MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas   Test 3, 15/3/2011

Nombre:

....

La presión atmosférica en una zona geográfica viene dada por la función

$$P(x,y) = 11 - 2x^2 - 2y^2 + 2x + 2y$$

a) Hallar los máximos, mínimos o puntos de silla de esta función.

b) Se coloca una veleta en el punto $(0,0)$, ¿en qué dirección la moverá el viento?

c) Se quieren instalar molinos de viento en el segmento que une $(0,1)$ con $(2,0)$. Hallar el punto de ese segmento donde la presión sería máxima.

a)
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -4x + 2 = 0 \rightarrow x = 1/2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -4y + 2 = 0 \rightarrow y = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{PTO CRÍTICO } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{xx} = -4 \\ P_{xy} = 0 \\ P_{yy} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow D^2P = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{AUTOVALORES} = \{-4, -4\}$$

$\ominus \ominus \Rightarrow$ MÁXIMO

$$\Rightarrow \boxed{\text{Presión máxima } P\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 11 - \tfrac{2}{4} - \tfrac{2}{4} + 1 + 1 = 12}$$

b) El viento se mueve en la dirección $-\nabla P$ (de altas a bajas presiones, por la dirección de máxima pendiente)

$$-\nabla P(0,0) = -(-4x+2, -4y+2)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = (-2, -2)$$

c) Recta que une $(0,1)$ con $(2,0)$

$\Rightarrow \boxed{x + 2y = 2}$

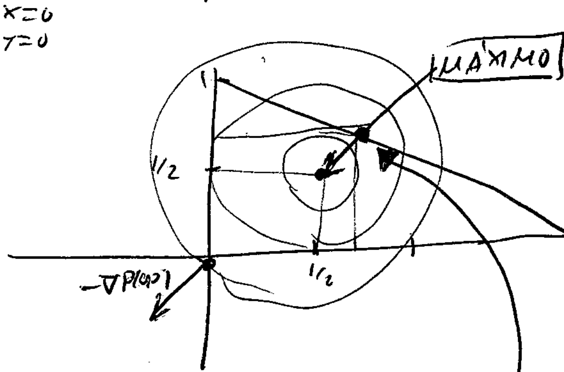
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \lambda \cdot 1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \lambda \cdot 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x + 2 = \lambda \\ -4y + 2 = 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$-4y + 8x - 2 = 0$$

$x = 2 - 2y$

$$\Rightarrow -4y + 16 - 16y - 2 = 0$$

$$20y = 14 \Rightarrow \boxed{y = \tfrac{14}{20} = \tfrac{7}{10} = 0'7}$$



$$\boxed{x = \tfrac{6}{10} = 0'6}$$

MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas Test 3, 15/3/2011

Nombre:

. . . .

La altura de una zona geográfica viene dada por la función

$$h(x,y) = 3 - x^2 + 2x + y^2$$

a) Hallar los máximos, mínimos o puntos de silla de esta función.

b) Hay un manantial en el punto ~~(0,0)~~ (1,1), ¿en qué dirección caerá el agua?

c) Se construye una tubería en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Hallar la altura máxima que alcanza la tubería.

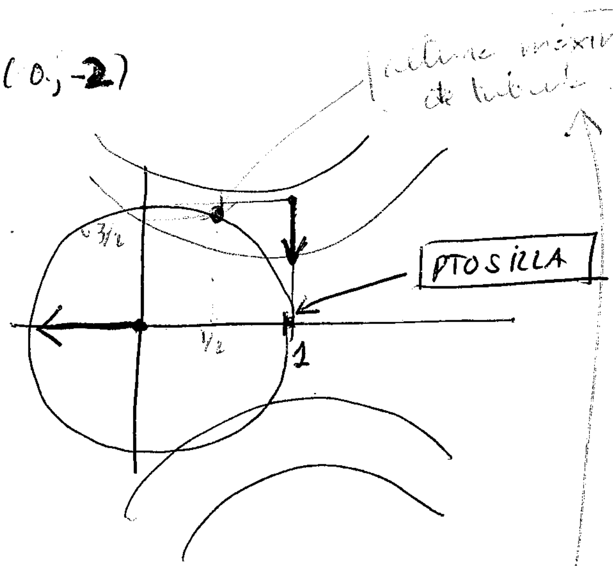
c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial h}{\partial x} = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} = 2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ pto crítico en $(1, 0)$

$\left.\begin{array}{l} h_{xx} = -2 \\ h_{xy} = 0 \\ h_{yy} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D^2 h = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ AUTOVALORES $= \{-2, 2\}$

$\ominus \oplus \Rightarrow$ PTO de SILLA en $(1,0)$

b) El agua caerá en la dirección $-\nabla h(0,0)$ (desde arriba hacia abajo, en la dirección de máxima pendiente)

$-\nabla h(1,1) = -(-2x+2, 2y)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = (0, -2)$



c) $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x + 2 = \lambda \cdot 2x \\[2ex] 2y = \lambda \cdot 2y \xrightarrow{y \neq 0} \lambda = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow -2x + 2 = 2x \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1/2}$

$\Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(NOTA: Si $y = 0 \Rightarrow x = 1$ es pto de altura mínima)

$\Rightarrow h\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{21}{4} = 5'25$