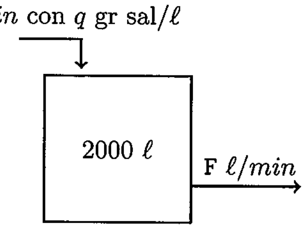
## Examen final de Matemáticas II (1° Químicas) 30/5/2011

**Nombre y dni:** ..........................................................................................

Parte de Cálculo: `responder sólo en el espacio indicado`

1.- Una planta nuclear dispone de un depósito con 2000 litros de agua, del cual salen F litros por minuto para refrigerar el reactor, y entra la misma cantidad de agua procedente de un lago cercano. Debido a un accidente, las aguas del lago contienen $q$ gramos de sal por litro. Sabiendo que la función $x(t)$ = gr de sal en el depósito tras $t$ minutos, cumple la ED

$$x'(t) = 500 - 0'05\,x(t)$$




(a) Determina a partir de la ED el valor de las constantes $F$ y $q$ en el diagrama.

(b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de sal en el depósito? ¿Y la concentración?

(c) Si inicialmente $x(0) = 400$ gramos de sal, resuelve la ED esbozando la gráfica de $x(t)$.

(d) El sistema de seguridad de la central no permite usar aguas con más de 3 gramos de sal por litro. ¿Durante cuánto tiempo podremos utilizar el agua del depósito para refrigerar el reactor?

*Nota:* [redacted]

a) Salen 5% del Depósito $\rightarrow F = \frac{5}{100}\cdot 2000 = 100\ \ell/min$.

Entran $500\ gr\ \frac{sal}{min} = F\cdot q \Rightarrow q = \frac{500}{100} = 5\ gr/\ell$

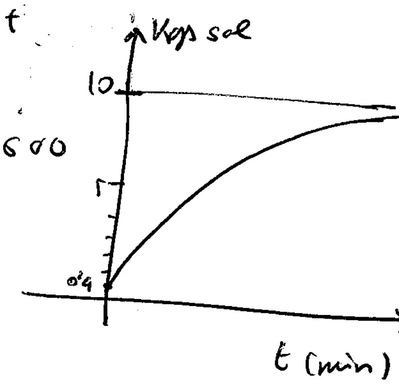
b) $x(t) \rightarrow x_{eq} \Rightarrow 500 - 0'05\,x_{eq} = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{500}{0'05} = 10.000\ gr$

$\Rightarrow C_{eq} = \frac{10.000\ gr}{2000\ \ell} = 5\ gr/\ell$ (la misma concentración que entra)

c) $x(t) = x_{eq} + C\,e^{-0'05t} = 10.000 + C\,e^{-0'05t}$

$x(0) = 400 = 10.000 + C \Rightarrow C = -9.600$

$\Rightarrow x(t) = 10.000 - 9600\,e^{-0'05t}$




d) Busco $t$ / $x(t) = 3\cdot 2000 = 6000\ gr$

$\Leftrightarrow 10.000 - 9600\,e^{-0'05t} = 6000$

$\Rightarrow 4000 = 9600\,e^{-0'05t} \Rightarrow e^{0'05t} = \frac{9600}{4000} \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{96}{40}\right)}{0'05} = \boxed{17'5\ min}$

(en Kg/Ha)

concentración

2.- Después de fumigar un campo, la cantidad de sustancia tóxica en el terreno viene dada por la función $T(x,y) = 120 - x^2 - 4y^2 + 4x + 8y$

(a) Hallar el punto $(x,y)$ donde la toxicidad es máxima, y determinar ésta

(b) Un nido de aves está situado en el punto $(1,0)$. ¿En qué dirección deberían escapar las aves para disminuir lo más rápidamente la toxicidad?

(c) A lo largo del segmento que une $(0,1)$ con $(3,-2)$ hay una tomatera ecológica. ¿Cuáles son las toxicidades máxima y mínima en la tomatera?

(d) Si los límites del campo vienen dados por $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 2$, hallar la cantidad total de sustancia tóxica depositada en el terreno.

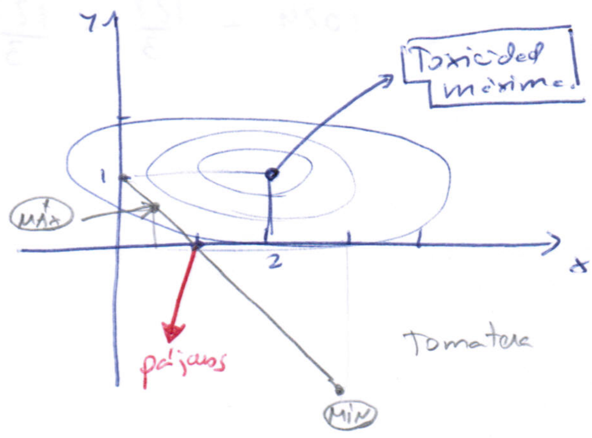
*Nota:* ~~2 puntos~~

(a) $\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = -2x + 4 = 0 \to x = 2 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = -8y + 8 = 0 \to y = 1 \end{cases} \to$ máximo en $(2,1)$

$T(2,1) = 120 - 4 - 4 + 8 + 8 = 128$

(b) La toxicidad disminuye más rápido en la dirección

$-\nabla T(1,0) = -(-2x+4, -8y+8)\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = (-2,-8)$




(c) Recta de $(0,1)-(3,-2)$

$y = ax + b \to \begin{cases} 1 = b \\ -2 = 3a + 1 \to a = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow \boxed{x + y = 1}$

Usando multiplicadores de Lagrange

$\begin{cases} T_x = \lambda \varphi_x \\ T_y = \lambda \varphi_y \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 4 = \lambda \\ -8y + 8 = \lambda \end{cases} \to -2x + 4 = -8y + 8$

$\to \begin{cases} -x + 4y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$5y = 3 \to y = \frac{3}{5}$ ; $x = 1 - y = \frac{2}{5}$

$T(0,1) = 120 - 4 + 8 = 124$

$T(3,-2) = 120 - 9 - 16 + 12 - 16 = 91$ MÍN

$T(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}) = 124'8$ MÁX d)

$T(x,y)$ = cantidad de tóxico (en Kgs/Ha)

$\Rightarrow$ Cantidad total $= \displaystyle\iint_{[0,4]\times[0,2]} T(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^4 120 - x^2 - 4y^2 + 4x + 8y \, dx\right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[120x - \frac{x^3}{3} - 4y^2x + \frac{4x^2}{2} + 8yx\right]_0^4 dy$$

$$= \int_0^2 480 - \frac{64}{3} - 16y^2 + 32 + 32y \, dy$$

$$= \left[512y - \frac{64}{3}y - \frac{16y^3}{3} + \frac{32y^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 1024 - \frac{128}{3} - \frac{128}{3} + 64 = 1088 - \frac{256}{3} = 1.000'6 \text{ Kgs}$$