MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas **Test doble, 8/3/2011**

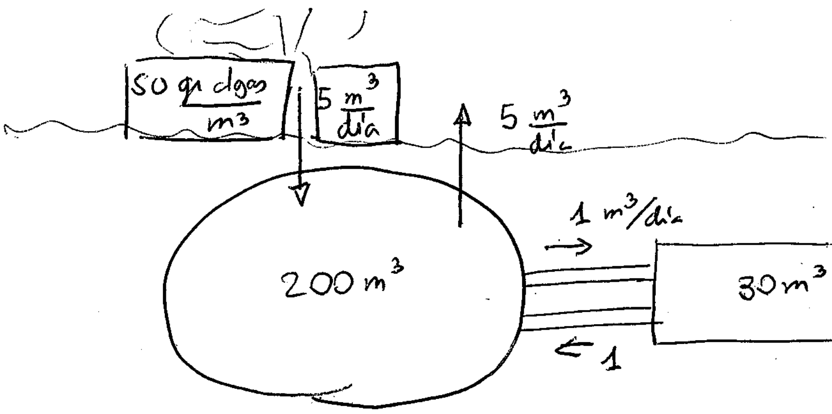
Nombre:

....

1.- Una salina de 200 m^3 intercambia con el mar un caudal de 5 m^3 de agua por día. La salina está conectada con canales con una pequeña balsa de volumen 30 m^3, intercambiándose entre ellas 1 m^3 de agua al día. Una plaga de algas llega a esa zona costera, de modo que el agua de mar que entra en la salina tiene una concentración de 50 gramos de algas por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente la cantidad de algas en la salina y en la balsa tras t días.

a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$.

b) Calcula las cantidades de algas en la salina y en la balsa a largo plazo.



a)
$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{6}{200}x(t) + \dfrac{1}{30}y(t) + 250 \ \dfrac{\text{gr algas}}{\text{día}} \\[2ex] y'(t) = \dfrac{1}{200}x(t) - \dfrac{1}{30}y(t) \end{cases}$$

b) Busco las soluciones de equilibrio

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{6}{200}x + \dfrac{1}{30}y + 250 \\[2ex] 0 = \dfrac{x}{200} - \dfrac{y}{30} \longrightarrow \dfrac{y}{30} = \dfrac{x}{200} \end{cases}$$

$$0 = -\frac{6x}{200} + \frac{x}{200} + 250$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{5x}{200} = 250$$
$$\Downarrow$$

$x = 10.000$ gr algas

$y = 1500$ gr algas

Las concentraciones serían

$$C_x = \frac{10000}{200} = 50 \text{ gr algas}/m^3$$

$$C_y = \frac{1500}{30} = 50 \text{ gr algas}/m^3$$

2.- Las poblaciones de dos especies con una relación simbiótica cumplen

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = +0'5x - y \end{cases}$$

(a) Resolver la ecuación diferencial si $x(0) = 100$, $y(0) = 300$. ¿cuál es mayor a largo plazo?
~~(b) ¿Cuándo se igualan las poblaciones de x e y~~?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ +0'5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ +0'5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 - 1 = 1 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = \lambda^2 + 2\lambda \left\langle \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{matrix} \right.$$

Autovectores

$\boxed{\lambda = 0}$ Busco $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $A\vec{p}_1 = \vec{0}$

$$-u + 2v = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} u = 2v \\ v = c_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{p}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

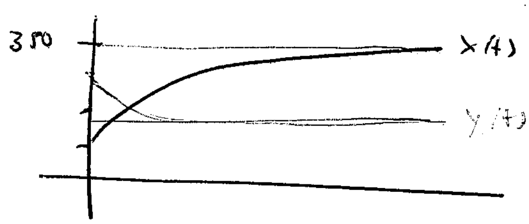
$\boxed{\lambda = -2}$ Busco $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $A\vec{p}_2 = -2\vec{p}_2$

$$-u + 2v = -2u \Rightarrow \left. \begin{matrix} u = -2v \\ v = c_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{p}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^0 + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2c_1 - 2c_2 e^{-2t} \\ y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} \end{cases}$$



En $t = 0$

$$\left. \begin{matrix} 100 = 2c_1 - 2c_2 \\ 300 = c_1 + c_2 \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} 50 = c_1 - c_2 \\ 300 = c_1 + c_2 \end{matrix} \right\}$$

$$350 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = 175, \quad c_2 = 125$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 350 - 250\, e^{-2t} \\ y(t) = 175 + 125\, e^{-2t} \end{cases}} \Rightarrow \boxed{x \text{ mayor a largo plazo}}$$

MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas **Test doble, 8/3/2011**

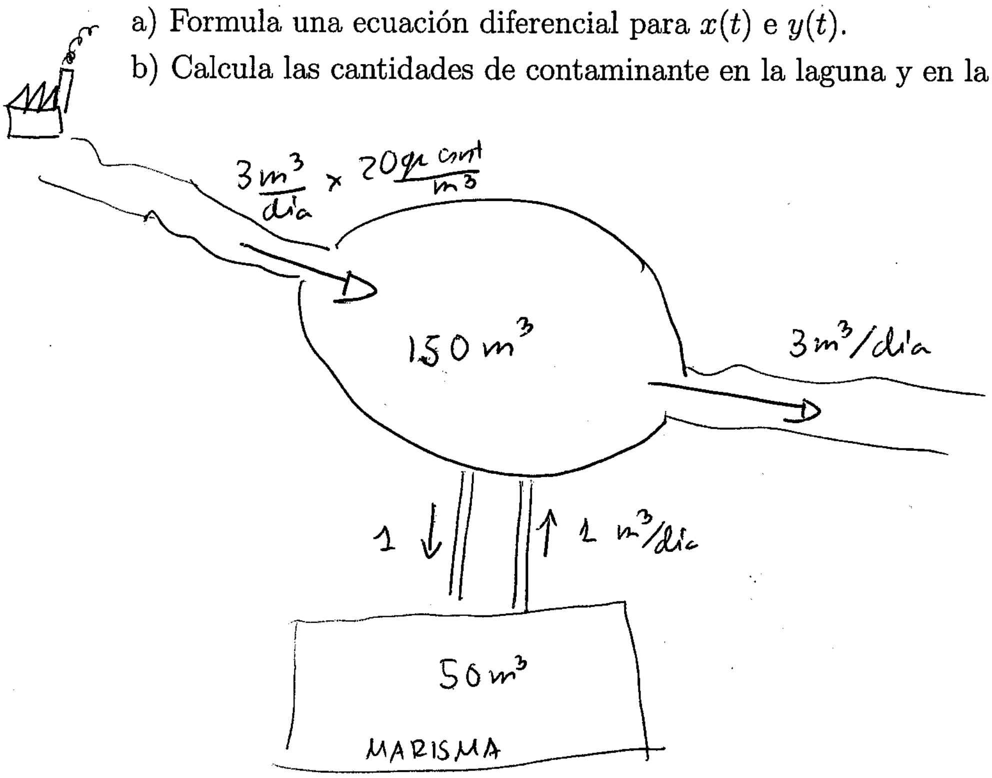
Nombre:

....

1.- Una laguna de 150 m^3 se encuentra en el curso de un río del que recibe un caudal de 3 m^3 de agua por día, y al que aporta la misma cantidad río abajo. La laguna intercambia además 1 m^3 de agua al día con una marisma cercana de volumen 50 m^3. Debido a una instalación industrial río arriba, el agua que entra en la laguna tiene 20 gramos de cierto contaminante por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente la cantidad de contaminante en la laguna y en la marisma tras t días.

a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$.

b) Calcula las cantidades de contaminante en la laguna y en la marisma a largo plazo.



a)
$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{4}{150}x(t) + \dfrac{1}{50}y(t) + 60 \ \dfrac{\text{gr contam}}{m^3} \\ y'(t) = \dfrac{1}{150}x(t) - \dfrac{1}{50}y(t) \end{cases}$$

b) Busco las soluciones de equilibrio

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{4}{150}x + \dfrac{1}{50}y + 60 \\ 0 = \dfrac{x}{150} - \dfrac{y}{50} \Rightarrow \boxed{x = 3y} \end{cases}$$

$$0 = -\frac{12}{150}y + \frac{1}{50}y + 60$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{9}{150}y = 60$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{c} y = 1000 \text{ gr contam.} \\ \Downarrow \\ x = 3000 \text{ gr contam.} \end{array}}$$

$\Leftarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En concentraciones} \\ C_x = \dfrac{3000}{150} = 20 \text{ gr}/m^3 \\ C_y = \dfrac{1000}{50} = 20 \text{ gr}/m^3 \end{array}}$$

2.- Las poblaciones de dos especies que compiten por un territorio cumplen

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

(a) Resolver la ecuación diferencial si $x(0) = 100$, $y(0) = 200$.

(b) ¿Cuál de las especies se extingue, ~~y cuándo ocurre esto~~?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Autovectores

$\boxed{\lambda = 1}$ Busco $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $A\vec{p}_1 = \vec{p}_1$

$$2u - v = u \Rightarrow u = v \Rightarrow \vec{p}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 3}$ Busco $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$: $A\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2$

$$2u - v = 3u \Rightarrow u = -v \Rightarrow \vec{p}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^t - c_2 e^{3t} \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} 100 = c_1 + c_2 \\ 200 = c_1 - c_2 \end{cases}$$

$$300 = 2c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 150, \ c_2 = -50}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = 150 e^t - 50 e^{3t} \\ y(t) = 150 e^t + 50 e^{3t} \end{cases}}$$

⇓

a largo plazo se extingue x