Examen de julio. Matemáticas II (1º Qu...

Nombre y dni: ...

<u>Parte de Cálculo</u>: responder sólo en el espacio indicado

1.- Un isótopo radiactivo X se desintegra en otro isótopo Y y éste a su vez en un compuesto estable. Se sabe que el número de gramos de cada uno de los isótopos, $x(t)$ e $y(t)$, presentes en una muestra cumplen la ED

$$\begin{cases} x'(t) = -0'2x(t) \longrightarrow \\ y'(t) = 0'2x(t) - 0'3y(t) \end{cases}$$

A largo plazo: $0 = -0'2 x_{eq} \to 0'2 = x_{eq}$

2'5

(a) Resuelve la ED si $x(0) = 10$ e $y(0) = 0$, esbozando la gráfica de las soluciones.

(b) ¿Cuándo es máxima la cantidad de Y, y qué valor alcanza? ¿Cuándo se igualan las cantidades de X e Y presentes en la roca?

(c) Si se añade de forma continuada 3 gr/min de sustancia X, ¿qué cantidad de cada sustancia habrá a largo plazo?

Nota: 2'5 puntos

a) $x'(t) = -0'2\,x(t) \longrightarrow x(t) = x(0)\,e^{-rt}$

$$\boxed{x(t) = 10\,e^{-0'2t}}$$

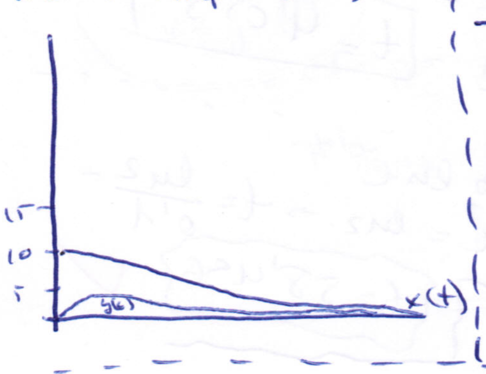
$$A = \begin{vmatrix} -0'2 & 0 \\ 0'2 & -0'3 \end{vmatrix} \longrightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0'2-\lambda & 0 \\ 0'2 & -0'3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-0'2-\lambda)(-0'3-\lambda) \longrightarrow \begin{cases} -0'2 = \lambda_1 \\ -0'3 = \lambda_2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -0'2$

$$\begin{pmatrix} -0'2 & 0 \\ 0'2 & -0'3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (-0'2)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

1. GRÁFICA apartado a)



$-0'2u = -0'2u \Rightarrow u = u.$

$0'2u - 0'3v = -0'2v.$

$0'2u = 0'3v - 0'2v = 0'1v.$

$0'2u = 0'1v \Rightarrow \boxed{\frac{0'2u}{0'1} = v}$

$u = 1.$

$\hookrightarrow v = \frac{0'2 \cdot 1}{0'1} = 2.$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -0'3$

$$\begin{pmatrix} -0'2 & 0 \\ 0'2 & -0'3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (-0'3)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$0'2u - 0'3v = -0'3v$

$0'2u = 0$

$\boxed{u = 0}$ $\boxed{v = 1.}$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

~~$y(t)$~~

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = c_1 \vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{p}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-0'2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}e^{-0'3t}$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 e^{-0'2t} + 0\\ 2c_1 e^{-0'2t} + 2c_2 e^{-0'3t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-0'2t} \\ y(t) = 2c_1 e^{-0'2t} + 2c_2 e^{-0'3t} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 10 e^{-0'2t} \\ y(t) &= 20 e^{-0'2t} - 20 e \end{aligned}}$$

$x(0)=10$
$y(0)=0$ $\longrightarrow$

$x(0) = 10 = e^{-0'2t} c_1$ ($\to 1$)

$c_1 = 10$.

$y(0) = 0 = 2\cdot 10\, e^{-0'2t} + 2c_2 e^{-0'3t}$ ($\to 1$, $\to 1$)

$0 = 20 + 2c_2$

$-20 = 2c_2 \Rightarrow -10 = c_2$.

$\to y(4'055) = 20(e^{-0'2\times 4'055} - $

$\{ y(4'055) = 2'$

cantidad de Y má

b)1 $y(t)$ máx. cuando $y'(t)=0$.

$0 = 0'2\,x(t) - 0'3\,y(t) = 2e^{-0'2t} - 6e^{-0'2t} + 6e^{-0'3t}$

$0 = -4e^{-0'2t} + 6e^{-0'3t} \to 4e^{-0'2t} = 6e^{-0'3t}$

$\ln(4e^{-0'2t}) = \ln(6e^{-0'3t})$

$\ln 4 + \ln e^{-0'2t} = \ln 6 + \ln e^{-0'3}$

$\ln 4 - \ln 6 = -0'1t$

$\frac{-0'4057}{-0'1} = \boxed{t = 4'055}$

b)2 Sus concentraciones serán iguales cuando $y(t) = x(t)$

$\cancel{10} e^{-0'2t} = \cancel{20}(e^{-0'2t} - e^{-0'3t})$

$e^{-0'2t} = 2e^{-0'2t} - 2e^{-0'3t}$

$+1e^{-0'2t} = +2e^{-0'3t} \longrightarrow -0'2t = \ln 2 + \ln e^{-0'3t}$

$-0'2t + 0'3t = \ln 2 \to t = \frac{\ln 2}{0'1} =$

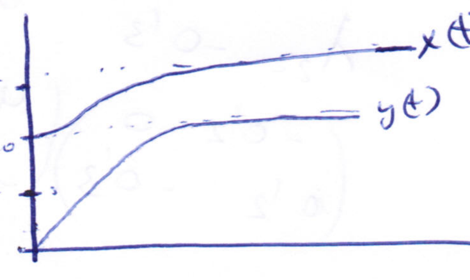
$\boxed{t = 58'496}$

c) $\begin{cases} 0 = -0'2\,x_{eq} + 3 \longrightarrow 0'2\,x_{eq} = 3 \quad \{x_{eq} = \frac{3}{0'2} = 15\} \\ 0 = 0'2\,x_{eq} - 0'3\,y_{eq} \end{cases}$

$0 = (0'2\cdot 15) - 0'3\,y_{eq}$

$\frac{3}{0'3} = \boxed{y_{eq} = 10.}$

A largo plazo: $\longrightarrow$



Para $x(0) = 10$ y $y(0) = 0$ $\longrightarrow$

2.- En cierta zona del Mediterráneo la profundidad del mar (en metros) en el punto (x, y) viene dada por la función $p(x, y) = 360 - x^2 - 4y^2 + 4x + 24y$

(a) Hallar el punto (x, y) donde la profundidad es máxima, y determinar ésta

(b) Un barco está en las inmediaciones del punto $(2, 13)$. ¿Qué profundidad hay en esa zona? ¿Hacia qué punto cardinal debería navegar para no encallar?

(c) Un grupo de submarinistas bucea diariamente a lo largo de la recta que une $(3, 0)$ con $(0, 3)$. ¿Cuáles son las profundidades máxima y mínima en esa trayecto?

(d) En la zona limitada por $0 \le x \le 3$ y $0 \le y \le 2$ hay una piscifactoria. ¿Qué volumen de agua alberga esta zona? Si la especie admite una densidad de hasta 5 peces por m^3, ¿cuántos peces cabrían en la piscifactoría?

Nota: 2'5 puntos

1'2

a) $P(x,y) = 360 - x^2 - 4y^2 + 4x + 24y$

$$P_x = -2x + 4 = 0 \qquad -2x = -4 \qquad \boxed{x = 2}$$
$$P_y = -8y + 24 = 0 \qquad -8y = -24 \qquad y = \frac{24}{8} \qquad \boxed{y = 3}$$

$P(2,3) \rightarrow$ Punto crítico

$$D^2 f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} |-2| = \ominus \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -2(-8) = \oplus \end{array} \Big\} \rightarrow \text{Máximo en el punto } (2,3)$$

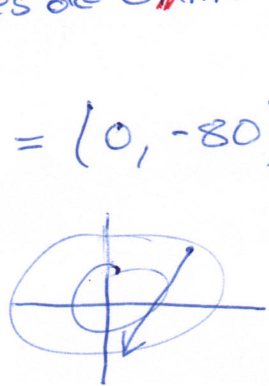
$$P(2,3) = 360 - (2)^2 - 4(3)^2 + 4(2) + 24(3)$$
$$\Rightarrow 360 - 4 - 36 + 8 + 72 = 400$$

→ La profundidad máxima se halla en el punto (2, 3) con una profundidad de 400 ~~km~~.

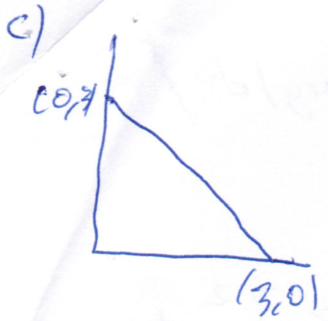
b) $$P(2,13) = 360 - (2)^2 - 4(13)^2 + 4(2) + 24(13)$$
$$\Rightarrow 360 - 4 - 676 + 8 + 312 = 0$$

→ La profundidad en $P(2,13)$ es de 0 ~~k~~m.

$$\nabla(2,13) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(2,13), \frac{\partial P}{\partial y}(2,13)\right) = (0, -80)$$ → Debe navegar hacia el sur.



c)



$$\frac{y}{3} = \frac{-x+3}{3}$$

$$y = -x+3$$

$$\varphi = y + x - 3 = 0$$

✓

$$P = 360 - x^2 - 4y^2 + 4x + 24y$$

$$\nabla P = \lambda \nabla \varphi$$

$$\begin{cases} -2x+4 = \lambda \\ -8y+24 = \lambda \end{cases} \quad -2x+4 = -8y+24$$

$$-2x+8y+4-24 = 0$$

$$-2x+8y-20 = 0$$

$$-2x = 20-8y$$

error

$$\boxed{-x = 10-4y}$$

$\ominus$

$$10-4y+\overbrace{y-3}=0$$

$$10-3y-3=0$$

$$-3y=-7$$

$$\boxed{y = \frac{7}{3}} \quad 2'6$$

$$x = 10-4\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}} \quad 0'4$$

$$P(0,3) = 360 - 4(3)^2 + 24(3) = 396\,Km$$ ✓

$$P(3,0) = 360 - (3)^2 + 4(3) = \underline{363\,Km}$$ → Profundidad mínima

$$P\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right) = 360 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 24\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$360 - \frac{4}{9} - \frac{196}{9} + \frac{8}{3} + \frac{168}{3}$$

$$360 - \frac{200}{9} + \frac{176}{3} = \frac{3568}{9} = \underline{396'44\,Km}$$

↓

Profundidad máxima

bien salvo error.

d) $0 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq y \leq 2 \quad p(x,y) = 360 - x^2 - 4y^2 + 4x + 24y$

$$\int_0^3 \left[\int_0^2 (360 - x^2 - 4y^2 + 4x + 24y)\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^3 \left[360y - x^2y - \frac{4y^3}{3} + 4xy + \frac{24y^2}{2} \right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^3 \left(720 - 2x^2 - \frac{32}{3} + 8x + 48 \right) dx = \int_0^3 \left(768 - \frac{32}{3} - 2x^2 + 8x \right) dx =$$

$$= \left[768x - \frac{32}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_0^3 = \boxed{2290 \ m^3}$$

- 5 peces por m^3

$2290 \cdot 5 = \boxed{11450}$ peces cabrían en la piscifactoria