MATEMÁTICAS II $\qquad$ 1º de grado en Químicas

TEMA 1: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Una población de bacterias se duplica cada 6 horas. Si inicialmente hay mil individuos, ¿cuántos habrá al cabo de t horas? ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

2. De cierto material radioactivo se sabe que se desintegra un 20% cada 10 años. ¿Qué porcentaje del material inicial quedará al cabo de 20 años? ¿Cuántos años tardará en desintegrarse un 80% del material inicial?

3. El C_{14} tiene una semivida de 5730 años. En una reciente excavación se ha hallado un hueso fosilizado cuyo contenido en C_{14} es de sólo un 1% repecto a la cantidad que se encuentra en un hueso similar de un ser vivo. Determina la edad del fósil.

4. Un banco nos ofrece un depósito anual que nos abona cada mes un 1% de interés sobre el capital acumulado. Si inicialmente depositamos 3000 euros, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de un año?

5. La proporción de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye un tanto por cierto fijo por cada kilómetro que subimos.

   a) Formula la ecuación diferencial asociada a este problema.

   b) Para el oxígeno, la proporción disminuye un 7% por kilómetro. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responder a la misma pregunta para el hidrógeno, que disminuye un 0'6%.

   c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400.000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?

6. Resolver las ecuaciones diferenciales

$$a) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2} \quad \text{con } x(0) = 1 \qquad\qquad b) \quad \frac{dx}{dt} + 3t^2x^2 = 0 \quad \text{con } x(1) = 1/2.$$

7. Tenemos un recipiente relleno con 1 litro de argón a una presión de 4 atmósferas. Al comprimir lentamente el gas con un pistón, la relación entre el volumen V del recipiente y su presión P viene dada por la ecuación $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{5P}{3V}$.

   a) Calcula P como función de V.

   b) ¿Cuál es la presión cuando el volumen es 1/2 litro?

   c) ¿Hasta qué volumen debemos comprimirlo para que la presión sea de 25 atmósferas?

8. La evolución de una población de bacterias (en millones) viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 0'2x(5-x),$$

   con t = tiempo en días. Si inicialmente hay un millón de bacterias:

   a) Calcula el número de bacterias tras uno y dos días.

   b) Calcula el número de bacterias a largo plazo.

   c) ¿En qué momento la población será de 4 millones?

9. Se está estudiando una especie de cabra montesa. Inicialmente se cuenta con 500 ejemplares, y se sabe que bajo buenas condiciones medioambientales la población crece un 6% cada año. Para evitar un desequilibrio ecológico en la zona se consideran dos planes.

   (a) Plan A: permitir la caza de 10 ejemplares de cabra al final de cada año.

   (b) Plan B: permitir que se cace un 2% de la población total de cabras al final de cada año.

   Calcular cuál sería la población aproximada al cabo de 15 años con cada uno de los planes.

10. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 Kg. Se comienza a sacar líquido del tanque a razón de 3 litros por minuto. Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden al tanque 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro.

    a) Hallar la cantidad de sal en el tanque en función del tiempo.

    b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 Kg. de sal.

    c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

11. Un paciente hospitalizado recibe mediante un gotero 200 miligramos diarios de cierto medicamento. Se sabe que cada día el cuerpo elimina de manera natural una quinta parte del medicamento en la sangre.

    a) Calcular la cantidad de medicamento en el organismo al cabo de 3 días.

    b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

    c) ¿Qué dosis diaria habría que aplicar si queremos que a largo plazo haya 1500 mgr de medicamento en la sangre?

12. La velocidad (en m/seg) de un cuerpo en caída libre viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - Cv^2$$

    donde $g = 9'8$ y C el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el aire.

    a) Un hombre con el paracaídas cerrado tiene $C = 0'001$, y abierto $C = 0'5$. Sin resolver la ecuación, calcular la velocidad a largo plazo en ambos casos.

    b) En el caso del paracaídas cerrado, ¿Cuánto tiempo pasa desde que se tira del avión hasta que alcanza la velocidad de 100 m/s? ¿Y el caso del paracaídas abierto?

    c) En ambos casos dibuja la gráfica de v con respecto a t (no es necesario resolver la ED).

13. En cierto experimento químico se tienen dos compuestos P y Q, cuya combinación da lugar a un nuevo compuesto X, es decir $P + Q \to X$. Inicialmente se tienen p moles de P, q moles de Q y ninguno de X. Nos dicen que $x(t)$ = moles de X en tiempo t, evoluciona según la ecuación

$$x'(t) = k\big(p - x(t)\big)\big(q - x(t)\big).$$

    (a) Explica por qué este modelo es razonable. Justifica cuántas moléculas de X habrá a largo plazo, y esboza la gráfica de $x(t)$ (no es necesario resolver la ecuación).

    (b) Resuelve la ecuación con $k = \frac{1}{2}$, $p = 1$ y $q = 3$. ¿Cuándo será la cantidad de X mayor que la de P?

    (c) Suponer que se modifica la reacción de modo que disminuye progresivamente la velocidad de crecimiento de X, quedando la ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1 - x)(3 - x) - 0'25t.$$

    Tomando $x(0) = 0$, estimar numéricamente la concentración de X en tiempo $t = 2$ (por ejemplo usando el método de Euler con paso $h = 0'5$).

14. Una población de peces, inicialmente con mil individuos y afectada por un factor de pesca estacional, evoluciona según la ecuación diferencial

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \operatorname{sen}(\pi t)$$

donde $x(t)$ = número de individuos (en miles) tras t meses. Representa gráficamente $x(t)$ durante el primer año con la ayuda de un ordenador.

15. Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedales A y B. Diariamente un 7% de aves del humedal A se traslada a B mientras que un 5% de aves de B lo hace a A.

    a) Formular una ecuación diferencial para la evolución de las poblaciones en A y B.

    b) ¿Qué porcentaje de aves habrá en cada humedal a largo plazo?

16. En una reacción química reversible se tienen dos moléculas A y B que en presencia de una enzima se transforman una en otra y viceversa, es decir $A \leftrightarrow B$. Se sabe que cada minuto el 6% de A se transforma en B, y el 2% de B se transforma en A.

    (a) Formula una ecuación diferencial para este problema. A largo plazo, ¿qué proporción habrá de cada una de las moléculas?

    (b) Resolver la ecuación si inicialmente la cantidad de A es el doble que la B. ¿Cuándo será la cantidad de B el doble que la de A?

17. Un restaurante dispone de dos salones comedor, uno para fumadores y otro para no fumadores. El sistema de aire acondicionado limpia un 1% del volumen de cada sala por minuto. Por otro lado, los salones se comunican entre sí por una puerta abierta, intercambiando entre ellos otro 1% de su volumen cada minuto.

    (a) Si inicialmente hay 100 litros de humo en la primera sala y nada en la segunda, determinar cuál es la cantidad máxima de humo que se alcanzará en la segunda sala.

    (b) Suponer ahora que, adicionalemente, se generan durante la noche 3 litros de humo por minuto en la primera sala, ¿qué cantidad de humo habrá en la segunda sala a largo plazo?

18. En el curso de un río hay dos lagunas. Se ha observado que cada día la primera laguna vierte un 10% de su contenido en la segunda, y ésta un 5% de su contenido río abajo. El 1 de enero un camión accidentado vierte sobre la primera laguna 100 litros de un producto tóxico muy soluble.

    (a) Formula una ecuación diferencial para la evolución del contaminante.

    (b) Resuelve la ED y calcula cuándo será máxima la cantidad de contaminante en la segunda laguna, y qué cantidad de contaminante habrá en cada una de ellas en ese momento.

    (c) Determina la cantidad de contaminante acumulado río abajo tras t días. ¿Cuánto tardará en llegar un tercio del contaminante inicial? ¿Cuánto hubiera tardado si no estuviera la segunda laguna?

19. Una balsa de lodo, que permanece con volumen constante, contiene productos tóxicos. Debido a una filtración, cada día un 5% de los contenidos de la balsa terminan en un río cercano. Por otro lado, se ha instalado una depuradora que limpia diariamente un 10% del material tóxico de la balsa.

    (a) Formula un modelo para la evolución temporal del contaminante en la balsa y en el río.

    (b) ¿Qué proporción del producto tóxico que había inicialmente en la balsa terminará a largo plazo en el río?

20. Una población de venados, dividida para su estudio en jóvenes y adultos, satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= 0'6x - 0'2y \end{cases}$$

(a) Determina a partir de la ecuación las tasas de supervivencia de jóvenes y adultos, y el número medio de crías por adulto.

(b) Demuestra que, a la larga, la población crecerá aproximadamente un 27% cada año.

(c) Para evitar un crecimiento incontrolado, se permite la caza anual de una proporción h de los venados adultos. ¿Cuál será ahora la ecuación diferencial? Prueba que $h = 0.6$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.

(d) ¿Es posible seleccionar h de manera que la población de venados se mantenga estable?

21. Un isótopo radiactivo X se desintegra en otro isótopo Y y éste a su vez en un compuesto estable. Se sabe que las cantidades de cada uno de los isótopos, $x(t)$ e $y(t)$, presentes en una roca cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) &= -2x(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

(a) Resuelve la ED si $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

(b) ¿Cuándo se igualan las cantidades de X e Y presentes en la roca? ¿Cuándo es máxima la cantidad de Y, y qué valor alcanza? Esboza la gráfica de las soluciones.

(c) A largo plazo, ¿cuál es la proporción Y/X?

22. `Modelo competitivo:` Dos especies compiten en un territorio; la presencia de una disminuye la tasa de crecimiento de la otra y viceversa:

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$$

Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 90$ y $y(0) = 150$. ¿Desaparece alguna de las dos especies?

23. `Modelo simbiótico:` Dos especies cooperan; la tasa de crecimiento de cada una mejora con la presencia de la otra pero sufre con la abundancia de ella misma:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Resuelve la ecuación sabiendo que inicialmente $x(0) = 200$ y $y(0) = 500$. Esboza las gráficas de las soluciones.

24. `Modelo presa-depredador:` La abundancia del depredador daña la tasa de crecimiento de la presa:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

¿Cuál es el depredador y cuál la presa? Resuelve la ecuación para $x(0) = y(0) = 1000$.

25. La siguiente ecuación es un modelo más realista de presa-depredador (V. Volterra 1926)

$$\begin{cases} x' = -0'1x + 0'03xy \\ y' = 0'2y - 0'25xy \end{cases}$$

(a) Explica cómo crece cada población en ausencia de la otra, y qué ocurre cuando están juntas. ¿Cuál es la solución de equilibrio?

(b) Suponer ahora que, en una época de bonanza mejoran las tasas de supervivencia de ambas especies, quedando la ecuación de la forma

$$\begin{cases} x' = -0'02x + 0'03xy \\ y' = 0'3y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que a pesar de la bonanza se haya *reducido* la población de presas?

(c) Suponer por el contrario que se introduce un pesticida para intentar acabar con la presa, si bien dicho pesticida también afecta al crecimiento natural del depredador, quedando la ecuación

$$\begin{cases} x' = -0'2x + 0'03xy \\ y' = 0'05y - 0'25xy \end{cases}$$

¿Cuál es ahora la solución de equilibrio? ¿Es razonable que el efecto del pesticida haya sido *aumentar* la población de presas?

Nota: En todos los casos es ilustrativo dibujar con ordenador las soluciones para un dato inicial fijo (digamos $x(0) = 2$, $y(0) = 8$), observando en las gráficas cómo afectan los cambios a las poblaciones.

26. Ciertas reacciones químicas tienen comportamientos oscilatorios parecidos al ejercicio anterior (*chemical clocks* o *chemical oscillators*).

• Consideremos una reacción química de la forma

$$A + X \to 2X \qquad X + Y \to 2Y \qquad Y \to E$$

donde la cantidad de reactivo A es muy grande (y se puede suponer constante). Formula un modelo para la evolución de las concentraciones $x(t), y(t)$ de los reactivos X e Y.

• En el modelo *Brusselator*[1] las concentraciones $x(t)$ e $y(t)$ de dos reactivos X e Y cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' = a - (b+1)x + x^2y \\ y' = bx - x^2y \end{cases}$$

(a) Calcula las soluciones de equilibrio.

(b) Comprueba que si $b < 1 + a^2$, el sistema evoluciona hacia una solución de equilibrio constante.

(c) Cuando $b > 1 + a^2$ el sistema evoluciona hacia una solución periódica (*chemical clock*). Comprueba este hecho con un ordenador, utilizando por ejemplo $a = 1$ y $b = 2.5$ (con datos iniciales arbitrarios).

[1] Modelo teórico introducido por el premio Nobel de Química I. Prigogine en 1968; las reacciones son

$$A \to X \qquad 2X + Y \to 3X \qquad B + X \to Y + D \qquad X \to E.$$