MATEMÁTICAS II **1^{o} de grado en Químicas**

TEMA 2: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: DERIVACIÓN

1. Dibuja las curvas de nivel indicadas de las siguientes funciones, y esboza sus gráficas

   a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2, \quad c = 0, 1, 2, 4$ *b)* $g(x,y) = 4 - 3x + 2y, \quad c = 0, \pm 1, \pm 2$

   c) $h(x,y) = xy, \quad c = 0, \pm 1, \pm 2$ *d)* $k(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, \quad c = 0, \pm 1.$

2. Esboza la gráfica de las siguientes funciones radiales

   a) $f(x,y) = 5 - 2(x^2+y^2)$ *b)* $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *c)* $h(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}.$

3. Calcular las derivadas parciales de las siguientes expresiones

   a) $x^2y - 2xy^2 + (x-y)^2$ *b)* e^{2xy} *c)* $\sqrt{x^2+y^2}$ *d)* $P(T,V) = \dfrac{Te^{-\frac{a}{TV}}}{V-b}$

4. Esboza las curvas de nivel y calcula el vector gradiente de la función $1/\sqrt{x^2+y^2}$.

5. El nivel de toxicidad de un suelo viene dado por $T(x,y) = 2x^2 + 4y^2$. Un insecto está situado en $(-1,2)$. ¿En qué dirección deberá moverse para dismimuir lo más rápidamente la toxicidad?

6. Determina y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones

   a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$ *b)* $xy^2 + 2x^2y - 6xy$ *c)* $xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}.$

7. Queremos construir cajas para guardar muestras, con laterales y fondo de hojalata y tapa de plástico. La hojalata cuesta 1 céntimo de euro por cm^2, y el plástico 3 céntimos/cm^2. Las cajas deben tener una capacidad de 2000 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible?

8. Se desea construir una piscina rectangular para almacenar productos tóxicos con un volumen de 1 Hm^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mínima?

9. Queremos construir un pozo cilíndrico para almacenar residuos orgánicos con $3\,m^3$ de volumen. El coste de la excavación es proporcional a $A(1+p^2)$, siendo p la profundidad y A el área (circular) excavada. Hallar el radio y profundidad que dan el coste mínimo.

10. La presión atmosférica en una zona geográfica viene dada por la función

    $$P(x,y) = 11 - 2x^2 - 2y^2 + 2x + 2y$$

    a) Hallar el punto de presión máxima, y el valor de dicha presión.

    b) Se coloca una veleta en el punto $(0,0)$, ¿en qué dirección la moverá el viento?

    c) Se quieren instalar molinos de viento en el segmento que une $(0,1)$ con $(2,0)$. Hallar el punto de ese segmento donde la presión sería máxima.

11. La altura de una zona geográfica viene dada por la función

$$h(x, y) = 3 - x^2 + 2x + y^2$$

a) Hallar los máximos, mínimos o puntos de silla de esta función.

b) Hay un manantial en el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección caerá el agua?

c) Se construye una tubería a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Hallar la altura máxima que alcanza la tubería.

12. La temperatura en un alambre triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ viene dada por la función $T(x, y) = 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 5x - y + 2$. Determina cuáles son la temperatura máxima y mínima en el alambre, y en qué puntos se alcanzan.

13. Se tiene un circuito con 2 resistencias en paralelo R_1, R_2. Hallar la distribución de intensidades I_1, I_2 que minimiza la potencia:

$$P(I_1, I_2) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2,$$

bajo la restricción $I_1 + I_2 = I$.

14. Se encierra un gas en un recipiente con las condiciones $P = 4 \pm 0'1$ atm y $V = 2$ litros ± 50 cc.

(a) Si se cumple la relación $T = 12'2PV$, hallar T dando un margen de error adecuado.

(b) Hacer lo mismo si se cumpliera en su lugar $T = 12'2(V - 0'2)(P + \dfrac{1}{V^2})$.

15. Cuando se conectan dos resistencias eléctricas R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia resultante viene dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Si $R_1 = 300\Omega$ con una precisión del 2%, y $R_2 = 500\Omega$ con una precisión del 3%, calcular R con un margen de error adecuado.