Examen extraordinario de Matemáticas II (1º Químicas) **8/7/2011**

Nombre y dni: ....

<u>`Parte de Cálculo`</u>: `responder sólo en el espacio indicado`

1.- En una reacción química se tienen dos sustancias A y B que en presencia de un catalizador se transforman una en otra y viceversa. Se sabe que cada minuto el 4% de A se transforma en B, el 1% de B se transforma en A, y además cada minuto se desintegran el 2% de A y el 3% de B. Por otro lado, se introducen a ritmo constante 2 gramos/min de sustancia B.

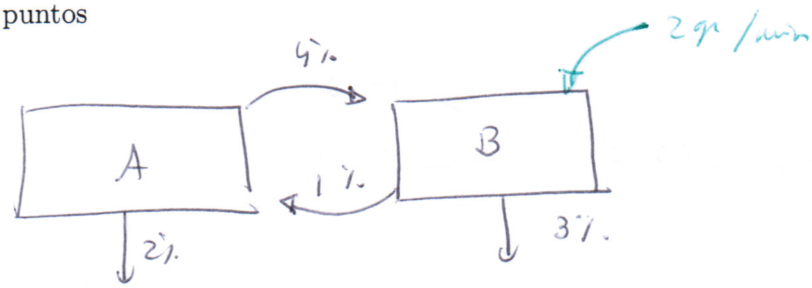
(a) Formula una ecuación diferencial para este problema (no es necesario resolverla).

(b) Determina las cantidades de sustancia A y B a largo plazo.

(c) ¿Qué cantidad de sustancia B deberíamos introducir en la reacción (en lugar de 2 gr/min) para que al llegar al equilibrio la cantidad de A sea exactamente 30 gr?

Nota: 1'5 puntos

(a)



$A(t)$ = gr sustancia A ~~tras~~ tras t min

$B(t)$ = gr sust. B tras t min.

$$\begin{cases} A'(t) = -0'06\,A(t) + 0'01\,B(t) \\ B'(t) = 0'04\,A(t) - 0'04\,B(t) + 2 \end{cases}$$

(b) A largo plazo $\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{eq} \\ B_{eq} \end{pmatrix}$, que se obtiene de

$$\begin{cases} -6A + B = 0 \longrightarrow B = 6A \\ 4A - 4B + 200 = 0 \end{cases} \Longrightarrow 4A - 24A = -200 \Rightarrow A = \frac{200}{20} = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{eq} = 10 \text{ gr}, \quad B_{eq} = 60 \text{ gr.}}$$

(c) Busco h / $\begin{cases} -0'06\,A + 0'01\,B = 0 \\ 0'04\,A - 0'04\,B + h = 0 \end{cases}$ tenga como solución $A = 30$.

Operando como antes

- $-6A + B = 0 \rightarrow B = 6A$
- $4A - 4B + 100h = 0 \rightarrow 4A - 24A = -100h \Rightarrow 20A = 100h$

$\Rightarrow \boxed{A = 5h} \rightarrow \boxed{\text{necesito } h = 6 \text{ gr/min}}$

Triplicando h, se triplican las cantidades de equil.

2.- Una población de hormigas viene dada por $x(t)$ machos e $y(t)$ hembras, según la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2y(t) \end{cases}$$

(a) Resuelve la ED con $x(0) = 10$, $y(0) = 90$, esbozando la gráfica de las soluciones.

(b) A largo plazo, ¿que proporción de machos y hembras habrá en la población?

(c) ¿Cuándo alcanzará la población de hembras el millón de individuos?

Nota: 2 puntos

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Autovalores

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(2-\lambda) = 0$ ⟨ $\lambda = 2$, $\lambda = -1$

Autovectores

$\boxed{\lambda = 2}$ $\left.\begin{array}{l} -u + v = 2u \\ \cancel{2v = 2v} \end{array}\right\} \to v = 3u \Rightarrow \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} u \\ 3u \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

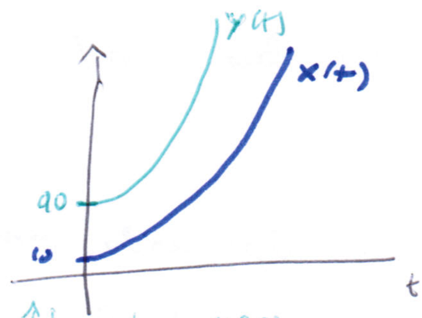
$\boxed{\lambda = -1}$ $\left.\begin{array}{l} -u + v = -u \\ 2v = -v \end{array}\right\} \to v = 0 \Rightarrow \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$t=0 \to$ $\begin{cases} 10 = c_1 + c_2 \\ 90 = 3c_1 \to c_1 = 30 \Rightarrow c_2 = -20 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = 30e^{2t} - 20e^{-t} \\ y(t) = 90e^{2t} \end{cases}}$



ambos crecen exponencialmente

b) Proporciones a largo plazo $\to P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \boxed{25\%} \\ \to \boxed{75\%} \end{array}$

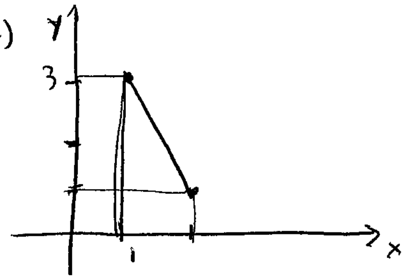
c) Busco $t /$ $90e^{2t} = 1000.000 \to 2t = \ln\left(\frac{100000}{9}\right) \Rightarrow \boxed{t = 5'81}$

3.- (a) Determina los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ en el segmento que une $(1,3)$ con $(2,1)$.

(b) Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y+x)\,\mathbf{i} + (y-x)\,\mathbf{j}$ para mover una partícula a lo largo de la circunferencia unidad (en sentido antihorario).

Nota: 1'5 puntos

(a)



$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

$$2 = -a \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\boxed{b = 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x + 5} \rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Usando multiplicadores de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x = k \cdot 2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = k \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 4y \Rightarrow 5y = 5 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array}}$$

$$f(2,1) = 25 - 4 - 1 = 20 \longrightarrow \text{MÁX}$$

$$f(1,3) = 25 - 1 - 9 = 15 \longrightarrow \text{mín}$$

(b)

$$W = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (-2)\, dx\,dy = -2\ \text{Área}(D) = -2\pi$$