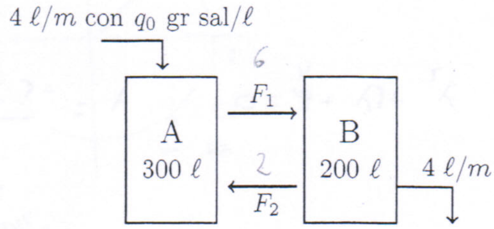
MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas Control 1, 15/3/2012

8'5

[redacted]

1.- Se tienen dos tanques con volúmenes constantes de 300 y 200 litros de agua, respectivamente. Las cantidades de sal $x(t)$ e $y(t)$ en cada uno de los tanques tras t minutos cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) &= -0'02\,x(t) + 0'01\,y(t) + 8 \\ y'(t) &= 0'02\,x(t) - 0'03\,y(t) \end{cases}$$



(a) A partir de la ED determina el valor de las constantes F_1, F_2 y q_0 en el diagrama.

(b) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de sal en cada tanque? ¿Y la concentración?

(c) Resuelve la ED si inicialmente $x(0) = 0$, $y(0) = 800$, esbozando las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$.

Nota: 6 puntos

6

$y'(t), x'(t)$ = CANTIDAD DE SAL QUE ENTRA POR MINUTO

a)

$x'(t) = -2\%\ x(t) + 1\%\ y(t) + 8$

$y'(t) = 2\%\ x(t) - 0'03\%\ y(t)$

$F_1 = 2\% \cdot x(t) = 6\ L/min$

$F_2 = 1\% \cdot y(t) = 2\ L/min$

$q_0 = 2\ gr/L$

$8\ \frac{gr}{m} = 4\ \frac{L}{m} \cdot q_0\ \frac{gr}{\ell}$ $q_0 = 2\ gr/L$

$F_1 = 2\%$ $F_2 = 3 - \frac{4 \cdot 100}{200} = 1\%$

b)

$x'(t) = 0 = -0'02x(t) + 0'01y(t) + 8$

$y'(t) = 0 = 0'02x(t) - 0'03y(t)$ + $x(t) = \frac{0'03 \cdot 400}{0'02} = 600\ gr$

$-0'02y(t) = -8$ $y(t) = 400\ gr$ $x(t) = 600\ gr$

concentración $y(t) = \frac{400}{200} = 2\ gr/L$

$x(t) = \frac{600}{300} = 2\ gr/L$

c)

$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + \begin{pmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -0'02 & 0'01 \\ 0'02 & -0'03 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2 = +6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 2 =$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \; ; \; \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-5+3}{2} = -1 \\ \lambda_2 = \frac{-5-3}{2} = -4 \end{cases}$$

AUTOVALORES

$\lambda_1 = -0'01$

$\lambda_2 = -0'04$

AUTOVECTORES

$\lambda = -1$

$$\left.\begin{array}{l} -2u + v = -u \\ 2u - 3v = -v \end{array}\right\} v = u \qquad u = 1 \quad v = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -4$

$$\left.\begin{array}{l} -2u + v = -4u \\ 2u - 3v = -4v \end{array}\right\} v = -2u \qquad u = 1 \quad v = -2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0'01t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-0'04t} + \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad x(0) = 0 \quad y(0) = 800$$

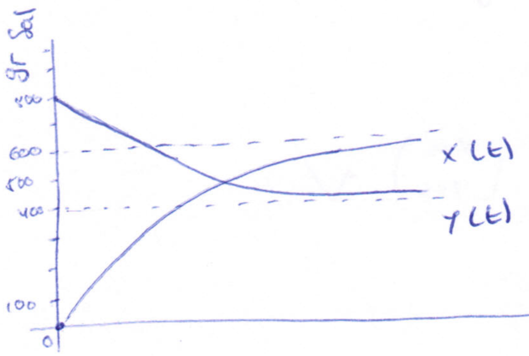
$$\left.\begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 + 600 \\ 800 = c_1 - 2c_2 + 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 + c_2 = -600 \\ c_1 - 2c_2 = 400 \\ \hline 0 \quad 3c_2 = -1000 \end{array} ; \; c_2 = -\frac{1000}{3} \qquad c_1 = -600 - c_2 = -\frac{800}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = -\frac{800}{3} e^{-0'01t} - \frac{1000}{3} e^{-0'04t} + 600 \\ y(t) = -\frac{800}{3} e^{-0'01t} + \frac{2000}{3} e^{-0'04t} + 400 \end{array}\right\}$$

COMPROBAMOS si $t \to \infty$

$x(t) = 600$

$y(t) = 400$

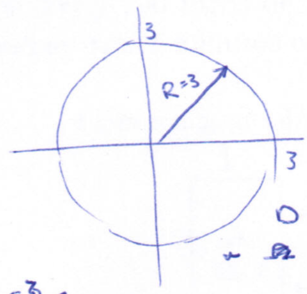


2.- (a) Hallar la masa de una placa circular de centro el origen y radio 3 cuya densidad viene dada por $\rho(x, y) = 1/(3 + x^2 + y^2)$. ¿Cuál es el punto de la placa con mayor densidad?

(b) Esboza el campo de vectores $\overrightarrow{\mathbf{E}} = (2y, -x)$ y calcula la integral de línea $\oint_\gamma \overrightarrow{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, donde γ es la circunferencia de centro (1,0) y radio 2 (en sentido antihorario).

Nota: 4 puntos

2'5



$$\rho(x,y) = \frac{1}{3+x^2+y^2} = \frac{1}{3+r^2}$$

$$\rho = \frac{\int}{\text{Área}}$$

$$M_c = \iint_{D_R} \frac{1}{3+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+r^2}\, \cancel{dxdy}\, dr =$$

$$= \int_0^3 2\pi r \frac{1}{3+r^2}\,dr = 2\pi \int_0^3 \frac{r}{3+r^2}\,dr = \frac{2\pi}{2}\left[\ln(3+r^2)\right]_0^3 = \pi\left(\ln 12 - \ln 3\right) =$$

$$= \pi \ln \frac{12}{3} = \underline{\pi \ln 4}$$

$$\int \frac{r}{3+r^2}\,dr \Rightarrow \int \frac{r}{u}\,\frac{du}{2r} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(3+r^2)$$

$3+r^2=u$

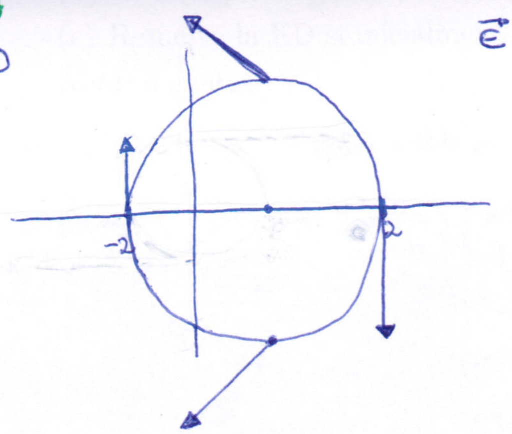
$2r\,dr = du\ ;\ dr = \frac{du}{2r}$

$M_c = \pi \ln 4$

El punto de la placa con mayor densidad es el (0,0) ya que al alejarse de él este es menor. $\rho(0,0) = 1/3 = \text{max}$

*Continuación abajo:

(b)



$\vec{E} = (2y, -x)$

En $(2,0)$: $\vec{E} = (0,-2)$

$(-1,0)$: $\vec{E} = (0,1)$

$(1,2)$: $\vec{E} = (-1,4)$

$(1,-2)$: $\vec{E} = (-1,-4)$

aplicando el teorema de Green.

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = \iint_\gamma \left(-\frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-x)}{\partial x}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_\gamma (-2-1)\,dx\,dy = -3\cdot\text{área} = -3\cdot\pi r^2 = -3\cdot\pi\cdot 2^2 = -12\pi$$