cada $f_i(x)$ es del tipo "exponencial por polinomio", y si y_i es una solución particular de $y'' + ay' + by = f_i(x)$, entonces

$$y_p = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

es una solución particular de la ecuación dada.

4.3.3. Apéndice: Una generalización del caso anterior

Proposición 4.3.9. *La ecuación*

$$y'' + ay' + by = e^{rx}\left[g(x)\cos(sx) + h(x)\,\mathrm{sen}(sx)\right]$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios, tiene una solución particular de la forma

$$y_p = x^k e^{rx}\left[G(x)\cos(sx) + H(x)\,\mathrm{sen}(sx)\right]$$

donde k es la multiplicidad de $r+si$ en $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ y $G(x)$ y $H(x)$ son polinomios, ambos de grado igual al mayor de los grados de $g(x)$ y $h(x)$, cuyos coeficientes se pueden determinar sustituyendo y_p en la ecuación.

Para $s = 0$ se obtiene el caso estudiado en el apartado anterior, y cuando $s \neq 0$ la multiplicidad k sólo puede valer 0 ó 1 porque si $r+si$ es raíz entonces también lo es $r-si$.

Ejemplo 4.3.10. *Hallar la solución general de $y'' + 2y' + 3y = e^{-x}[2\cos(\sqrt{2}x) - \mathrm{sen}(\sqrt{2}x)]$.*

Solución. Las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$ son $-1 \pm \sqrt{2}i$, luego

$$y_h(x) = e^{-x}[C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)]$$

Además $k = 1$, luego debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = xe^{-x}[A\cos(\sqrt{2}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)]$$

Calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned}
y_p' &= e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)) \;-\; xe^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)) + \\
&+ \; xe^{-x}(-\sqrt{2}A\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x)) \;= \\
&= \; e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)(A - Ax + \sqrt{2}Bx) \;+\; e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)(B - Bx - \sqrt{2}Ax)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_p'' &= -e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)(A - Ax + \sqrt{2}Bx) \;-\; e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)(B - Bx - \sqrt{2}Ax) - \\
&- \; \sqrt{2}e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)(A - Ax + \sqrt{2}Bx) \;+\; \sqrt{2}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)(B - Bx - \sqrt{2}Ax) + \\
&+ \; e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)(-A + \sqrt{2}B) \;+\; e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)(-B - \sqrt{2}A) \;= \\
&= \; e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)\left(-2A + 2\sqrt{2}B - Ax - 2\sqrt{2}Bx\right) + \\
&+ \; e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)\left(-2\sqrt{2}A - 2B + 2\sqrt{2}Ax - Bx\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo y agrupando, el primer miembro $y'' + 2y' + 3y$ de la ecuación queda

$$\begin{aligned}
& e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)\left[-2A + 2\sqrt{2}B - Ax - 2\sqrt{2}Bx + 2A - 2Ax + 2\sqrt{2}Bx + 3Ax\right] + \\
+ \; & e^{-x}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)\left[-2\sqrt{2}A - 2B + 2\sqrt{2}Ax - Bx + 2B - 2Bx - 2\sqrt{2}Ax + 3Bx\right] = \\
= \; & e^{-x}[2\sqrt{2}B\cos(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}A\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)]
\end{aligned}$$

Igualando esta expresión al segundo miembro $e^{-x}(2\cos(\sqrt{2}x) - \operatorname{sen}(\sqrt{2}x))$ deducimos que

$$2\sqrt{2}B = 2 \quad \text{y} \quad -2\sqrt{2}A = -1 \qquad \text{o sea} \qquad B = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad A = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

La solución general es por tanto

$$y(x) = e^{-x}\left(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right) + xe^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right) =$$

$$= e^{-x}\left[\left(C_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}x\right)\cos(\sqrt{2}x) + \left(C_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right] \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.11. *Hallar la solución general de* $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\operatorname{sen} x)$.

Solución. Las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ son $-1 \pm i$, luego

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x\right)$$

Además $k = 1$, luego debemos buscar una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= xe^{-x}\left[(a_1x + b_1)\cos x + (a_2x + b_2)\operatorname{sen} x\right] = \\ &= e^{-x}\cos x\left[b_1x + a_1x^2\right] + e^{-x}\operatorname{sen} x\left[b_2x + a_2x^2\right] \end{aligned}$$

cuyas derivadas valen

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{-x}\left[(a_1x + b_1)\cos x + (a_2x + b_2)\operatorname{sen} x\right] - xe^{-x}\left[(a_1x + b_1)\cos x + (a_2x + b_2)\operatorname{sen} x\right] + \\ &+ xe^{-x}\left[a_1\cos x - (a_1x + b_1)\operatorname{sen} x + a_2\operatorname{sen} x + (a_2x + b_2)\cos x\right] = \\ &= e^{-x}\cos x\left[b_1 + (2a_1 - b_1 + b_2)x + (a_2 - a_1)x^2\right] + \\ &+ e^{-x}\operatorname{sen} x\left[b_2 + (2a_2 - b_1 - b_2)x - (a_1 + a_2)x^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= -e^{-x}\left[\cos x\,(b_1 + (2a_1 - b_1 + b_2)x + (a_2 - a_1)x^2) + \right. \\ &+ \left. \operatorname{sen} x\,(b_2 + (2a_2 - b_1 - b_2)x - (a_1 + a_2)x^2)\right] + \\ &+ e^{-x}\left[-\operatorname{sen} x\,(b_1 + (2a_1 - b_1 + b_2)x + (a_2 - a_1)x^2) + \cos x\,(2a_1 - b_1 + b_2 + 2(a_2 - a_1)x) + \right. \\ &+ \left. \cos x\,(b_2 + (2a_2 - b_1 - b_2)x - (a_1 + a_2)x^2) + \operatorname{sen} x\,(2a_2 - b_1 - b_2 - 2(a_1 + a_2)x)\right] = \\ &= e^{-x}\cos x\left[2a_1 - 2b_1 + 2b_2 + (-4a_1 + 4a_2 - 2b_2)\,x - 2a_2x^2\right] + \\ &+ e^{-x}\operatorname{sen} x\left[2a_2 - 2b_1 - 2b_2 + (-4a_1 - 4a_2 + 2b_1)\,x + 2a_1x^2\right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación y agrupando nos queda:

$$e^{-x}\left[\cos x\,(2a_1 + 2b_2 + 4a_2x) + \operatorname{sen} x\,(2a_2 - 2b_1 - 4a_1x)\right] = e^{-x}\left[x\cos x + 3\operatorname{sen} x\right]$$

de donde

$$2a_1 + 2b_2 = 0 \qquad 4a_2 = 1 \qquad 2a_2 - 2b_1 = 3 \qquad -4a_1 = 0$$

y por tanto

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1/4 \qquad b_1 = -5/4 \qquad b_2 = 0$$

La solución general de la ecuación es pues

$$y(x) = e^{-x}\left[\left(C_1 - \frac{5}{4}x\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{1}{4}x^2\right)\operatorname{sen} x\right] \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.3.12. *Hallar la solución general de* $y'' + 2y' + 3y = e^{2x}\operatorname{sen}(3x) + x^2 + 1$.

Solución. Como las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$ son $-1 \pm \sqrt{2}i$ se tiene

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)$$

Una solución particular de la ecuación será $y_p = y_1 + y_2$, donde:

- y_1 es una solución particular de $y'' + 2y' + 3y = e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$.

  Como $P(2+3i) \neq 0$, la multiplicidad es $k = 0$ y buscamos

  $$y_1 = e^{2x}\left[a\cos(3x) + b\operatorname{sen}(3x)\right]$$
  $$y_1' = e^{2x}\left[(2a+3b)\cos(3x) + (-3a+2b)\operatorname{sen}(3x)\right]$$
  $$y_1'' = e^{2x}\left[(-5a+12b)\cos(3x) + (-12a-5b)\operatorname{sen}(3x)\right]$$

  Sustituimos en la ecuación y agrupamos

  $$e^{2x}\left[(2a+18b)\cos(3x) + (-18a+2b)\operatorname{sen}(3x)\right] = e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$$

  de donde

  $$\begin{array}{l} 2a + 18b = 0 \\ -18a + 2b = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -9/164 \\ b = 1/164 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{2x}\left(-\frac{9}{164}\cos 3x + \frac{1}{164}\operatorname{sen} 3x\right)$$

- y_2 es una solución particular de $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 1$.

  Como $P(0) \neq 0$, la multiplicidad es $k = 0$ y buscamos

  $$y_2 = ax^2 + bx + c \qquad y_2' = 2ax + b \qquad y_2'' = 2a$$

  Sustituyendo en la ecuación

  $$2a + 4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 + 1$$

  Igualando sucesivamente los coeficientes de grados 2, 1 y 0 se obtiene

  $$a = \frac{1}{3} \quad b = -\frac{4}{9} \quad c = \frac{13}{27} \qquad \Rightarrow \qquad y_2 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{13}{27}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = e^{-x}\left(C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right) + e^{2x}\left(-\frac{9\cos(3x)}{164} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{164}\right) + \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} + \frac{13}{27} \qquad \blacksquare$$

4.4. Ejercicios

1. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $y'' = \cos(2x)$ (c) $y''' = 48x$ (d) $y'' = e^{-3x}$

2. Encontrar las soluciones de las ecuaciones con valores iniciales:

   (a) $y' = 4xy^2$; $y(0) = 1$ (b) $x(x-1)y' = y(y+1)$; $y(2) = 1$
   (c) $xy' = y$, $y(1) = 3$ (d) $x^2y' = xy + y^2$; $y(1) = 1$
   (e) $(x-y)y' = x + y$; $y(1) = 0$ (f) $xy^3y' = x^4 + y^4$; $y(1) = 0$

3. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' + 4xy = x$ (b) $y' + 3y = e^{-3x}$ (c) $3y^2e^{3x}(y' + y) = 1$
   (d) $y' - y/x^2 = 4/x^2$ (e) $xy' + ay + x^{n+1} = 0$ (f) $y' + ax^ny = bx^n$
   (g) $xy' + y = \frac{1}{2}x^4y^2$ (h) $xy' + 2y = 2x\cos(x)$ (i) $y' + y = xy^3$

4. Resolver la ecuación $y' = y^2 + \frac{y}{x} - x^2$ usando el cambio de variable $z = y - x$.

5. Resolver los siguientes problemas con condiciones iniciales:

   a) $x'' - x' - 2x = 0$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.
   b) $x'' + 9x = 0$; $x(0) = 2$, $x(\pi/6) = 1$.
   c) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y(1) = 2e^2$
   d) $y'' + 3y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

6. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y'' - 9y' + 20y = (12x + 29)e^x$ (b) $y'' - y' - 2y = -3e^{-x}(3x^2 - 2x + 1)$
   (c) $y'' - 2y' + 2y = e^x$ (d) $x'' + 6x' + 9x = e^{-3t} + 27t^2$

7. De todas las funciones $y = y(x)$ que satisfacen la ecuación $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$, encontrar la que tiene un punto crítico en $(0, 4)$.

8. Si el crecimiento en función del tiempo de una población $N(t)$ viene gobernado por la ecuación $N' = kN(M - N)$, demostrar que la población tiende a estabilizarse en el valor M.

9. Hallar todas las curvas que, en cada punto distinto del origen de coordenadas, tienen una pendiente que es n veces la de la recta que une el punto con el origen.

10. Un cuerpo de un gramo de masa se mueve en una recta empujado por una fuerza directamente proporcional al tiempo e inversamente proporcional a la velocidad. Si a los 10 segundos la velocidad es de 50 cm/seg. y la fuerza es de 4 dinas, ¿qué velocidad tendrá el cuerpo a los 60 segundos?

11. Los tejidos de los seres vivos contienen dos formas de carbono, el C_{12} (no radiactivo) y el C_{14} (un isótopo radiactivo) en proporción de $10^{12} : 1$. Cuando un organismo muere, conserva intacto el C_{12}, y el C_{14} se desintegra con una velocidad directamente proporcional al C_{14} presente. La vida media del C_{14} es de 5.750 años, es decir, cualquier cantidad de C_{14} se reduce a la mitad en ese tiempo.

    Tras estudiar amplias muestras de C_{12} y C_{14} extraídas de las ruinas de cierto asentamiento humano, se observa que la proporción es $10^{12} : \frac{3}{4}$. ¿Qué antigüedad tiene el asentamiento?

12. Una fría madrugada (2º de temperatura) la policía encuentra un cadáver. El forense llega al lugar a las 7:00, y observa que la temperatura del cadáver es de 31º. Una hora más tarde, su temperatura ha descendido a 27º. Considerando que la temperatura media de una persona es de 36º y que, según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de un cuerpo varía proporcionalmente a su diferencia de temperatura con el entorno, ¿a qué hora debió producirse la muerte?

4.5. Soluciones de los ejercicios

1. Basta con integrar repetidamente: (a) $y = \arctan(x)+C$ (b) $y = \frac{-1}{4}\cos(2x)+Cx+D$ (c) $y = 2x^4 + Cx^2 + Dx + E$ (d) $y = \frac{1}{9}e^{-3x} + Cx + D$.

2. Son de variables separables u homogéneas: (a) $y = \frac{1}{1-2x^2}$ (b) $y = x - 1$ (c) $y = 3x$ (d) $y = \frac{x}{1-\ln(x)}$ (e) $x^2 + y^2 = e^{2\arctan(y/x)}$ (f) $y = \pm\sqrt{2}x\sqrt[4]{\ln(x)}$.

3. Lineales o Bernoulli: (a) $y = \frac{1}{4}+Ce^{-2x^2}$ (b) $y = (C+x)e^{-3x}$ (c) $y = (C+x)^{1/3}e^{-x}$ (d) $y = Ce^{-x^{-1}}-4$ (e) $y = \dfrac{C}{x^a}-\dfrac{x^{n+1}}{n+a+1}$ (f) $y = \dfrac{b}{a}+Ce^{\frac{-ax^{n+1}}{n+1}}$ (g) $y = \dfrac{6}{Kx - x^4}$ (h) $y = \frac{1}{x^2}[(2x^2 - 4)\operatorname{sen}(x) + 4x\cos(x) + C]$ (i) $y = \sqrt{\frac{1}{2} + x + Ce^{2x}}$.

4. El cambio la transforma en $z' - (2x + \frac{1}{x})z = z^2$, que es de Bernoulli. Un nuevo cambio $u = z^{-1}$ la transforma en la lineal $u' + (2x + \frac{1}{x})u = -1$ con solución $u = -\dfrac{Ce^{-x^2}+1}{2x}$ y deshaciendo el cambio se tiene $y = x\dfrac{Ce^{-x^2}-1}{Ce^{-x^2}+1} = x\dfrac{C-e^{x^2}}{C+e^{x^2}}$.

5. (a) $x = e^{2t}$ (b) $x = 2\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)$ (c) $y = (1 + x)e^{2x}$ (d) $y = \frac{2}{\sqrt{11}}e^{-3x/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{11}}{2}x)$

6. (a) $y = (x+3)e^x + C_1e^{4x} + C_2e^{5x}$ (b) $y = (x^3 + x + C_1)e^{-x} + C_2e^{2x}$ (c) $y = (1 + C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x))e^x$ (d) $x = (A + Bt + \frac{1}{2}t^2)e^{-3t} + 3t^2 - 4t + 2$

7. Las condiciones iniciales son $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$, y la solución es $y = (x^2 - 12x + 4)e^{3x}$.

8. La solución de la ecuación es $N(t) = \frac{AMe^{Mkt}}{Ae^{Mkt}+1}$, y por tanto $\lim_{t\to\infty} N(t) = M$.

9. $y = Kx^n$

10. Si v es la velocidad, la ecuación que rige el sistema es $v' = kt/v$, y su solución es $v = \sqrt{kt^2 + C}$. De las condiciones dadas se deduce que $k = 20$ y $C = 500$, luego $v(60) = \sqrt{72{,}500} \approx 269$.

11. Sea $x(t)$ la cantidad de C_{14} en el año t (con $t = 0$ en el momento de la muerte), y sea $x_0 = x(0)$. Resolviendo $x' = -kx$ se obtiene $x(t) = x_0e^{-kt}$. Del dato sobre la vida media deducimos que $k = \frac{\ln(2)}{5{,}750}$. Al encontrar los restos se tiene $x(t) = \frac{3}{4}x_0$, y por tanto $t = 5{,}750\frac{\ln(4/3)}{\ln(2)} \approx 2{,}386$ años.

12. Sea $x(t)$ la temperatura en la hora t, con $t = 0$ a las 7:00. La ley de Newton dice que $x' = k(x - 2)$, luego $x(t) = 2 + Ce^{kt}$. De los datos a las 7 y a las 8 deducimos que $C = 29$ y $k = \ln(25/29)$. En el momento de la muerte se tenía $x(t) = 36$, de donde $t = \frac{1}{k}\ln(34/29) = -1'07...$, y por tanto la muerte tuvo lugar sobre las 6:00.

Tema 5

Sistemas de ecuaciones y matrices

En este tema vamos a presentar las matrices como una forma de ordenar los datos de un sistema de ecuaciones lineales. En general, las matrices sirven para ordenar datos en otras muchas situaciones, como tendremos oportunidad de apreciar en los temas siguientes.

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* con n *incógnitas* es una expresión del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

en la que $a_1, a_2, ..., a_n, b$ son números reales y $x_1, x_2, ..., x_n$ son símbolos que llamaremos *incógnitas*. Cada a_j es el *coeficiente* de la incógnita x_j y b es el *término independiente*.

Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es un conjunto $\mathcal{S}$ de m ecuaciones, todas con las mismas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. Podemos escribirlo genéricamente así:

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

es decir, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ es el *coeficiente* de x_j en la i-ésima ecuación y $b_i \in \mathbb{R}$ es el *término independiente* de la i-ésima ecuación. El sistema es *homogéneo* si cada $b_i = 0$.

Una *solución del sistema* es una lista ordenada de escalares $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que, al ser sustituidos en cada una de las ecuaciones, dan lugar a igualdades ciertas. Un sistema es *incompatible* si no tiene ninguna solución, es *compatible determinado* si admite una única solución, y es *compatible indeterminado* si admite más de una solución.

Discutir un sistema es decidir si es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado. Si es compatible podemos además *resolverlo*, es decir, dar explícitamente su única solución si es determinado, o el conjunto de todas sus soluciones (que es infinito y se expresa en función de uno o más parámetros) si es indeterminado. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.1.1. *Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & 4y & = & 3 \end{array}\right\}$ Para cualquier solución (x, y) de la primera ecuación se tiene $2x - 4y = 2(x - 2y) = 2 \neq 3$, y por tanto (x, y) no es solución de la segunda. En consecuencia, el sistema es incompatible.

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & -1 \end{array}\right\}$ Si (x, y) es solución de ambas ecuaciones se tiene, sumándolas, $3x - 3y = 0$ y por tanto $x = y$; sustituyendo en cualquiera de las dos se obtiene $x = y = -1$. Ésta es la única posible solución, y como se comprueba que es válida, el sistema es compatible determinado con solución única $(x, y) = (-1, -1)$.

3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 10 \\ 4x & + & 6y & = & 20 \end{array}\right\}$ Multiplicando o dividiendo por 2, se observa que cualquier solución de una ecuación es solución de la otra; por tanto, basta con resolver la primera ecuación. Además, para cada valor arbitrario $\lambda \in \mathbb{R}$ que asignemos a x se obtiene, despejando, $y = \frac{1}{3}(10 - 2\lambda)$, de modo que el conjunto de todas las soluciones del sistema se expresa en función del parámetro λ en la forma

$$\{(x, y) = \left(\lambda, \frac{10 - 2\lambda}{3}\right) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Hay otras opciones para representar estas soluciones. Por ejemplo, si se hace primero $y = \mu$ y se despeja entonces x se obtiene

$$\{(x, y) = \left(\frac{10 - 3\mu}{2}, \mu\right) \ : \ \mu \in \mathbb{R}\}$$

Dando valores concretos a los parámetros obtenemos soluciones particulares de la ecuación. Por ejemplo, para $\lambda = 5$ y $\lambda = 6$ se obtienen las soluciones $(5, 0)$ y $(6, -2/3)$, respectivamente, a las que también se llega haciendo $\mu = 0$ y $\mu = -2/3$.

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right\}$ El sistema es homogéneo y por tanto compatible, pues tiene al menos la solución $(0, 0, 0)$ (en general, tantos ceros como incógnitas haya). Como antes, se ve que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones, luego podemos obviar la segunda. En este caso podemos asignar valores arbitrarios, por ejemplo, a las dos últimas incógnitas, digamos $y = \lambda$, $z = \mu$, con lo que se obtiene $x = 2\mu - \lambda$ y el conjunto de soluciones del sistema se expresa en función de estos dos parámetros:

$$\{(x, y, z) = (2\mu - \lambda, \lambda, \mu) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Obsérvese que $(2\mu - \lambda, \lambda, \mu) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(2, 0, 1)$. Con el lenguaje que usaremos en el Tema 6, esto quiere decir que las soluciones son las *combinaciones lineales* de los vectores $(-1, 1, 0)$ y $(2, 0, 1)$. ■

5.2. Sistemas y matrices; el método de Gauss

Una *matriz* de m filas y n columnas (o matriz $m \times n$) es una ordenación rectangular de números reales de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El escalar a_{ij} se llama *entrada* de la fila i-ésima y la columna j-ésima, o más brevemente *entrada* (i, j). El conjunto de todas las matrices $m \times n$ se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (la $\mathbb{R}$ significa que las entradas son números reales).

Toda la información que tenemos sobre el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathcal{S} \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

consiste en (1) el número de ecuaciones e incógnitas, (2) los coeficientes de las incógnitas y (3) los términos independientes. Estos datos pueden resumirse en la matriz $m \times (n + 1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La submatriz $A = (a_{ij})$ que queda a la izquierda de la barra es la *matriz de coeficientes* del sistema, la matriz columna B que queda a la derecha se le llama *matriz de términos independientes*, y la matriz total $(A|B)$ es la *matriz (ampliada)* del sistema.

Abordamos ahora un método general para discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, conocido como *método de eliminación Gauss*, que en líneas generales consiste en:

- Describir ciertas manipulaciones en un sistema (o en su matriz asociada) que lo transforman en otro sistema con las mismas soluciones (dos sistemas con las mismas soluciones se dice que son *equivalentes*).

- Describir un modo de combinar esas manipulaciones que permite llevar cualquier sistema a otro equivalente de aspecto sencillo.

Por tanto, si se domina el método y se sabe discutir y resolver estos sistemas sencillos, se sabrá discutir y resolver cualquier sistema.

Comenzamos diciendo qué entendemos por “sistemas de aspecto sencillo”; de hecho, lo que hacemos es definir ciertas matrices “con muchos ceros y unos” que se corresponden con esos sistemas.

5.2.1. Matrices en forma escalonada

Una matriz está en *forma escalonada (por filas)* si:

- las filas nulas, si las hay, son las últimas;
- el primer elemento no nulo de una fila no nula (llamado *pivote*) es un 1; y
- el número de ceros antes de un pivote aumenta en cada fila.

Y está en *forma escalonada reducida (por filas)* si además se verifica

- todos los elementos que están por encima de un pivote son ceros.

Las siguientes matrices tienen los pivotes marcados en negrita. A no está en forma escalonada (falla la tercera condición en la última fila), B está en forma escalonada no reducida (el tercer pivote tiene un elemento no nulo por encima) y C está en forma escalonada reducida:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales que se corresponden con matrices en forma escalonada reducida son muy fáciles de resolver. Si a las incógnitas que se corresponden con columnas sin pivote les damos valores arbitrarios (parámetros), el resto de incógnitas "se despejan solas" en función de esos parámetros. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.2.1. *Resolver el sistema cuya matriz ampliada es la matriz C anterior.*

Solución. Como hay 8 columnas y la última es la de los términos independientes, el sistema tendrá incógnitas $x_1, \dots, x_7$. Como los pivotes están en las columnas segunda, quinta y séptima, podemos asignar parámetros al resto de incógnitas, digamos

$$x_1 = \lambda \quad x_3 = \mu \quad x_4 = \alpha \quad x_6 = \beta$$

Ahora vamos despejando las otras incógnitas mirando las ecuaciones de abajo hacia arriba. La última ecuación es $0 = 0$ y por tanto es irrelevante[1]. La penúltima nos dice directamente que $x_7 = 2$. La segunda es $x_5 + 4x_6 = 0$, de donde $x_5 = -4x_6 = -4\beta$. Y la primera es $x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1$, de donde $x_2 = 1 - x_3 - 2x_4 - 3x_6 = 1 - \mu - 2\alpha - 3\beta$. En definitiva, el sistema es compatible indeterminado, sus soluciones se expresan en función de cuatro parámetros y son:

$$x_1 = \lambda \quad x_2 = 1 - \mu - 2\alpha - 3\beta \quad x_3 = \mu \quad x_4 = \alpha \quad x_5 = -4\beta \quad x_6 = \beta \quad x_7 = 2 \qquad \blacksquare$$

[1] Obsérvese que, si la entrada $(4, 8)$ de C (la de abajo a la derecha) fuese un 1, la última ecuación sería $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_7 = 1$ y en consecuencia el sistema sería incompatible. En general, un sistema con matriz escalonada es incompatible precisamente cuando hay un pivote en la última columna.

5.2.2. Operaciones elementales; método de eliminación Gauss

Recordemos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. La primera fase del método de Gauss consiste en describir ciertas *operaciones elementales* con las ecuaciones de un sistema (o más cómodamente con las filas de la matriz asociada) que lo transformen en otro sistema equivalente. Estas operaciones son de tres tipos:

- Tipo $F_i \leftrightarrow F_k$. Consiste en intercambiar las filas o ecuaciones i-ésima y k-ésima.
- Tipo rF_i. Consiste en multiplicar[2] la fila o ecuación i-ésima por un escalar $r \neq 0$.
- Tipo $F_i + rF_k$. Consiste en sumar[3] a la fila o ecuación i-ésima la k-ésima multiplicada por un escalar $r \neq 0$.

Es obvio que una operación del primer tipo no cambia las soluciones del sistema. Tampoco una del segundo, pues $r \neq 0$ se puede cancelar en las igualdades. Ni una del tercero, pues si dos igualdades son ciertas lo son también su suma y su diferencia. En consecuencia:

> Cualquier operación elemental, y por tanto cualquier secuencia de operaciones elementales, transforma un sistema dado en otro equivalente.

La segunda fase del método de Gauss consiste en combinar las operaciones elementales para transformar cualquier matriz A en una matriz escalonada reducida. Para ello se puede seguir el siguiente algoritmo, aunque en la práctica algunos pasos se ven simplificados si nos saltamos un poco las normas, como veremos en los ejemplos.

1. Localizamos la primera columna no nula de A y en ella el primer elemento no nulo a. Intercambiando filas, ponemos a en la primera fila y multiplicamos esta nueva primera fila por a^{-1}. Ya tenemos un 1, que será un pivote si ponemos ceros debajo de él.

2. Para $i \geq 2$ hacemos lo siguiente: Si el elemento debajo del pivote en la fila i-ésima es b, hacemos la operación $F_i - bF_1$. Con esto conseguimos ceros debajo del pivote.

3. Repetimos el proceso con la submatriz que queda al eliminar la primera fila; es decir, tomamos como A esta nueva matriz y volvemos al paso 1, hasta que o bien no nos queden filas o bien esta nueva A sea nula.

   En ese momento habremos conseguido una matriz en forma escalonada. Para llegar a la forma escalonada reducida nos vamos al siguiente paso.

4. Ponemos ceros encima del último pivote, sumando a la fila correspondiente un múltiplo adecuado de la fila en la que se halla este último pivote (como en el paso 2). Repetimos la operación con el penúltimo pivote, etc.

---

[2]Es decir, en sustituir la ecuación $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n = b_i$ por $ra_{i1}x_1+ra_{i2}x_2+\cdots+ra_{in}x_n = rb_i$, o la fila $(a_{i1}\, a_{i2} \ldots a_{in} \,|\, b_i)$ por la fila $(ra_{i1}\, ra_{i2} \ldots ra_{in} \,|\, rb_i)$.

[3]Es decir, en sustituir la i-ésima ecuación por $(a_{i1}+ra_{k1})x_1+\cdots+(a_{in}+ra_{kn})x_n = b_i+rb_k$, o la i-ésima fila por $(a_{i1} + ra_{k1} \ldots a_{in} + ra_{kn} \,|\, b_i + rb_k)$.

Por tanto, dado cualquier sistema de ecuaciones, transformaremos su matriz en una matriz en forma escalonada reducida y hallaremos las soluciones del sistema correspondiente, que será equivalente al inicial. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.2.2. *Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & 4t & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 7 \\ -2x & + & 4y & + & 2z & + & 32t & = & 22 \end{array}\right\}$$

   Consideramos la matriz asociada y la llevamos a su forma escalonada reducida, indicando las operaciones elementales y marcando en negrita los pivotes:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 32 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-4F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Por tanto el sistema es compatible indeterminado y su solución se puede expresar en función de dos parámetros λ y μ en la forma:

$$x = -5 + 2\lambda + 10\mu \qquad y = \lambda \qquad z = 6 - 6\mu \qquad t = \mu$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & y & + & 4z & = & -1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

   Transformamos la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3+F_1 \\ F_4-3F_1}]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+4F_1]{F_3-3F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[\cancel{F}_3]{\frac{3}{7}F_4} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{8}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-3F_3]{F_2-\frac{7}{3}F_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 0 & \frac{38}{7} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{8}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{8}{7} \end{array}\right)$$

   Luego el sistema es compatible determinado con solución única

$$x = -\frac{4}{7} \qquad y = 3 \qquad z = -\frac{8}{7}$$

3. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & + & y & + & 4z & = & -1 \end{array} \right\}$

Aunque es muy similar al anterior, tras el primer paso aparecen dos filas casi iguales, y eso nos invita a desviarnos de los pasos del algoritmo (tomando un atajo):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\mathbf{3} & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\mathbf{3} & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array} \right)$$

La última ecuación del sistema asociado a esta matriz no tiene soluciones, y por tanto el sistema dado es incompatible.

4. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & (1+a)y & + & az & = & 1+a \end{array} \right\}$ (discutir en función del parámetro a)

Transformamos la matriz del sistema mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & 1+a \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array} \right)$$

En este punto, el algoritmo nos dice que busquemos la primera entrada no nula en las dos últimas filas, y por tanto debemos diferenciar casos según si a es o no nulo.

Si $a = 0$ nos queda una matriz que ya está en forma escalonada reducida, y el sistema es entonces compatible indeterminado con solución

$$x = 1 - \lambda \quad y = \lambda \quad z = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Si $a \neq 0$ podemos dividir por a para obtener un pivote; como es más fácil dividir por a la tercera fila que la segunda, empezamos con un cambio de filas que no está en el guión del algoritmo pero simplifica bastante los cálculos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{a}F_2]{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-aF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -a \end{array} \right)$$

Ahora observamos que, si $1 - a = 0$ (es decir, si $a = 1$), el sistema es incompatible pues la tercera ecuación no tiene soluciones. En otro caso podemos dividir la última fila por $1 - a$, con lo que tendremos una matriz en forma escalonada, y seguir el paso 4 del algoritmo para obtener una matriz en forma escalonada reducida:

$$\xrightarrow{\frac{1}{a-1}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{a}{a-1} \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{a}{a-1} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{a}{a-1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{a}{a-1} \end{array} \right)$$

Por tanto, cuando $a \neq 0, 1$, el sistema es compatible determinado con solución única

$$x = \frac{a}{a-1} \qquad y = \frac{1}{1-a} \qquad z = \frac{a}{a-1}$$

5. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & az & + & bt & = & a+b+1 \\ 2x & + & 3y & + & az & + & 2bt & = & 3a+2b+1 \\ x & + & y & + & 2az & + & 2bt & = & 2b+2 \\ x & + & 2y & & & + & 2bt & = & a+2b \end{array} \right\}$ (discutir en función de a y b)

Transformamos la matriz del sistema mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & b & a+b+1 \\ 2 & 3 & a & 2b & 3a+2b+1 \\ 1 & 1 & 2a & 2b & 2b+2 \\ 1 & 2 & 0 & 2b & a+2b \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & b & a+b+1 \\ 0 & \mathbf{1} & -a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a & b & -a+b+1 \\ 0 & 1 & -a & b & b-1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & b & a+b+1 \\ 0 & \mathbf{1} & -a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a & b & -a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b & -a+b \end{array} \right)$$

Si $a = 0$ la matriz es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & b & b+1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \end{array} \right) \xrightarrow{F_4-F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & b & b+1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b & +b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

y, en vista de la última fila, el sistema es incompatible. Si $a \neq 0$ volvemos a distinguir dos casos: Si $b = 0$, la ecuación correspondiente a la última fila, $0 = -a$, no tiene solución y el sistema es incompatible. Si $b \neq 0$ podremos poner un pivote en cada columna (excepto en la de los términos independientes) y el sistema será compatible determinado. De hecho, no hace falta dividir las últimas filas por a y por b para resolver el sistema; es más fácil así:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & b & a+b+1 \\ 0 & \mathbf{1} & -a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & b & -a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b} & -a+b \end{array} \right) \xrightarrow[F_1-F_4]{F_3-F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & 0 & 2a+1 \\ 0 & \mathbf{1} & -a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b} & -a+b \end{array} \right) \xrightarrow[F_1-F_3]{F_2+F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b} & -a+b \end{array} \right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b} & -a+b \end{array} \right)$$

En resumen, el sistema es incompatible si a ó b son nulos, y en otro caso es compatible determinado con solución única

$$x = a \qquad y = a \qquad z = \frac{1}{a} \qquad t = \frac{b-a}{b}$$

■

5.2.3. Rango de una matriz; teorema de Rouché-Frobenius

El *rango* de una matriz A, denotado por $\mathrm{rg}(A)$, es el número de pivotes (o de filas no nulas) que se obtienen al transformarla en una matriz en forma escalonada o escalonada reducida[4]. Se verifican las siguientes propiedades:

- El rango de A no puede ser superior a su número de filas ni a su número de columnas (pues en cada fila o columna de A hay a lo sumo un pivote).
- El rango de A no decrece si le añadimos una columna a la derecha (el método de Gauss aplicado a la nueva matriz "contiene" al que aplicaríamos a A).
- Si una matriz se obtiene a partir de otra mediante transformaciones elementales por filas o por columnas, ambas tienen el mismo rango.

En el apartado 5.2.1 vimos que un sistema con matriz en forma escalonada es incompatible cuando hay un pivote en la última columna, lo que equivale a que el rango de la matriz de coeficientes aumente al añadirle la columna de los términos independientes. También observamos que, cuando hay soluciones, se expresan en función de un número de parámetros que es igual al de columnas de incógnitas sin pivote. El concepto de rango permite reescribir estas afirmaciones de forma más concisa:

Teorema 5.2.3 (Rouché-Frobenius). *Sea $\mathcal{S}$ un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz ampliada $(A|B)$. Entonces:*

1. *$\mathcal{S}$ es compatible si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.
2. *En este caso, $\mathcal{S}$ es determinado si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = n$.
3. *Si $\mathcal{S}$ es compatible indeterminado, el conjunto de sus soluciones puede expresarse en función de $n - \mathrm{rg}(A)$ parámetros (éste es el* número de grados de libertad *del sistema).*

Corolario 5.2.4. *Un sistema homogéneo ($\Rightarrow$ compatible) con n incógnitas y matriz de coeficientes A es determinado si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Corolario 5.2.5. *Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas no puede ser compatible determinado (o es incompatible, o es compatible indeterminado).*

[4]En rigor, hay que hacer varias precisiones sobre esta definición: (1) Da igual contar los pivotes de una forma escalonada o de una reducida, porque para pasar de una a otra no se cambia el número de pivotes. (2) Aunque pueden usarse muchas secuencias de operaciones elementales para transformar una matriz en otra en forma escalonada, con todas ellas se obtiene el mismo número de pivotes. (3) Si en lugar de las formas escalonadas y las operaciones elementales por filas consideramos los conceptos análogos por columnas, también se obtiene el mismo número de pivotes.

5.3. Matrices cuadradas; determinantes e inversas

5.3.1. Operaciones con matrices

Dadas dos matrices del mismo tamaño $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ y un escalar r, la *suma* $A + B$ y el *producto de matriz por escalar* rA son las matrices del mismo tamaño dadas por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad rA = (ra_{ij})$$

(las operaciones se hacen "entrada a entrada" o "componente a componente").

El *producto* de dos matrices A y B sólo puede hacerse cuando A tiene tantas columnas como filas tiene B. De hecho, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, su producto es la matriz

$$AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}) \qquad \text{donde} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

Es decir, en el cálculo de la entrada (i, k) del producto AB intervienen la fila i de A y la columna k de B, y se calcula su "producto escalar", la suma de los productos entrada a entrada. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 14 & -1 & 1 \\ 11 & 12 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Un interesante ejemplo de producto de matrices es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $(A|B)$ es la matriz de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, resulta que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una solución del sistema si y sólo si la *matriz columna* X (matriz $n \times 1$) con entradas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifica

$$AX = B$$

(ésta se conoce como la *expresión matricial* del sistema).

La *matriz traspuesta* de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ es $A^t = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, o sea, A^t se obtiene a partir de A poniendo sus filas en las columnas. Se verifican las propiedades

$$(A^t)^t = A \qquad (A + B)^t = A^t + B^t \qquad (AC)^t = C^t A^t$$

siempre que los tamaños permitan hacer la suma $A + B$ y el producto AC.

5.3.2. Matrices cuadradas; matrices invertibles

Una matriz *cuadrada* es la que tiene tantas filas como columnas. Obsérvese que el producto de matrices es una "operación interna" en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, es decir, si se multiplican dos matrices de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se obtiene como resultado otra matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

La suma de matrices también es una operación interna en $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se verifican las propiedades asociativas y la distributiva

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A(BC) = (AB)C \qquad A(B + C) = AB + AC$$

pero no la propiedad conmutativa, es decir, en general se tiene

$$AB \neq BA$$

por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La *matriz identidad* de tamaño n, denotada por I_n, es la matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que tiene un 1 en cada entrada de la diagonal principal y un 0 en el resto de entradas; es decir

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots$$

Es elemental ver que las matrices identidad verifican (para tamaños adecuados)

$$I_n A = A \qquad \text{y} \qquad BI_n = B$$

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *invertible* si existe otra matriz C tal que

$$AC = I_n \qquad \text{ó} \qquad CA = I_n$$

(cualquiera de las dos igualdades implica la otra). Esta matriz C es única, se llama la *matriz inversa* de A y se denota por A^{-1}. Por ejemplo, de las siguientes matrices, A es invertible y B no lo es, pues en cualquier producto BC todas las entradas de la segunda fila son 0:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La definición anterior no aporta un criterio efectivo para decidir si una matriz es o no invertible, ni para calcular la inversa. Para eso necesitamos el concepto de determinante.

5.3.3. Determinantes

El *determinante* es un número real que se asocia a una matriz cuadrada A y se denota por $|A|$ o por $\det(A)$. No entraremos en la definición general; nos limitaremos a definir los determinantes de matrices 2×2 y 3×3, y veremos luego cómo se calculan determinantes de tamaño mayor usando los más pequeños.

Tampoco daremos algunas aplicaciones habituales de los determinantes, como el cálculo de matrices inversas usando adjuntos, el cálculo de rangos o la resolución de ciertos sistemas de ecuaciones, puesto que sabremos hacer todo esto con las operaciones elementales y el método de Gauss.

Vamos pues con las definiciones para tamaños pequeños: El determinante de una matriz 2×2 se define por la fórmula

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

es decir, "el producto de la diagonal que baja menos el producto de la diagonal que sube".

El determinante de una matriz 3×3 se define por la fórmula

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Como regla nemotécnica, en la matriz que se obtiene al añadir a A sus dos primeras columnas

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right)$$

se suman los productos de las tres diagonales "que bajan" desde la primera fila de A y se restan los de las tres diagonales "que suben" desde la última fila de A.

Desarrollo de un determinante por una fila o columna

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, sea M_{ij} el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar en A la fila i y la columna j, y sea $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

El *desarrollo del determinante por la fila i es*

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

y el desarrollo del determinante por la columna j es

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Por ejemplo, la fórmula para el caso 3×3 se obtiene desarrollando por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} =$$

$$a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) = aei - ahf - bdi + bgf + cdh - cge$$

Estos desarrollos son especialmente útiles cuando hay una fila o columna con muchos ceros. Por ejemplo, desarrollando por la segunda columna tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

y ahora basta con aplicar la fórmula para determinantes 3×3.

En particular, el determinante de una *matriz triangular superior* (la que tiene ceros por debajo de la diagonal principal) es el producto de los elementos de la diagonal principal, y lo mismo ocurre con las matrices triangulares inferiores. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7$$

Operaciones en las filas y las columnas de un determinante

Los determinantes verifican las siguientes propiedades:

- Si en la matriz A hay una fila nula, o una columna nula, o dos filas proporcionales, o dos columnas proporcionales, entonces $|A| = 0$.

- Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

- Si hacemos operaciones elementales del tipo $F_i + rF_j$ (o las análogas por columnas) el determinante no cambia.

- Se puede "sacar factor común"en una fila o columna; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 0 & -5 & 14 \\ 3 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si una fila o columna es suma de dos, el determinante es la correspondiente suma; por ejemplo (usando además la segunda propiedad en la segunda igualdad y desarrollando por la primera columna en la tercera):

$$\begin{vmatrix} 1+a & 4 & 1 \\ 2+b & 3 & 2 \\ 1+c & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 2b + 5c$$

Para calcular un determinante, podemos usar operaciones elementales para poner algunos ceros (como en el método de Gauss) y hacer entonces desarrollos por filas o columnas. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -\mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1} \\ 5 & 5 & 2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ -1 & 1 & 2 \\ -17 & -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -17 & -3 \end{vmatrix} = -(3+17) = -20$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 10 & 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 10 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 11 & -4 & -3 \\ -6 & 8 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = -(165-18) = -147$$

5.3.4. Criterios de invertibilidad y cálculo de inversas

Proposición 5.3.1. *El determinante de un producto de matrices es el producto de los correspondientes determinantes; es decir,*

$$|AB| = |A| \cdot B|$$

Teorema 5.3.2. *Para una matriz A de tamaño $n \times n$, estas condiciones son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. $|A| \neq 0$.
3. $\mathrm{rg}(A) = n$*; es decir, A tiene* rango máximo.
4. *El sistema homogéneo con matriz de coeficientes A es compatible determinado.*
5. *Todo sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes A es compatible determinado (y se puede resolver usando la* regla de Cramer*).*

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$. Tomando determinantes en la igualdad $A\,A^{-1} = I_n$ obtenemos $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ y por tanto $|A| \neq 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Obsérvese que, al hacer operaciones elementales en A, se obtienen nuevas matrices cuyo determinante sigue siendo no nulo. Si llevamos A a una matriz en forma escalonada, ésta ha de tener determinante no nulo y en particular no puede tener una fila de ceros, por lo que debe haber n pivotes y así $\mathrm{rg}(A) = n$.

$(3 \Leftrightarrow 4)$ y $(3 \Rightarrow 5)$ son consecuencias directas del Teorema de Rouché-Frobenius.

$(5 \Rightarrow 1)$. Si consideramos las matrices columna

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

cada uno de los sistemas $AX = E_i$ tiene solución, es decir, existen matrices columna $C_1, C_2, \dots, C_n$ tales que

$$AC_1 = E_1 \qquad AC_2 = E_2 \qquad \dots \qquad AC_n = E_n$$

y entonces es fácil ver que la matriz cuadrada C cuyas columnas son $C_1, C_2, \dots, C_n$ verifica $AC = I_n$, y por tanto A es invertible. ■

Método para el cálculo de inversas

Cuando $|A| \neq 0$, una modificación de la última idea de la demostración anterior proporciona el siguiente método para el cálculo de inversas:

Sea d el valor absoluto de $|A|$, y sea $d\,I_n$ la matriz con d en la diagonal y ceros en el resto. Como $\mathrm{rg}(A) = n$, se pueden hacer operaciones elementales en la matriz $(A \,|\, d\,I_n)$ que transformen su mitad izquierda en I_n. Si la mitad derecha se ha transformado entonces en B, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{d}\, B$$

Ejemplo 5.3.3. *Calcular las inversas de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Comencemos calculando los determinantes:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(6+2) = 16$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

Para el cálculo de A^{-1} hemos de transformar la siguiente matriz hasta que aparezca I_3 en su mitad izquierda:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-(1/2)F_1 \\ F_3+(1/2)F_1}]{(1/2)F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 0 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+(1/4)F_2]{(1/4)F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_2]{(1/2)F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de B^{-1} hemos de transformar la siguiente matriz hasta que aparezca I_4 en su mitad izquierda:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & -1 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+4F_1]{F_1\leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 36 & 48 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{(-1/2)F_3} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -18 & -24 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 36 & 48 & 12 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/6)F_4}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -18 & -24 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2+2F_4 \\ F_1+F_4}]{F_3+(3/2)F_4} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 20 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & -12 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

luego

$$B^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 20 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 4 & 4 \\ -9 & -12 & -3 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5.4. Ejercicios

1. Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + z + 2t &=& 1 \\ 2x + y + 2z - t &=& -3 \\ x - 2y + 3z + t &=& 4 \\ 4x - 3y + 6z + 2t &=& 0 \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z &=& 1 \\ 2x - 2y - z &=& 0 \\ x + 3y + 5z &=& 2 \\ 5x + 3y + 6z &=& 4 \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{rcr} 2x + y - 3z + u - 4w &=& 6 \\ x - 2y + z - u + 4w &=& 1 \\ -x + y - z + 2u \phantom{{}+4w} &=& -1 \end{array} \right.$$

2. Discutir y resolver los siguientes sistemas según los valores de los parámetros a, b y c:

$$\text{d)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax + \phantom{ay+{}} bz &=& 2 \\ ax + ay + 4z &=& 0 \\ ay + 2z &=& b \end{array} \right. \qquad \text{e)} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z &=& a \\ x + z &=& b \\ 2x + y + 3z &=& c \end{array} \right. \qquad \text{f)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z &=& a \\ x + ay + z &=& a \\ x + y + az &=& a \end{array} \right.$$

3. Discutir (sin resolver) los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\text{g)} \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y - 4z &=& 3 \\ ax + 5y - az &=& 6 \\ 15x + 5ay - 30z &=& 3 \end{array} \right. \qquad \text{h)} \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - az &=& 7 \\ ax - 3y + 4z &=& 0 \\ ax - y + z &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{lcl} (1+b)x + y + z &=& b^2 + 3b \\ x + (1+b)y + z &=& b^3 + 3b^2 \\ x + y + (1+b)z &=& b^4 + 3b^3 \end{array} \right.$$

4. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Encontrar dos matrices $A \neq I_2$ y $B \neq 0$, de tamaño 2×2, que verifiquen $A^2 = I_2$ y $B^2 = 0$.

   ¿Se verifica en general la igualdad $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$?

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^n.

7. Calcular $(AB)^t$, B^tA^t, A^tB^t, $(A+B)^t$ y $A^t + B^t$ para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Calcular la inversa (si es posible) de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

9. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 12 \\ 2 & 16 & 4 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

10. Indicar qué propiedades de los determinantes se han usado en las siguientes igualdades:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$b)$ $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

11. ¿Es cierto en general que $|A + B| = |A| + |B|$?

5.5. Soluciones de los ejercicios

1. (a) Incompatible. (b) Compatible determinado, solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$.

   (c) Compatible indeterminado con dos grados de libertad y solución:

   $x = \frac{9}{5} + \frac{7}{5}\lambda + \frac{12}{5}\mu, \quad y = \lambda + 4\mu, \quad z = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}\lambda + \frac{8}{5}\mu, \quad u = \lambda, \quad w = \mu.$

2. (d) Si $a = 0$ ó $b = 2$ es incompatible; en otro caso, es decir, si $a \neq 0$ y $b \neq 2$, es compatible determinado: $x = \frac{-b^2-4}{a(b-2)}, \quad y = \frac{b^2-4b-4}{a(b-2)} \quad z = \frac{b+2}{b-2}$.

   (e) Si $c \neq a+b$ es incompatible. Si $c = a+b$ es compatible indeterminado con un grado de libertad: $x = b - \lambda$, $y = a - b - \lambda$, $z = \lambda$.

   (f) Si $a = 1$ es compatible indeterminado con dos grados de libertad y soluciones: $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$. Si $a = -2$ es incompatible. En otro caso es compatible determinado: $x = y = z = \frac{a}{a+2}$.

3. (g) Si $a = 2$ es incompatible. Si $a = -5$ es compatible indeterminado con 1 grado de libertad. En otro caso, es decir, si $a \neq 2$ y $a \neq -5$, es compatible determinado.

   (h) Si $a = 1$ ó $a = 1/2$ es incompatible. En otro caso es compatible determinado.

   (i) Si $b = 0$ es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Si $b = -3$ es compatible indeterminado con un grado de libertad. Si $b \neq 0$ y $b \neq -3$ es compatible determinado.

4. $\mathrm{rg}(A) = 1 \quad \mathrm{rg}(B) = 3 \quad \mathrm{rg}(C) = 3$.

5. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estas mismas no verifican la igualdad.

6. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $(AB)^t = B^tA^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad A^tB^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \quad (A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

8. A no es invertible, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $a = -40 \quad b = 16 \quad c = -128 \quad d = -1{,}053$

10. (a) En la primera igualdad se ha hecho $F_2 - 12F_1$, y en la segunda $2\frac{1}{2}C_1$ y $4\frac{1}{4}C_2$.

    (b) En la primera igualdad se ha hecho $5\frac{1}{5}F_1$ y $3\frac{1}{3}F_2$, en la segunda $F_3 + F_1$, y en la tercera $F_2 = F_3$.

11. No, y prácticamente en cualquier ejemplo tomado al azar falla la igualdad.

Tema 6

Vectores

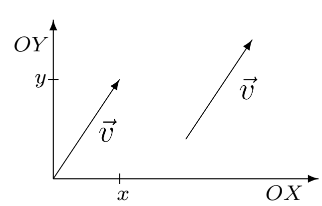
El concepto de vector aparece en Física para describir fenómenos, como la fuerza que actúa sobre un punto, en los que no importa sólo la magnitud, sino también la dirección, el sentido y el punto de aplicación.

Trabajaremos básicamente con vectores en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$, en los que supondremos fijados unos ejes cartesianos. Por tanto, los puntos del plano o el espacio quedan determinados por 2 ó 3 coordenadas:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

La mayoría de los conceptos que usaremos tendrán sentido en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, y serán generalizables a $\mathbb{R}^n$ (algunos no, por ejemplo, el producto vectorial sólo tiene sentido para vectores tridimensionales). Cuando el salto de una a otra situación sea evidente no haremos más comentarios. En muchas ocasiones daremos la definición para $\mathbb{R}^3$ y haremos el gráfico en $\mathbb{R}^2$.

Un *vector* $\vec{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ es el segmento orientado (la *flecha*) que une el origen con el punto de coordenadas (x, y, z), o más generalmente cualquier segmento orientado con la misma longitud, dirección y sentido que aquél (aunque varíen su origen y su extremo).



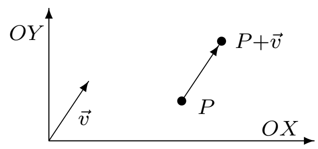
6.1. Operaciones con vectores

6.1.1. Suma de punto y vector

Un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se puede *sumar a un punto* de coordenadas $P = (p_1, p_2, p_3)$ para obtener el punto

$$P + \vec{v} \;=\; (p_1 + v_1\,,\, p_2 + v_2\,,\, p_3 + v_3)$$

Geométricamente, si el origen de $\vec{v}$ se sitúa en P, entonces su extremo es precisamente $P + \vec{v}$.



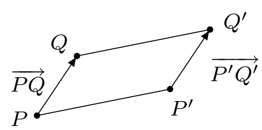
Dados dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, denotaremos por $\overrightarrow{PQ}$ al vector con origen en P y extremo en Q. Por tanto se tiene

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q$$

y en virtud del párrafo anterior las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ son

$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1 \, , \, q_2 - p_2 \, , \, q_3 - p_3)$$

Dados 4 puntos P, Q, P', Q', se verifica que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ si y sólo si los segmentos PQ y $P'Q'$ son los lados opuestos de un paralelogramo.

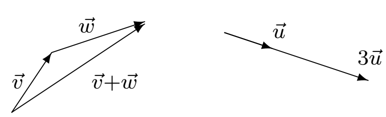


6.1.2. Suma y producto por escalar

Los vectores se pueden sumar entre sí o multiplicar por un escalar para obtener nuevos vectores; ambas operaciones se hacen coordenada a coordenada:

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \qquad\qquad r(x, y, z) = (rx, ry, rz)$$

Geométricamente, la suma es el vector que se obtiene al yuxtaponer los sumandos, y el producto es el vector que se obtiene al escalar el vector dado por un factor r.



Una *combinación lineal* de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ es cualquier expresión de la forma

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son escalares que se llaman *coeficientes* de la combinación lineal.

Por ejemplo, el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de dos vectores consiste en los vectores que están en el plano determinado por esos vectores (aquí se supone que el origen de todos los vectores considerados está el origen de coordenadas).

Se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^3$ al conjunto formado por los tres vectores

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0) \qquad \vec{\jmath} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Cada vector $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ se expresa como combinación lineal de estos vectores:

$$v = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

y esta expresión es única en el sentido de que no se pueden elegir otros coeficientes.

6.1.3. Módulo y vectores unitarios

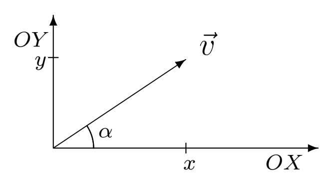
El *módulo, longitud o norma* de un vector $\vec{v} = (x, y, z)$ es

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es decir, es la longitud del segmento que representa $\vec{v}$. Los vectores de longitud 1 se llaman *unitarios*, y son importantes porque constituyen un buen modo de describir un sentido en el plano o en el espacio (hay infinitos vectores que apuntan en un sentido dado, pero sólo uno de ellos es unitario). Para asignar a cada vector no nulo $\vec{v}$ un vector unitario con su mismo sentido basta con dividir el vector por su norma:

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v} \qquad \text{es unitario y} \qquad \vec{v} \;=\; |\vec{v}|\,\hat{v}$$

En dos dimensiones, si α es el ángulo que forma $\vec{v} = (x, y)$ con el eje OX,



se tiene $x = |\vec{v}| \cos\alpha$ e $y = |\vec{v}| \operatorname{sen}\alpha$, por lo que

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \qquad \hat{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \qquad (\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1)$$

6.1.4. Producto escalar

El *producto escalar* de dos vectores $\vec{v} = (x, y, z)$ y $\vec{w} = (x', y', z')$ es el número real

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'$$

Aparte de algunas propiedades aritméticas elementales, como

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} \qquad \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \qquad \vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{w'}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w'}$$

la propiedad que más nos interesa es de naturaleza geométrica: Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son no nulos y α es el ángulo que forman, entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\alpha$$

Esto nos permite calcular el valor de $\cos\alpha$, y nos dice en particular que

$$\vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son ortogonales (= perpendiculares) si y sólo si } \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Observemos que, dado un vector, es muy fácil construir otros perpendiculares a él; por ejemplo:

$$(a, b) \cdot (-b, a) = 0 \qquad (a, b, c) \cdot (-b, a, 0) = 0 \qquad (a, b, c) \cdot (0, -c, b) = 0$$

6.1.5. Producto vectorial

El *producto vectorial* de dos vectores sólo tiene sentido para vectores en tres dimensiones $\vec{v} = (x, y, z)$ y $\vec{w} = (x', y', z')$, y es un nuevo vector que se define como

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (x, y, z) \wedge (x', y', z') = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - y'z,\ zx' - z'x,\ xy' - x'y)$$

Así, por ejemplo:

$$(2, 3, 0) \wedge (4, 2, 1) = (3, -2, -8) \qquad (3, 2, 1) \wedge (1, 2, 3) = (4, -8, 4)$$

Aparte de algunas propiedades aritméticas elementales, como

$$\vec{w} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{w}) \qquad \vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{w'}) = (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w'})$$

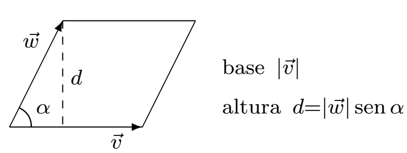
lo más importante del producto vectorial es su interpretación geométrica. De la definición se deduce que, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son colineales, su producto vectorial es el vector nulo. En otro caso es un vector con las siguientes características:

- La **dirección** de $\vec{v} \wedge \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$, y su **sentido** viene dado por la *regla del pulgar*: apunta hacia el semiplano desde el que un observador vería el recorrido más corto de $\vec{v}$ a $\vec{w}$ en sentido antihorario.

- Si α es el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el **módulo** de $\vec{v} \wedge \vec{w}$ vale

$$|\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\,|\operatorname{sen} \alpha|$$

  y coincide con el área del paralelogramo que determinan $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



6.1.6. Producto mixto

El *producto mixto* de tres vectores $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ y $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ de $\mathbb{R}^3$ es el número real

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y por tanto

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{los tres vectores están en un mismo plano}$$

6.2. Ecuaciones de rectas y planos

En esta sección usamos las propiedades geométricas de los vectores para dar ecuaciones de rectas en el plano $\mathbb{R}^2$, y para dar ecuaciones de rectas y planos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

En todos los casos hay dos formas distintas de describir las rectas o planos: Dando un punto por el que pasen y uno o dos vectores que marquen su dirección, o dando una o dos ecuaciones lineales que deban satisfacer las coordenadas de un punto para estar en la recta o el plano.

Según lo que queramos hacer, una de las descripciones puede ser mejor que la otra. Por ejemplo, la primera es mejor para *fabricar* puntos, y la segunda es mejor para decidir si un punto dado está o no en la recta o el plano. Por eso conviene conocerlas ambas y saber pasar de una a otra, y eso hacemos a continuación en los tres casos que nos interesan:

6.2.1. Rectas en el plano

Los puntos de la recta $\mathcal{R}$ que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ y tiene la dirección del vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son los de la forma

$$P + \lambda\vec{v} = (p_1 + \lambda v_1\, ,\, p_2 + \lambda v_2) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

(*ecuación vectorial* de $\mathcal{R}$). Así, un punto (x, y) está $\mathcal{R}$ si y sólo si existe un valor λ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{array} \right.$$

(*ecuaciones paramétricas* de $\mathcal{R}$). Es claro que ambas ecuaciones son esencialmente la misma cosa, y es trivial pasar de una a otra.

Como vimos en el Tema 1, toda recta del plano admite una *ecuación general* del tipo

$$Ax + By = C \qquad \text{ó} \qquad Ax + By - C = 0$$

es decir, un punto está en la recta si y sólo si sus coordenadas (x, y) satisfacen esa ecuación.

Para pasar de la ecuación general a la vectorial basta con resolver el sistema (de una ecuación con dos incógnitas) en función de un parámetro. Por ejemplo, si $A \neq 0$ se puede tomar

$$P = (C/A, 0) \qquad \vec{v} = (-B, A)$$

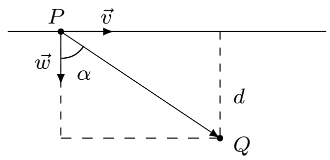
Recíprocamente, si conocemos un punto $P = (p_1, p_2)$ y la dirección $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de la recta, es claro que un punto arbitrario $X = (x, y)$ estará en la recta si y sólo si el vector $\overrightarrow{PX}$ es proporcional a $\vec{v}$. En dos dimensiones esto significa que

$$0 = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{PX} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

y desarrollando el determinante tenemos la ecuación general de la recta.

Distancia de un punto a una recta

Para obtener la distancia d de un punto $Q = (x_0, y_0)$ a una recta $P + \lambda\vec{v}$, consideramos el vector $\vec{w} = (v_2, -v_1)$, que es ortogonal a $\vec{v}$ y tiene su mismo módulo. De la figura



se deduce que $d = |\overrightarrow{PQ}| \cos\alpha$ (en valor absoluto; el coseno podría ser negativo si Q estuviera "al otro lado de la recta"). Multiplicando y dividiendo por $|\vec{v}| = |\vec{w}|$:

$$d = \frac{\overrightarrow{PQ}||\vec{w}|\cos\alpha}{|\vec{v}|} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\begin{vmatrix} x_0 - p_1 & y_0 - p_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}|}\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

(en valor absoluto). Si lo que conocemos es la ecuación general $Ax + By - C = 0$ entonces podemos tomar $P = (C/A, 0)$ y $v = (-B, A)$, por lo que

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\begin{vmatrix} x_0 - (C/A) & -B \\ y_0 & A \end{vmatrix} = \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(en valor absoluto). Obsérvese que, en ambas fórmulas, el numerador se obtiene sustituyendo las coordenadas de $Q = (x_0, y_0)$ en la ecuación general de la recta, y el denominador es la norma del vector director de la recta.

6.2.2. Planos en el espacio

Un plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ puede quedar descrito por una ecuación vectorial

$$P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ es un punto y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores no colineales, o por una ecuación general

$$Ax + By + Cz = D \qquad \text{ó} \qquad Ax + By + Cz - D = 0$$

Para pasar de la ecuación general a la vectorial basta con resolver el sistema en función de dos parámetros. Por ejemplo, si $A \neq 0$ se puede tomar

$$P = (D/A, 0, 0) \qquad \vec{v} = (-B, A, 0) \qquad \vec{w} = (-C, 0, A)$$

De esto se deduce que $\vec{v} \wedge \vec{w} = A\,(A, B, C)$, y por tanto

$$\text{el vector} \quad (A, B, C) \quad \text{es ortogonal al plano de ecuación} \quad Ax + By + Cz = D$$

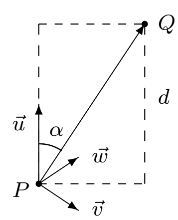
Para pasar de la ecuación vectorial a la general, observamos que un punto $X = (x, y, z)$ está en el plano precisamente cuando el vector $\overrightarrow{PX}$ que lo une con P está en el plano determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$, o sea, cuando estos tres vectores son coplanarios, o sea, cuando su producto mixto vale 0, o sea cuando se tiene

$$0 = \begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

y desarrollando el determinante se obtiene la ecuación general.

Distancia de un punto a un plano

Para calcular la distancia de un punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $\mathcal{P}$ de ecuación vectorial $P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ usamos un argumento similar al que usamos para la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$: El vector $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ es perpendicular al plano, y entonces de la figura



se deduce que la distancia buscada es el valor absoluto de

$$d = |\overrightarrow{PQ}|\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|} = \frac{1}{|\vec{v} \wedge \vec{w}|} \begin{vmatrix} x_0 - p_1 & y_0 - p_2 & z_0 - p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

o, en términos de la ecuación general,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6.2.3. Rectas en el espacio

En $\mathbb{R}^3$, la recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ y tiene la dirección del vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tiene por ecuación vectorial

$$P + \lambda\vec{v} = (p_1 + \lambda v_1\, ,\, p_2 + \lambda v_2\, ,\, p_3 + \lambda v_3) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y tiene unas ecuaciones paramétricas similares a las que vimos en el plano.

También puede describirse una recta de $\mathbb{R}^3$ como el conjunto de soluciones de un sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} Ax & + & By & + & Cz & = & D \\ A'x & + & B'y & + & C'z & = & D' \end{array} \right.$$

en el que (A, B, C) y (A', B', C') no son proporcionales, porque entonces el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el sistema es compatible con un rango de libertad. De hecho, para pasar de esta *ecuación general* a la vectorial basta con resolver el sistema en función de un parámetro λ.

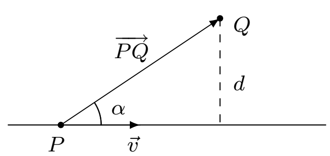
Para pasar de una ecuación vectorial a una general, observamos que $X = (x, y, z)$ está en la recta si y sólo si $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{v}$ son proporcionales, o sea si

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

e igualando los "productos en cruz" de ambas igualdades se obtienen las dos ecuaciones generales del plano.

Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia de la recta $P + \lambda\vec{v}$ al punto Q podemos considerar la siguiente figura en el plano determinado por la recta y el punto



para deducir que la distancia buscada es

$$d = |\overrightarrow{PQ}|\,|\operatorname{sen}\alpha| = \frac{|\overrightarrow{PQ}|\,|\vec{v}|\,|\operatorname{sen}\alpha|}{|\vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

6.3. Bases y coordenadas

A partir de ahora escribiremos las coordenadas de los vectores en columnas. Por motivos tipográficos escribiremos a veces estos vectores-columna como traspuestos de vectores-fila, como a continuación.

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)^t$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$, diremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una *base* de $\mathbb{R}^2$ si la matriz

$$P_{\mathcal{B}} = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{es invertible, o sea si} \quad \det(P_{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Análogamente, un conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es una *base* de $\mathbb{R}^3$ si

$$P_{\mathcal{B}} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{es invertible, o sea si} \quad \det(P_{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier vector $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^2$ se puede poner de modo único como combinación lineal de los vectores de la base, es decir, existen escalares únicos x, y (llamados las *coordenadas* de $\vec{b}$ en la base $\mathcal{B}$) tales que

$$\vec{b} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$$

El vector columna de estas coordenadas se denota por $[\vec{b}]_{\mathcal{B}}$, y se puede calcular como la solución (única por el Teorema 5.3.2) del sistema con matriz $[P_{\mathcal{B}} \,|\, \vec{b}] = [\vec{u}\;\vec{v} \,|\, \vec{b}]$ o mediante la fórmula

$$[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

En $\mathbb{R}^3$ (y en dimensiones mayores) se tiene una situación análoga: Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base y $\vec{b}$ es cualquier vector, entonces existe una única terna $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)^t$ de *coordenadas* de $\vec{b}$ en $\mathcal{B}$ que verifica

$$\vec{b} = x\,\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

y que se calcula resolviendo el sistema $[P_{\mathcal{B}} \,|\, \vec{b}]$ o aplicando la fórmula $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot \vec{b}$.

Un ejemplo especialmente simple, pero importante es el siguiente:

En $\mathbb{R}^2$, el conjunto de vectores $\mathcal{C} = \{(1,0)^t, (0,1)^t\}$ da lugar a la matriz $P_{\mathcal{C}} = I_2$, y por tanto es una base llamada la *base canónica* de $\mathbb{R}^2$. Como también $P_{\mathcal{C}}^{-1} = I_2$, las coordenadas de un vector en la base canónica son sus coordenadas "usuales".

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$ hay una base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ con las mismas propiedades.

Ejemplo 6.3.1. *Dados los siguientes vectores de* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

demostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ *es una base y calcular las coordenadas en* $\mathcal{B}$ *de* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *y* $\vec{c}$.

La matriz $P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ tiene determinante -2 e inversa $P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$, luego $\mathcal{B}$ es una base y las coordenadas pedidas son

$$[\vec{a}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad [\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad [\vec{c}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{c} = \begin{pmatrix} 43/2 \\ -23/2 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que las expresiones de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son

$$\vec{a} = \frac{-5}{2}\,\vec{u} + \frac{3}{2}\,\vec{v} \qquad \vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v} \qquad \vec{c} = \frac{43}{2}\,\vec{u} - \frac{23}{2}\,\vec{v}$$

Este tipo de igualdades se pueden comprobar muy fácilmente, incluso podemos ahorrarnos las fracciones comprobando por ejemplo así:

$$43\vec{u} - 23\vec{v} = 43\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 23\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 129 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 92 \\ 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix} = 2\vec{c}$$

■

Ejemplo 6.3.2. *Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

demostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base y calcular las coordenadas en $\mathcal{B}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

La matriz $P_\mathcal{B} = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]$ tiene determinante -1 y por tanto $\mathcal{B}$ es una base. Para calcular las coordenadas podríamos calcular la inversa de $P_\mathcal{B}$ y multiplicarla por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, pero se trabaja un poco menos resolviendo simultáneamente los sistemas $[P\,|\,\vec{a}\,]$ y $[P\,|\,\vec{b}\,]$ como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Por tanto $[\vec{a}]_\mathcal{B} = (-3, 6, -2)^t$ y $[\vec{b}]_\mathcal{B} = (4, -6, 3)^t$. ■

Observación: Supongamos que, en el ejemplo anterior, nos piden calcular las coordenadas de un vector genérico $(a, b, c)^t$; con los mismos pasos resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & b-2a \\ 0 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3a+2b+c \\ 0 & 1 & 0 & 6a-3b-2c \\ 0 & 0 & 1 & -2a+b+c \end{array}\right)$$

y en la última columna están las coordenadas de $(a, b, c)^t$ en $\mathcal{B}$; en particular, si sustituimos (a, b, c) por $(1, 0, 0)$ o por $(1, 2, 3)$ obtenemos los resultados del ejemplo.

Esto nos da un **método para calcular inversas** que es esencialmente igual al que vimos en el tema anterior, pero un poco más corto. De los cálculos anteriores se deduce que

$$\text{la inversa de} \quad A = P_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{es} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que se obtiene del modo evidente a partir de los coeficientes de a, b y c en la última columna.

Este hecho se justifica como sigue:

Es muy fácil ver que la primera columna de cualquier matriz 3×3 coincide con el resultado de multiplicarla por $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^t$. Por tanto en A^{-1} la primera columna es $A^{-1}\cdot\vec{e}_1 = P_\mathcal{B}^{-1}\cdot\vec{e}_1$, o sea las coordenadas de $\vec{e_1}$ en $\mathcal{B}$. Pero estas coordenadas también son las que obtenemos "a la derecha de la barra" al sustituir en los cálculos anteriores $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, y por tanto nos quedan precisamente los coeficientes de a.

Análogamente, en la segunda columna de A^{-1} aparecen los coeficientes de b, y en la tercera los de c.

6.4. Ejercicios

1. El *centro de masas* de un sistema de n puntos con masas $m_1, \ldots, m_n$ y con vectores de posición $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ se define como el punto con vector de posición
$$\vec{r} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \qquad \text{(donde } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ es la masa total)}$$
Calcular el centro de masas de tres puntos de masas $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ y $m_3 = 1$ con vectores de posición $\vec{r}_1 = (3, -2, 2)$, $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$ y $\vec{r}_3 = (0, 1, 2)$.

2. Dados los siguientes vectores, calcular el ángulo que forma $\vec{v}$ con cada uno de los otros:
$$\vec{v} = (3, 1) \qquad \vec{w}_1 = (1, 2) \quad \vec{w}_2 = (-2, 1) \quad \vec{w}_3 = (-3, -6) \quad \vec{w}_4 = (4, -2)$$

3. Comprobar que los puntos $P = (2, -1, 3)$, $Q = (3, 1, 4)$, $R = (5, 5, 8)$ y $S = (4, 3, 7)$ son los vértices de un paralelogramo y determinar su área.

4. Calcular el área del triángulo con vértices $P = (2, 2, 3)$, $Q = (-1, 4, 0)$ y $R = (5, 1, -1)$.

5. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$ y $\vec{w} = (0, 0, -1)$, calcular:

   a) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
   b) Un vector perpendicular a $\vec{w}$ y a $\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{v} + 4\vec{w}$.
   c) El volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

6. Calcular las ecuaciones generales de:

   a) La recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $(5, 1)$ y $(4, -2)$.
   b) La recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(0, 2, -1)$ y $(4, 1, 1)$.
   c) El plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $(2, 1, 2)$, $(1, -1, 3)$ y $(3, 3, -2)$.

7. Encontrar una ecuación vectorial del plano $3x - 2y - 4z = 12$ en la que los dos vectores sean perpendiculares. Calcular también la distancia del punto $P = (1, 1, 1)$ a ese plano.

8. Hallar la recta que pasa por el punto $(3, 3, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z = 5$. Calcular también la distancia del punto $P = (1, 1, 1)$ a esa recta.

9. Hallar el plano que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y es perpendicular a la recta $(4, 0, 0) + \lambda(1, 1, -1)$. Calcular también la distancia del punto $P = (1, 1, 1)$ a ese plano.

10. Demostrar que $\mathcal{B} = \{(1, -1, 2), (2, 2, 1), (0, 1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y calcular las coordenadas en $\mathcal{B}$ de los vectores
$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 0), \quad \vec{c} = (0, 0, 1), \quad \vec{d} = (2, 3, 4), \quad \vec{e} = (5, 6, 7)$$

11. Demostrar que las siguientes son bases de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (2, 1, 0), (3, 2, 1)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{D} = \{(4, 1, -3), (3, 6, 1), (6, 5, 1)\}$$
Si el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $(4, 1, -2)$ en $\mathcal{B}$, ¿cuáles son sus coordenadas en $\mathcal{D}$?

6.5. Soluciones de los ejercicios

1. $\vec{r} = (2, -1, 1)$.

2. Los ángulos medidos en sentido antihorario desde $\vec{v}$ hasta $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ y $\vec{w}_4$ son respectivamente de $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$ radianes.

3. Se tiene por una parte $\vec{PQ} = \vec{SR} = (1, 2, 1)$, y por otra $\vec{PS} = \vec{QR} = (2, 4, 4)$, luego forman un paralelogramo de área $|(1, 2, 1) \wedge (2, 4, 4)| = |(4, -2, 0)| = \sqrt{20}$.

4. El área del triángulo es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$, o sea la mitad del módulo de $\vec{PQ} \wedge \vec{PR}$, o sea $\frac{1}{2}\sqrt{571}$.

5. (a) $(1, 0, 0)$ (b) $(0, 1, 0)$ (c) 4.

6. (a) $3x - y = 14$ (b) $\{x - 2z = 2,\ 2y + z = 3\}$ [Hay más posibilidades] (c) $2x - y = 3$

7. $P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ con $P = (4, 0, 0)$, $\vec{v} = (2, 3, 0)$ y $\vec{w} = (12, -8, 13)$. [Hay más posibilidades] La distancia es $5\sqrt{3}$.

8. $P + \lambda\vec{v}$ con $P = (3, 3, 4)$ y $\vec{v} = (2, 1, -3)$ (ecuación general $\{x - 2y = 3,\ 3y + z = 13\}$). La distancia es $\sqrt{229/14}$.

9. $P + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ con $P = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1)$ (ecuación general $x + y - z = -1$). La distancia es $2/\sqrt{3}$.

10. $[\vec{a}]_{\mathcal{B}} = (3, -1, 5)$, $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = (-2, 1, -3)$, $[\vec{c}]_{\mathcal{B}} = (-2, 1, -4)$, $[\vec{d}]_{\mathcal{B}} = (-8, 5, -15)$
    $[\vec{e}]_{\mathcal{B}} = (-11, 8, -21)$

11. $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = (33/70,\ -38/70,\ -3/70)$

Tema 7

Transformaciones lineales y diagonalización

7.1. Transformaciones lineales

En este tema seguimos escribiendo los vectores en columnas. Desarrollaremos las ideas en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, aunque en los ejemplos podrán aparecer otras dimensiones.

Una *transformación lineal* de $\mathbb{R}^3$ es una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que consiste en multiplicar por una cierta matriz A de tamaño 3×3; o sea la acción de f viene dada por la fórmula

$$f(\vec{v}) = A\,\vec{v}$$

Por ejemplo, consideremos la siguiente función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y la siguiente matriz A:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2y + 5z - x \\ x + 3y + 10z \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Es elemental observar que la acción de f consiste en multiplicar por la matriz A, y por tanto f es una transformación lineal. De hecho, cada una de las siguientes condiciones es equivalente a que f sea una transformación lineal:

- f puede darse mediante una fórmula "como la de la izquierda", o sea con una expresión del tipo $Ax + By + Cz$ en cada coordenada (es evidente cómo se obtiene entonces la matriz A a partir de la transformación f, y viceversa).

- f "conserva sumas y productos por escalares", es decir

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \quad \text{y} \quad f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v}) \qquad \text{para cualesquiera } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

- f "conserva combinaciones lineales", es decir, para vectores $\vec{v_i}$ y escalares r_i arbitrarios:

$$f(r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2} + \cdots + r_n\vec{v_n}) = r_1 f(\vec{v_1}) + r_2 f(\vec{v_2}) + \cdots + r_n f(\vec{v_n})$$

7.1.1. Matriz de una transformación lineal en la base canónica

La matriz A de la definición anterior se llama la *matriz de f en la base canónica* de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, y se denota por

$$A = M_{\mathcal{C}}(f)$$

Las imágenes de los vectores de la base canónica son $f(\vec{\imath}) = A\vec{\imath}$, $f(\vec{\jmath}) = A\vec{\jmath}$ y $f(\vec{k}) = A\vec{k}$. Al hacer esos productos se obtienen claramente las columnas primera, segunda y tercera de la matriz A, y por tanto se tiene (con la notación del tema anterior)

$$M_{\mathcal{C}}(f) = [f(\vec{\imath}),\ f(\vec{\jmath}),\ f(\vec{k})]$$

De esta igualdad resulta evidente que, para conocer una transformación lineal f, basta con conocer la imagen de los tres vectores de la base canónica. Otra forma de ver esto es la siguiente: para cualquier otro vector $\vec{v} = (x, y, z)^t$ se tiene $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ y por tanto

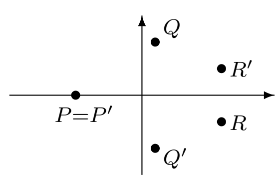
$$f(\vec{v}) \;=\; f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \;=\; xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) + zf(\vec{k})$$

lo que nos da un modo explícito de calcular $f(\vec{v})$ en función de $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ y $f(\vec{k})$ y de $\vec{v}$.

Algunas funciones que admiten descripciones geométricas sencillas son transformaciones lineales, como los giros en torno al origen y las simetrías y proyecciones con respecto a rectas que pasan por el origen, en $\mathbb{R}^2$, y otras más complicadas en $\mathbb{R}^3$. En los ejemplos que siguen vamos a ver cómo podemos calcular sus matrices en casos sencillos, y más tarde podremos también hacerlo en situaciones más complicadas.

Ejemplo 7.1.1. *Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal f de $\mathbb{R}^2$ que lleva cada vector a su simétrico con respecto al eje horizontal.*

A veces ilustraremos estas transformaciones "de naturaleza geométrica" con gráficos como el que sigue. Por simplicidad, en lugar de vectores dibujamos sólo sus extremos (puntos), y P' representa la imagen de P.



Solución: Por su descripción geométrica, f deja fijo el vector $\vec{\imath}$ y lleva el vector $\vec{\jmath}$ a su opuesto. Por tanto

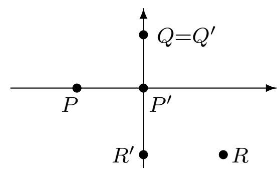
$$M_{\mathcal{C}}(f) = [f(\vec{\imath})\,,\, f(\vec{\jmath})] = [\vec{\imath},\, -\vec{\jmath}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y así la imagen de un vector arbitrario es

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Esto lo podríamos haber obtenido directamente, porque es evidente que la acción de f consiste en cambiar el signo a la componente vertical. ∎

Ejemplo 7.1.2. *Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal f de $\mathbb{R}^2$ que lleva cada vector a su proyección en el eje vertical.*



Solución: Ahora también es claro que la expresión de f va a ser $f(x,y)^t = (0,y)^t$. Para asegurarnos, observamos que f deja fijo el vector $\vec{\jmath}$ y lleva el vector $\vec{\imath}$ al vector nulo. Así

$$M_{\mathcal{C}}(f) = [f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath})] = [\vec{0}, \vec{\jmath}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 7.1.3. *Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal f de $\mathbb{R}^3$ que lleva cada vector a su simétrico con respecto al plano horizontal.*

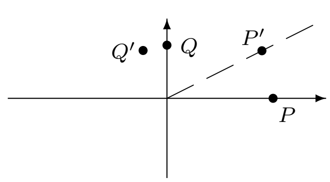
Solución: Podemos prever que la transformación simplemente cambiará el signo a la componente z, y por tanto vendrá dada por $f(x,y,z)^t = (x,y,-z)^t$.

Para asegurarnos, observamos que f deja fijos los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$, y lleva el vector $\vec{k}$ a su opuesto. Por tanto

$$M_{\mathcal{C}}(f) = [f(\vec{\imath}), f(\vec{\jmath}), f(\vec{k})] = [\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{k}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y así la imagen de un vector arbitrario es la esperada. $\blacksquare$

Ejemplo 7.1.4. *Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal g_α de $\mathbb{R}^2$ que consiste en girar un ángulo α en sentido antihorario alrededor del origen.*



Solución: Pongamos $C_\alpha = \cos\alpha$ y $S_\alpha = \operatorname{sen}\alpha$. Al aplicar el giro g_α, el vector $\vec{\imath} = (1,0)^t$ se transforma en $(C_\alpha, S_\alpha)^t$, y el vector $\vec{\jmath} = (0,1)^t$ se transforma en $(-S_\alpha, C_\alpha)^t$, luego

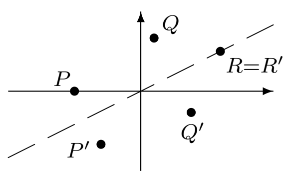
$$M_{\mathcal{C}}(g_\alpha) = \begin{pmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix}$$

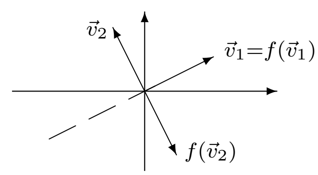
y por tanto la imagen de un vector arbitrario es

$$g_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xC_\alpha - yS_\alpha \\ xS_\alpha + yC_\alpha \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

7.1.2. Matriz de una transformación lineal en otras bases

Supongamos ahora que queremos estudiar la transformación lineal f de $\mathbb{R}^2$ que lleva cada vector a su simétrico con respecto a la recta $x = 2y$:





Podríamos actuar como en los ejemplos anteriores y calcular $f(\vec{\imath})$ y $f(\vec{\jmath})$, pero ahora esto no es tan fácil[1]. Sin embargo, sí es fácil calcular la imagen de otros vectores que “se adaptan bien” a la transformación. En efecto, si consideramos el vector $\vec{v}_1 = (2,1)^t$, que está en la recta, y el vector perpendicular a él $\vec{v}_2 = (-1,2)$, es claro que $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ y $f(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$.

En un caso así, la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ resulta más adecuada que la canónica. Vamos a ver ahora cómo se tratan en general situaciones como ésta, y después volveremos a este ejemplo.

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea f una transformación lineal. La *matriz de f en la base* $\mathcal{B}$ es la que tiene en sus columnas a las coordenadas en $\mathcal{B}$ de los $f(\vec{v}_i)$, es decir

$$M_{\mathcal{B}}(f) = [[f(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}},\ [f(\vec{v}_2)]_{\mathcal{B}},\ [f(\vec{v}_3)]_{\mathcal{B}}]$$

Proposición 7.1.5. *Con las notaciones anteriores, y poniendo $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$, se tiene*[2]*:*

1. $P\, M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{C}}(f)\, P \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\, M_{\mathcal{C}}(f)\, P \qquad M_{\mathcal{C}}(f) = P\, M_{\mathcal{B}}(f)\, P^{-1}$
2. *Para cualquier vector $\vec{v}$ se tiene $M_{\mathcal{B}}(f)\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$*

El primer apartado permite calcular matrices en la base canónica con la ayuda de otras bases que se adapten mejor a la transformación, como veremos en los ejemplos que siguen.

El segundo apartado nos dice que, si consideramos coordenadas en la base $\mathcal{B}$ para cada vector, la matriz $M_{\mathcal{B}}(f)$ cumple un papel análogo al que hemos descrito para $M_{\mathcal{C}}(f)$.

[1] Los métodos para calcular directamente $f(\vec{\imath})$ son del tipo siguiente (entender el proceso y completar sus detalles es un buen ejercicio para el tema anterior): La perpendicular a $x = 2y$ por $P = (1,0)$ tiene ecuación $2x + y = 2$, y corta a $x = 2y$ en el punto $Q = (4/5, 2/5)$. Entonces $f(\vec{\imath}) = P + 2\vec{PQ} = (3/5, 4/5)$.

[2] **Demostración:** Usaremos las igualdades ya establecidas: $P\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}, \quad P^{-1}\,\vec{v} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}, \quad M_{\mathcal{C}}(f)\,\vec{v} = f(\vec{v})$.
1. Si A es una matriz, $A\vec{\imath}$ es su primera columna. Usando esto y las igualdades anteriores vemos que

$$P\, M_{\mathcal{B}}(f)\,\vec{\imath} = P\,[f(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}} = f(\vec{v}_1) = M_{\mathcal{C}}(f)\,\vec{v}_1 = M_{\mathcal{C}}(f)\,P\,\vec{\imath}$$

luego $P\,M_{\mathcal{B}}(f)$ y $M_{\mathcal{C}}(f)\,P$ tienen iguales sus primeras columnas. Usando $\vec{\jmath}$ y $\vec{k}$ vemos que también tienen iguales las otras dos columnas, y por tanto se tiene la primera igualdad. Las otras dos igualdades se obtienen a partir de ésta multiplicando a la izquierda o a la derecha por P^{-1} en ambos miembros.
2. Usando el apartado 1 y las igualdades del principio se tiene directamente

$$M_{\mathcal{B}}(f)\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\,M_{\mathcal{C}}(f)\,P\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\,M_{\mathcal{C}}(f)\,\vec{v} = P^{-1}\,f(\vec{v}) = [f(\vec{v})]_{\mathcal{B}}$$

Apliquemos esto al ejemplo con el que hemos iniciado este apartado:

Ejemplo 7.1.6. *Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal f de $\mathbb{R}^2$ que lleva cada vector a su simétrico con respecto a la recta $x = 2y$.*

Calcular también la de la transformación lineal g que lleva cada vector a su proyección ortogonal sobre esa recta.

Solución: Con la base $\mathcal{B}$ ya descrita, se tiene $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $f(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$ $g(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ y $g(\vec{v}_2) = \vec{0}$, por lo que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, con la notación establecida, se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde

$$M_{\mathcal{C}}(f) = P\, M_{\mathcal{B}}(f)\, P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{C}}(g) = P\, M_{\mathcal{B}}(g)\, P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(en particular, la imagen por f del primer vector $\vec{\imath}$ de la base canónica es la primera columna de $M_{\mathcal{C}}(f)$, o sea $(3/5, 4/5)^t$, como habíamos calculado “a mano” en una nota al pie). ■

Ejemplo 7.1.7. *Dadas las transformaciones lineales f y g con matrices en la base canónica*

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular sus matrices en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1)^t,\ (0,1,1)^t,\ (1,0,1)^t\}$.

Solución: La matriz P asociada a la base $\mathcal{B}$ y su inversa P^{-1} son:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\, M_{\mathcal{C}}(f)\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{B}}(g) = P^{-1}\, M_{\mathcal{C}}(g)\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ■$$

En el ejemplo anterior, lo que ocurre es que los vectores de $\mathcal{B}$ (digamos $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$) “se adaptan muy bien” a las transformaciones f y g, pues se tiene

$$f(\vec{v}_1) = 0 \quad f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \quad f(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_3 \qquad\qquad g(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \quad g(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2 \quad g(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3$$

En los ejemplos “geométricos” ha sido fácil encontrar vectores que se adaptan bien a la transformación, pero en éste no se nos habría ocurrido considerar la base $\mathcal{B}$ si no hubiera estado en el enunciado. Decidir si existen vectores que se adapten así a una transformación y saber calcularlos será el objetivo de la Sección 7.2 sobre vectores propios y diagonalización.

7.1.3. Composición de transformaciones y producto de matrices

Consideremos dos transformaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^3$ con matrices en la base canónica A y B, respectivamente. Su composición $f \circ g$ verifica entonces

$$(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v})) = f(B\vec{v}) = A\,(B\vec{v}) = (AB)\vec{v}$$

y por tanto esa composición es una transformación lineal cuya matriz en la base canónica es el producto AB.

Esta relación entre composición de transformaciones y producto de matrices se tiene también cuando consideramos otras bases:

Proposición 7.1.8. *Si f y g son transformaciones lineales, también lo es su composición. De hecho, si $\mathcal{B}$ es cualquier base, se tiene*[3]*:*

1. $M_{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}(f)\, M_{\mathcal{B}}(g)$.
2. *f es biyectiva (se dice que es un* isomorfismo*) si y sólo si la matriz $M_{\mathcal{B}}(f)$ es invertible, y en este caso la matriz de la función inversa f^{-1} es $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.*

Ejemplo 7.1.9. *Demostrar que cualquier giro g_α es un isomorfismo, y calcular su inverso.*

Solución: Como $|M_{\mathcal{C}}(g_\alpha)| = \begin{vmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{vmatrix} = C_\alpha^2 + S_\alpha^2 = 1$, la matriz es invertible y por tanto g_α es un isomorfismo. Su inverso g_α^{-1} tiene matriz

$$M_{\mathcal{C}}(g_\alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_\alpha & S_\alpha \\ -S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{-\alpha} & -S_{-\alpha} \\ S_{-\alpha} & C_{-\alpha} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}(g_{-\alpha})$$

es decir, el isomorfismo inverso es, como cabía esperar, un giro de ángulo $-\alpha$. ■

Ejemplo 7.1.10. *Si g_α y g_β son giros como en el Ejemplo 7.1.4, calcular $M_{\mathcal{C}}(g_\alpha \circ g_\beta)$.*

Solución: Escribiremos $C_\theta = \cos\theta$ y $S_\theta = \operatorname{sen}\theta$ para cualquier ángulo θ. Por la proposición anterior y por el Ejemplo 7.1.4, la matriz es el producto

$$\begin{pmatrix} C_\alpha & -S_\alpha \\ S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_\beta & -S_\beta \\ S_\beta & C_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta - S_\alpha S_\beta & -C_\alpha S_\beta - S_\alpha C_\beta \\ S_\alpha C_\beta + C_\alpha S_\beta & -S_\alpha S_\beta + C_\alpha C_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\alpha+\beta} & -S_{\alpha+\beta} \\ S_{\alpha+\beta} & C_{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

lo que concuerda con la interpretación geométrica del problema: la composición de dos giros de ángulos α y β es el giro de ángulo $\alpha + \beta$. ■

---

[3]**Demostración** 1. Sean $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ y $A' = M_{\mathcal{B}}(g)$. Para cualquier vector $\vec{v}$ se tiene

$$[(f \circ g)(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = [f(g(\vec{v}))]_{\mathcal{B}} = A\,[g(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = A\,(A'\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}}) = (A\,A')\,[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Por el apartado 3 de la Proposición 7.1.5, esto significa que AA' es la matriz en $\mathcal{B}$ de la composición $f \circ g$.

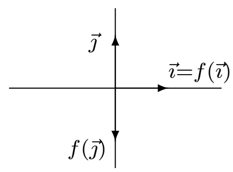
2. Nos limitamos a probar el “sólo si”: Si $f \circ g = id$ entonces $I_3 = M_{\mathcal{C}}(id) = M_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}(f)\, M_{\mathcal{C}}(g)$, y de aquí se deduce la afirmación.

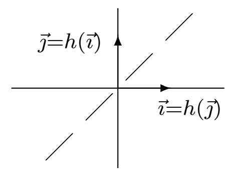
Este ejemplo muestra que la composición de dos giros es un giro, lo cual es fácil de visualizar. También se cumple que la composición de dos simetrías es un giro, y que la composición de un giro y una simetría es una simetría (hay una especie de "regla de los signos" si se asigna a los giros el signo "más" y a las simetrías el signo "menos"). Esto no es tan obvio, y menos lo es determinar en general el ángulo del giro o la recta de la simetría que resultan. El siguiente ejemplo muestra algunos casos sencillos.

Ejemplo 7.1.11. *En $\mathbb{R}^2$, sea g el giro de ángulo $\pi/2$ y sean f y h las simetrías con respecto al eje horizontal y a la recta diagonal $y = x$, respectivamente. Comprobar que:*

1. *$g \circ f$ y $f \circ g$ son simetrías con respecto a ciertas rectas (distintas).*
2. *$f \circ h$ y $h \circ f$ son giros (de ángulos distintos).*

Solución: Observemos cómo actúan las simetrías f y h sobre la base canónica:





De estos gráficos y del Ejercicio 7.1.4 deducimos que:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(todas son matrices con respecto a la base canónica, o sea $M(g) = M_{\mathcal{C}}(g)$, etc.) y por tanto

$$M(g \circ f) = M(g)\, M(f) = M(h) \qquad \text{y} \qquad M(h \circ f) = M(h)\, M(f) = M(g)$$

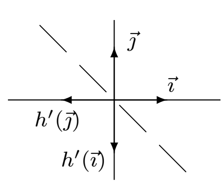
Por la definición de *matriz de una transformación en la base canónica*, es evidente que dos transformaciones con la misma matriz han de ser iguales, de lo que deducimos que

$$\begin{array}{lll} g \circ f = h & \rightsquigarrow & g \circ f \text{ es la simetría con respecto a la recta } y = x \\ h \circ f = g & \rightsquigarrow & h \circ f \text{ es el giro de ángulo } \pi/2 \end{array}$$

En cuanto a las otras dos composiciones, se tiene

$$M(f \circ g) = M(f)\, M(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(f \circ h) = M(f)\, M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda igualdad y el Ejercicio 7.1.4 nos dicen que que $f \circ h$ es el giro de ángulo $-\pi/2$, lo que termina el apartado 2. La primera igualdad nos dice que $f \circ g$ lleva el vector $\vec{\imath}$ a $-\vec{\jmath}$, y lleva el vector $\vec{\jmath}$ a $-\vec{\imath}$; esto es precisamente lo que hace la simetría con respecto a "la otra diagonal" $y = -x$, como muestra el gráfico



de modo que $f \circ g$ es la simetría con respecto a $y = -x$, lo que termina el apartado 1. ∎

7.1.4. Matrices y transformaciones ortogonales

Como estamos viendo, algunas transformaciones lineales y sus matrices tienen interpretaciones geométricas sencillas. Una propiedad geométrica importante que pueden tener estas transformaciones, como es la de conservar distancias y ángulos, se puede deducir muy fácilmente de las matrices, como vemos en este apartado.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ un conjunto de tres vectores no nulos, la matriz $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ que tiene a esos vectores en sus columnas, y su traspuesta P^t, que los tiene en sus filas.

La entrada (i, j) del producto de matrices P^tP es el producto escalar $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$, y por tanto:

- Los vectores son ortogonales dos a dos si y sólo si P^tP tiene ceros fuera de la diagonal (o sea, si es una matriz diagonal en el sentido que vamos a definir en seguida).

- Los vectores son ortogonales dos a dos y unitarios si y sólo si $P^tP = I_3$ (o sea, si la matriz traspuesta de P es su inversa).

  Cuando esto ocurre se dice que P es una *matriz ortogonal*, o que los vectores columna de P forman una *base ortonormal*.

Proposición 7.1.12. *Sea f una transformación lineal y sea $A = M_{\mathcal{C}}(f)$ su matriz en la base canónica. Las siguientes condiciones son equivalentes*[4]*:*

(a) A es ortogonal; es decir, $A^tA = I_3$

(b) f conserva el producto escalar; es decir, $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

(c) f conserva longitudes y cosenos; es decir, $|f(\vec{u})| = |\vec{u}|$ y $\cos(f(\vec{u}), f(\vec{v})) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

De las matrices en bases canónicas que hemos ido obteniendo en los ejemplos anteriores, son ortogonales precisamente las que se corresponden con giros y simetrías, y no lo son las que se corresponden con proyecciones.

Es evidente que las proyecciones no conservan longitudes (por ejemplo, mandan vectores no nulos al vector nulo) y también es intuitivamente claro que los giros y simetrías sí las conservan. En cuanto a los ángulos, los giros los conservan y las simetrías les cambian el signo, pero en cualquier caso se conservan los cosenos. (Ese "cambio del signo" en las simetrías se relaciona con la "regla de los signos" a la que hemos aludido antes del Ejercicio 7.1.11).

---

[4]**Demostración:** (a)$\Rightarrow$(b). Observemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^{\,t}\, \vec{v}$, donde a la izquierda hay un producto escalar de vectores y a la derecha un producto de una matriz fila por una matriz columna. Usando la condición (a) y la fórmula para la traspuesta de un producto, $(BC)^t = C^tB^t$, se tiene

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = f(\vec{u})^t\, f(\vec{v}) = (A\vec{u})^t(A\vec{v}) = \vec{u}^tA^tA\vec{v} = \vec{u}^tI_3\vec{v} = \vec{u}^t\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

(b)$\Rightarrow$(c). f conserva longitudes, pues $|f(\vec{u})| = \sqrt{f(\vec{u}) \cdot f(\vec{u})} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\vec{u}|$. Usando ahora (b) se tiene

$$\cos(f(\vec{u}), f(\vec{v})) = \frac{f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v})}{|f(\vec{u})|\, |f(\vec{v})|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\, |\vec{v}|} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

(c)$\Rightarrow$(a). Como $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ son unitarios y ortogonales dos a dos, también lo son $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{k})$ por (c). Es decir, las columnas de A son vectores unitarios y ortogonales dos a dos, y en consecuencia A es ortogonal.

7.2. Vectores y valores propios; diagonalización

7.2.1. Matrices diagonales

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal, o sea, una matriz de la forma

$$D = \operatorname{diag}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Los cálculos con ellas sean muy sencillos. Por ejemplo, para calcular DB (resp. BD) basta con multiplicar la i-ésima fila (resp. columna) de B por a_i:

$$D\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 4b & 5b & 6b \\ 7c & 8c & 9c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 12 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 12a & -9b & 0 \\ -a & 0 & 8c \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$$

y en particular es elemental el cálculo de sus potencias y de su inversa (que sólo existe si no hay ceros en la diagonal, pues obviamente $\det(D) = abc$):

$$D^n = \operatorname{diag}(a^n, b^n, c^n) \qquad D^{-1} = \operatorname{diag}(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})$$

7.2.2. Vectores y valores propios; matrices diagonalizables

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea $A = M_{\mathcal{C}}(f)$. Un vector no nulo $\vec{v}$ es un *vector propio* o un *autovector* de f (o de A) si f lo lleva a un múltiplo suyo, es decir, si existe un escalar λ (que se llama el *valor propio* o el *autovalor* correspondiente a $\vec{v}$) tal que

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \qquad (\text{ó} \quad A\vec{v} = \lambda\vec{v})$$

En los ejemplos anteriores, los vectores "que se adaptaban bien" a las transformaciones eran vectores propios. Un caso especialmente bueno se da cuando hay suficientes vectores propios para formar una base:

Para una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, la condición de que cada $\vec{v}_i$ sea un vector propio de f (con valor propio digamos λ_i) equivale claramente a que se tenga

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Cuando esto ocurre (o sea, cuando existe una base $\mathcal{B}$ formada por vectores propios de f) se dice que f es *diagonalizable* y que la base $\mathcal{B}$ *diagonaliza* a f.

Si $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ entonces $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\,A\,P$ (Proposición 7.1.5). Por tanto, en términos de matrices la condición anterior equivale a que exista una matriz invertible P tal que

$$D = P^{-1}AP$$

sea diagonal. En estas condiciones se dice la matriz A es *diagonalizable* y que que la matriz P *diagonaliza* a A, o es una *matriz de paso* en la diagonalización de A.

Así, las condiciones "A es diagonalizable" y "f es diagonalizable" significan lo mismo, y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ diagonaliza a f si y sólo si $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ diagonaliza a A.

En los ejemplos geométricos que hemos visto se puede decidir si las transformaciones son o no diagonalizables de forma directa. Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}^2$ una recta $\mathcal{R}$ que pasa por el origen y una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ con el vector $\vec{v}$ en $\mathcal{R}$ y el vector $\vec{w}$ perpendicular a $\mathcal{R}$. Entonces:

- Si f es la simetría con respecto a $\mathcal{R}$, se tiene $f(\vec{v}) = \vec{v}$ y $f(\vec{w}) = -\vec{w}$, luego $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores propios con valores propios 1 y -1, respectivamente. Por tanto la base $\mathcal{B}$ diagonaliza a f y $M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1, -1)$.
- Si f es la proyección sobre $\mathcal{R}$, entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores propios con valores propios 1 y 0, respectivamente, la base $\mathcal{B}$ diagonaliza a f y $M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1, 0)$.
- Finalmente, un giro de ángulo distinto de 0 y π no lleva ningún vector (no nulo) a un múltiplo suyo, y por tanto no tiene vectores propios y no es diagonalizable.

La mayoría de las veces estos argumentos geométricos no son suficientes y hay que recurrir a un trabajo algebraico más elaborado, que desarrollamos a continuación.

7.2.3. Cálculo de valores y vectores propios; diagonalización

Para una matriz cuadrada A y para la matriz identidad del mismo tamaño I se tiene

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad A\vec{v} = \lambda I\vec{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda I - A)\vec{v} = \vec{0}$$

Por tanto, λ es un valor propio de A si el sistema homogéneo con matriz $\lambda I - A$ tiene soluciones no nulas (o sea, es indeterminado, o sea, la matriz tiene determinante cero), y esas soluciones son precisamente los vectores propios. Al desarrollar el determinante

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

se obtiene un polinomio en λ que se conoce como el *polinomio característico* de A, y cuyo grado es igual al tamaño de la matriz. En resumen:

- Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.
- Fijado un valor propio λ_0, sus vectores propios asociados son las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $\lambda_0 I - A$.

Así, el cálculo de los autovalores se reduce al cálculo de las raíces de un polinomio. Esto puede ser complicado en general, pero nuestros ejemplos serán sencillos.

Conocidos los autovalores, el cálculo de los autovectores correspondientes se reduce a la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Muchas veces, calculados estos autovectores, es muy fácil extraer de ellos una base y entonces podemos diagonalizar la matriz. Veamos un par de ejemplos de esta situación:

Ejemplo 7.2.1. *Dada la siguiente matriz A, calcular sus valores y vectores propios, extraer de éstos una base y encontrar una matriz P que diagonalice a A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de A es[5]

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda-3)^2(\lambda-4)$$

Por tanto A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$. Para hallar los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$ resolvemos el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $3I - A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se dice entonces que los vectores $\vec{v}_1 = (1,1,0)^t$ y $\vec{v}_2 = (1,0,1)^t$ son *generadores* de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$, en el sentido de que éstos se obtienen variando los parámetros en la expresión $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$.

Para hallar los vectores propios de $\lambda_2 = 4$ resolvemos el sistema con matriz $4I - A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma \\ \gamma \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de modo que $\vec{v}_3 = (2,1,2)^t$ genera los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4$. La matriz que tiene los vectores $\vec{v}_i$ en sus columnas

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[5]La fórmula del determinante da $(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5) + 4 + 4 + 4(\lambda-4) - 2(\lambda-1) + 2(\lambda-5)$; agrupado en potencias de λ se obtiene $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36$, y el método de Ruffini da la factorización.

Una alternativa para calcular y factorizar $P(\lambda)$ consiste en hacer primero algunas transformaciones elementales para poner ceros; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-4)$$

es invertible (pues $|P| = -1 \neq 0$) y por tanto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de vectores propios, A es diagonalizable y P es una matriz de paso. Esto significa que

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(3,3,4)$$

donde D es la matriz en $\mathcal{B}$ de f (la transformación consistente en multiplicar por A), y por tanto las entradas en su diagonal son los valores propios de los $\vec{v}_i$ en el orden adecuado.

La igualdad $P^{-1}AP = D$ equivale a $AP = PD$ (multiplicando a la izquierda por P), que es mucho más fácil de comprobar que la primera porque no hay que calcular P^{-1} y porque D es diagonal. Esta comprobación se deja como ejercicio. ■

Ejemplo 7.2.2. *Dada la siguiente matriz A, calcular sus autovalores y autovectores, y encontrar una matriz P que diagonalice a A:*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 2 & -6 \\ -3 & \lambda-1 & -3 \\ 9 & -3 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

y por tanto A tiene dos autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$. Para hallar los autovectores resolvemos los sistemas homogéneos con matrices $2I - A$ y $-2I - A$:

$$(2I-A) \to \begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-2I-A) \to \begin{pmatrix} -10 & 2 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -10 & 2 & -6 \\ 9 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Como antes, los vectores que multiplican a α, β y γ forman una matriz de paso

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (|P| = 4)$$

que verifica $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(2,2,-2)$, y la igualdad equivalente $AP = PD$ es muy fácil de comprobar. ■

En otros casos, el cálculo de los valores y vectores propios nos puede llevar a la conclusión de que la matriz en cuestión NO es diagonalizable. Por ejemplo, el polinomio característico del giro de $\pi/3$ radianes (o de su matriz en la base canónica) es

$$P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & \lambda - 1/2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

Este polinomio no tiene raíces reales, por lo que no hay valores propios y por tanto el giro no es diagonalizable, como ya habíamos observado. Un ejemplo más elaborado es el siguiente:

Ejemplo 7.2.3. *Calcular los valores y vectores propios de la siguiente matriz, y deducir que no es diagonalizable:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Desarrollando $|\lambda I - A|$ por la primera columna se obtiene $p(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Por tanto A tiene los autovalores 1 y 2. Para hallar los autovectores resolvemos

$$(I - A) \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2I-A) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto los vectores propios son múltiplos de $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^t$ o de $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)^t$. Tres de estos no pueden formar una base, porque al menos dos son proporcionales. En consecuencia no existe una base de vectores propios y por tanto A no es diagonalizable. ■

En resumen, si n es el tamaño de una matriz A y m es el número total de generadores de sus vectores propios (o lo que es lo mismo, el número total de parámetros que aparecen al resolver los sistemas homogéneos asociados a los valores propios), se tiene[6]:

- Si $m = n$ entonces A es diagonalizable (y ya hemos visto en los ejemplos cómo construir una base de vectores propios, o una matriz de paso).
- Si $m < n$ entonces A no es diagonalizable (no hay suficientes vectores propios para formar una base).
- El caso $m > n$ no puede ocurrir, y de esto se deduce que:
- Si A tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

[6]En rigor, para justificar estos apartados hay que saber que "los subespacios propios son independientes" y que "la multiplicidad de un valor propio es mayor o igual que la dimensión de su subespacio propio".

Esto último permite refinar el segundo punto: en cuanto, para un autovalor λ_0, el número de generadores de sus autovectores es menor que la multiplicidad de λ_0 como raíz de $p(\lambda)$, la matriz NO es diagonalizable. En el ejemplo anterior, el autovalor 1 tiene multiplicidad 2 y un sólo generador de sus vectores propios, luego tras resolver el primer sistema podríamos haber afirmado ya que la matriz no es diagonalizable.

7.2.4. Potencias de una matriz diagonalizable

En muchas ocasiones se quiere aplicar reiteradamente una cierta transformación lineal f a un vector $\vec{v}$, es decir, se quiere calcular sucesivamente

$$f(\vec{v}) \qquad f(f(\vec{v})) = f^2(\vec{v}) \qquad f(f^2(\vec{v})) = f^3(\vec{v}) \qquad \dots \qquad f^n(\vec{v}) \qquad \dots$$

o, en términos de matrices, se quiere calcular sucesivamente

$$A\vec{v} \qquad A(A\vec{v}) = A^2(\vec{v}) \qquad A(A^2\vec{v}) = A^3(\vec{v}) \qquad \dots \qquad A^n\vec{v} \qquad \dots$$

y resulta por tanto conveniente poder calcular las potencias A^n en función de A y de n. Esto no es fácil en general, pero si A es diagonalizable y $D = P^{-1}AP$ es diagonal entonces

$$A = PDP^{-1} \qquad A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \qquad \dots \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

Como hemos comentado, D^n es muy fácil de calcular, y esto nos permite tener la expresión deseada para A^n.

Ejemplo 7.2.4. *Dada la siguiente matriz 2×2 y los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 511 \\ 767 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1023 \\ 1531 \end{pmatrix}$$

consideramos la transformación lineal consistente en multiplicar por A y la aplicamos reiteradamente comenzando por $\vec{u}$, es decir, vamos calculando $\vec{u}_n = A^n\vec{u}$ para cada entero $n \geq 1$. ¿Qué vector se obtiene tras 4 iteraciones? ¿Se llega en algún paso a $\vec{v}$? ¿Y a $\vec{w}$?

Solución: Diagonalizando se tiene $A = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, luego

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 \\ 3 - 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\vec{u}_n = A^n\vec{u} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 \\ 3 \cdot 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

y en particular tras 4 iteraciones se obtiene $\vec{u}_4 = (31, 47)^t$.

El vector $\vec{v}$ se alcanza si para algún n se tiene $\vec{u}_n = \vec{v}$, o sea si se tiene simultáneamente $2^{n+1} - 1 = 511$ y $3 \cdot 2^n - 1 = 767$, lo cual ocurre para $n = 8$.

El vector $\vec{w}$ se alcanza si para algún n se tiene simultáneamente $2^{n+1} - 1 = 1023$ y $3 \cdot 2^n - 1 = 1531$. Como la única solución de la primera ecuación ($n = 9$) no satisface la segunda, nunca se llega al vector $\vec{w}$. ■

7.2.5. Apéndice: matrices simétricas y diagonalización ortogonal

Una matriz cuadrada A es simétrica cuando coincide con su traspuesta, o sea, cuando se verifica $A = A^t$. Esto significa que las entradas de A sean "simétricas con respecto a la diagonal principal" en el sentido que se deduce de los siguientes ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & \pi \\ 4 & 1 & \sqrt{2} \\ \pi & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices aparece de forma natural en muchos problemas de geometría y de física (y también de química: las matrices de Hückel), y su forma peculiar les hace tener buenas propiedades, como la de ser siempre diagonalizables; de hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7.2.5 (Teorema espectral). *Toda matriz simétrica A es diagonalizable y además se puede* diagonalizar ortogonalmente*, es decir, la matriz de paso P se puede tomar ortogonal.*

Para conseguir que la matriz P sea ortogonal hay que hacer lo siguiente:

- Para los autovalores simples, raíces simples de $p(\lambda)$, se obtiene un único generador $\vec{u}$ de sus autovectores, y en la columna de P se pone su *normalización*

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|}\,\vec{u}$$

- Para los autovalores dobles, raíces dobles de $p(\lambda)$, se obtienen dos generadores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de sus autovectores. Entonces en las columnas de P se ponen $\vec{u}_0$ y $\vec{v}_0$, donde[7]

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} \qquad \vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|}\,\vec{u} \qquad \vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\,\vec{v}_1$$

- Para autovalores de multiplicidad mayor se usa el *proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt*, que generaliza la idea anterior y que no abordaremos en estas notas[8].

[7] La primera fórmula cambia $\vec{v}$ por otro vector propio $\vec{v}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$, y en las otras sencillamente se normalizan estos últimos. Si no se quiere recordar la primera fórmula se puede rehacer el proceso por el que se obtiene: Se busca una combinación lineal $\vec{v}_1 = \vec{v} - r\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$, o sea que cumpla $0 = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 = \vec{u}\cdot\vec{v} - r\,\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v} - r\,|\vec{u}|^2$, y de aquí se obtiene el valor de r, que es el de la fórmula propuesta.

[8] Vamos al menos a esbozar el caso de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que es fácilmente generalizable a más vectores. Sólo comentamos cómo se cambian los vectores iniciales por vectores ortogonales que sigan siendo vectores propios del mismo valor propio, pues la normalización posterior es trivial.

En un primer paso, se cambia $\vec{v}$ por un vector de la forma $\vec{v}_1 = \vec{v} - r\,\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$. Como antes, la condición $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 0$ nos da el valor de r.

Después se cambia $\vec{w}$ por un vector de la forma $\vec{w}_1 = \vec{w} - s\,\vec{u} - t\,\vec{v}_1$ que sea ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$, o sean que verifique $\vec{u}\cdot\vec{w}_1 = 0$ y $\vec{v}_1\cdot\vec{w}_1 = 0$. Estas dos ecuaciones imponen a s y t los valores adecuados para que $\vec{w}_1$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}_1$.

Ejemplo 7.2.6. *Diagonalizar ortogonalmente la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda = \lambda(\lambda^2 - 8) = \lambda(\lambda - 2\sqrt{2})(\lambda + 2\sqrt{2})$$

Por tanto A tiene tres valores propios: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$ y $\lambda_3 = -2\sqrt{2}$. Para hallar los vectores propios resolvemos los sistemas homogéneos con matrices de coeficientes $\lambda_i I - A$:

$$(0I - A) \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(2\sqrt{2}I - A) \to \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ -2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-2\sqrt{2}I - A) \to (\ldots \text{análogamente} \ldots) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos *normalizar* (es decir, dividir por su módulo) los generadores de los vectores propios, para obtener

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que P es ortogonal, bien comprobando que $P^t P = I_3$ o bien observando que sus vectores columna tienen módulo 1 y son ortogonales dos a dos. También, como en los ejemplos anteriores, se tiene $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, lo que equivale a la igualdad fácil de verificar $AP = PD$. ■

Veamos por último un ejemplo en el que hay que hacer un proceso de ortonormalización con los autovectores asociados a un autovalor doble:

Ejemplo 7.2.7. *Diagonalizar ortogonalmente la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Se tiene $p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = (\lambda-2)^2(\lambda-5)$, y por tanto A tiene los autovalores 5 (simple) y 2 (doble). Para hallar los vectores propios resolvemos los sistemas:

$$(5I - A) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2I - A) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En la primera columna de la matriz de paso pondremos la normalización del vector $(1,1,1)^t$ asociado al valor propio simple:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $\vec{u} = (1,-1,0)^t$ y $\vec{v} = (1,0,-1)^t$ a los generadores de los autovectores del valor propio doble, en las otras dos columnas pondremos las normalizaciones de $\vec{u}$ y de

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} = \vec{v} - \frac{1}{2}\,\vec{u} = (1/2,\ 1/2,\ -1)^t$$

o sea

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que da igual normalizar un vector que un múltiplo suyo, por lo que en vez de $\vec{v}_1$ podemos normalizar $(1,1,-2)^t$). Juntando esos tres vectores se obtiene la matriz de paso

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

que, como se comprueba fácilmente, es ortogonal y verifica $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(5,2,2)$. ∎

7.3. Ejercicios

1. Calcular la matriz en la base canónica de la transformación lineal f de $\mathbb{R}^2$ que lleva cada vector a su proyección ortogonal sobre la diagonal $y = x$.

2. Consideramos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-1,1,1)^t \qquad \vec{v}_2 = (2,0,1)^t \qquad \vec{v}_3 = (0,1,1)^t \qquad \vec{v} = (1,2,3)^t$$

   Calcular $M_{\mathcal{C}}(f)$ para la transformación que verifica $f(\vec{v}_1) = \vec{0}$, $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ y $f(\vec{v}_3) = \vec{v}$.

3. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$, decidir si son isomorfismos y, en caso afirmativo, dar la transformación inversa.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y-2z \\ 3x+y+2z \\ 2y-x-3z \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ x+2y+z \\ y-2x-z \end{pmatrix}$$

4. En $\mathbb{R}^2$, si f es la simetría con respecto a la diagonal $y = x$ y g es el giro de ángulo $\pi/2$, determinar quiénes son $f \circ g$ y $g \circ f$.

5. Determinar cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables, y dar una matriz que las diagonalice cuando sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$$

6. Calcular la n-ésima potencia de las matrices $A = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, hallar una matriz B tal que $B^2 = A$.

8. Diagonalizar ortogonalmente las matrices simétricas

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7.4. Soluciones de los ejercicios

1. Consideremos un vector $\vec{v}_1 = (1,1)^t$ en la diagonal y otro $\vec{v}_2 = (-1,1)^t$ ortogonal al primero. Si $\mathcal{B}$ es la base que forman entonces $M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y si $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ entonces $M_{\mathcal{C}}(f) = P \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot P^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

   También se puede obtener esta matriz directamente observando que f lleva los dos vectores de la base canónica a "la mitad de la diagonal del cuadrado de lado 1".

2. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, que es una base pues $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$ es invertible.

   Las condiciones $f(\vec{v}_1) = \vec{0}$, $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ nos dicen que las dos primeras columnas de $M_{\mathcal{B}}(f)$ son $(0,0,0)^t$ y $(0,1,0)^t$, y en la tercera deben ir las coordenadas de $\vec{v}$ en $\mathcal{B}$, que se calculan resolviendo el sistema con matriz $(P \mid \vec{v})$ y valen $(1,1,1)^t$.

   Por tanto $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y así $M_{\mathcal{C}}(f) = P\, M_{\mathcal{B}}(f)\, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

3. $M_{\mathcal{C}}(f)$ no es invertible, luego f no es un isomorfismo. Como $M_{\mathcal{C}}(g)$ sí es invertible con inversa $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, g es un isomorfismo y $g^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2z \\ x + z \\ 2y - 5x - 4z \end{pmatrix}$.

4. Las matrices de f y g son, respectivamente, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y sus productos en ese orden y en el contrario son, respectivamente, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, por lo que $f \circ g$ es la simetría con respecto al eje horizontal y $g \circ f$ es la simetría con respecto al eje vertical.

5. A tiene al 2 como único valor propio, y sólo dos vectores generan los vectores propios, por lo que no es diagonalizable.

   B tiene valores propios 1 y -1, y para cada uno se obtiene un único vector que genera los vectores propios, por lo que no es diagonalizable.

   C tiene valores propios 1, 2 y 3. Para cada uno hay un generador de los vectores propios, y con ellos formamos la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   D tiene al 1 como único valor propio, y un sólo generador de los vectores propios, por lo que no es diagonalizable.

6. $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3^{n+1} & -6 + 2\cdot 3^{n+1} \\ 2 - 2\cdot 3^n & -3 + 4\cdot 3^n \end{pmatrix}$

   $B^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

7. En cierto modo nos están pidiendo “la raíz cuadrada de A”, y usamos para hacerlo la misma idea que se ha expuesto para calcular potencias de A. Diagonalizándola se obtiene $A = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2$.

   Entonces la matriz $B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ cumple la propiedad pedida.

8. Los autovalores de A son ± 25, y se tiene por ejemplo $P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$.

   Los autovalores de B son 1, 0 y -2, y como generadores normalizados de los respectivos autovectores podemos tomar $(1,0,0)^t$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^t$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^t$.

   Los autovalores de C son 4 (simple) y 2 (doble). Asociado a 4 encontramos por ejemplo $(1,-1,0)^t$, y asociados a dos es fácil obtener $(1,1,0)^t$ y $(0,0,1)^t$, que ya son ortogonales y por tanto no hay que aplicarles el proceso de ortogonalización. Dividiendo los dos primeros por $\sqrt{2}$ fabricamos una matriz de paso ortogonal.

Tema 8

Cálculo diferencial en varias variables

8.1. Introducción

Definición 8.1.1. *Llamamos* función real de n variables reales *($n \in \mathbb{N}$) a cualquier función*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con valores en $\mathbb{R}$ y definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$ llamado dominio *de f.*

Estas funciones pueden venir dadas de forma *explícita* por expresiones como

$$f(x, y, z) = \ln(xye^{z^2x} + \cos(zy)) \qquad \text{ó} \qquad V(P, T) = nR\frac{T}{P}$$

o en forma *implícita* por ecuaciones del tipo $F(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, en

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

podemos ver cualquiera de las variables como función de las otras; incluso podemos despejar fácilmente, por ejemplo

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

pero la expresión implícita tiene algunas ventajas, como su simetría y su fácil interpretación geométrica como los puntos que distan una unidad del origen, es decir, como la superficie de la esfera de radio uno centrada en el origen.

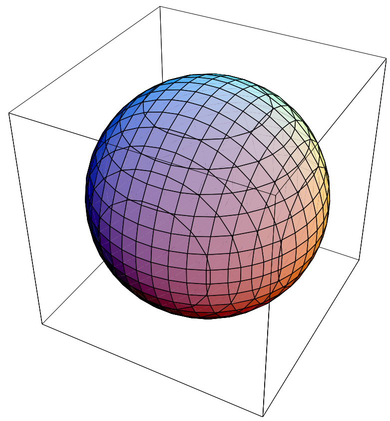
Ya sabemos que una función real de una variable se puede representar mediante una curva en el plano. De modo análogo, una función de dos variables $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se representa en el espacio tridimensional mediante su *gráfica*

$$\{(x, y, f(x, y)) \,:\, (x, y) \in D\}$$

que es una superficie en el espacio.

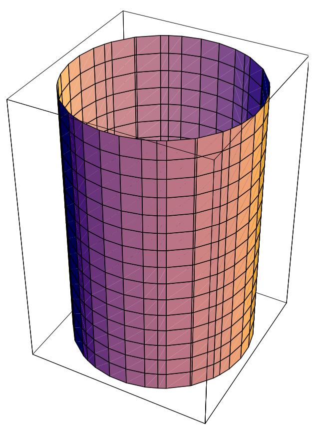
No estudiaremos en estos apuntes la representación gráfica de funciones de dos variables, aunque sí lo haremos en las prácticas con ordenadores. Nos limitamos aquí a presentar las gráficas de algunas funciones notables dadas por ecuaciones implícitas (y también incluiremos a título ilustrativo las gráficas de algunas de las funciones que aparezcan en los ejercicios):

Esfera: Si tiene centro en (a, b, c) y radio r la ecuación es:

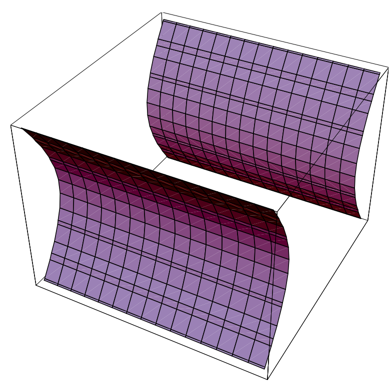


$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

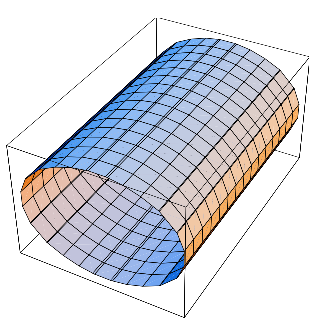
Cilindros: Cuando una variable (por ejemplo z) no aparece en la ecuación, podemos dibujar la gráfica en el plano XY y "deslizarla" paralelamente al eje OZ. Veamos algunos ejemplos:



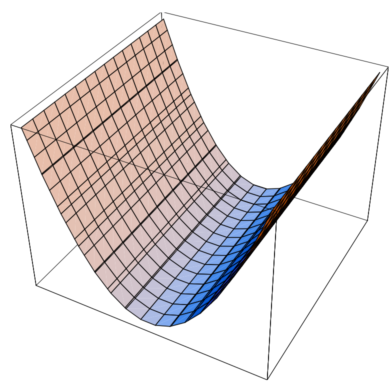
$x^2 + y^2 = 4$ (circular, paralelo a OZ)



$y^2 - z^2 = 4$ (hiperbólico, paralelo a OX)

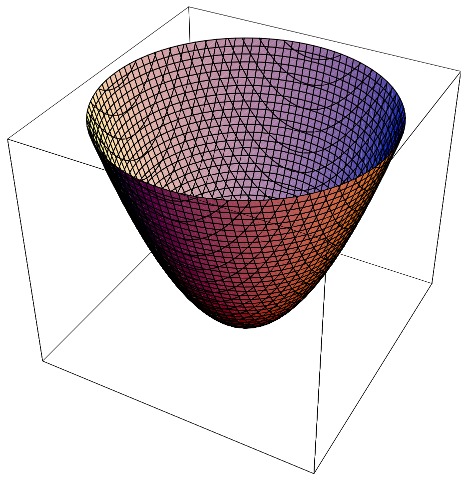


$x^2 + 2z^2 = 4$ (elíptico, paralelo a OY)

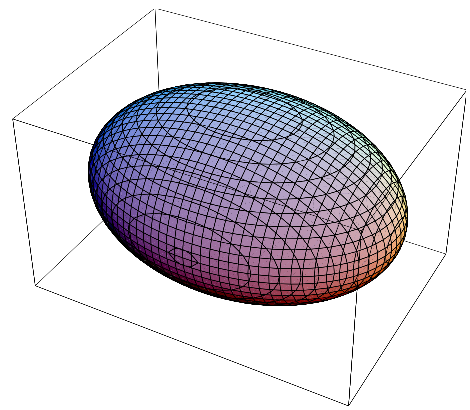


$x^2 - 2z = 4$ (parabólico, paralelo a OY)

Paraboloide y elipsoide:

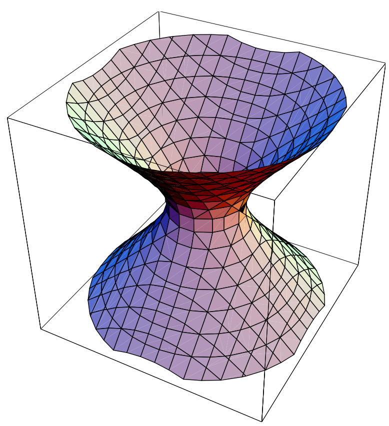


$z = x^2 + y^2$ (paraboloide)

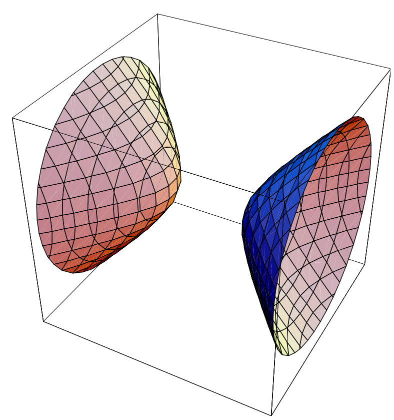


$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3$ (elipsoide)

Hiperboloides:

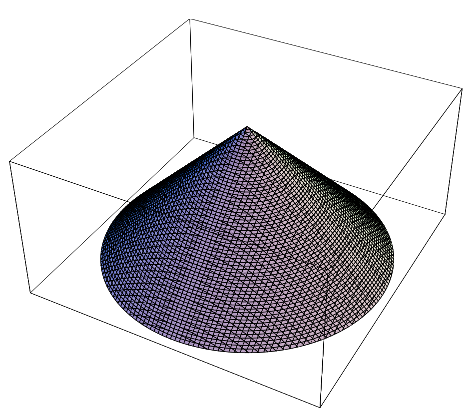


$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (de una hoja)



$x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (de dos hojas)

Cono: La ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ es un "cono doble"; representamos sólo su parte inferior:



$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

8.2. Límites y continuidad

8.2.1. Definición y algunos casos sencillos

Definición 8.2.1. *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell \in \mathbb{R}$. *Muy informalmente, el límite de* f *cuando* $\vec{x}$ *tiende a* $\vec{x}_0$ *es igual a* ℓ *si los valores de* f *están arbitrariamente próximos a* ℓ *para valores de* $\vec{x}$ *muy próximos a* $\vec{x}_0$*. Lo escribiremos*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell$$

Sólo estudiaremos aquí límites de funciones de dos variables en el origen de coordenadas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

y nos referiremos a éstos en ocasiones como *límite doble.*

En algunas situaciones especiales es muy fácil calcular estos límites. Por ejemplo, si la función $f(x,y)$ puede ponerse como el producto de una función de x por una función de y entonces podemos usar el hecho de que "el límite del producto es el producto de los límites":

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cos(y)}{\operatorname{sen}(x)(1-y^2)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\right)\left(\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y)}{1-y^2}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Otra situación sencilla se da en límites como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy^2)}{xy^2}$$

en los que podemos hacer un cambio de variable, en este caso $t = xy^2$. Por el caso anterior, se tiene $t \to 0$ cuando $(x,y) \to 0$, y entonces el límite doble vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy^2)}{xy^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

8.2.2. Límites iterados y direccionales

Al calcular un límite de una variable en x_0, sabemos que si los límites laterales (por la derecha o por la izquierda) no coinciden, entonces el límite no existe.

En $\mathbb{R}^2$ nos podemos acercar al origen de coordenadas de muchas más formas. Si el límite doble existe y vale ℓ entonces cualquiera de estas formas particulares de acercarnos debe valer ℓ. Visto de otro modo, si encontramos dos formas de acercarnos al origen que dan un límite distinto entonces el límite doble no puede existir.

En este apartado vamos a ver algunas formas típicas de acercarse al origen: los límites iterados y los límites direccionales por rectas y parábolas. Desgraciadamente, como éstas no cubren "todas las formas posibles" de acercarse, aunque todas apunten hacia el mismo valor ℓ no podremos aún afirmar que éste sea el valor del límite doble[1]. En resumen, una vez que definamos los límites iterados y direccionales, tendremos:

[1] En una variable, los acercamientos por la izquierda y por la derecha sí cubren todas las posibilidades de acercarse y por tanto, cuando los dos límites laterales coinciden, sí se puede afirmar la existencia del límite.

- Si todos los límites iterados y direccionales toman el mismo valor, éste valor es el único candidato a límite doble, pero aún no podemos afirmar que ese límite exista (tendremos que estudiar el límite en coordenadas polares).
- Si hay alguna discrepancia en los valores de los límites iterados y direccionales (o si alguno de ellos no existe), entonces el límite doble no existe.

Los *límites iterados* se calculan de la siguiente forma: Para un valor de y fijo, calculamos $\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y)$ que será una expresión que dependa de y; entonces el primer límite iterado es $\ell_{12} = \lim_{y\to 0}\varphi(y)$. De modo análogo se calcula el segundo límite iterado ℓ_{21}:

$$\ell_{12} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \ell_{21} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

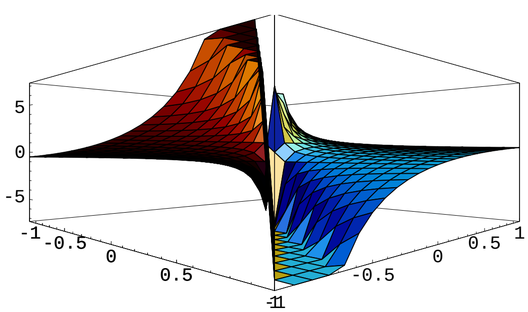
Ejemplo 8.2.2. *Estudiar la existencia del límite en* $(0,0)$ *para las siguientes funciones:*

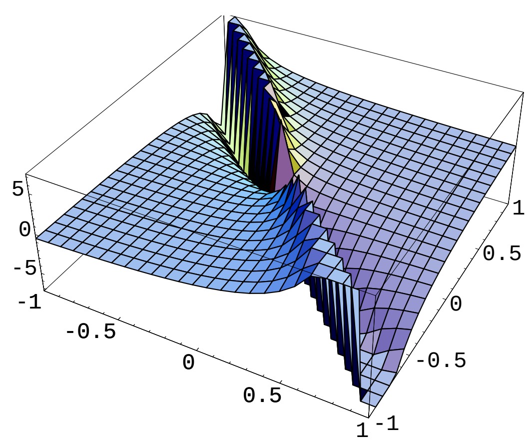
$$1.\quad f(x,y) = \frac{xy - x + y}{x+y} \qquad 2.\quad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Solución. 1. Calculamos los límites iterados:

$$\ell_{12} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy-x+y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1 \qquad \ell_{21} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy-x+y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1$$

Como son distintos, podemos concluir que no existe el límite doble. Esta es la gráfica de la función desde dos perspectivas distintas:





2. Calculamos los límites iterados:

$$\ell_{12} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0 \qquad \ell_{21} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

Como coinciden, sólo podemos decir por ahora que 0 es el único candidato a límite doble. ■

El *límite direccional* de $f(x, y)$ en la dirección de una curva continua $y = g(x)$ con $g(0) = 0$ se define como $\lim_{x\to 0} f(x, g(x))$. En la práctica, las curvas continuas que usaremos serán rectas $y = mx$ y parábolas $y = mx^2$ ó $x = my^2$, por lo que nos interesarán los límites

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) \qquad \lim_{x\to 0} f(x, mx^2) \qquad \lim_{y\to 0} f(my^2, y)$$

(muchas veces basta con considerar un par de casos concretos: $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, etc.).

Ejemplo 8.2.3. *Estudiar la existencia del límite en* $(0, 0)$ *para las siguientes funciones:*

1. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ 2. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ 3. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

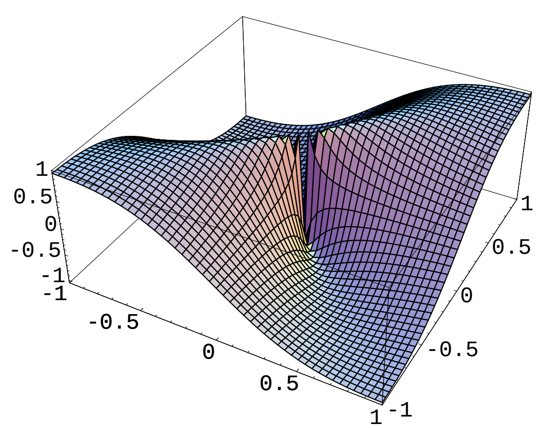
Solución. 1. Obsérvese que es la segunda función del Ejemplo 8.2.2; allí no pudimos obtener una conclusión, y ahora sí vamos a poder hacerlo. De hecho, podemos calcular un par de límites direccionales concretos, por ejemplo a lo largo de las rectas $y = x$ e $y = -x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x(-x)}{x^2 + (-x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

o calcular en general el límite a lo largo de la recta $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xmx}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

cuyo valor varía en función del parámetro m, y en cualquier caso deducimos que no existe el límite doble. Ésta es la gráfica de la función:



2. Es fácil ver que ambos límites iterados valen 0, y el mismo valor se obtiene al calcular cualquiera de los límites direccionales:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{x^3m^2}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x\to 0} x\frac{m^2}{1 + m^2} = 0 \cdot cte = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx^2)^2}{x^2+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5m^2}{x^2(1+m^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{1+m^2x^2} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\lim_{y\to 0} f(my^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{my^2y^2}{(my^2)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{y^2(m^2y^2+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{my^2}{m^2y^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Sólo podemos deducir que, si el límite doble existe, debe valer 0.

3. De modo análogo se ve que los límites iterados y los límites por rectas $y = mx$ y parábolas $y = mx^2$ valen todos 0. Sin embargo, en este caso los límites por parábolas $x = my^2$ dependen del parámetro m:

$$\lim_{y\to 0} f(my^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{my^2y^2}{(my^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{y^4(m^2y^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

por lo que podemos afirmar que el límite doble no existe. ■

8.2.3. Límites en coordenadas polares

Los métodos del apartado anterior nos sirven para descartar la existencia del límite o bien nos indican su posible valor, pero no sirven para asegurar su existencia. Para eso necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 8.2.4. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $\ell \in \mathbb{R}$ un candidato a límite doble. Si podemos acotar la distancia $|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) - \ell|$ por una función de la única variable ρ que tienda a cero (cuando $\rho \to 0$), entonces el límite doble existe y vale ℓ. Esquemáticamente:*

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) - \ell| \leq F(\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$$

Encontrar una cota como la que pide el enunciado significa que, al acercarnos al origen ($\rho \to 0$), independientemente de la trayectoria (pues $F(\rho)$ no depende del ángulo θ), la distancia entre ℓ y los valores de la función se hace tan pequeña como queramos, por lo que el límite doble vale ℓ.

En la práctica se trata de considerar esa distancia e intentar eliminar θ usando desigualdades adecuadas, que en los casos más sencillos se limitan a acotar por 1 los valores de senos y cosenos. Por ejemplo, el caso que quedó dudoso en el Ejemplo 8.2.3 se resuelve así:

Ejemplo 8.2.5. *Estudiar la existencia del límite en $(0,0)$ de $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.*

Solución. Por el Ejemplo 8.2.3 tomamos $\ell = 0$ y acotamos

$$\left|\frac{\rho\cos\theta\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2} - 0\right| = \rho|\cos\theta|\,|\operatorname{sen}^2\theta| \leq \rho \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

por lo que el límite existe y vale 0. ■

En los ejemplos del apartado siguiente calcularemos más límites en coordenadas polares.

8.2.4. Continuidad

Definición 8.2.6. *Se dice que* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es* continua *en* $\vec{x}_0 \in D$ *si* $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

Y se dice que f *es continua en* D *si lo es en cada punto de* D.

Todas las funciones que se definan a partir de funciones elementales y de sus sumas, diferencias, productos, cocientes y composiciones son continuas en sus dominios de definición.

Ejemplo 8.2.7. *Estudiar la continuidad de* f *en los siguientes casos (todos con* $f(0,0) = 0$*):*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^3+3y^3}{x^2+y^2+x^2y^2}$

Solución. En los tres casos es fácil ver que el denominador sólo se anula en $(0,0)$, luego todas son continuas en otros puntos y sólo falta por ver qué ocurre en $(0,0)$.

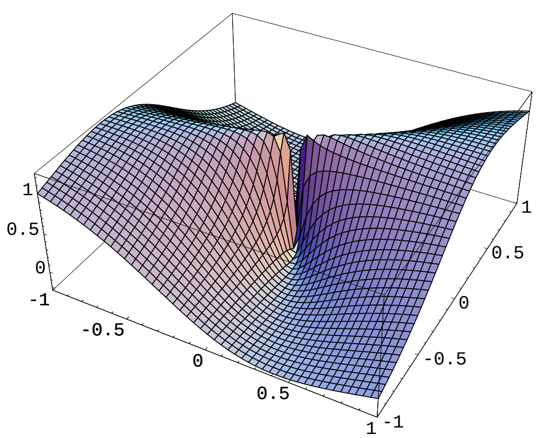
1. Los límites iterados

$$\ell_{12} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0 \qquad \ell_{21} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

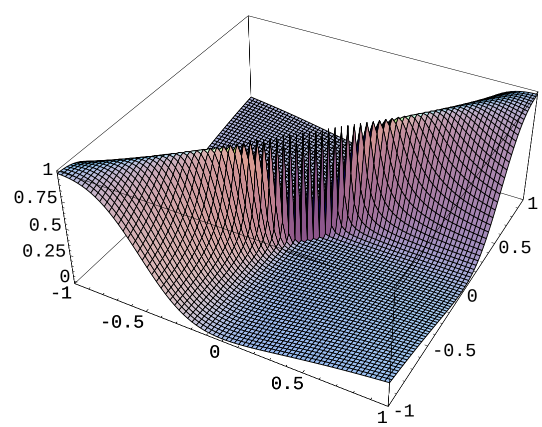
son distintos, luego no existe el límite doble y la función no es continua en $(0,0)$.

2. Es fácil comprobar que los límites iterados valen 0, mientras que el límite en la dirección $y = x$ vale 1, por lo que el límite doble no existe y la función no es continua en el origen.

Las gráficas de las dos funciones anteriores presentan “anomalías” en el origen:



$z = \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$



$z = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

3. Es fácil ver que los límites iterados y direccionales valen cero[2], y además se tiene

$$\left|\frac{\rho^3\cos^3\theta + 3\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2+\rho^2\cos^2\theta\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\right| = \rho\,\frac{|\cos^3\theta + 3\operatorname{sen}^3\theta|}{1+\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta} \le \rho\,\frac{1+3}{1} = 4\rho \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

[2]En este ejemplo, una vez se obtiene $\ell_{12} = 0$ como candidato a límite, el resto de cálculos de límites iterados y direccionales son inútiles, pues una aplicación directa del límite en polares resuelve el problema.

En general, si los límites iterados coinciden, es conveniente pasar al límite en polares: si es fácil acotar la función y aplicar la proposición, el problema está resuelto; en otro caso habrá que hacer direccionales para ver si el límite no existe; si aun así nos sale siempre el mismo candidato, podemos ver si hay algún modo mejor de acotar la expresión en polares.

Así pues el límite doble de la función existe y coincide con el valor de la función en el origen, por lo que f es continua en $(0,0)$. ■

Ejemplo 8.2.8. *Decidir si se puede definir* $f(0,0)$ *para que* f *sea continua en* $(0,0)$*:*

1. $f(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Solución. 1. Es fácil ver que $\ell_{12} = 0$ y $\ell_{21} = 1$, por lo que el límite doble no existe y no se puede definir $f(0,0)$ para que f sea continua en $(0,0)$.

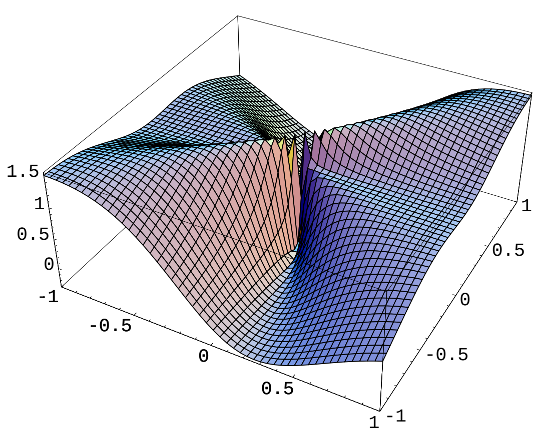
2. Calculamos los límites iterados:

$$\ell_{21} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

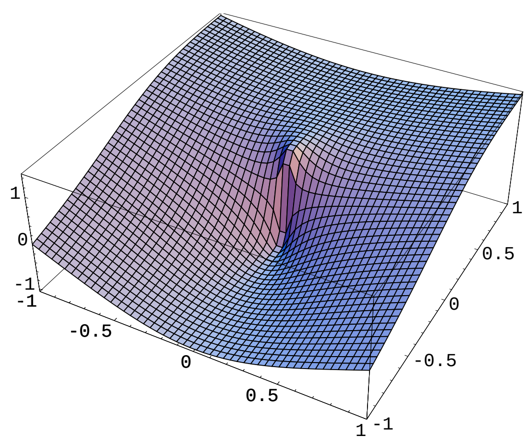
$$\ell_{12} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{|y|}$$

Este último límite (de una función de una sola variable y) no existe, pues el límite por la izquierda es -1 y por la derecha es 1. Por tanto, tampoco existe el límite iterado y no puede definirse $f(0,0)$ para que la función sea continua.

De nuevo vemos cómo las gráficas de estas funciones son anómalas en el origen:



$z = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$



$z = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Los límites iterados y direccionales valen 0, y como

$$\left|\frac{\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2}\right| = \rho\left|\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right| \le 2\rho \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

el límite doble vale 0, por lo que definiendo $f(0,0) = 0$ conseguimos una función continua en el origen. ■

8.3. Derivadas parciales

Pasamos ahora a estudiar la derivación de funciones de varias variables reales. Las definiciones que daremos para dos variables se extienden fácilmente a funciones de n variables.

8.3.1. Definición y cálculo elemental

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea $P = (x_0, y_0) \in D$. Podemos considerar los valores que toma f no en todos los puntos del dominio D, sino sólo en los de la recta horizontal $y = y_0$, es decir, valores de la forma $f(x, y_0)$. Estamos considerando entonces una función de una sola variable x y podemos calcular su derivada en el punto x_0. Si existe, este valor es la *derivada parcial* de f con respecto a x en el punto P, que se denota por $f'_x(P)$ ó por $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Cuando se consideran sólo valores $f(x_0, y)$ en la recta vertical $x = x_0$ se tiene una función de la variable y, cuya derivada en y_0 es la *derivada parcial* de f con respecto a y en P:

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Cuando estas derivadas parciales existen para cualquier punto de D se tienen definidas dos nuevas funciones, llamadas las *funciones derivadas parciales* de f:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

En virtud de la definición, para calcular f'_x se considera que y es constante y se deriva la correspondiente función de x, y para calcular f'_y se actúa a la inversa.

Ejemplo 8.3.1. *Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones:*

$$f(x, y) = \frac{x \operatorname{sen}(y)}{y} \qquad\qquad g(x, y, z) = xy^2ze^{2z}$$

Solución. Derivando como se acaba de indicar se obtiene:

$$f'_x(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \qquad\qquad f'_y(x, y) = x\,\frac{y\cos(y) - \operatorname{sen}(y)}{y^2}$$

$$g'_x(x, y, z) = y^2ze^{2z} \qquad g'_y(x, y, z) = 2xyze^{2z} \qquad g'_z(x, y, z) = xy^2e^{2z}(1 + 2z) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 8.3.2. *Comprobar que la función $z(x, y) = x \operatorname{sen}(y/x)$ satisface la ecuación en derivadas parciales $xz'_x + yz'_y = z$.*

Solución. Calculando las parciales y sustituyéndolas en el primer miembro de la ecuación se obtiene el segundo:

$$z'_x = \operatorname{sen}(y/x) + x\cos(y/x)\frac{-y}{x^2} = \operatorname{sen}(y/x) - \frac{y}{x}\cos(y/x) \qquad z'_y = x\cos(y/x)\frac{1}{x} = \cos(y/x)$$

$$xz'_x + yz'_y = x\operatorname{sen}(y/x) - y\cos(y/x) + y\cos(y/x) = x\operatorname{sen}(y/x) = z \qquad \blacksquare$$

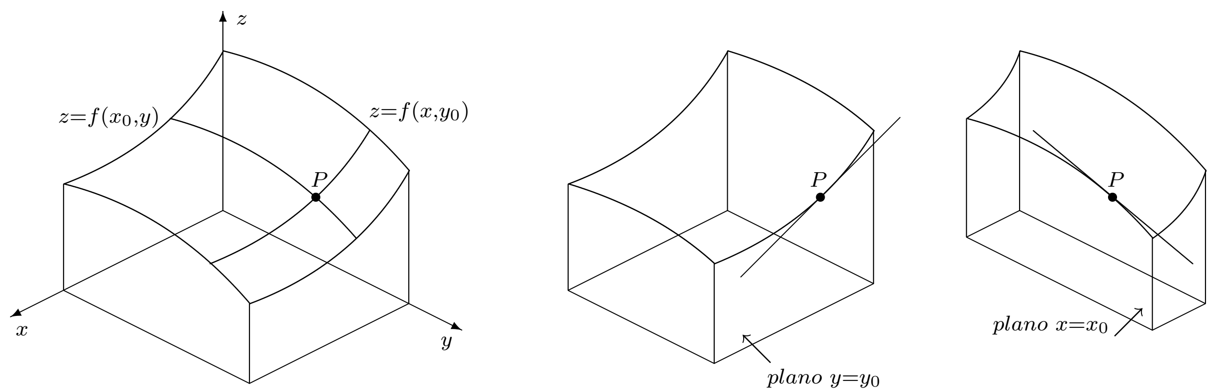
8.3.2. Interpretación geométrica; el plano tangente

Recordemos que la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la superficie de $\mathbb{R}^3$ formada por los puntos (x, y, z) que satisfacen $z = f(x, y)$. Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de esa superficie.

Los puntos con $y = y_0$ forman un plano perpendicular al eje OY en el que podemos considerar la curva (unidimensional) de ecuación $z = f(x, y_0)$. Por definición, $f'_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en P.

Análogamente, $x = x_0$ es un plano perpendicular al eje OX en el que "vive" la curva $z = f(x_0, y)$, cuya recta tangente por P tiene pendiente $f'_y(x_0, y_0)$.

El siguiente gráfico ilustra la situación. A la izquierda está la superficie con las dos curvas marcadas, y los otros dos gráficos muestran los cortes con los planos $y = y_0$ y $x = x_0$:



Si ponemos $A = f'_x(x_0, y_0)$ y $B = f'_y(x_0, y_0)$, es fácil ver que las rectas tangentes recién consideradas tienen por vectores directores a $(1, 0, A)$ y $(0, 1, B)$, respectivamente.

Un plano que sea tangente a la superficie en $P = (x_0, y_0, z_0)$ deberá contener a ese punto y a los vectores anteriores, por lo que su ecuación general será

$$0 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \end{vmatrix} = -A(x - x_0) - B(y - y_0) + (z - z_0)$$

o lo que es lo mismo

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

lo que podemos considerar como una generalización de la situación en una variable, donde la recta tangente a $y = f(x)$ en (x_0, y_0) es $y - y_0 = A(x - x_0)$ con $A = f'(x_0)$.

Cuidado: aunque una función $f(x, y)$ tenga derivadas parciales en (x_0, y_0), puede ocurrir que la función "no se parezca nada" al plano tangente. En la siguiente sección consideraremos las funciones que sí se pueden aproximar bien por sus planos tangentes (funciones diferenciables), y dedicamos el resto de ésta a cuestiones más relacionadas con el cálculo de derivadas parciales.

8.3.3. Derivadas de orden superior; teorema de Schwartz

Definición 8.3.3. *Dados $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $P = (x_0, y_0) \in D$, se define la derivada parcial segunda de f con respecto a x dos veces en P como la derivada con respecto a x de la función $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto P, o sea*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = f''_{xx}(P) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(P)$$

(donde el símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ indica que se calcula la derivada con respecto a x de lo que sigue). De modo análogo se define la derivada parcial segunda de f respecto de y dos veces en P como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = f''_{yy}(P) := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(P)$$

Por último, la derivada parcial segunda cruzada de f en P es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = f''_{xy}(P) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(P)$$

Según esta última definición, para calcular $f''_{xy}(P)$ hay que calcular f'_y y derivar esta función con respecto a x (y evaluar luego en el punto P). Sin embargo, en los casos que a nosotros nos importarán, se obtiene el mismo resultado si se calcula f'_x y se deriva con respecto a y, en virtud del siguiente resultado:

Teorema 8.3.4 (Teorema de las derivadas cruzadas de Schwartz). *Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si las funciones $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ son continuas en un punto P entonces sus valores en P coinciden; es decir*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(P)$$

Ejemplo 8.3.5. *Calcular las derivadas parciales segundas de $z = x\,\mathrm{sen}(xy)$.*

Solución. Las derivadas parciales valen

$$z'_x = \mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy) \qquad\qquad z'_y = x^2\cos(xy)$$

y por tanto (calculando la cruzada de las dos formas posibles para comprobar)

$$z''_{xx} = \tfrac{\partial}{\partial x}(z'_x) = y\cos(xy) + y\cos(xy) - xy^2\,\mathrm{sen}(xy) = 2y\cos(xy) - xy^2\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$z''_{yy} = \tfrac{\partial}{\partial y}(z'_y) = -x^3\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$z''_{xy} = \tfrac{\partial}{\partial y}(z'_x) = x\cos(xy) + x\cos(xy) - x^2y\,\mathrm{sen}(xy) = 2x\cos(xy) - x^2y\,\mathrm{sen}(xy)$$

$$z''_{xy} = \tfrac{\partial}{\partial x}(z'_y) = 2x\cos(xy) - x^2y\,\mathrm{sen}(xy)$$ ■

De hecho, las definiciones y el teorema anteriores se generalizan en el sentido que indica el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.3.6. *Calcular todas las derivadas terceras de* $f(x, y) = x^2ye^{2y}$.

Solución. Las parciales valen

$$f'_x = 2xye^{2y} \qquad f'_y = x^2e^{2y} + x^2ye^{2y}2 = x^2(1 + 2y)e^{2y}$$

y con ellas se calculan las parciales segundas

$$f''_{xx} = 2ye^{2y} \qquad f''_{xy} = 2xe^{2y}(1 + 2y) \qquad f''_{yy} = x^2 2e^{2y} + x^2(1 + 2y)e^{2y}2 = 4x^2(1 + y)e^{2y}$$

La cruzada se calcula de modo más fácil haciendo $\frac{\partial}{\partial x}(f'_y)$ que si se hace $\frac{\partial}{\partial y}(f'_x)$, porque en la primera no hay que derivar un producto. De todos modos suele costar poco hacerla de los dos modos para comprobar. Las derivadas terceras valen

$$f'''_{xxx} = 0 \qquad f'''_{xxy} = 2e^{2y}(1 + 2y) \qquad f'''_{xyy} = 8xe^{2y}(1 + y) \qquad f'''_{yyy} = 4x^2(3 + 2y)e^{2y}$$

Como antes, para calcular f'''_{xxy} es mejor hacer $\frac{\partial}{\partial x}(f''_{xy})$ que $\frac{\partial}{\partial y}(f''_{xx})$, y para calcular f'''_{xyy} es más fácil hacer $\frac{\partial}{\partial x}(f''_{yy})$ que $\frac{\partial}{\partial y}(f''_{xy})$. ■

Ejemplo 8.3.7. *Comprobar que* $z(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ *satisface la ecuación* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Solución. Calculamos primero las parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

y entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{x^2 + y^2 - 2xx}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{x^2 + y^2 - 2yy}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Es claro que la suma de ambas expresiones vale 0, como se quería ver. ■

Ejemplo 8.3.8. *Comprobar que* $u(x, t) = t^{-1/2}\, e^{-x^2t^{-1}}$ *satisface la ecuación* $4u'_t = u''_{xx}$.

Solución. El primer miembro de la ecuación vale

$$4u'_t = 4\left[\frac{-1}{2}\, t^{-3/2}e^{-x^2t^{-1}} + t^{-1/2}e^{-x^2t^{-1}}x^2t^{-2}\right] = \left(4x^2t^{-5/2} - 2t^{-3/2}\right) e^{-x^2t^{-1}}$$

y derivando dos veces con respecto a x vemos que el segundo miembro vale lo mismo:

$$u'_x = t^{-1/2}e^{-x^2t^{-1}}(-2xt^{-1}) = -2xt^{-3/2}e^{-x^2t^{-1}}$$

$$u''_{xx} = -2t^{-3/2}e^{-x^2t^{-1}} - 2xt^{-3/2}e^{-x^2t^{-1}}(-2xt^{-1}) = \left(4x^2t^{-5/2} - 2t^{-3/2}\right) e^{-x^2t^{-1}}$$ ■

8.3.4. Regla de la cadena

Supongamos que f depende de las variables $u_1, \ldots, u_m$, y que cada una de éstas depende a su vez de $x_1, \ldots, x_n$. Entonces f depende de las x_i (llamamos $F(x_1, \ldots, x_n)$ a esta nueva función, aunque en ocasiones le seguiremos llamando f) y sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\, \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\, \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\, \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

Obsérvese que hay tantos sumandos como “variables intermedias” u_j, y que en cada uno de ellos “se intercala ∂u_j entre ∂f y ∂x_i”.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 8.3.9. *Sean $z = x^2 + y^2$, $x = 1/t$, $y = t^2$. Hallar dz/dt.*

Solución. Se tiene

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t = 2x\, \frac{-1}{t^2} + 2y\, 2t = 2\, \frac{1}{t}\, \frac{-1}{t^2} + 2t^2 2t = \frac{-2}{t^3} + 4t^3$$

(también se puede sustituir $z(t) = \frac{1}{t^2} + t^4$ y derivar z como función de una variable). ■

Ejemplo 8.3.10. *Sean $f(x, y) = 4x - y^2$, $x(u, v) = uv^2$, $y(u, v) = u^3 v$. Hallar las parciales de $F(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$.*

Solución. Podemos derivar directamente $F(u, v) = 4uv^2 - u^6 v^2$ o aplicar la fórmula:

$$F'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = 4 \cdot v^2 - 2y \cdot 3u^2 v = 4v^2 - 6(u^3 v)u^2 v = 4v^2 - 6u^5 v^2$$

$$F'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v = 4 \cdot 2uv - 2y \cdot u^3 = 8uv - 2(u^3 v)u^3 = 8uv - 2u^6 v$$ ■

Ejemplo 8.3.11. *Calcular la derivada parcial de ω con respecto a s, donde*

$$\omega(x, y, z) = 4x + y^2 + z^3 \quad x(r, s, t) = e^{rs^2} \quad y(r, s, t) = \ln((r + s)/t)) \quad z(r, s, t) = rst^2$$

Solución. Usando la fórmula $\omega'_s = \omega'_x\, x'_s + \omega'_y\, y'_s + \omega'_z\, z'_s$ se tiene

$$\omega'_s = 4 \cdot 2rs\, e^{rs^2} + 2y \cdot \frac{t}{r + s}\, \frac{1}{t} + 3z^2 \cdot rt^2 = 8rs\, e^{rs^2} + \frac{2}{r + s} \ln\left(\frac{r + s}{t}\right) + 3r^3 s^2 t^6$$ ■

En el siguiente ejemplo usamos la regla de la cadena para analizar el efecto de un cambio a coordenadas polares en unas ecuaciones en derivadas parciales (EDP), lo que nos permite interpretarlas geométricamente.

Ejemplo 8.3.12. *Sea F una función de dos variables y sea*

$$f(x,y) = F(\rho(x,y), \theta(x,y)) \qquad \textit{donde} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \arctan(y/x)$$

1. *Calcular las derivadas parciales con respecto a x e y de las funciones ρ, θ y f.*

2a. *Verificar la igualdad $xf'_y - yf'_x = F'_\theta$. Por tanto la EDP*

$$xf'_y - yf'_x = 0 \qquad \textit{equivale a} \qquad F'_\theta = 0$$

o a que F no dependa de θ, o a que $f(x,y) = F(\rho)$ dependa sólo del radio polar ρ.

2b. *En la situación anterior ($F'_\theta = 0,\ F = F(\rho)$), comprobar que la EDP*

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0 \qquad \textit{equivale a} \qquad F''(\rho) + \frac{1}{\rho}F'(\rho) = 0$$

Esta es una EDO lineal de primer orden en F' con solución $F(\rho) = A\ln(\rho) + B$, por lo que la EDP $\quad f''_{xx} + f''_{yy} = 0 \quad$ significa que f es función lineal *del logaritmo de ρ (compárese con el Ejemplo 8.3.7).*

3a. *Verificar la igualdad $xf'_x + yf'_y = \rho F'_\rho$. Por tanto, fuera del origen ($\rho \neq 0$), la EDP*

$$xf'_x + yf'_y = 0 \qquad \textit{equivale a} \qquad F'_\rho = 0$$

o a que F no dependa de ρ, o a que $f(x,y) = F(\theta)$ dependa sólo del ángulo polar θ.

3b. *En la situación anterior ($F'_\rho = 0,\ F = F(\theta)$), comprobar que la EDP*

$$y^2 f''_{xx} + x^2 f''_{yy} - 2xy f''_{xy} = 0 \qquad \textit{equivale a} \qquad F''(\theta) = 0$$

Esta es una EDO elemental con solución $F(\theta) = A\theta + B$, por lo que la EDP $y^2 f''_{xx} + x^2 f''_{yy} - 2xy f''_{xy} = 0 \quad$ significa que f es función lineal *del ángulo θ.*

Solución. 1. Comenzamos calculando las parciales de ρ y θ:

$$\rho'_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} \qquad \rho'_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\theta'_x = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{\rho^2} \qquad \theta'_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{\rho^2}$$

(deberíamos expresarlas en función de x e y, pero si dejamos intervenir a ρ la notación se simplifica y podemos sustituirlo por $\sqrt{x^2+y^2}$ cuando queramos).

Las parciales de f las calculamos usando la regla de la cadena:

$$f'_x = F'_\rho\,\rho'_x + F'_\theta\,\theta'_x = \frac{x}{\rho}\,F'_\rho - \frac{y}{\rho^2}\,F'_\theta \qquad f'_y = F'_\rho\,\rho'_y + F'_\theta\,\theta'_y = \frac{y}{\rho}\,F'_\rho + \frac{x}{\rho^2}\,F'_\theta$$

2a. Basta con sustituir los valores recién calculados y simplificar:

$$xf'_y - yf'_x = \frac{xy}{\rho}\,F'_\rho + \frac{x^2}{\rho^2}\,F'_\theta - \frac{xy}{\rho}\,F'_\rho + \frac{y^2}{\rho^2}\,F'_\theta = \frac{x^2+y^2}{\rho^2}\,F'_\theta = F'_\theta$$

2b. Por las hipótesis, las parciales calculadas en el apartado 1 se simplifican (no hace falta poner F'_ρ porque ahora F sólo depende de esa variable):

$$f'_x = \frac{x}{\rho}\, F' \qquad\qquad f'_y = \frac{y}{\rho}\, F'$$

Para calcular f''_{xx} y f''_{yy} vamos a necesitar las parciales con respecto a x e y de F', que por la regla de la cadena (con la única variable intermedia ρ) valen

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\, F'' \qquad\qquad \frac{\partial F'}{\partial y} = \frac{\partial F'}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\, F''$$

Así, agrupando según F' y F'':

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\, F'\right) = \frac{\rho - x\frac{x}{\rho}}{\rho^2}\, F' + \frac{x}{\rho}\,\frac{x}{\rho}\, F'' = \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3}\, F' + \frac{x^2}{\rho^2}\, F'' = \frac{y^2}{\rho^3}\, F' + \frac{x^2}{\rho^2}\, F''$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\rho}\, F'\right) = \frac{\rho - y\frac{y}{\rho}}{\rho^2}\, F' + \frac{y}{\rho}\,\frac{y}{\rho}\, F'' = \frac{\rho^2 - y^2}{\rho^3}\, F' + \frac{y^2}{\rho^2}\, F'' = \frac{x^2}{\rho^3}\, F' + \frac{y^2}{\rho^2}\, F''$$

y por tanto

$$f''_{xx} + f''_{yy} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^3}\, F' + \frac{x^2 + y^2}{\rho^2}\, F'' = \frac{1}{\rho}\, F' + F''$$

de donde se deduce el enunciado.

3a. Sustituyendo y simplificando:

$$x f'_x + y f'_y = \frac{x^2}{\rho}\, F'_\rho - \frac{xy}{\rho^2}\, F'_\theta + \frac{y^2}{\rho}\, F'_\rho + \frac{xy}{\rho^2}\, F'_\theta = \frac{x^2 + y^2}{\rho}\, F'_\rho = \rho\, F'_\rho$$

3b. Las hipótesis nos dicen ahora que

$$f'_x = \frac{-y}{\rho^2}\, F' \qquad\qquad f'_y = \frac{x}{\rho^2}\, F'$$

y como en 2b (con la única variable intermedia θ) se tiene

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{\rho^2}\, F'' \qquad\qquad \frac{\partial F'}{\partial y} = \frac{\partial F'}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}\, F''$$

y con esto podemos calcular las derivadas segundas de f (recuérdese que $\rho^2 = xx^2 + y^2$)

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{\rho^2}\, F'\right) = \frac{2xy}{\rho^4}\, F' + \frac{y^2}{\rho^4}\, F'' \qquad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\rho^2}\, \omega'\right) = \frac{-2xy}{\rho^4}\, F' + \frac{x^2}{\rho^4}\, F''$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\rho^2}\, F'\right) = \frac{-\rho^2 + 2y^2}{\rho^4}\, F' - \frac{xy}{\rho^4}\, F'' = \frac{y^2 - x^2}{\rho^4}\, F' - \frac{xy}{\rho^4}\, F''$$

y sustituirlas en la ecuación del enunciado para obtener

$$y^2\, \frac{2xyF' + y^2F''}{\rho^4} + x^2\, \frac{-2xyF' + x^2F''}{\rho^4} - 2xy\, \frac{(y^2 - x^2)F' - xyF''}{\rho^4} =$$

$$\frac{(y^4 + x^4 + 2x^2y^2)\, F'' + (2xy^3 - 2x^3y - 2xy(y^2 - x^2))F'}{\rho^4} = \frac{(x^2 + y^2)^2 F''}{\rho^4} = F''$$

como queríamos ver. ■

8.4. Funciones diferenciables

8.4.1. Definición

En una variable hemos manejado la noción de “función derivable” en un punto x_0 (función que admite derivada en x_0). En cierto modo, las “funciones que admiten derivadas parciales” en un punto **no** son las adecuadas para generalizar esta noción a varias variables; por ejemplo, hay funciones con esa propiedad que no son continuas, o que no no se pueden aproximar bien por su plano tangente.

La noción adecuada en este sentido es la de “función diferenciable” en un punto. Para motivarla, vamos a pensar en el siguiente resultado sobre funciones de una variable:

Proposición 8.4.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 si y sólo si existen una constante $A \in \mathbb{R}$ (de hecho $A = f'(x_0)$) y una función $\varphi(h)$ con $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ tales que*[3]

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\,\varphi(h)$$

Como la aproximación de $f(x)$ por su recta tangente cerca de x_0 es $f(x_0+h) \approx f(x_0)+Ah$ (con $A = f'(x_0)$), el término $h\,\varphi(h)$ mide el error cometido en esa aproximación, y el hecho de que $\varphi(h)$ tienda a cero nos indica que este error es muy pequeño (cerca de x_0).

De modo análogo, dada una función de dos variables $f(x, y)$ con derivadas parciales $A = f'_x(x_0, y_0)$ y $B = f'_y(x_0, y_0)$ en un punto (x_0, y_0), podemos aproximar la función por su plano tangente: $f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + Ah + Bk$.

La noción de diferenciabilidad expresa el hecho de que esa aproximación es buena:

Definición 8.4.2. *Se dice que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen constantes $A, B \in \mathbb{R}$ y una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{h\to 0} \varphi(t) = 0$, tales que:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2}\,\varphi\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

Cuando esto ocurre se tiene necesariamente $A = f'_x(x_0, y_0)$ y $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Se dice que f es diferenciable en una región D si lo es en cada punto de D.

Teorema 8.4.3. *Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto.*

Teorema 8.4.4. *(Condición suficiente de diferenciabilidad) Si f, f'_x y f'_y son continuas en un círculo de centro (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).*

De este teorema se deduce que las funciones definidas a base de sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones elementales son diferenciables en sus dominios de definición.

[3] La demostración es sencilla: Si f es derivable en x_0 definimos $A := f'(x_0)$ y $\varphi(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - A$, con lo que la igualdad del enunciado es obvia y además $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = f'(x_0) - A = 0$.

Recíprocamente, si existen tales A y φ, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(A + \varphi(h)) = A$ por lo que f es derivable en x_0 y además $f'(x_0) = A$.

8.4.2. Aproximaciones incrementales

Como acabemos de ver, si $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) podemos aproximar sus valores cerca de ese punto por los valores del plano tangente:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

Esta es la fórmula de la *aproximación lineal* (porque sólo usa sumas y productos) de $f(x,y)$, y hemos usado la notación Δx (*incremento* de x) en lugar de la h anterior para remarcar que consideramos pequeñas variaciones de las variables.

A veces nos interesa no tanto el valor de la función, sino su variación o incremento

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

y en ese caso usamos la fórmula de la *aproximación incremental*

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y \qquad \text{ó} \qquad \Delta f \approx f'_x\,\Delta x + f'_y\,\Delta y$$

Veamos cómo puede usarse esta fórmula:

Ejemplo 8.4.5. *Un cajón abierto tiene longitud 3m, anchura 1m y altura 2m. El material cuesta 20€/m^2 de lateral y 30€/m^2 de fondo. Calcular el coste total del cajón y usar aproximaciones incrementales para estimar la variación del coste cuando la longitud y la anchura aumentan 3cm y la altura decrece 4cm.*

Solución. Llamando $x =$ longitud, $y =$ anchura y $z =$ altura, el coste del cajón es

$$f(x,y,z) = 30xy + 20(2xz+2yz) = 30xy + 40z(x+y) \qquad \rightsquigarrow \qquad f(3,1,2) = 410€$$

Las funciones derivadas parciales son

$$f'_x = 30y + 40z \qquad\qquad f'_y = 30x + 40z \qquad\qquad f'_z = 40x + 40y$$

y sus valores respectivos en $(3,1,2)$ son 110, 170 y 160. Generalizando la fórmula de la aproximación incremental a tres variables tenemos

$$\Delta f \approx 110\Delta x + 170\Delta y + 160\Delta z$$

que para $\Delta x = 0'03$, $\Delta y = 0'03$, $\Delta z = -0'04$ nos da $\Delta C \approx 2$€.

Obviamente, en este ejemplo podríamos haber calculado exactamente la variación del coste, pues $f(3'03, 1'03, 1'96) = 411'931$ y por tanto la variación es de $1'931$€.

Pero en muchas ocasiones no es posible hacer este cálculo exacto, o nos interesa estimar variaciones del coste para diversas hipótesis de variación de las medidas, o queremos hacer un análisis cualitativo de la situación... y en todos esos casos la fórmula de la aproximación incremental es útil. ■

Ejemplo 8.4.6. *Se miden el radio R y la altura H de un cilindro con errores máximos del 3 % y del 2 % respectivamente. Aproximar el porcentaje máximo de error que se comete al calcular el volumen $V = \pi R^2 H$ si se utilizan esas medidas.*

Solución. Tenemos $\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \le 0'03$ y $\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \le 0'02$, y se trata de acotar $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|$. Como

$$\Delta V \approx V'_R\, \Delta R + V'_H\, \Delta H = 2\pi RH\, \Delta R + \pi R^2\, \Delta H$$

podemos dividir por V y usar los datos para deducir que el error es menor que el 8 %:

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{2\pi RH\, \Delta R + \pi R^2\, \Delta H}{\pi R^2 H}\right| \le 2\left|\frac{\Delta R}{R}\right| + \left|\frac{\Delta H}{H}\right| \le 2(0'03) + 0'02 = 0'08 \qquad \blacksquare$$

Si el cilindro de este ejemplo es por ejemplo una tubería de unos milímetros de radio y unos metros de largo, tal vez necesitemos un calibrador para medir el radio y una cinta para medir el largo. Si nuestros aparatos no tienen la precisión suficiente para darnos medidas fiables, deberíamos comprar unos mejores. Pero si sólo tenemos dinero para comprar uno, es mejor comprar el calibrador, porque la fórmula $|\Delta V/V| \le 2|\Delta R/R| + |\Delta H/H|$ nos dice que la imprecisión al medir el radio "se traduce en el doble" al usarla para medir el volumen.

Ejemplo 8.4.7. *¿Qué error máximo se comete al calcular $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ a partir de valores $x = 3$ e $y = 4$ medidos con errores relativos del 3 % y del 4 %, respectivamente?*

Solución. Poniendo $u = x^2 + y^2$ se tiene $z'_x = (y^2 - x^2)/u^2$ y $z'_y = -2xy/u^2$ y por tanto

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{y^2 - x^2}{u^2}\,\frac{u}{x}\,\Delta x - \frac{2xy}{u^2}\,\frac{u}{x}\,\Delta y = \frac{y^2 - x^2}{u}\,\frac{\Delta x}{x} - \frac{2y^2}{u}\,\frac{\Delta y}{y}$$

y usando ahora los datos del enunciado podemos acotar el error por el 6 %:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \le \left|\frac{y^2 - x^2}{u}\right| \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{2y^2}{u}\right| \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \le \frac{16-9}{25}\,0'03 + \frac{32}{25}\,0'04 = 0'0596 \le 0'06 \qquad \blacksquare$$

8.4.3. Derivadas direccionales y gradiente

Definición 8.4.8. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, sea $P = (x_0, y_0) \in D$ un punto y sea $\vec{u} = (x_1, y_1)$ un vector unitario. Se define la derivada de f en P y en la dirección de $\vec{u}$ como*

$$D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h\to 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hx_1, y_0 + hy_1) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si el vector $\vec{v}$ no es unitario, la derivada de f en P la dirección de $\vec{v}$ se define como $D_{\vec{u}} f(P)$, donde $\vec{u}$ es el vector unitario $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$.

En la definición sólo se consideran los valores de f en la recta $P + h\vec{u}$, con lo que tenemos una función de una sola variable h, y $D_{\vec{u}}f(P)$ es la derivada de esta función en P. En particular, para $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{u} = (0,1)$ se obtienen las derivadas parciales de f en P.

Así pues, las derivadas parciales se pueden considerar como casos particulares de derivadas direccionales. Sin embargo, para funciones diferenciables, esos casos particulares determinan todos los demás, como vemos tras hacer la siguiente definición:

Cuando existen las dos derivadas parciales de f en un punto P, se define el *gradiente* de f en P como el vector (el símbolo ∇ se lee *nabla*)

$$\operatorname{grad} f(P) = \nabla f(P) = (f'_x(P),\ f'_y(P))$$

Teorema 8.4.9. *Si $f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) y $\vec{u}$ es unitario, entonces*

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}$$

Ejemplo 8.4.10. *Hallar la derivada de $f(x,y) = \ln(x^2+y^3)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (2,-3)$ y en el punto $(1,3)$.*

Solución. En primer lugar, como $\vec{v}$ tiene norma $\sqrt{13}$, consideramos $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$.

Para aplicar el teorema debemos primero calcular el gradiente de f en el punto $(1,3)$:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^3}, \frac{3y^2}{x^2+y^3}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \nabla f(1,3) = \left(\frac{2}{28}, \frac{27}{28}\right)$$

y entonces

$$D_{\vec{u}}f(1,3) = \nabla f(1,3)\cdot\vec{u} = \left(\frac{2}{28}, \frac{27}{28}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{4-81}{28\sqrt{13}} = \frac{-11\sqrt{13}}{52}$$

(aplicando directamente la definición se llega al mismo resultado, pero con más trabajo). ■

Veamos otro resultado que relaciona el gradiente con las derivadas direccionales. Dada una función y un punto de su gráfica, podemos preguntarnos en cuál es la dirección en la que esa gráfica (de)crece más rápidamente, y cuánto (de)crece; por ejemplo, una bola dejada en ese punto de la superficie tomará la dirección de mayor decrecimiento.

El vector gradiente nos da las respuestas: su dirección marca las direcciones de máximo (de)crecimiento, y su norma marca la tasa de (de)crecimiento. Explícitamente:

Teorema 8.4.11. *Sea f diferenciable y sea P un punto con $\nabla f(P) \neq (0,0)$. Entonces:*

(a) $D_{\vec{u}}f(P)$ alcanza su valor máximo (resp. mínimo) cuando $\vec{u}$ está en la dirección de $\nabla f(P)$ (resp. $-\nabla f(P)$), y ese valor es $\|\nabla f(P)\|$ (resp. $-\|\nabla f(P)\|$).

(b) La derivada direccional $D_{\vec{u}}f(P)$ se anula cuando $\vec{u}$ es perpendicular a $\nabla f(P)$.

Ejemplo 8.4.12. *Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x\,e^{2y-x}$ en el punto $P(2,1)$, así como la tasa máxima de crecimiento.*

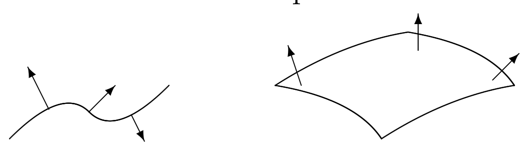
Solución. $\nabla f(x,y) = ((1-x)e^{2y-x},\ 2xe^{2y-x})$, luego $\nabla f(2,1) = (-1,4)$. Por lo tanto la dirección de máximo crecimiento es $(-1,4)$ y la tasa de crecimiento es $\sqrt{17}$. ■

8.4.4. Normalidad del gradiente; rectas y planos tangentes

Supongamos dada una curva $\mathcal{C}$ en un plano. Un vector normal a $\mathcal{C}$ en un punto P es cualquier vector con origen en P y dirección ortogonal a la de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P.

Análogamente, dada una superficie $\mathcal{S}$ en el espacio, un vector normal a $\mathcal{S}$ en un punto P es cualquier vector con origen en P y dirección ortogonal a la del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P.

Los siguientes dibujos ilustran ambos conceptos:



Para superficies dadas por una ecuación implícita, el gradiente es un vector normal, lo que permite dar una ecuación para la recta o el plano tangente. Explícitamente:

Proposición 8.4.13. *(1) Consideremos una curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ con ecuación implícita $f(x,y) = 0$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ de $\mathcal{C}$. Si f es diferenciable y $\nabla f(P) = (A, B) \neq \vec{0}$, entonces $\nabla f(P)$ es un vector normal a $\mathcal{C}$ en P, y la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P es*

$$\overrightarrow{XP} \cdot \nabla f(P) = 0 \qquad \text{ó} \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(2) Consideremos una superficie $\mathcal{S}$ en $\mathbb{R}^3$ con ecuación implícita $f(x,y,z) = 0$, y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$. Si f es diferenciable y $\nabla f(P) = (A, B, C) \neq \vec{0}$, entonces $\nabla f(P)$ es un vector normal a $\mathcal{S}$ en P, por lo que la ecuación del plano tangente a $\mathcal{S}$ en P es

$$\overrightarrow{XP} \cdot \nabla f(P) = 0 \qquad \text{ó} \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 8.4.14. *En cada apartado se da una superficie (o una curva) y un punto P en ella. Calcular en cada caso un vector normal y el plano tangente (o la recta tangente) en P:*

1. $x^2y + y^2z + z^2x = 5$ *en* $P = (1, -1, 2)$*;*
2. $x^2 - y^2 = 1$ *en* $P = (2, \sqrt{3})$*.*
3. $z = x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(xy)$ *en* $P = (0, 2, 4)$*.*

Solución. 1. Consideramos la función $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x - 5$, con gradiente $\nabla f(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 + 2yz, y^2 + 2zx)$. Por tanto $\nabla f(P) = (2, -3, 5)$ es un vector normal, y el plano tangente tiene ecuación

$$2(x-1) - 3(y+1) + 5(z-2) = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x - 3y + 5z = 15$$

2. Tomamos $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$, con gradiente $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, y entonces $\nabla f(P) = (4, -2\sqrt{3})$ es un vector normal y la recta tangente es

$$4(x-2) - 2\sqrt{3}(y - \sqrt{3}) = 0 \qquad \text{ó} \qquad 4x - 2\sqrt{3}y = 2$$

3. Como la función está dada en forma explícita, para el plano tangente puede usarse la fórmula de la página 189, o también podemos tomar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(xy) - z$, con gradiente $\nabla f(x,y,z) = (2x + y\cos(xy), 2y + x\cos(xy), -1)$. Así $\nabla f(P) = (2, 4, -1)$ es un vector normal y el plano tangente es

$$2x + 4(y-2) - (z-4) = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x + 4y - z = 4 \qquad \blacksquare$$

8.5. Extremos relativos y absolutos

8.5.1. Extremos relativos y puntos críticos

Definición 8.5.1. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea P un punto de D. Se dice que:*

- *f alcanza en P un* máximo relativo *si $f(Q) \leq f(P)$ para cualquier Q próximo*[4] *a P.*
- *f alcanza en P un* mínimo relativo *si $f(Q) \geq f(P)$ para cualquier Q próximo a P.*

Y se dice que P es un punto crítico *de f si su gradiente en P es nulo, $\nabla f(P) = \vec{0}$.*

Así pues, encontrar los puntos críticos de una función de n variables consiste en resolver un sistema de n ecuaciones (las parciales igualadas a cero) con n incógnitas (las variables). Desde luego, esas ecuaciones no tienen por qué ser lineales.

La importancia de los puntos críticos radica en que, como en una variable, son los únicos candidatos a extremos relativos:

Teorema 8.5.2. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y alcanza en P un extremo relativo (es decir, un máximo o un mínimo relativo) entonces P es un punto crítico de f.*

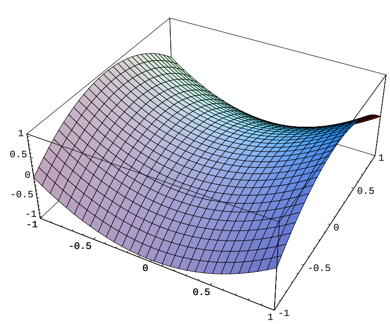
Para decidir si un punto crítico P de f es o no un extremo relativo necesitamos usar las derivadas segundas de f en P como se muestra en el apartado siguiente.

8.5.2. El test de las derivadas segundas

Para funciones de dos variables

En este caso, además de máximos y mínimos relativos, podemos encontrarnos con *puntos-silla*, en los que se alcanza un máximo relativo al moverse en ciertas direcciones y un mínimo relativo al moverse en otras.

Un ejemplo típico de punto de silla es el punto $(0, 0)$ para la función $z = x^2 - y^2$:



Cuando nos movemos por el eje $y = 0$ la función es la parábola x^2, y en esa dirección se alcanza un mínimo, mientras que por $x = 0$ la parábola $-y^2$ presenta un máximo. Por la diagonal $y = x$ la función vale constantemente 0.

[4] En $\mathbb{R}^2$, esto significa "para cualquier Q de un pequeño círculo centrado en P".

Cuando P es un punto crítico de $f(x, y)$, la *matriz hessiana* de f en P

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(P) & f''_{xy}(P) \\ f''_{yx}(P) & f''_{yy}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} (P)$$

puede servir para *clasificar* P. Si ponemos $\Delta_1 = f''_{xx}(P)$ y $\Delta_2 = \det(Hf(P))$, se tiene:

Proposición 8.5.3. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y P es un punto crítico, entonces:*

- *Si $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$ entonces f alcanza en P un mínimo relativo.*
- *Si $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$ entonces f alcanza en P un mínimo relativo.*
- *Si $\Delta_2 < 0$ entonces f presenta en P un punto-silla.*

Para funciones de tres variables

Si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, su matriz hessiana en P es

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{xy} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} (P)$$

Si llamamos Δ_3 al determinante de esta matriz, Δ_2 al de la matriz 2×2 que queda al eliminar la última fila y la última columna, y Δ_1 a $f''_{xx}(P)$ se tiene:

Proposición 8.5.4. *Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y P es un punto crítico, entonces:*

- *Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$ entonces f alcanza en P un mínimo relativo.*
- *Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$ entonces f alcanza en P un mínimo relativo.*

Para funciones de n variables

En este caso la matriz hessiana $Hf(P)$ es una matriz $n \times n$, y si llamamos Δ_k al determinante de la matriz formada por las k primeras filas y columnas de $Hf(P)$ (así por ejemplo Δ_1, Δ_2 y Δ_3 son como antes, y Δ_n es el determinante de la matriz completa) se tiene:

Proposición 8.5.5. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y P es un punto crítico, entonces:*

- *Si $\Delta_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, en P hay un mínimo relativo.*
- *Si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\ldots$ y así alternativamente, en P hay un máximo relativo.*

En los casos que no aparecen, los criterios no permiten afirmar nada. Para resolver estos casos dudosos hay que recurrir al polinomio de Taylor de f en P, que no estudiaremos en varias variables.

Ejemplo 8.5.6. *Hallar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$$

Solución. Para hallar los puntos críticos hay que resolver el sistema:

$$0 = f'_x(x,y) = 24x^2 - 24y \qquad 0 = f'_y(x,y) = -24x + 3y^2$$

De la primera ecuación obtenemos $y = x^2$. Sustituyendo y sacando factor común en la segunda queda $3x(x^3-8) = 0$, que tiene dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Como $y = x^2$, los correspondientes valores de y son $y_1 = 0$, $y_2 = 4$.

Tenemos pues dos puntos críticos, $P = (0,0)$ y $Q = (2,4)$, a los que aplicamos el test de las derivadas segundas. Derivando y sustituyendo los puntos tenemos

$$Hf = \begin{pmatrix} 48x & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad Hf(P) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \quad Hf(Q) = \begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$$

y, por el test, en P hay un punto-silla y que en Q hay un mínimo relativo. ■

Ejemplo 8.5.7. *Hallar y clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + z$$

Solución. Para hallar los puntos críticos hay que considerar el sistema

$$0 = f'_x = 2x + y - 1 \qquad 0 = f'_y = x + 2y + 1 \qquad 0 = f'_z = 2z + 1$$

que tiene solución única $P = (1,-1,-1/2)$.

La matriz hessiana no depende del punto y vale

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y por tanto la sucesión de determinantes es $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ y $\Delta_3 = 8$, por lo que en P se alcanza un mínimo relativo. ■

Ejemplo 8.5.8. *Hallar y clasificar los puntos críticos de la función (no definida en* $(0,0)$*)*

$$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$$

Solución. Para simplificar las expresiones pondremos

$$u = x^2 + y^2 \qquad \text{de modo que} \qquad f(x,y) = xy\ln(u) \quad u'_x = 2x \quad u'_y = 2y$$

Formamos el sistema para hallar los puntos críticos:

$$0 = f'_x(x,y) = y\left(\frac{2x^2}{u} + \ln(u)\right) \qquad 0 = f'_y(x,y) = x\left(\frac{2y^2}{u} + \ln(u)\right)$$

y en vista de estas ecuaciones, analizamos el sistema distinguiendo tres casos:

Caso $y = 0$. La primera ecuación se verifica siempre, y la segunda queda $0 = x\ln(x^2)$, que se verifica para $x = 0$ y para $x^2 = 1$ (o sea $x = \pm 1$).

Caso $x = 0$. De modo análogo se tiene $y = 0$ ó $y = \pm 1$. Como $(0, 0)$ no está en el dominio de la función, estos casos producen 4 puntos críticos:

$$P_1 = (1, 0) \qquad P_2 = (-1, 0) \qquad P_3 = (0, 1) \qquad P_4 = (0, -1)$$

Caso $x \neq 0$, $y \neq 0$. Podemos cancelar x e y, con lo que quedan las ecuaciones

$$\frac{2x^2}{u} + \ln(u) = 0 \qquad\qquad \frac{2y^2}{u} + \ln(u) = 0$$

Restándolas y multiplicando después por u se tiene $x^2 = y^2$, de donde $u = 2x^2$ e $y = \pm x$. Sustituyendo ahora en cualquiera de las ecuaciones se tiene

$$1 + \ln(2x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1/2e}$$

y por tanto hay otros cuatro puntos críticos que son, poniendo $b = \sqrt{1/2e}$:

$$Q_1 = (b, b) \qquad Q_2 = (b, -b) \qquad Q_3 = (-b, b) \qquad Q_4 = (-b, -b)$$

Tenemos pues 8 puntos críticos. Para aplicar el test de las derivadas segundas calculamos

$$f''_{xx}(x, y) = y\left(\frac{4xu - 4x^3}{u^2} + \frac{2x}{u}\right) = 2xy\frac{2u - 2x^2 + u}{u^2} = 2xy\frac{x^2 + 3y^2}{u^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = x\left(\frac{4yu - 4y^3}{u^2} + \frac{2y}{u}\right) = 2xy\frac{2u - 2y^2 + u}{u^2} = 2xy\frac{3x^2 + y^2}{u^2}$$

$$f''_{x,y}(x, y) = \frac{2x^2}{u} + \ln(u) + y\left(\frac{-2x^2 2y}{u^2} + \frac{2y}{u}\right) = 2 + \ln(u) - 4\frac{x^2y^2}{u^2}$$

En los puntos P_i la matriz hessiana $Hf(P_i) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante negativo, y por tanto son puntos-silla.

En $Q_1 = (b, b)$ (y en $Q_4 = (-b, -b)$) se tiene $xy = x^2 = y^2 = b^2$ y $u = 2b^2$, luego

$$f''_{xx}(Q_1) = f''_{yy}(Q_1) = 2b^2\frac{4b^2}{(2b^2)^2} = \frac{8b^4}{4b^4} = 2$$

$$f''_{xy}(Q_1) = 2 + \ln(2b^2) - 4\frac{b^4}{(2b^2)^2} = 2 + \ln(e^{-1}) - 1 = 0$$

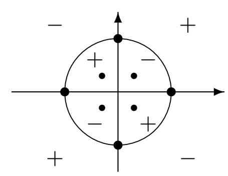
luego la matriz hessiana es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y por tanto hay un mínimo relativo en esos dos puntos.

En Q_2 y Q_3 se obtiene de modo análogo la matriz hessiana $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y en consecuencia ambos son puntos en los que f alcanza un máximo relativo. ■

Algunas observaciones acerca de este ejemplo pueden ser interesantes:

- La función verifica $f(x,y) = f(y,x)$, es decir, si se intercambian los papeles de las variables se obtiene la misma función. Esta *simetría* nos puede ahorrar algunos cálculos, como los de f'_y y f''_{yy} (que se pueden obtener intercambiando las variables en las expresiones de f'_x y f''_x), y se refleja en otras simetrías que se van obteniendo en los resultados, como la de los puntos críticos o la de f''_{xy}.

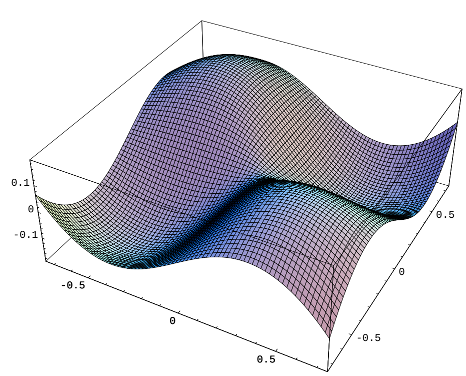
- No es difícil describir qué signo tiene $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ según ciertas regiones del plano. Por una parte, la función vale 0 en los puntos con $x = 0$, con $y = 0$ ó con $x^2 + y^2 = 1$, es decir, en los ejes y en la circunferencia unidad. Por otra, el producto xy es positivo en los cuadrantes primero y tercero y es negativo en los otros dos. Por último, $\ln(x^2+y^2)$ aporta un cambio de signo cuando $x^2+y^2 < 1$, es decir, en el interior del círculo unidad. En resumen, el signo por regiones de $f(x,y)$ queda descrito por la figura siguiente, en la que además se han marcado los puntos críticos:



Sólo con este análisis y con la continuidad de la función, podíamos haber previsto la existencia de los cuatro puntos-silla P_i con sus coordenadas precisas, y también la existencia de mínimos (resp. máximos) relativos en los cuadrantes primero y tercero (resp. segundo y cuarto) del círculo unidad, aunque para saber que sólo hay uno por cuadrante y para precisar sus coordenadas necesitamos las cuentas de la primera parte de la solución.

- Es fácil ver que tanto f como f'_x y f'_y tienen límite 0 en $P = (0,0)$, por lo que puede considerarse que P es un punto crítico, y de hecho un punto-silla por el análisis del signo que acabamos de hacer. Obsérvese además que ya no existe el límite de las parciales de segundo orden, por lo que no se puede aplicar el test de las derivadas segundas.

- Por último, mostramos una representación gráfica parcial de $z = f(x,y)$ en la que se aprecian los máximos y los mínimos relativos.



8.5.3. Aplicación: ajuste por el método de mínimos cuadrados

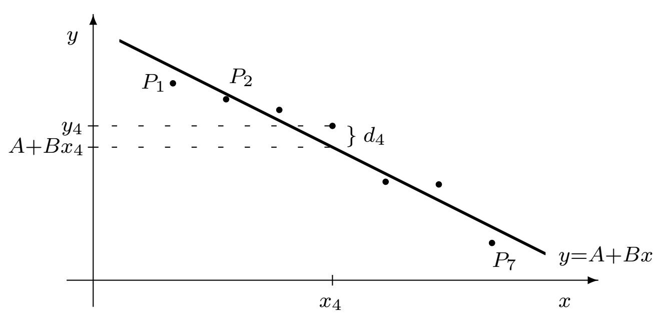
Pensemos en la situación siguiente: Se sospecha que los datos de cierta variable y dependen linealmente de los de otra variable x, es decir, que hay una relación del tipo

$$y = A + Bx$$

y se desea establecer los valores de A y B. Para ello se hace un cierto número de experimentos, digamos n, en los que se fija el valor de x y se mide el valor correspondiente de y, y podemos representar estos datos como una serie de puntos

$$P_1 = (x_1, y_1) \qquad P_2 = (x_2, y_2) \qquad \dots \qquad P_n = (x_n, y_n)$$

Si la sospecha inicial era cierta, estos puntos estarán "más o menos en línea recta", y buscamos entonces la recta $y = Ax + B$ "que mejor se ajusta" a esos puntos:



Si llamamos *desviación vertical* de cada punto con respecto a la recta a $d_i = |A + Bx_i - y_i|$, el *ajuste de datos por el método de los mínimos cuadrados* consiste en elegir los valores de A y B que minimizan la suma de los cuadrados de esas desviaciones[5].

El valor de esa suma depende pues de A y B según la función

$$f(A, B) = d_1^2 + \cdots + d_n^2 = (A + Bx_1 - y_1)^2 + \cdots + (A + Bx_n - y_n)^2$$

cuyos puntos críticos son los (A, B) tales que

$$0 = f'_A = 2(A + Bx_1 - y_1) + \cdots + 2(A + Bx_n - y_n)$$

$$0 = f'_B = 2(A + Bx_1 - y_1)x_1 + \cdots + 2(A + Bx_n - y_n)x_n$$

Dividiendo todo por 2 y reorganizando queda el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en las incógnitas A y B, cuya matriz es la de la derecha:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} nA & + & (\sum x_i)B & = & \sum y_i \\ (\sum x_i)A & + & (\sum x_i^2)B & = & \sum x_i y_i \end{array} \right\} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{array} \right)$$

[5]Se pueden plantear otros métodos para ajustar una recta a una nube de puntos, por ejemplo minimizar la suma de los d_i en vez de la de sus cuadrados, pero con este método se obtienen predicciones más fiables.

La matriz tiene determinante no nulo[6] y por tanto el sistema tiene una única solución, que se puede calcular por ejemplo usando el método de Kramer y vale

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

La matriz Hessiana de f vale (para cualquier punto)

$$\begin{pmatrix} 2n & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2\sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

su determinante es positivo por la nota al pie y también lo es $2n$, de modo que en ese punto se alcanza en efecto un mínimo.

Ejemplo 8.5.9. *Dibujar los puntos* $(1, 5'3)$, $(2, 5'6)$, $(3, 6'0)$ *y* $(4, 6'8)$, *así como la recta que se les ajusta según el método de los mínimos cuadrados.*

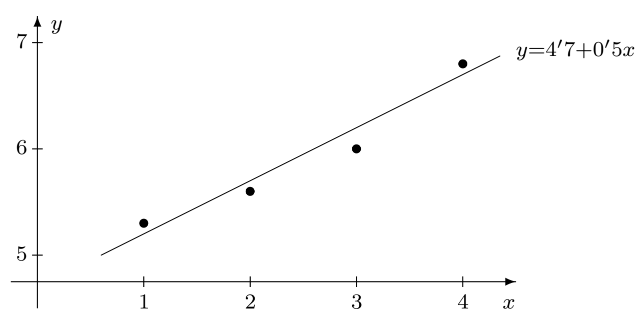
Solución. Los valores que necesitamos para aplicar las fórmulas anteriores son:

$$n = 4 \qquad \sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \qquad \sum x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum y_i = 5'3 + 5'6 + 6'0 + 6'8 = 23'7 \qquad \sum x_i y_i = 5'3 + 11'2 + 18'0 + 27'2 = 61'7$$

de donde

$$A = \frac{23'7 \cdot 30 - 10 \cdot 61'7}{4 \cdot 30 - 10^2} = 4'7 \qquad B = \frac{4 \cdot 1'7 - 10 \cdot 23'7}{4 \cdot 30 - 10^2} = 0'49 \qquad \rightsquigarrow \qquad y = 4'7 + 0'49x$$



[6] De hecho el determinante $n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$ es positivo cuando al menos dos de los x_i son distintos. Para $n = 2$ se trata de ver por ejemplo que $2(r^2 + s^2) - (r + s)^2 > 0$, lo que se obtiene directamente:

$$2(r^2 + s^2) - (r + s)^2 = 2r^2 + 2s^2 - r^2 - s^2 - 2rs = r^2 + s^2 - 2rs = (r - s)^2 > 0$$

Para $n = 3$ hay que pensar y trabajar un poco más, y para un n arbitrario se usa la misma idea:

$$3(r^2+s^2+t^2)-(r+s+t)^2 = 3r^2+3s^2+3t^2-r^2-s^2-t^2-2rs-2rt-2st = 2r^2+2s^2+2t^2-2rs-2rt-2st =$$

$$(r^2 + s^2 - 2rs) + (r^2 + t^2 - 2rt) + (s^2 + t^2 - 2st) = (r - s)^2 + (r - t)^2 + (s - t)^2 > 0$$

8.5.4. Extremos condicionados; multiplicadores de Lagrange

En ocasiones, dada una función de dos variables $f(x, y)$, queremos conocer sus valores extremos no en todo su dominio de definición, sino sólo en los puntos de cierta curva $\mathcal{C}$, que puede venir dada por una ecuación explícita $y = y(x)$ o por una ecuación implícita $g(x, y) = 0$. Se dice entonces que buscamos los extremos de $f(x, y)$ *restringidos* a la curva $\mathcal{C}$ o también *condicionados* o *sujetos* por la ecuación dada.

Análogamente, dada una función de tres variables $F(x, y, z)$, podemos estar interesados en sus valores restringidos a una superficie bidimensional $\mathcal{S}$ dada por una ecuación explícita $z = z(x, y)$ o por una ecuación implícita $G(x, y, z) = 0$.

Cuando la ecuación es explícita el problema es sencillo, pues tenemos expresada una variable en función de otra(s) y basta con sustituirla en la función para obtener una función de una variable menos, cuyos extremos relativos sabemos calcular. Es decir, en los dos casos anteriores tendríamos que estudiar los extremos relativos de las funciones

$$\alpha(x) = f(x, y(x)) \qquad \text{y} \qquad \beta(x, y) = F(x, y, z(x, y))$$

Cuando la ecuación es implícita también hay un método efectivo para encontrar los candidatos a extremos:

Teorema 8.5.10 (Método de los multiplicadores[7] de Lagrange).

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables. Si f tiene un extremo relativo P sobre la curva de restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, y si $\nabla g(P) \neq 0$, entonces los gradientes $\nabla f(P)$ y $\nabla g(P)$ son proporcionales, es decir, existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ (el multiplicador de Lagrange*) tal que*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Los candidatos a extremos deben pues satisfacer la condición del teorema y además deben estar en la curva de restricción. En los casos de dos y tres variables, manteniendo la notación anterior al teorema, deben satisfacerse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & \lambda\, g'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) & = & \lambda\, g'_y(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} F'_x(x,y,z) & = & \lambda\, G'_x(x,y,z) \\ F'_y(x,y,z) & = & \lambda\, G'_y(x,y,z) \\ F'_z(x,y,z) & = & \lambda\, G'_z(x,y,z) \\ G(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right\}$$

[7] El método que exponemos debería llamarse *del multiplicador de Lagrange*, pero también tiene sentido considerar por ejemplo los extremos de $f(x, y, z)$ restringidos a una curva unidimensional dada por dos ecuaciones implícitas $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$. Entonces un candidato a extremo P deben cumplir la condición de que $\nabla f(P)$ sea combinación lineal de $\nabla g_1(P)$ y $\nabla g_2(P)$. Es decir, deben existir dos *multiplicadores de Lagrange* λ_1, λ_2 tales que $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g_1(P) + \lambda_2 \nabla g_2(P)$.

Ejemplo 8.5.11. *Hallar los extremos absolutos de* $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ *en la recta* $x+y=1$.

Solución. Como la ecuación de la recta es $y = 1-x$, basta con considerar

$$\alpha(x) = f(x, 1-x) = 1 - x^2 - (1-x)^2 = 2x - 2x^2$$

que presenta un máximo relativo en $x = 1/2$. Como el correspondiente valor de y en la recta es $y = 1 - 1/2 = 1/2$, la función f restringida a la recta dada presenta un máximo relativo en el punto $P = (1/2, 1/2)$ con valor $f(P) = 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2$.

También podemos aplicar el método del multiplicador con $g(x,y) = x+y-1$, que nos lleva a estudiar el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & \lambda \\ -2y & = & \lambda \\ x+y & = & 1 \end{array} \right\}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x = y$, y entonces por la tercera $x = y = 1/2$, y obtenemos el mismo punto con un esfuerzo similar (aunque en este caso habría que hacer un argumento extra para decidir si en el candidato se alcanza un máximo o un mínimo). ∎

Ejemplo 8.5.12. *Hallar los extremos relativos de la función* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ *restringida a la circunferencia* $x^2+y^2=1$.

Solución. Podemos ver la restricción como una función explícita. Despejando $y^2 = 1-x^2$ y sustituyendo tenemos

$$\alpha(x) = f(x, y(x)) = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1}$$

con derivada $\alpha'(x) = 4xe^{2x^2-1}$ y punto crítico en $x = 0$ (mínimo pues $\alpha''(0) = 4 > 0$), para el que se tiene $y^2 = 1$ y por tanto $y = \pm 1$. Es decir, hay dos mínimos relativos en los puntos $P_1 = (0,1)$ y $P_2 = (0,-1)$.

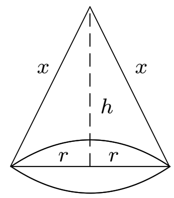
Pero también podríamos despejar $x^2 = 1-y^2$ para obtener $\beta(y) = e^{1-2y^2}$, que tiene un máximo en $y = 0$, lo que nos da dos máximos relativos para la restricción de f en los puntos $P_3 = (1,0)$ y $P_4 = (-1,0)$.

Por tanto, si se despeja una variable en función de la otra hay unos extremos que "se pierden". Veamos que esto no ocurre si aplicamos el método de los multiplicadores. El sistema que hay que considerar es

$$\left\{ \begin{array}{r} 2xe^{x^2-y^2} = \lambda\, 2x \\ -2ye^{x^2-y^2} = \lambda\, 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \right\}$$

Si x e y fueren ambos distintos de cero, la primera ecuación implicaría $\lambda = e^{x^2-y^2}$ y la segunda $\lambda = -e^{x^2-y^2}$, lo cual es imposible pues $e^{x^2-y^2} \neq 0$. Por tanto o bien $x = 0$ o bien $y = 0$, y usando la tercera ecuación se obtienen los cuatro puntos de antes. ∎

Ejemplo 8.5.13. *Un triángulo isósceles con dos lados de longitud x y uno de longitud $2r$ genera un cono al girar sobre su altura h según el dibujo. Si el semiperímetro del triángulo es A, calcular x y r para que el volumen del cono sea máximo.*



Solución. Maximizar el volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ equivale a maximizar la función

$$f(r,h) = r^2 h$$

La condición sobre el perímetro es $r+x = A$, pero nos interesa reescribirla para que aparezca h en lugar de x. Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$r^2 + h^2 = x^2 = (A-r)^2 = A^2 + r^2 - 2Ar \qquad \text{y por tanto} \qquad h^2 + 2Ar = A^2$$

En este punto tenemos tres opciones para resolver el problema. Desarrollamos las tres para ver que no hay una sustancialmente mejor que otra.

- Despejamos h en la condición: $h = (A^2 - 2Ar)^{1/2}$ y maximizamos

  $$\alpha(r) = f(r,h) = r^2(A^2 - 2Ar)^{1/2}$$

  Derivando

  $$\alpha'(r) = 2r(A^2 - 2Ar)^{1/2} - Ar^2(A^2 - 2Ar)^{-1/2}$$

  Los puntos críticos se tienen cuando

  $$2r(A^2 - 2Ar)^{1/2} = Ar^2(A^2 - 2Ar)^{-1/2} \qquad \text{ó} \qquad 2r(A^2 - 2Ar) = Ar^2 \qquad \text{ó} \qquad 2rA^2 = 5Ar^2$$

  Como $r \neq 0$ y $A \neq 0$ debe ser

  $$2A = 5r \qquad \text{ó} \qquad r = \frac{2}{5}A \qquad \left(\Rightarrow x = A - \frac{2}{5}A = \frac{3}{5}A\right)$$

  donde se puede ver que hay un máximo por argumentos geométricos o usando la derivada segunda de $\alpha(r)$.

- Usamos la condición para despejar $r = (A^2 - h^2)/2A$ y (prescindiendo de las constantes) maximizamos

  $$\beta(h) = f(r,h) = h(A^2 - h^2)^2$$

  Derivando

  $$\beta'(h) = (A^2 - h^2)^2 - 4h^2(A^2 - h^2) = (A^2 - h^2)(A^2 - 5h^2)$$

  Como $A^2 - h^2 = 2Ar > 0$, el único punto crítico se tiene cuando $A^2 = 5h^2$, de donde

  $$r = \frac{A^2 - h^2}{2A} = \frac{A^2 - A^2/5)}{2A} = \frac{4A^2}{10A} = \frac{2}{5}A \qquad \left(\Rightarrow x = A - \frac{2}{5}A = \frac{3}{5}A\right)$$

- El método de Lagrange con la restricción $g(r,h) = h^2 + 2Ar - A^2 = 0$ nos da un sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'_r &=& \lambda\, g'_r \\ f'_h &=& \lambda\, g'_h \\ g &=& 0 \end{array}\right\} \qquad \text{ó} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2rh &=& \lambda\, 2A \\ r^2 &=& \lambda\, 2h \\ h^2 + 2Ar &=& A^2 \end{array}\right\}$$

  Despejando λ en las dos primeras ecuaciones e igualando se tiene

$$\frac{rh}{A} = \frac{r^2}{2h} \qquad \Rightarrow \qquad Ar = 2h^2 = 2(A^2 - 2Ar) = 2A^2 - 4Ar \qquad \Rightarrow \qquad 5Ar = 2A^2$$

  de donde $r = \frac{2}{5}A$ y $x = A - \frac{2}{5}A = \frac{3}{5}A$. ■

Ejercicio: Repetir el problema maximizando el área del triángulo en lugar del volumen del cono (es decir, cambiando la función $f(r,h) = r^2 h$ por $f(r,h) = rh$), y comprobar que el área máxima se obtiene cuando el triángulo es equilátero.

8.5.5. Extremos absolutos

Definición 8.5.14. *Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $P \in D$.*

- *Si $f(Q) \leq f(P)$ para cualquier $Q \in D$, diremos que $M = f(P)$ es el* máximo absoluto *de f en D, y que este máximo* se alcanza *en el punto P.*
- *Si $f(Q) \geq f(P)$ para cualquier $Q \in D$, diremos que $m = f(P)$ es el* mínimo absoluto *de f en D, y que este mínimo* se alcanza *en el punto P.*

En general, una función f no tiene por qué alcanzar estos *extremos absolutos* en un conjunto D. Por ejemplo, si $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ y D es $\mathbb{R}^2$ sin el origen, entonces no hay máximo absoluto (cerca del origen la función toma valores arbitrariamente altos) ni mínimo absoluto (lejos del origen la función se acerca a 0, pero nunca alcanza ese valor).

El Teorema de Weierstrass para funciones reales de varias variables asegura que, en cierto tipo de conjuntos, cualquier función continua alcanza sus extremos absolutos. Estos conjuntos son los que se llaman *compactos*, lo que significa que sean *acotados* (que no "se vayan al infinito") y *cerrados* (el borde del conjunto está en el conjunto).

¿Cómo calcular los extremos absolutos de una función en un recinto así? La idea es la misma que vimos en el caso de una variable:

1. Hallar todos los puntos críticos de f que estén en D (no es necesario discutir si son máximos o mínimos relativos).
2. Hallar los posibles extremos de f restringidos al borde de D.
3. Calcular el valor de f en todos los puntos anteriores y en las esquinas del borde. El mayor valor será el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

Ejemplo 8.5.15. *Hallar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ *en el círculo unidad* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución. Los puntos críticos de f que son las soluciones de

$$f'_x(x,y) = 2x\, e^{x^2-y^2} = 0 \qquad\qquad f'_y(x,y) = -2y\, e^{x^2-y^2} = 0$$

que se limitan a $P = (0,0)$, que está en D.

La función f restringida al borde de D la estudiamos en el Ejemplo 8.5.12, donde vimos que tenía como candidatos a extremos absolutos a los puntos:

$$Q_1 = (1,0) \qquad Q_2 = (-1,0) \qquad Q_3 = (0,1) \qquad Q_4 = (0,-1)$$

Como

$$f(P) = 1 \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = e \qquad f(Q_3) = f(Q_4) = 1/e$$

el máximo absoluto vale e y se alcanza en los puntos Q_1 y Q_2, y el mínimo absoluto vale $1/e$ y se alcanza en los puntos Q_3 y Q_4. ■

Ejemplo 8.5.16. *Hallar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ *en el recinto encerrado por los ejes coordenados y la recta* $x + y = 2$.

Solución. El recinto es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$. Primero calculamos los puntos críticos:

$$0 = f'_x(x,y) = 2x - 4y \qquad\qquad 0 = f'_y(x,y) = -4x + 3y^2 + 4$$

De la primera ecuación obtenemos $x = 2y$, que sustituido en la segunda da $3y^2 - 8y + 4 = 0$, con soluciones $y = 2$ e $y = 2/3$. Por tanto los puntos críticos de f son $(4,2)$ y $P = (4/3, 2/3)$, pero sólo nos interesa el segundo, pues el primero está fuera del triángulo.

Veamos qué pasa en el borde del triángulo:

El lado horizontal tiene ecuación $y = 0$, y la función $\alpha(x) = f(x,0) = x^2$ tiene un único punto crítico $x = 0$ que nos lleva a considerar el punto $Q = (0,0)$.

El lado vertical tiene ecuación $x = 0$, y $\beta(y) = f(0,y) = y^3 + 4y$ no tiene puntos críticos pues $\beta'(y) = 3y^2 + 4 > 0$.

El lado oblicuo tiene ecuación $x = 2 - y$, y los puntos críticos de

$$\gamma(y) = f(2-y,y) = (2-y)^2 - 4(2-y)y + y^3 + 4y = y^3 + 5y^2 - 8y + 4$$

es decir, las soluciones de $\gamma'(y) = 3y^2 + 10y - 8 = 0$, son $y = 2/3$ e $y = -4$. La segunda queda fuera del intervalo y la primera nos vuelve a dar el punto $P = (4/3, 2/3)$.

Los valores que toma f en esos puntos y en las esquinas $R = (2,0)$ y $S = (0,2)$ son

$$f(P) = \frac{32}{27} \qquad f(Q) = 0 \qquad f(R) = 4 \qquad f(S) = 16$$

por lo que el máximo absoluto de la función es 16 y se alcanza en $S = (0,2)$, y el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $Q = (0,0)$. ■

Ejemplo 8.5.17. *Encuentra los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x$ *en el recinto limitado por la parábola* $y = \frac{1}{2}x^2$ *y la recta* $y = 2$.

Solución: El único punto crítico de f es $(\frac{3}{2}, 0)$, que queda fuera del recinto.

En la recta se tiene $f(x,2) = x^2 - 3x + 4$, cuya derivada $2x - 3$ se anula en $x = \frac{3}{2}$, lo que nos da el punto $P = (\frac{3}{2}, 2)$, que está en el recinto.

En la parábola se tiene $f(x, \frac{1}{2}x^2) = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - 3x$, cuya derivada $x^3 + 2x - 3$ se factoriza como $(x-1)(x^2+x+3)$ (Ruffini). Como el segundo factor no tiene raíces reales, la derivada sólo se anula para $x = 1$, lo que nos da el punto $Q = (1, \frac{1}{2})$, que está en el recinto.

Por último, el borde del recinto tiene esquinas en los puntos $A = (-2, 2)$ y $B = (2, 2)$.

Los valores de f en estos puntos son

$$f(A) = 14 \qquad f(B) = 2 \qquad f(P) = \frac{7}{4} \qquad f(Q) = -\frac{7}{4}$$

luego los extremos absolutos se alcanzan en Q y en A con valores respectivos de $-\frac{7}{4}$ y 14. ■

Ejemplo 8.5.18. *Calcular los extremos absolutos de* $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x + y + \frac{\sqrt{3}}{2}z$ *en el elipsoide* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$.

Solución. La función no tiene extremos relativos, así que pasamos a ver qué ocurre en el borde del elipsoide, es decir, en la superficie de ecuación $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Ahora podríamos despejar y sustituir por ejemplo x y buscar los extremos de la función de dos variables

$$f(y,z) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2y^2 - 3z^2} + y + \frac{\sqrt{3}}{2}z$$

pero es más sencillo usar el método de Lagrange, que nos lleva a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) &=& \lambda g'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) &=& \lambda g'_y(x,y) \\ f'_z(x,y) &=& \lambda g'_z(x,y) \\ g(x,y) &=& 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 1/2 &=& 2x\lambda \\ 1 &=& 4y\lambda \\ \sqrt{3}/2 &=& 6z\lambda \\ 1 &=& x^2 + 2y^2 + 3z^2 \end{array}\right\}$$

Despejando $1/\lambda$ en las tres primeras ecuaciones e igualando se tiene

$$4x = 4y = 4\sqrt{3}z \qquad \text{ó} \qquad x = y = \sqrt{3}z$$

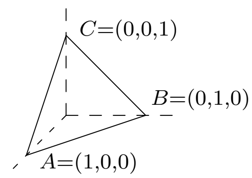
con lo que la cuarta ecuación queda

$$1 = 3z^2 + 6z^2 + 3z^2 = 12z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{3}/6, \quad x = y = \pm 1/2$$

los tres con el mismo signo por la relación $x = y = \sqrt{3}z$. El valor positivo nos da el punto $P = (1/2, 1/2, \sqrt{3}/6)$, con $f(P) = 1$, y el negativo nos da $Q = (-1/2, -1/2, -\sqrt{3}/6)$, con $f(Q) = -1$, que son el máximo y el mínimo absolutos de f en el elipsoide. ■

Ejemplo 8.5.19. *Una placa en el espacio $\mathbb{R}^3$ ocupa los puntos del plano $x+y+z=1$ con $x,y,z \geq 0$. La temperatura en el punto (x,y,z) es $T(x,y,z) = 4-2x^2-y^2-z^2$ cientos de grados centígrados. Hallar el punto más caliente y el más frío de la placa.*

Solución. Como el plano $x+y+z=1$ pasa por los tres puntos de la figura y sólo consideramos los valores positivos de las variables, su representación gráfica es



Comencemos buscando los posibles extremos relativos de $T(x,y,z) = 4-2x^2-y^2-z^2$ restringidos al plano $g(x,y,z) = x+y+z-1$. El sistema que hemos de resolver es pues:

$$-4x = \lambda \qquad -2y = \lambda \qquad -2z = \lambda \qquad x+y+z=1$$

Igualando λ obtenemos $y = z = 2x$, y de la cuarta ecuación deducimos que $x = \frac{1}{5}$, por lo que $P = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ es el único posible extremo de T en el interior de la placa.

Pasemos ahora a estudiar el borde de la placa, que consta de tres segmentos:

- $\overline{AB}$. Es la intersección de $x+y+z=1$ con el plano $z=0$, lo que nos permite poner todas las variables en función de x:

  $$\alpha(x) = T(x,y,z) = T(x, 1-x, 0) = 4-2x^2-(1-x)^2 = 3+2x-3x^2$$

  Como $\alpha'(x) = 2-6x$ se anula para $x = \frac{1}{3}$, hay un posible extremo en $Q = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

- $\overline{AC}$. Es la intersección de $x+y+z=1$ con $y=0$, luego consideramos

  $$\beta(x) = T(x,y,z) = T(x,0,1-x) = 3+2x-3x^2$$

  cuyo punto crítico en $x = \frac{1}{3}$ nos da un posible extremo en $R = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

- $\overline{BC}$. Es la intersección de $x+y+z=1$ con $x=0$, luego consideramos

  $$\gamma(y) = T(x,y,z) = T(0,y,1-y) = 4-y^2-(1-y)^2 = 3+2y-2y^2$$

  cuyo punto crítico en $y = \frac{1}{2}$ nos da un posible extremo en $S = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Los valores de la temperatura en los puntos seleccionados y en las esquinas del borde son

$$T(A) = 2 \qquad T(B) = 3 \qquad T(C) = 3$$

$$T(P) = 4 - \frac{2}{25} - \frac{4}{25} - \frac{4}{25} = \frac{18}{5} = 3'6$$

$$T(Q) = T(R) = 4 - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = \frac{10}{3} = 3'333\ldots \qquad T(S) = 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 3'5$$

y comparándolos deducimos que en $P = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ se alcanza la máxima temperatura, 360ºC, y que en $A = (1,0,0)$ se alcanza la mínima, 200ºC. ■

8.6. Ejercicios

1. Representar gráficamente el dominio de definición de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$ b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

   c) $f(x,y) = \ln\left(1-|x|-|y|\right)$ d) $f(x,y) = \sqrt{x}\,\ln\left(1+\sqrt{x^2-y^2}+\dfrac{|y|}{|x|}\right)$

2. Calcular, en caso de que existan, los límites cuando $(x,y)\to(0,0)$ de:

   a) $\dfrac{xy+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ c) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ d) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   e) $\dfrac{x^2y}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$ f) $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ g) $\dfrac{xy^3-2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$ h) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el origen de coordenadas (en todas, la imagen del punto $(0,0)$ vale 0):

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad g(x,y) = \frac{x^2}{3y} \qquad h(x,y) = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^4+y^4+2x^2y^2}$$

4. En las siguientes funciones, ¿puede definirse la imagen del punto $(0,0)$ de modo que sean continuas?

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad h(x,y) = \frac{x^2(y+1)-y(x-y)}{x^2-xy+y^2}$$

5. Comprobar que las funciones de la izquierda verifican las EDP de la derecha:

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ verifica $xf'_x + yf'_y = f$

   b) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$ verifica $(f'_x)^2 - (f'_y)^2 = 1$

   c) $f(x,y) = 1/xy$ verifica $xf'_x + yf'_y + 3\left(f'_x f'_y\right)^{1/3} = f$

   d) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$ verifica $xf'_x + yf'_y = -\frac{1}{2}f$

   e) $f(x,y) = x^2\tan\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)$ verifica $xf'_x + yf'_y = 2f$

   f) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ verifica $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$

   g) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ verifica $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$

   h) $u(x,t) = e^{bx+a^2b^2t}$ verifica $u'_t = a^2\,u''_{xx}$

   i) $u(x,t) = e^{-a^2b^2t}\cos(bx)$ verifica $u'_t = a^2\,u''_{xx}$

6. Dada una función cualquiera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, comprobar que:

   - $F(x,y) = f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ verifica $xF'_x + yF'_y = 0$.
   - $G(x,y) = x^n f(y/x)$ verifica $xG'_x + yG'_y = nG$

7. Supongamos que las variables x e y dependen de las variables u y v según las fórmulas

$$x = Au - Bv \quad y = Bu + Av$$

   donde A y B son constantes con $A^2+B^2 = 1$. Cualquier función $f(x,y)$ puede entonces verse como función de las otras variables: $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Comprobar que se tienen las igualdades

$$AF'_u - BF'_v = f'_x \qquad BF'_u + AF'_v = f'_y \qquad F''_{uu} + F''_{vv} = f''_{xx} + f''_{yy}$$

8. Si $u = x/y$ y $v = xy$, y si $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, comprobar que

$$xF'_x + yF'_y = 2vf'_v \qquad x^2F''_{xx} + xyF''_{xy} + y^2F''_{yy} = uf'_u + vf'_v + u^2f''_{uu} + 3v^2f''_{vv}$$

9. Se miden las longitudes $x = 3$ e $y = 4$ con errores relativos del 3 % y el 4 %, respectivamente. Acotar los errores relativos que se cometen al calcular

$$z = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad t = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

10. Calcula un valor aproximado de $\sqrt{9 \cdot (2'05)^2 + (7'9)^2}$ usando la fórmula de la aproximación lineal para la función $f(x,y) = \sqrt{9x^2+y^2}$ en el punto $(2,8)$.

11. Calcular las ecuaciones de los planos y rectas tangentes en los puntos que se indican:

   a) Plano tangente a $z = 3x^2 + 4y^2$ en $P = (0,1,4)$.

   b) Recta tangente a $x^2y^2 - 3xy + 2 = 0$ en $P = (1,2)$.

   c) Plano tangente a $z^3 - xz - y = 0$ en $P = (1,0,1)$ y en $Q = (3,-2,1)$.

12. Se pide, para cada una de estas funciones (con valor 0 en el origen $P = (0,0)$):

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \qquad g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

   a) Decidir si es continua en P.

   b) Estudiar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(P) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(tu,tv)}{t}$.

   c) Deducir que ninguna de las funciones es diferenciable en $(0,0)$.
   [Indicación: Si f es diferenciable en P entonces es continua, existen todas las derivadas direccionales y se tiene $D_{(u,v)}f(P) = \nabla f(P) \cdot (u,v)$.]

13. Se pide, para una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$D_{\vec{u}}f(P) = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad D_{\vec{u}}f(P) = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{donde} \quad P = (2,4) \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$$

   a) Calcular las direcciones de crecimiento máximo, mínimo y nulo de f en P.

   b) Calcular la derivada en $t = 2$ de la función $g(t) = f(t, t^2)$.

14. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones $f(x, y)$:

a) $ye^x - e^y$	b) $(x + y)(xy + 1)$	c) $x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
d) $xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{y}$	e) $\dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$	f) $x^3 + y^3 - 9xy + 27$

15. Calcular la distancia mínima del punto $(0, 2)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

16. Minimizar la función $f(x, y, z) = xyz$ en los puntos del plano $x + y - z = 30$.

17. Se quiere construir un cajón rectangular abierto (cuatro paredes y suelo, sin tapa) de $108m^3$. Calcular las dimensiones que minimizan el coste en dos casos: (a) todo el material tiene el mismo precio; (b) el material del suelo vale 8 veces más (por m^2) que el de las paredes.

18. Calcular los valores extremos de $x + y$ sobre la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

19. Calcular los valores extremos de $x^3 + y^3 + z^3$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

20. Calcular los extremos absolutos de $f(x, y) = y - x^2$ en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Dibujar el círculo y las curvas de nivel de la función e interpretar geométricamente el resultado.

    Repetir el ejercicio (y la interpretación geométrica) cambiando la función por $3y - x^2$.

21. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$ sobre el semicírculo $x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0$. Dibujar las curvas de nivel de la función e interpretar geométricamente el resultado.

22. Calcular los extremos absolutos de $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 6)$.

    [Indicación: se puede sacar factor común en la expresión de f, y al buscar los puntos críticos de f en el interior del triángulo se tiene $x \neq 0$ e $y \neq 0$.]

8.7. Soluciones de los ejercicios

1. (a) Interior del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1, sin el borde.

   (b) Exterior del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1, con el borde.

   (c) Interior del cuadrado de esquinas $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, sin el borde.

   (d) Región bajo $y = x$ y sobre $y = -x$ (con $x > 0$), con los bordes pero sin el $(0,0)$.

2. $a = 0$, $b = 2$, $c = 0$, d no existe (depende del parámetro en $y = mx$), $e = 0$, f no existe (depende del parámetro en $x = my^2$), $g = -2$, h no existe (depende de m en $y = mx$).

3. Sólo f es continua.

4. Para f no se puede definir, $g(0,0) = 0$ hace continua a g, y $h(0,0) = 1$ a h.

9. Pongamos $u = x^2 + y^2$ (para $x = 3$ e $y = 4$ se tiene $u = 25$). Entonces $z'_x = (y^2 - x^2)/u^2$ y $z'_y = -2xy/u^2$. Los datos nos dicen que $|\Delta x/x| \leq 0'03$ y $|\Delta y/y \leq 0'04$, y por tanto:
   $$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y}{z}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{u}\frac{\Delta x}{x} - \frac{2y^2}{u}\frac{\Delta y}{y}\right| \leq \frac{7}{25}\,0'03 + \frac{32}{25}\,0'04 < 0'06$$
   por lo que el error relativo que se cometa al calcular z es el 6 %.

   Con t se trabaja de modo similar (es conveniente usar $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) y se obtiene $|\Delta t/t| \leq 0'0448$, por lo que el error relativo es del $4'5$ %.

10. Como $f'_x = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}}$ y $f'_y = \frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}}$, se tiene $f(2,8) = \sqrt{36+64} = 10$, $f'_x(2,8) = 1'8$ y $f'_y(2,8) = 0'8$. La fórmula de la aproximación lineal es $f(2 + \Delta x, 8 + \Delta y) \approx 10 + 1'8 \cdot \Delta x + 0'8 \Delta y$, de donde:
    $$\sqrt{9 \cdot (2'05)^2 + (8'1)^2} = f(2 + 0'05, 8 - 0'1) \approx 10 + 1'8 \cdot 0'05 + 0'8 - 0'1 = 10'01.$$

11. (a) $8y - z = 4$. (b) $2x + y = 4$. (c) $x + y - 2z = 3$ (para P) y $x + y = 1$ (para Q).

12. f es continua, y las únicas direccionales que existen son las parciales; ambas valen 0. Como hay derivadas direccionales que no existen, no es diferenciable.

    g no es continua (ni por tanto diferenciable), y $D_{(u,v)}f(0,0) = v^2/u$ (con $f'_y(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0$).

    h es continua, y $D_{(u,v)}h(0,0) = uv^2$; en particular $\nabla h(0,0) = (0,0)$. No es diferenciable porque no se cumple $D_{(u,v)}h(0,0) = \nabla h(0,0) \cdot (u,v)$.

13. Los datos sobre las direccionales y la fórmula $D_{(u,v)}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (u,v)$ nos dicen que $\nabla f(0,0) = (2,3)$. Esa es la dirección de máximo crecimiento, su opuesta es la de mínimo crecimiento, y sus ortogonales son las de crecimiento nulo.

    $g'(2) = 14$.

14. (a) $(0,0)$ es un punto-silla.

    (b) $(1,-1)$ y $(-1,1)$ son puntos-silla.

    (c) En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ hay mínimos relativos y $(0,0)$ es un punto-silla.

    (d) Si $a>0$ hay un mínimo relativo en $P=(a^{-1/3},a^{2/3})$, si $a<0$ hay un máximo relativo en P y si $a=0$ no hay puntos críticos.

    (e) En $(1,0)$ hay un máximo relativo y en $(-1,0)$ hay un mínimo relativo.

    (f) En $(3,3)$ hay un mínimo relativo y $(0,0)$ es un punto-silla.

15. La distancia mínima se alcanza en $(\sqrt{3/2},3/2)$ y vale $\sqrt{7}/2$.

16. Mínimo en $(10,10,-10)$ con valor -1000. Hay otros tres puntos críticos en $(30,0,0)$, $(0,30,0)$ y $(0,0,-30)$, pero obviamente no son mínimos.

17. (a) Base 6×6 y altura 3. (b) Base 3×3 y altura 12.

18. Máximos en $\pm(4/\sqrt{13},9/\sqrt{13})$ con valor $\sqrt{13}$, y mínimos en $\pm(-4/\sqrt{13},-9/\sqrt{13})$ con valor $-\sqrt{13}$.

19. El máximo se alcanza en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ con valor 1. El mínimo se alcanza en $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$ y $(0,0,-1)$ con valor -1. También hay puntos críticos en $(0,\pm1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2})$ y análogos, y en $(\pm1/\sqrt{3},\pm1/\sqrt{3},\pm1/\sqrt{3})$ y análogos, pero no son extremos absolutos.

20. Máximo en $(0,1)$ con valor 1 y mínimos en $(\pm\sqrt{3}/2,-1/2)$ con valor $-5/4$. Las curvas de nivel son desplazamientos verticales de la parábola $y=x^2$ que, cuando van bajando, tocan por primera vez a la circunferencia en el máximo y se despiden de ella en los mínimos. (Si se despeja x^2 y se sustituye "se pierden" los puntos críticos con $x=0$, que sí se obtienen si se aplica el método de los multiplicadores).

    Cuando la función es $3y-x^2$ se obtiene el mismo máximo y un mínimo en $(0,-1)$ con valor -3. Ahora las curvas de nivel son desplazamientos de la parábola $y=\frac{1}{3}x^2$, que tiene las ramas "más abiertas".

21. Mínimo absoluto en $(0,1)$, con valor 1, y máximo absoluto en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, con valor $6+4\sqrt{2}$. Las curvas de nivel son circunferencias centradas en el punto $(-1,1)$, que según van creciendo de radio tocan por primera vez al semicírculo en el mínimo y lo tocan por última vez en el máximo.

22. Máximo en $(1,2)$ con valor 4 y mínimo en $(2,4)$ con valor -64.

Tema 9

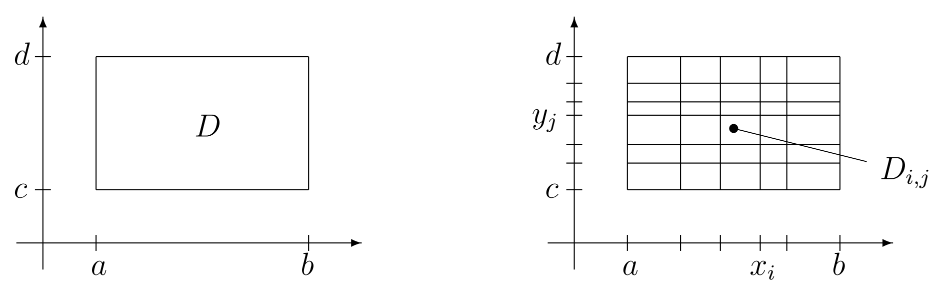
Integral doble

9.1. Integral doble sobre un rectángulo

Dados números reales $a < b$ y $c < d$ podemos considerar en el plano el *rectángulo*

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$$

Si, como hicimos al definir la integral de Riemann, consideramos particiones arbitrarias de cada uno de los intervalos, entonces D queda dividido en pequeños rectángulos del tipo $D_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ como muestra la figura:



Consideremos ahora una función real $f : D \to \mathbb{R}$ que toma valores positivos. Si en cada $D_{i,j}$ elegimos un punto $P_{i,j}$, el producto $f(P_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ es el volumen del paralelepípedo con base en $D_{i,j}$ y altura $f(P_{i,j})$. La suma de estos volúmenes

$$\sum_{i,j} f(P_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

es por lo tanto un valor aproximado del volumen encerrado por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY sobre el rectángulo D.

Como ocurrió con la integral de Riemann, cuanto más refinamos las particiones de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ mejor se aproxima esa suma al "verdadero" volumen encerrado por la superficie. Sin entrar en detalles, la integral doble de la función f sobre D, denotada por

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

se define como el límite de esas sumas "cuando los rectángulos se hacen muy pequeños". Según esta definición, la integral doble de una función es un límite doble, pero para el cálculo efectivo podemos usar las herramientas que conocemos sobre integrales en una variable gracias al siguiente resultado:

Teorema 9.1.1 (Teorema de Fubini). *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un rectángulo $D = [a,b] \times [c,d]$. Entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Si además se tiene $f(x,y) = g(x)h(y)$ (se dice que f tiene variables separadas*), entonces*

$$\iint_D g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \left(\int_c^d h(y)\,dy \right)$$

La primera igualdad de las dos de arriba nos dice que, para calcular la integral doble, podemos hacer primero la integral en y del paréntesis, considerando a x como una constante. La expresión resultante dependerá pues de x, y si hacemos la integral en x de esa expresión se obtiene la integral doble.

La segunda igualdad nos dice que, en este proceso, podemos intercambiar los papeles de las variables. Como veremos en los ejemplos que siguen, la elección del orden de integración puede ser un paso clave en el cálculo de una integral doble.

Ejemplo 9.1.2. *Calcular $I = \iint_D x^2 y^3\,dx\,dy$ sobre el rectángulo $D = [1,3] \times [0,2]$.*

Solución. La función tiene las variables separadas, luego podemos hacer

$$I = \left(\int_1^3 x^2\,dx \right) \left(\int_0^2 y^3\,dy \right) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^2 = \frac{27-1}{3}\,\frac{16-0}{4} = \frac{104}{3} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 9.1.3. *Calcular $I = \iint_D (xy^2 + x^2)\,dx\,dy$ sobre el rectángulo $D = [0,1] \times [1,2]$.*

Solución. Ambas elecciones del orden de integración requieren similar esfuerzo:

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 (xy^2 + x^2)\,dy \right) dx = \int_0^1 dx\ \left[\frac{xy^3}{3} + x^2 y \right]_{y=1}^{y=2} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{8x}{3} + 2x^2 - \frac{x}{3} - x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{7x}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{6} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{7}{6} = \frac{3}{2}$$

o bien

$$I = \int_1^2 \left(\int_0^1 (xy^2 + x^2)\,dx \right) dy = \int_1^2 dy\ \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{3} \right) dy = \frac{3}{2} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 9.1.4. *Calcular* $I = \iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy$ *en el rectángulo* $D = [0, \pi/2] \times [0, 1]$.

Solución. Si miramos $x\cos(xy)$ como función de y, el factor x es una constante y la primitiva es fácil. Si la miramos como función de x, es un producto de dos funciones y hay que empezar haciendo la primitiva por partes.

Por tanto, es más sensato calcular la integral integrando primero con respecto a y:

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x\cos(xy)\,dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} dx\ [\mathrm{sen}(xy)]_{y=0}^{y=1} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)\,dx =$$

$$[-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1$$

Veamos qué ocurre si elegimos el otro orden de integración; se trata entonces de calcular

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx \right) dy$$

Para calcular el valor del paréntesis hay que empezar por obtener una primitiva de $x\ \cos(xy)$ como función de x; integrando por partes se obtiene

$$\int x\cos(xy)\,dx = \frac{x}{y}\,\mathrm{sen}(xy) + \frac{1}{y^2}\cos(xy)$$

de donde

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx = \frac{\pi}{2y}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - \frac{1}{y^2}$$

y así

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2y}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - \frac{1}{y^2} \right) dy$$

Para resolver el primer sumando de esta integral necesitaríamos calcular la primitiva

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\,dy$$

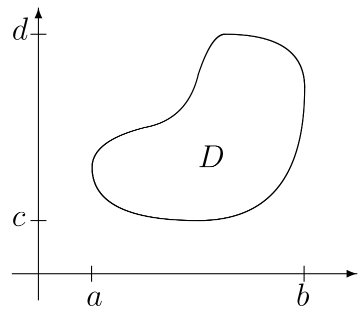
que mediante el cambio $t = \frac{\pi}{2}\,y$ se transforma en

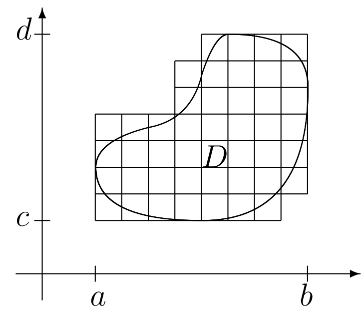
$$\int \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}\,dt$$

que no es expresable en términos de funciones elementales. Por tanto, no podemos calcular la integral doble por este camino. ∎

9.2. Integrales sobre regiones no rectangulares

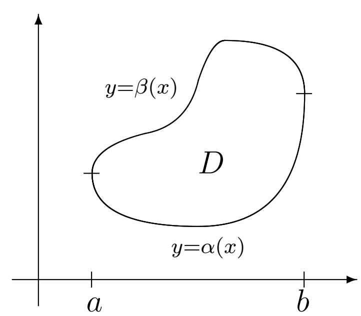
Una región del plano se dice que está *acotada* si está contenida en un rectángulo. Por ejemplo, la región D de la izquierda está contenida en el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$

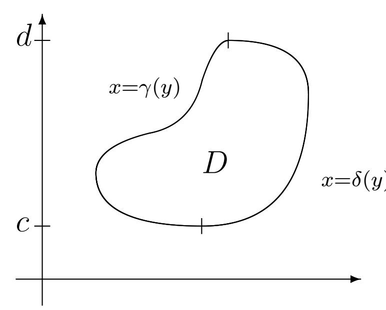




Podemos dividir ese rectángulo en rectángulos menores, considerando sólo los que corten a la región D, como muestra la figura de la derecha. Tomando ahora puntos de D en cada uno de esos rectángulos, el volumen comprendido entre D y la superficie $z = f(x, y)$ (para una función $f : D \to \mathbb{R}$ con valores positivos) se aproxima por una suma como la que usamos en la sección anterior, y la integral doble de f sobre D se define como el límite de estas sumas cuando las particiones se hacen muy pequeñas.

El valor de estas integrales dobles se puede calcular "haciendo dos integrales simples" cuando se tiene una buena descripción del borde de D. Por ejemplo, continuando con la región D anterior, consideremos estas figuras:





En la figura de la izquierda vemos que las curvas $y = \alpha(x)$ e $y = \beta(x)$ (con $x \in [a, b]$) marcan las mitades inferior y superior, respectivamente, del borde de D. Por tanto un punto (x, y) está en D precisamente si verifica

$$x \in [a, b] \qquad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$$

Análogamente, las curvas $x = \gamma(y)$ y $x = \delta(y)$ (con $y \in [c, d]$) marcan las mitades izquierda y derecha del borde de D, y los puntos de D son los que verifican

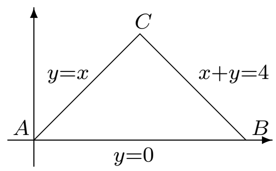
$$y \in [c, d] \qquad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$$

Usando una u otra descripción podemos calcular la integral doble mediante las fórmulas

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Ejemplo 9.2.1. *Calcular* $I = \iint_T (x+y)\,dx\,dy$*, donde* T *es el triángulo limitado por las rectas* $y=0$*,* $y=x$ *y* $x+y=4$*.*

Solución. Las dos primeras rectas se cortan en $A=(0,0)$, la primera y la última en $B=(4,0)$ y las dos últimas en $C=(2,2)$. Por tanto el triángulo es



Si nos fijamos en las fronteras izquierda ($x=y$) y derecha ($x=4-y$), la integral vale

$$I = \int_0^2 \left(\int_y^{4-y} (x+y)\,dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_y^{4-y} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{(4-y)^2}{2} + (4-y)y - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy = \int_0^2 \left(8 - 2y^2\right) dy = \left[8y - \frac{2y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

Si queremos plantear la integral con el otro orden de las variables, observamos que la frontera de abajo es siempre $y=0$, pero la de arriba es $y=x$ para $x\in[0,2]$ y es $y=4-x$ para $x\in[2,4]$, luego hay que plantear la integral como la suma de las dos mitades[1]:

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^x (x+y)\,dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_0^{4-x} (x+y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx + \int_2^4 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_2^4 \left(x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{3x^2}{2}\,dx + \int_2^4 \left(8 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^2 + \left[8x - \frac{x^3}{6} \right]_2^4 =$$

$$= 4 - 0 + 32 - \frac{32}{3} - 16 + \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

Aunque la dificultad de los cálculos es la misma en ambos casos, desde el principio del planteamiento parecía más sensato elegir la primera opción. ■

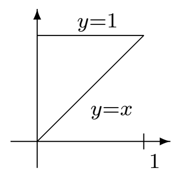
[1]Aquí estamos empleando una propiedad análoga a la propiedad de "aditividad con respecto al intervalo" que usamos en la integral simple: Si la región D se divide en dos regiones D_1 y D_2 (que la cubran completamente y sin solaparse) entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ejemplo 9.2.2. *Calcular* $I = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx.$

Solución. Ahora el enunciado no nos da el recinto, sino la integral ya planteada como una integral iterada. Pero resulta que no se puede hallar una primitiva de la función e^{y^2}, y la única opción que tenemos consiste en cambiar el orden de integración.

Para ello, primero hemos de interpretar el recinto sobre el que estamos integrando, que en vista de los límites de las integrales del enunciado es



Así, cambiando el orden de integración,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} [x]_0^y \, dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \qquad \blacksquare$$

9.3. Cambio de variable

Un *cambio de variable* en $\mathbb{R}^2$ consiste en un par de funciones

$$u = u(x, y) \qquad\qquad v = v(x, y)$$

cuyo *(determinante) jacobiano*

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$$

no se anula en ningún punto. En esta situación hay un *cambio de variable inverso*

$$x = x(u, v) \qquad\qquad y = y(u, v)$$

cuyo jacobiano es el inverso del anterior, es decir,

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{J(x, y)}$$

Cuando se aplica un cambio de variable a una integral doble hay que tener en cuenta que el cambio transforma la región D inicial en otra región

$$R = \{(u(x, y), v(x, y)) \, : \, (x, y) \in D\}$$

y que las diferenciales se relacionan mediante cualquiera de las fórmulas

$$dx\, dy = |J(u, v)| \, du\, dv \qquad \text{ó} \qquad du\, dv = |J(x, y)| \, dx\, dy$$

(obsérvese que aparece el valor absoluto del jacobiano).

Como veremos en los ejemplos, los cambios de variable se aplican a veces con la intención de simplificar el integrando y otras veces para mejorar el recinto de integración.

En algún ejemplo haremos un cambio *ad hoc* sugerido por el integrando, y en muchos otros casos usaremos el cambio a coordenadas polares

$$\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad\qquad \theta(x,y) = \arctan(y/x)$$

cuyo cambio inverso

$$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \qquad\qquad y(\rho,\theta) = \rho \operatorname{sen}\theta$$

tiene jacobiano

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho$$

y por tanto se tiene

$$dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

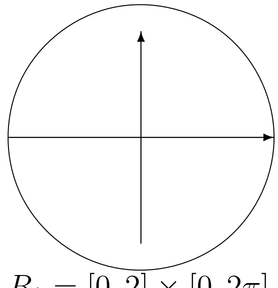
Mediante este cambio, la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ pasa a tener ecuación $\rho = a$, y la recta $y = mx$ pasa a tener ecuación[2] $\theta = \arctan(m)$, por lo que es un cambio aconsejable cuando en el recinto de integración intervienen circunferencias centradas en el origen o rectas que pasan por el origen, o cuando el integrando $f(x,y)$ depende de x^2+y^2 o de $\sqrt{x^2+y^2}$.

Ejemplo 9.3.1. *Hallar* $I_i = \displaystyle\iint_{D_i} (x^2+y^2+1)\,dx\,dy$ *para cada uno de los recintos*

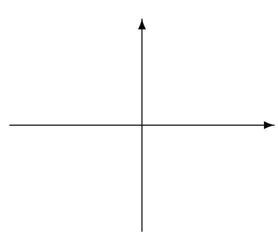
$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\} \qquad D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le x^2+y^2 \le 10\}$$

$$D_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 0\}$$

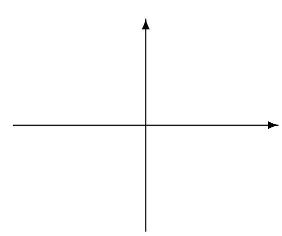
Solución. Tanto el integrando como los recintos sugieren un cambio a polares. De hecho los tres recintos se transforman en *rectángulos* en polares, a saber



$R_1 = [0,2]\times[0,2\pi]$



$R_2 = [\sqrt{2},\sqrt{10}]\times[0,2\pi]$



$R_3 = [0,1]\times[-\pi/4, 3\pi/4]$

y por tanto

[2]Con esto hay que tener un poco de cuidado. Por ejemplo, dada la recta $y = x$, la semirrecta del primer cuadrante tiene ecuación en polares $\theta = \pi/4$ y la del tercer cuadrante es $\theta = 5\pi/4$

$$I_1 = \iint_{R_1} (\rho^2+1)\ \rho\ d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (\rho^2+1)\rho\ d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^3+\rho)\ d\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi(4+2) = 12\pi$$

$$I_2 = \iint_{R_1} (\rho^2+1)\ \rho\ d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} (\rho^2+1)\rho\ d\rho \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} = 56\pi$$

$$I_3 = \iint_{R_1} (\rho^2+1)\ \rho\ d\rho\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^1 (\rho^2+1)\rho\ d\rho \right) d\theta = \pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = 3\pi/4 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 9.3.2. *Calcular* $I = \iint_D \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^4 dx\, dy$*, donde* D *es el recinto encerrado por las rectas* $x = 0$*,* $y = 0$ *y* $x + y = 1$*.*

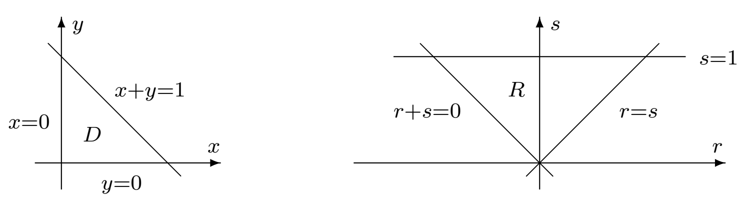
Solución. En vista del integrando, hacemos el cambio de variable

$$r = x - y \qquad\qquad s = x + y$$

para el que se tiene

$$dr\, ds = |J(x,y)|\, dx\, dy = \left\| \begin{matrix} r'_x & r'_y \\ s'_x & s'_y \end{matrix} \right\| dx\, dy = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 2\, dx\, dy$$

En cuanto al recinto, cuando $x = 0$ se tiene $r = -y$, $s = y$ y por tanto la recta $x = 0$ se transforma en la recta $r + s = 0$. Por otra parte, cuando $y = 0$ se tiene $r = x$, $s = x$, luego la recta $x = 0$ se transforma en la recta $r = s$. Finalmente, la condición $x + y = 1$ equivale a $s = 1$, y por tanto el cambio de variable transforma D en el recinto R de la figura:



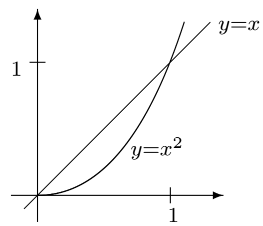
Por tanto

$$I = \iint_R \left(\frac{r}{s} \right)^4 \frac{1}{2}\, dr\, ds = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-s}^{s} r^4 s^{-4}\ dr \right)\ ds = \frac{1}{2} \int_0^1 s^{-4} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{-s}^{s} ds =$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^1 s^{-4}\ 2s^5\ ds = \frac{1}{5} \int_0^1 s\ ds = \frac{1}{5} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{10} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 9.3.3. *Calcular* $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx.$

Solución. En vista del integrando, es aconsejable el cambio a polares. El recinto es



y por tanto la variación del ángulo polar es $\theta \in [0, \pi/4]$. Para cada valor del ángulo, el radio polar ρ varía desde 0 hasta el valor que tome ρ en la parábola $y = x^2$. En polares la ecuación de la parábola es

$$\rho \operatorname{sen}\theta = \rho^2 \cos^2\theta \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen}\theta = \rho\cos^2\theta \qquad \text{ó} \qquad \rho = \operatorname{sen}\theta / \cos^2\theta$$

por lo que

$$I = \iint_R \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \left[\frac{1}{\cos\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

Se podría trabajar directamente en cartesianas: para resolver la integral en y se haría el cambio de variable $y = x\operatorname{senh}(t)$ (considerando x constante), pero las cuentas se complican en seguida. ■

Ejemplo 9.3.4. *Si D es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y = 0$ que queda bajo la recta $y = x$, calcular*

$$I = \iint_D x\,dx\,dy \qquad y \qquad J = \iint_D dx\,dy$$

Solución. Completando cuadrados, la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$, o sea $x^2 + (y-1)^2 = 1$, y por tanto tiene centro $(0, 1)$ y radio 1. El recinto es pues muy similar al del ejemplo anterior, cambiando sólo el arco de parábola por un arco de circunferencia. Este recinto no sugiere un cambio a polares, pues la circunferencia no está centrada en el origen. De hecho, para calcular I es mejor usar coordenadas cartesianas:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_y^{\sqrt{2y-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (2y - y^2 - y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Aquí ha sido mejor empezar integrando con respecto a x, porque al sustituir x^2 han desaparecido las raíces y nos ha quedado la integral de un polinomio.

Si empezamos a calcular J con la misma idea la cosa se complica, pues llegamos en seguida a la integral $\int_0^1(\sqrt{2y-y^2}-y)\,dy$.

Si nos planteamos un cambio a polares se tiene, como en el ejemplo anterior, $\theta \in [0, \pi/4]$, y como la circunferencia se transforma en $\rho^2 - 2\rho \operatorname{sen}\theta = 0$, o sea $\rho = 2\operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho \, d\rho \right) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos(2\theta)) \, d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Realmente, podíamos habernos ahorrado todos los cálculos, pues al estar calculando el volumen de un cuerpo de altura constante 1 sobre D, ese volumen es igual al área de D, o sea el área del cuarto de círculo ($\pi/4$) menos el área del triángulo ($1/2$).

Aprovechando algunos cálculos anteriores, podemos ver cómo se calcularía I en polares:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho\cos\theta\,\rho \, d\rho \right) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho^2 \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \frac{8}{3}\left[\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{6}$$

En resumen, el cambio a polares es aconsejable para calcular J, pero no para calcular I. ■

9.4. Ejercicios (y soluciones)

1. Calcular $\iint_D xy\, dx\, dy$ sobre el rectángulo $D = [0,1] \times [0,3]$. Solución: 9/4.

2. Calcular $\iint_D xe^y\, dx\, dy$ sobre el rectángulo $D = [0,1] \times [0,3]$. Solución: $\frac{1}{2}(e^3 - 1)$.

3. Calcular $\iint_D (x + e^{x+y})\, dx\, dy$ sobre $D = [0,1] \times [-1,0]$. Solución: $e + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$.

4. Calcular $\iint_D \sqrt{xy}\, dx\, dy$ donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \le x \le y\}$. Solución: 2/27

5. Calcular $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$ si D es el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^4$ cuando $x \in [-1,1]$. Solución: $-1/3$

6. Calcular $\iint_D (3xy^2 - y)\, dx\, dy$ si D es la porción de plano que queda bajo la curva $y = |x|$ y sobre la curva $y = -|x|$ cuando $x \in [-1,1]$. Solución: 0

7. Calcular $\iint_D (x^4 + y^2)\, dx\, dy$ si D es la región del plano limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$. Solución: 9/280

8. Calcular $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\, dx\, dy$ si D es el cuadrado de esquinas $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ y $(2,1)$. Solución: 20/3

9. Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 + y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$ si D es el interior de la cardioide de ecuación (en polares) $\rho = a(1 + \cos\theta)$. Solución: πa^3.

10. Calcular $\iint_D \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ si D es la corona circular comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = e^2$ y $x^2 + y^2 = e^4$. Solución: $\pi e^2(3e^2 - 1)$.

11. Calcular $\int_2^4 dx \int_{x/2}^2 (y^2 - 2y)^{1/3}\, dy$ invirtiendo el orden de integración. Sol: $-3/4$.

12. Comprobar las siguientes igualdades haciendo el cambio a coordenadas polares:

    a) $$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy \;=\; \sqrt{2} - 1$$

    b) $$\int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \;=\; \frac{\pi}{3}$$

    c) $$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dx \;=\; \frac{1}{10}$$

    d) $$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)\, dy \;=\; \frac{\pi}{2}\left[(1 + R^2)\ln(1 + R^2) - R^2\right]$$

13. El área A de una región plana D se puede calcular mediante la integral doble
$$A = \iint_D dx\,dy$$
Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4x+4$ e $y^2 = 4-2x$. Sol: 8.

14. Si $f(x,y) \geq 0$ en los puntos de una región plana D, el volumen V de la región del espacio comprendida entre D y la superficie $z = f(x,y)$ se puede calcular mediante la integral doble
$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
   a) Calcular el volumen comprendido entre el cuarto de círculo $x^2+y^2 \leq 1$ (con $x, y \geq 0$) y la superficie $z = y$. Solución: 1/3
   b) Calcular el volumen comprendido entre el círculo $x^2+y^2 \leq 1$ y la superficie $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Solución: $\frac{2\pi}{3}(27-16\sqrt{2})$.

15. El área S de la porción de superficie $z = f(x,y)$ que está sobre cierta región del plano D se puede calcular mediante la integral doble
$$S = \iint_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy$$
   a) Comprobar que el área de la superficie de una esfera de radio R es $4\pi R^2$.
   b) Calcular el área de la porción de la superficie $z = 9-x^2-y^2$ que está por encima del plano XY. Solución: $\frac{\pi}{6}\left(37^{3/2}-1\right)$.

16. Si una plancha ocupa la región D y con densidad puntual $f(x,y)$, entonces la masa total M de la plancha y las coordenadas (x_0, y_0) de su centro de gravedad vienen dadas por las integrales:
$$M = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad x_0 = \frac{1}{M}\iint_D x f(x,y)\,dx\,dy \qquad y_0 = \frac{1}{M}\iint_D y f(x,y)\,dx\,dy$$
Si la densidad es constante y A es el área, las coordenadas del centro de gravedad son:
$$x_0 = \frac{1}{A}\iint_D x\,dx\,dy \qquad y_0 = \frac{1}{A}\iint_D y\,dx\,dy$$
   a) Calcular el centro de gravedad de la cardioide del Problema 9. Solución: $(5a/6, 0)$.
   b) Calcular el centro de gravedad de la figura del Problema 13. Solución: $(2/5, 0)$.
   c) Calcular el centro de gravedad de la lámina limitada por las curvas $x^2+y^2 = 1$, $y = x,\ x = 0$. Solución: $\left(\frac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi}, \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right) \approx (0'25, 0'60)$.
   d) Calcular la masa total y el centro de gravedad de una lámina ocupa el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ con densidad puntual $f(x,y) = xy$. Solución: Masa 1/8, centro $(8/15, 4/10)$.