MATEMÁTICAS II   1º de grado en Químicas

TEMA 3: INTEGRALES DE FUNCIONES DE 2 VARIABLES

Nota: en los ejercicios que siguen R es el rectángulo $[0,1]\times[0,1]$, T es el interior del triángulo de vértices $(0,0),(0,1),(1,1)$, y D es el disco unidad.

1. Calcular las siguientes integrales dobles

$$a)\ \iint_R (x+y)^2\,dxdy \qquad b)\ \iint_R ye^{-xy}\,dxdy \qquad c)\ \iint_R \sin\big(\pi(x+y)\big)\,dxdy \qquad d)\ \iint_T (1-x)y\,dxdy$$

2. Calcula la integral de $f(x,y)=2-x^2-y^2$ sobre las regiones R, T y D, esbozando en cada caso a qué volúmenes corresponde.

3. Calcula las integrales sobre el disco unidad D de las siguientes funciones radiales, esbozando los volúmenes de las gráficas correspondientes

$$a)\ 1-(x^2+y^2) \qquad b)\ 1-\sqrt{x^2+y^2} \qquad c)\ e^{-x^2-y^2} \qquad d)\ (x^2+y^2)e^{-4(x^2+y^2)}$$

4. Calcula el volumen del tetraedro generado por los vectores $\vec{\mathbf{i}}$, $2\vec{\mathbf{j}}$, $3\vec{\mathbf{k}}$.

5. Calcula el volumen de un granero de base rectangular 6×12, y paredes verticales de altura 9 al frente (que está del lado que mide 6) y 12 detrás.

6. Hallar las siguientes integrales de línea, donde ∂D es la circunferencia unidad (en sentido antihorario)

$$a)\ \oint_{\partial D} -y\,dx+x\,dy \qquad b)\ \oint_{\partial D} 2x\,dx+3y\,dy \qquad c)\ \oint_{\partial D} x^2\,dx+2xy\,dy$$

7. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{\mathbf{F}}=x\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{j}}$ para mover una partícula a lo largo de las siguientes curvas

$$a)\ (\cos^3 t,\sin^3 t),\ t\in[0,2\pi] \qquad b)\ (t,t),\ t\in[0,1] \qquad c)\ (t,t^2),\ t\in[0,1]$$

8. Calcula la circulación $\oint_C \vec{\mathbf{V}}\cdot d\mathbf{s}$ del campo $\vec{\mathbf{V}}=-y\vec{\mathbf{i}}+x\vec{\mathbf{j}}$ para las siguientes curvas C (en sentido antihorario)

   (a) la circunferencia de centro el origen y radio R

   (b) el cuadrado con vértices $(\pm1,\pm1)$

   (c) el rombo con vértices $(\pm1,0),(0,\pm1)$.

9. Un mol de gas ideal se halla inicialmente a temperatura 350º K y presión 2 atm, y experimenta una transformación que lo lleva a aumentar en 10º K su temperatura y en 2 atm su presión. Obtener la variación de volumen que se produce en esta transformación calculando sobre un camino apropiado la integral

$$\int_\gamma dV = \int_\gamma \frac{r}{P}\,dT - \frac{rT}{P^2}\,dP.$$

10. Experimentalmente se observa que la temperatura T de cierta masa gaseosa cumple

$$dT = V\,dP + \big(P-aV^{-2}\big)\,dV.$$

Hallar la variación de temperatura necesaria para pasar de $P=1$, $V=1$ a $P=3$, $V=2$.

11. Utiliza el teorema de Green para calcular las siguientes integrales

$$a) \oint_{\partial D} -y^3\,dx + x^3\,dy \qquad b) \oint_{\partial R} \cos y\,dx + x \sin y\,dy \qquad c) \oint_{\partial T} x\,dy - y\,dx$$

12. El teorema de Green puede también escribirse como

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \;=\; \iint_{\Omega} \operatorname{div}\, \vec{\mathbf{E}}\,,$$

donde la primera integral representa el flujo neto del campo $\vec{\mathbf{E}}$ a través de $\partial\Omega$. Esboza los siguientes campos y utiliza la fórmula anterior para calcular los flujos correspondientes

(a) $\vec{\mathbf{E}} = x\vec{\mathbf{i}} + y^3\vec{\mathbf{j}}$ a través del cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

(b) $\vec{\mathbf{v}} = 3x\vec{\mathbf{i}} - 2y\vec{\mathbf{j}}$ a través de la circunferencia unidad

(c) $\vec{\mathbf{B}} = x\vec{\mathbf{i}} + 2x\vec{\mathbf{j}}$ a través de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

13. La ley de Fourier establece que la variación de temperatura por unidad de tiempo en un recinto Ω debe coindicir con el flujo neto de $-\nabla T$ a través de $\partial\Omega$. Suponer que $T(x,y) = 4 - 2x^2 - 4y^2$.

(a) Esboza las curvas de nivel $c = 0, 2, 4$, y la dirección del campo $-\nabla T$ en la que fluye el calor

(b) Calcula la variación de temperatura por unidad de tiempo en el disco unidad unidad.

14. Repite el ejercicio anterior tomando $T(x,y) = 4 - 2x^2 + 4y^2$ (en este caso esboza las curvas de nivel para $c = 0, 2, 4, 6, 8$)