4'7

Examen final de Matemáticas II (1º Químicas) 25/5/2012

Nombre y dni: ..[redacted]

Parte de Cálculo: responder solo en el espacio indicado

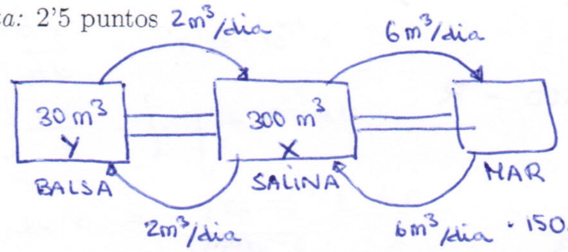
1.- Una salina de 300 m^3 intercambia con el mar un caudal de 6 m^3 de agua por día. La salina está conectada con canales con una pequeña balsa de volumen 30 m^3, intercambiándose entre ellas 2 m^3 de agua al día. Un petrolero embarranca en esa zona costera, de modo que el agua de mar que entra en la salina tiene una concentración de 150 gramos de alquitrán por m^3. Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan respectivamente los gramos de alquitrán en la salina y en la balsa tras t días. 2'5

a) Formula una ecuación diferencial para $x(t)$ e $y(t)$ (no resolver).

b) A largo plazo, ¿cuánto alquitrán (en gramos) habrá en la salina y en la balsa? ¿Cuál será la concentración en cada una (en gramos/m^3)?

c) Se instala un sistema de limpieza en la balsa. ¿Cuántos gramos de alquitrán debería retirar por día para que a largo plazo la concentración en la balsa no supere los 50 gr/m^3?

Nota: 2'5 puntos



$x'(t)$ = gr de alquitrán en salina tras t días

$y'(t)$ = gr de alquitrán en balsa tras t días

$6 m^3/dia \cdot 150 g/m^3 = 900$ g/dia

a) $$\left.\begin{array}{l} x'(t) = -\dfrac{8}{300}x(t) + \dfrac{2}{30}y(t) + 900 \\ y'(t) = \dfrac{2}{300}x(t) - \dfrac{2}{30}y(t) \end{array}\right\}$$

b) Calculo las soluciones de equilibrio, para ello debo comprobar que los autovalores son negativos

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{300} & \frac{2}{30} \\ \frac{2}{300} & -\frac{2}{30} \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 300} \tilde{A} \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} \qquad |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -8-\lambda & 20 \\ 2 & -20-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-8-\lambda)(-20-\lambda) - 40 = 160 + 8\lambda + 20\lambda + \lambda^2 - 40 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 28\lambda + 120 = 0$$

$$\lambda = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 120 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-28 \pm 17'43}{2} \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = -22'715 \rightarrow \lambda_1 = -0'076 \\ \searrow \lambda_2 = -5'285 \rightarrow \lambda_2 = -0'017 \end{array}$$

$x(t) \equiv x_{eq}$ $\quad y(t) \equiv y_{eq}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -\dfrac{8}{300}x_{eq} + \dfrac{2}{30}y_{eq} + 900 \\ 0 = \dfrac{2}{300}x_{eq} - \dfrac{2}{30}y_{eq} \end{array}\right\} \rightarrow x_{eq} = \frac{2}{30}y_{eq} \cdot \frac{300}{2} = 10 y_{eq} = \underline{\underline{45.000 gr}}$$

$$0 = -\frac{8}{300} \cdot (10 y_{eq}) + \frac{2}{30}y_{eq} + 900$$

$$0 = -\frac{80}{300}y_{eq} + \frac{2}{30}y_{eq} + 900 \nearrow \quad \frac{1}{5}y_{eq} = 900$$

$$\underline{\underline{y_{eq} = 4500}} \text{ gr}$$

$$X_{eq} = 45.000\ gr \cdot \frac{1}{300\ m^3} = \underline{\underline{150\ g/m^3}}$$

$$Y_{eq} = 4.500\ gr \cdot \frac{1}{30\ m^3} = \underline{\underline{150\ g/m^3}}$$

c) $Y_{eq} = 50\ g/cm^3 \cdot 30\ cm^3 = 1500\ g$

R = cantidad que debo retirar

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\frac{8}{300} X_{eq} + \frac{2}{30} Y_{eq} + 900 \\ 0 &= \frac{2}{300} X_{eq} - \frac{2}{30} Y_{eq} - R \end{aligned}\right\} \rightarrow 0 = -\frac{8}{300} X_{eq} + 100 + 900$$

$$X_{eq} = 37.500\ g$$

$$0 = \frac{2}{300} \cdot 37.500 - \frac{2}{30} \cdot 1500 - R$$

$$R = 250 - 100 = \underline{\underline{150\ g/dia}}$$

2.- El decaimiento radiactivo del plutonio-239 cumple la ecuación diferencial

$$x'(t) = -r\,x(t)$$

donde $x(t)$ es la cantidad de sustancia tras t años, y $r = 2'86 \cdot 10^{-5}$. En 1966, debido a un accidente, se esparcieron 3 Kg de ^{239}Pu en una zona de la costa almeriense.

(a) ¿Qué cantidad queda todavía, 46 años después?

(b) ¿Cuánto tiempo debe aún pasar para que se reduzca en un 90% el plutonio inicialmente caído?

(c) Determina la semivida del ^{239}Pu.

Nota: 1'5 puntos

1'5

a) $x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot t}$; $x(46) = 3 \cdot e^{-2'86 \cdot 10^{-5} (46)} = 2'996$ Kg

b) Busco t para $x(t) = 0'1 \cdot x_0$

$\cancel{x_0} \cdot e^{-r \cdot t} = 0'1 \cdot \cancel{x_0}$; ~~lne~~ $(-r \cdot t) = \ln 0'1$

$t = \frac{\ln 0'1}{-r} \simeq 80510$ años

c) Busco t para $x(t) = 0'5 \cdot x_0$

$\cancel{x_0} \cdot e^{-rt} = 0'5 \cdot \cancel{x_0}$; $t = \frac{\ln 0'5}{-r} \simeq 24236$ años

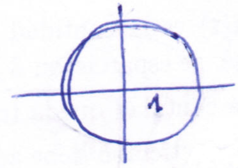
3.- La densidad en una placa circular de radio 1 (centrada en el origen) viene dada por la función

$$\rho(x,y) = 3 - x^2 - y^2.$$

(a) Determina los puntos de densidad máxima y mínima, dando el valor de dichas densidades.

(b) Calcula la masa total de la placa.

Nota: 1 punto



b)

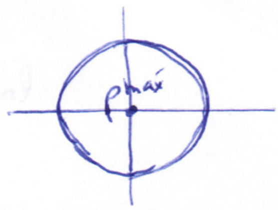
$$M = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\, dx\, dy$$

Lo resolveremos como función radial $\boxed{\rho(r) = 3 - r}$

$$M_T = \int_0^r 2\pi r (3-r)\, dr = 2\pi \int_0^r (3r - r^2)\, dr = 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right] = 2\pi \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}\pi = \boxed{7'33\ g/cm^3}$$

a)



Punto de densidad máxima → $P_1(0,0)$

densidad → $\rho(0,0) = 3\ g/cm^3$

Punto de densidad mínima → $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$, $P(0,-1)$, $P(-1,0)$

(los que están en el borde de la cfa) densidad en dichos puntos $\rho = 2\ g/cm^3$