MATEMÁTICAS II, 1º grado Químicas   Test 2, 16/2/2012

Nombre: ....

En cierta reacción química, el número de moles de producto tras t minutos, $N(t)$, cumple la ecuación diferencial

$$N'(t) = \frac{1}{4}\,(N(t)-1)\,(5-N(t)).$$

(a) Esboza la gráfica de $N(t)$ en los casos $N(0)=2$ y $N(0)=8$. A largo plazo, ¿cuántos moles de producto habrá en cada caso?

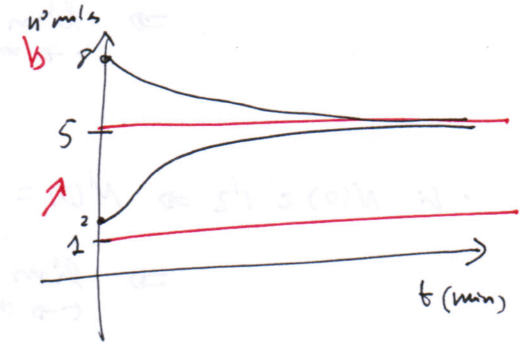
(b) Si $N(0)=2$, ¿cuánto tardará en obtenerse obtener 4'5 moles de producto?

(c) En otro laboratorio se hace la misma reacción pero extrayendo además un cuarto de mol de producto por minuto. Si $N(0)=2$, ¿qué ocurrirá a largo plazo? ¿Y si $N(0)=1'2$?

(a) Busco sol. de equilibrio

$N(t) \equiv N_{eq}$

$\hookrightarrow \quad 0 = \frac{1}{4}(N_{eq}-1)(5-N_{eq}) \Rightarrow N_{eq} \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$



• Si $N(0)=2 \Rightarrow N'(0) = \oplus \Rightarrow N \nearrow$

• Si $N(0)=8 \Rightarrow N'(0) = \ominus \Rightarrow N \searrow$

$\hookrightarrow$ En ambos casos $\boxed{\lim_{t\to\infty} N(t) = 5 \text{ moles}}$

(b) Resuelvo la ED

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{4}(N-1)(5-N) \Rightarrow \int \frac{dN}{(N-1)(5-N)} = \int \frac{dt}{4} = \frac{t}{4} + C$$

$$\frac{1}{(N-1)(5-N)} = \frac{1/4}{N-1} + \frac{1/4}{5-N} \Rightarrow \int \frac{dN}{(N-1)(5-N)} = \frac{1}{4}\ln(N-1) - \frac{1}{4}\ln(5-N)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln\left(\frac{N-1}{5-N}\right) = \frac{t}{4} + C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{N-1}{5-N}\right) = t + \tilde{C} \xrightarrow{t=0 \Rightarrow N=2} \ln\frac{1}{3} = \tilde{C}$$

Busco t : $N(t) = 4'5 \Rightarrow \ln\left(\frac{3'5}{0'5}\right) = t + \ln\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow t = \ln 7 - \ln\frac{1}{3} = \ln 7 + \ln 3 =$$

$$= \ln 21 = 3'04 \text{ min.} \simeq 3'3''.$$

c) $N' = \frac{1}{4}(N-1)(5-N) - \frac{1}{4}$ se extraen 0'25 moles/min

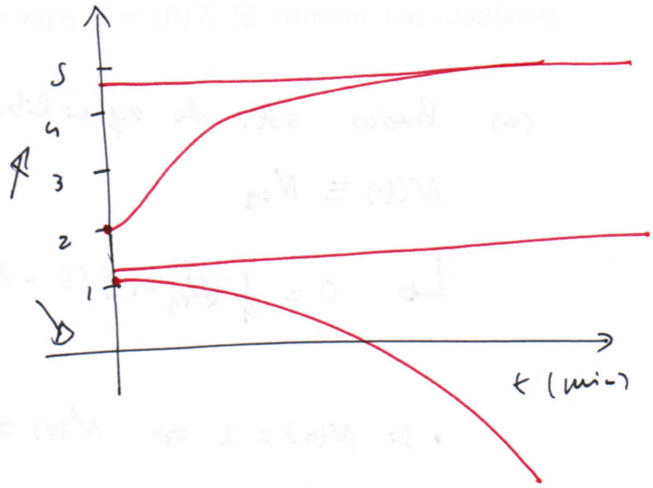
Busco sol de equilibrio

$$\frac{1}{4}\left((N-1)(5-N)-1\right)=0 \iff 5N-5-N^2+N-1=0$$

$$\Rightarrow N^2-6N+6=0 \Rightarrow N=3\pm\sqrt{3} \begin{cases} 4'73 \\ 1'27 \end{cases}$$

- si $N(0)=2 \Rightarrow N'(0)=\oplus$

  $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = 4'73$



- si $N(0)=1'2 \Rightarrow N'(0)=\ominus$

  $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} N(t) = -\infty$

  $\Downarrow$

  en algún momento $N(t)=0$.