

UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Transformada de Fourier, conjuntos de Kakeya y aplicaciones

Fernando Ballesta Yagüe

2021

Declaración de originalidad

Fernando Ballesta Yagüe, autor del Trabajo de Fin de Grado “Transformada de Fourier, conjuntos de Keakeya y aplicaciones”, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 22 de junio de 2021

Fdo.: Fernando Ballesta Yagüe

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Quiero agradecer a Gustavo Garrigós, mi tutor, toda la ayuda y el tiempo que me ha dedicado sin tener por qué. Gracias a él he aprendido mucho más de lo que imaginaba al empezar este trabajo. Y quiero dar las gracias a mi familia y a mis amigos por aguantar a este que soy yo. Sin ellos, no hubiera llegado hasta aquí.

Índice General

Abstract	iii
Resumen	ix
1 La Transformada de Fourier	1
1.1 Definiciones, ejemplos y propiedades básicas.	1
1.1.1 Propiedades básicas	1
1.1.2 Ejemplos	9
1.2 El teorema de inversión	10
1.3 Teorema de Plancherel y transformada en $L^2(\mathbb{R}^n)$	13
1.3.1 El teorema de Plancherel	13
1.3.2 Consecuencias del teorema de Plancherel	14
1.3.3 Definición de la T.F. en $L^2(\mathbb{R}^n)$	17
1.4 Anexo	19
1.4.1 Clase \mathfrak{X}_C	19
2 El conjunto de Kakeya	21
2.1 Nota histórica sobre el problema	21
2.2 Notación y nociones previas	22
2.3 Construcción base	22
2.4 El árbol de Perron	25
2.5 Anexos	35
2.5.1 Traslaciones realizada en las construcción del conjunto K	35
2.5.2 Cálculo de las constantes de los rectángulos.	36
3 El problema del multiplicador de la bola	39
3.1 Contexto histórico del problema	39
3.1.1 La conjetura del disco	40
3.1.2 Consideraciones previas	42
3.2 Primera parte: acotación superior	42
3.2.1 Acotación de S equivale a acotación uniforme de los S_R	43
3.2.2 Espacios L^p con valores vectoriales	43
3.2.3 Multiplicador de bolas de centro y radio arbitrario	45
3.2.4 Multiplicador de semiespacios	47
3.3 Segunda parte: acotación inferior	50
3.4 Contraejemplo del multiplicador de la bola	54
3.5 Anexo	58
3.5.1 Lema de la norma euclídea	58

4	Apéndice	59
4.1	Resultados previos	59
4.1.1	Teoría de la medida e integración	59
4.1.2	Espacios de Banach	61
4.1.3	Espacios de Hilbert	62
4.1.4	Espacios L^p	62
4.1.5	Convoluciones	64
4.1.6	Aproximaciones de la identidad	68
4.2	Fórmulas de Leibniz	72
4.3	Transformada de Fourier de una derivada	74
4.4	Resultados de geometría elemental	78
4.4.1	Demostración detallada del lema 4.45	79
	Bibliografía	83

Abstract

This essay is focused on the study of one of the main tools of Harmonic Analysis: the Fourier transform.

Chapter 1 is dedicated to the theoretical study of the Fourier transform. We will begin by giving its pointwise definition for functions of $L^1(\mathbb{R}^n)$: let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, its Fourier transform is defined as the function $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ given by

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. We will check that it is well defined, and we will see some of its basic properties, such as the fact that it is bounded by $\|f\|_{L^1}$, its continuity, and the Riemann-Lebesgue lemma, which establishes that $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

We will study how some important operators (translations, dilatation, modulation, linear maps...) affect the Fourier transform of a function. We will understand how the Fourier transform relates to derivatives, obtaining as a consequence an important principle of duality: the smoother a function is, the faster its Fourier transform decays; and the faster a function decays, the smoother its Fourier transform is.

We will introduce the Fourier transform of some specific functions. The most important will be the Fourier transform of a Gaussian function, because it will let us prove, combined with the theory of Approximations of the Identity introduced in the appendix, the first main theorem of this essay: the Fourier Inversion theorem. This theorem allows us to recover the original function f by knowing its Fourier transform \widehat{f} .

Theorem (Fourier Inversion Theorem). *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ be such that $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Then:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

at almost every $x \in \mathbb{R}^n$.

This theorem will lead us to define the space $\mathfrak{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ formed by the functions which verify the hypothesis of the Fourier Inversion Theorem. We will check that this space is dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for all $p \in [1, +\infty)$. This fact will be of great importance in other parts of the essay, specifically in chapter 3.

With a similar proof to that of the Fourier Inversion Theorem, we will prove the second fundamental result concerning the Fourier Transform: the Plancherel Theorem.

Theorem (Plancherel Theorem). *Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Then $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

This theorem, combined with a lemma from Functional Analysis, will let us extend the Fourier Transform from $L^1 \cap L^2$ to L^2 , obtaining an operator $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ which is a bijective linear

isometry. Its inverse is given by the unique linear and bounded extension from $L^1 \cap L^2$ to L^2 of the operator

$$(\mathcal{G}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

initially defined for $g \in L^1 \cap L^2$.

We will end chapter 1 by giving a less abstract definition of the Fourier transform of $L^2(\mathbb{R}^n)$, which will be equivalent to its definition as an abstract operator of $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Namely, we will define the Fourier transform of $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ as the L^2 limit of the transforms of the functions $f(x) \cdot \chi_{B(0,R)}$. That is:

$$\mathcal{F}f(\xi) := L^2\text{-}\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

where L^2 - means that the limit is taken in L^2 .

Chapter 2 concerns the properties of the Kakeya and Besicovitch sets.

The Japanese mathematician Soichi Kakeya proposed in 1917 the following version of what is known as the *Kakeya problem* or the *needle problem*: what is the infimum of the areas of the subsets E of \mathbb{R}^2 in which a needle of length 1 can be moved continuously inside E in such a way that, in the end, the needle is in the same position but inverted? This type of sets are called *Kakeya sets*.

Almost simultaneously, the Russian mathematician Abram Samóilovich Besicovitch built in 1918 a compact set B in \mathbb{R}^2 of null 2-dimensional measure that contained a segment of length 1 in each direction of the plane.

Some years later, they realized that the subset B also gave the solution to the Kakeya problem: the infimum of the areas of the Kakeya sets is 0. That is, given $\varepsilon > 0$, we can construct a set of measure less than ε in which a needle of length 1 can be continuously inverted.

In chapter 2 we will explain *Perron's tree*, which is the simplification that Perron gave of Besicovitch's construction.

A brief description of the construction is as follows: we divide the base AB of an arbitrary triangle ABC into 2^n equal parts. We then join the vertices of this division with the upper vertex C , obtaining in this way 2^n triangles. Just by applying horizontal left-translations to these triangles, it is possible to make them overlap to a great extent. By adjusting the factor that determines the translations and making n bigger, it is possible to get a set of as little area as we want.

We will use this construction to prove the following theorem:

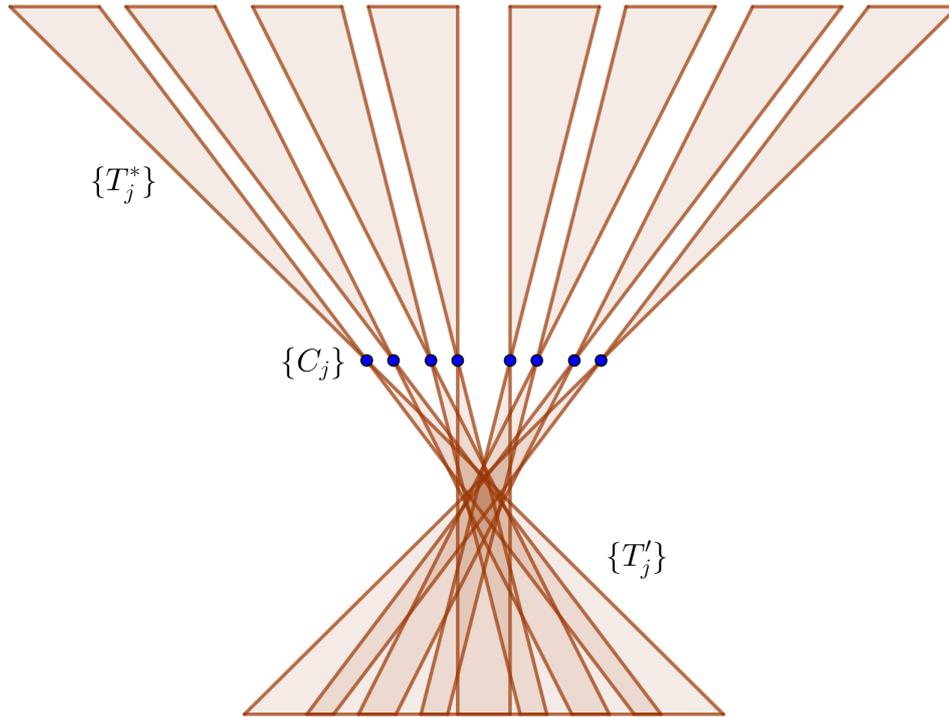
Theorem *For each $\varepsilon > 0$, there exist a positive integer $N = N_\varepsilon$ and 2^N rectangles R_1, \dots, R_{2^N} of lengths 1×2^{-N} such that:*

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} R_j \right| < \varepsilon$$

and with the following additional property: if \tilde{R}_j is the translation of R_j by 2 units in the direction of its largest side, then the sets \tilde{R}_j are pairwise disjoint and hence satisfy

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} \tilde{R}_j \right| = 1.$$

This theorem will be proved by putting a rectangle in each one of the triangles T'_j of the following figure (which conforms a Perron tree) in such a way that, when translated two units, they are in the



reflected triangles T_j^* . The triangles T'_j overlap to a great extent and, as a consequence, the union of the rectangles will have very little measure. However, the reflected rectangles, which fall into the sets T_j^* 's, will be pairwise disjoint.

The reason to make this geometric construction, unrelated at first glance to Harmonic Analysis, is explained in chapter 3 by the counterexample of the disk multiplier, given in 1971 by Charles Fefferman in his article *The multiplier problem for the ball*, published in *Annals of Mathematics*.

The multiplier problem for the ball (or the disk, in dimension $n = 2$) was proposed to answer the following question: is it true that

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (1)$$

with $L^p(\mathbb{R}^n)$ convergence? That is, does the Fourier Inversion Formula hold for all functions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

In $L^2(\mathbb{R}^n)$ formula (1) is true by the Plancherel Theorem. Moreover, when $n = 1$, the assertion is also true for all $p \in (1, +\infty)$ by a theorem of M. Riesz (1927).

However, the problem is much more complicated when $n > 1$ and $p \neq 2$.

To relate this problem of convergence with the problem of the boundedness of the disk multiplier we need the following theorem from Functional Analysis:

Theorem *Let X be a Banach space, let D be a dense subspace of X . Let $\{T_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ a sequence of linear and bounded operators on X . The following statements are equivalent:*

1. *It is true that:*

(a) $\|T_N x\| \leq C \cdot \|x\|$ for all $x \in D$ and all $N \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_N \|T_N x - x\|_X = 0$ for all $x \in D$.

2. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T_N x - x\| = 0$ for all $x \in X$.

We define the (Fourier) multiplier operator for the ball $B(0, R)$ as

$$S_R f(x) := \int_{|\xi| \leq R} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

We consider the dense subspace $D = \mathfrak{X}_C := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}$ of $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.

It is a consequence of the Fourier Inversion formula that, when $f \in \mathfrak{X}_C$, $S_R f = f$ for sufficiently large R .

Therefore, the above theorem establishes that the convergence asserted in (1) of the ball multipliers for all $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ is equivalent to the uniform boundedness in $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ of the operators $S_{B(0,R)}$.

In fact, we will see that uniform boundedness of the S_R 's is equivalent to the L^p boundedness of the multiplier of the unit ball

$$Sf(x) := \int_{|\xi| \leq 1} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

That is, the question asserted in (1) becomes equivalent to whether S is a bounded operator in a dense subspace of $L^p(\mathbb{R}^n)$ (it does not matter *which* dense subspace we choose, since, by a density lemma, boundedness of an operator between Banach spaces in a dense subspace is equivalent to the existence of a unique bounded extension on the whole space).

In the late 60's, it was already known that the ball multiplier was not bounded in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $p \notin (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$. The *disk conjecture* stated that the disk multiplier *is* bounded in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $p \in (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$, but the only case already proved was the trivial one, $p = 2$.

However, Charles Fefferman published in 1971 his article *The Multiplier Problem for the Ball*, in which he gave a proof that the ball multiplier is not bounded for $p \neq 2$.

We will follow the proof presented in the book of E. M. Stein [14], breaking it up into several lemmas to make it easier to follow and completing many steps that are only indicated in the book. The procedure will be:

1. To begin with, we will prove that boundedness of the unit ball multiplier is equivalent to uniform boundedness of all S_R multipliers for $R > 0$.
2. Next, we will see that boundedness of the unit ball multiplier is equivalent to uniform boundedness in the $L^p_{\ell^2}$ norm of the ball multipliers of arbitrary radius.
3. We will then see that boundedness of the unit ball multiplier is equivalent to uniform boundedness of the multipliers in the $L^p_{\ell^2}$ norm of balls of arbitrary center and radius.
4. Finally, we will prove that boundedness of the unit ball multiplier implies uniform boundedness of the multipliers of the half spaces passing through the origin in the $L^p_{\ell^2}$ norm.

This last step will give us an upper bound of the $L^p_{\ell^2}$ norm of the half-space multipliers that pass through the origin. With this, we will end the first part of the proof.

The second part will be dedicated to find a lower bound of this norm. Specifically, we will find a lower bound for the half-space multiplier in dimension $n = 2$ when applied to suitable characteristic functions of rectangles.

To conclude the argument, we shall choose the characteristic functions $f_j = \chi_{R_j}$ of the Besicovitch rectangles constructed in Chapter 2. These functions will have the property that

$$\left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

can be made arbitrarily small but

$$\left\| \left(\sum_j |S^{u_j} f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Once we prove that $S: \mathfrak{X} \rightarrow L^p$ is not bounded in $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ norm for $p \in (1, 2)$ and dimension $n = 2$, we will reason analogously for higher dimensions $n \geq 2$. Finally, the result for $p > 2$ will be obtained by duality.

The main references used in this study have been: [8], [9] and [10] in Chapter 1; [12] and [14] in Chapter 2; and [14] and [11] in Chapter 3. All pictures used are original.

Resumen

El presente trabajo está dedicado al estudio de una de las herramientas fundamentales del Análisis Armónico: la transformada de Fourier.

El Capítulo 1 está centrado en el estudio teórico básico de la transformada de Fourier. Empezaremos dando su definición puntual para funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$: dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como la función $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Comprobaremos que es una buena definición y veremos algunas de sus propiedades básicas, como que está acotada por $\|f\|_{L^1}$, que es continua o que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (hecho que se conoce como lema de Riemann-Lebesgue).

Estudiaremos cómo se comporta la transformada de una función al aplicar sobre ella diversos operadores (traslación, dilatación, modulación, aplicación lineal...). Veremos cómo se relaciona con la derivación, obteniendo como corolario un principio de dualidad entre la suavidad y el decaimiento que podemos resumir de la siguiente forma: cuanto más suave es una función, más rápido decae su transformada; y cuanto más rápido decae una función, más suave es su transformada.

Veremos algunos ejemplos de transformadas de Fourier de algunas funciones, siendo el más importante el de la gaussiana, ya que nos permitirá probar, junto con la teoría de aproximaciones de la identidad recogida en el apéndice, el primer teorema fundamental del trabajo: el Teorema de Inversión.

Este teorema permite recuperar la función f a partir de la transformada \hat{f} mediante la que se conoce como fórmula de inversión.

Teorema (Teorema de inversión). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Este teorema nos llevará a definir el espacio $\mathfrak{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ formado por las funciones que cumplen las hipótesis del teorema de inversión. Veremos que este espacio es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, +\infty)$, hecho que será importante en otras partes del trabajo, en concreto en el capítulo 3.

Con una demostración parecida a la del teorema de inversión probaremos el segundo resultado fundamental sobre transformada de Fourier: el teorema de Plancherel.

Teorema (Teorema de Plancherel). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Este teorema, junto con un lema de Análisis Funcional, nos permitirá extender la transformada de Fourier de $L^1 \cap L^2$ a todo L^2 , obteniendo así un operador $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ que es una isometría lineal biyectiva. Su inversa es la única extensión lineal y continua de $L^1 \cap L^2$ a todo L^2 del operador

$$(\mathcal{G}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

con $g \in L^1 \cap L^2$.

Acabaremos el capítulo 1 dando una definición concreta de transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, que será equivalente a la definición como operador abstracto de $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Podemos definir la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como el límite en L^2 de las transformadas de las funciones $f(x) \cdot \chi_{B(0,R)}$, es decir:

$$\mathcal{F}f(\xi) := L^2\text{-} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Aquí, L^2 - significa que el límite se toma en la norma de L^2 .

El capítulo 2 se centra en los conjuntos de Kakeya y de Besicovitch.

En 1917, el matemático japonés Soichi Kakeya propuso la siguiente versión de lo que ahora se conoce como el *problema de Kakeya* o el *problema de la aguja*: ¿cuál es el ínfimo de las áreas de los subconjuntos E de \mathbb{R}^2 en los que una aguja de longitud 1 se puede mover de forma continua dentro de E de manera que al final ocupa la posición original pero en sentido invertido? A los conjuntos en los que una aguja de longitud 1 se puede invertir de forma continua los llamaremos *conjuntos de Kakeya*.

Casi al mismo tiempo, el matemático ruso Abram Samóilovich Besicovitch construyó en 1918 un conjunto compacto B en \mathbb{R}^2 de medida 2-dimensional nula que contenía un segmento de longitud uno en cada dirección.

Más tarde se vio que el conjunto B también proporcionaba la solución al problema de Kakeya: el ínfimo de las áreas de los conjuntos de Kakeya es 0. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, podemos construir un conjunto de medida menor que ε en el que se puede girar una aguja de forma continua hasta volver a su posición inicial quedando invertida.

Se explica en el capítulo 2 la simplificación de la construcción de Besicovitch que dio Perron más tarde, conocida como *El árbol de Perron*.

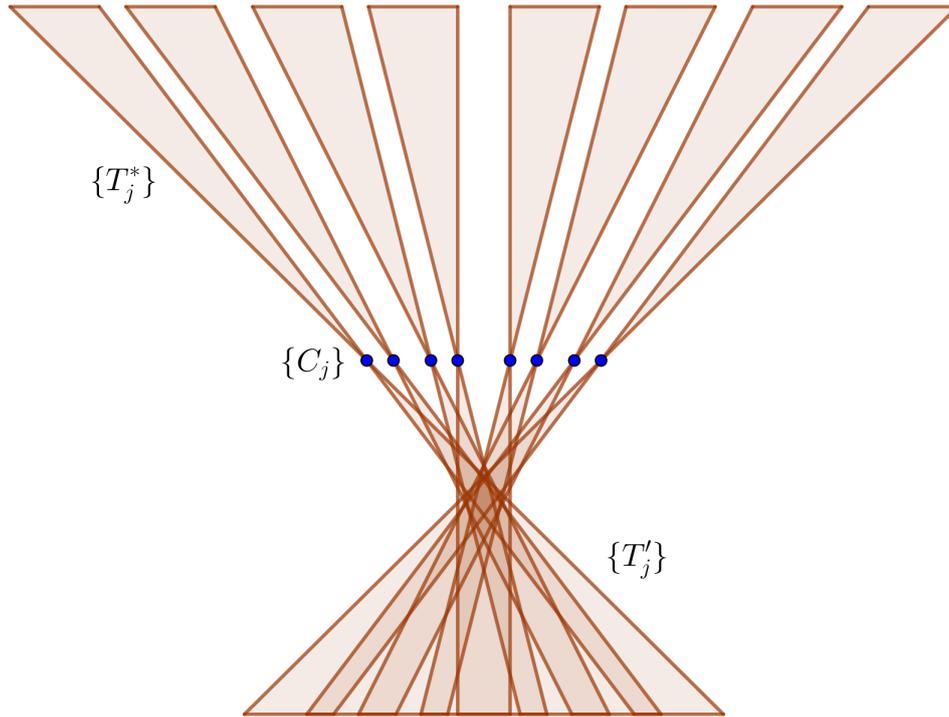
A continuación, se describe brevemente esta construcción: dividimos la base AB de un triángulo cualquiera ABC en 2^n partes iguales. Se unen los vértices de la división con el vértice superior C , obteniendo así 2^n triángulos. Mediante la mera aplicación de traslaciones horizontales a la izquierda sobre estos triángulos, podemos conseguir que se solapen mucho. Ajustando el factor que determina cuánto se traslada cada triángulo y aumentando n , obtendremos un conjunto de área tan pequeña como queramos.

Usaremos esta construcción para demostrar el siguiente teorema:

Teorema. Para cada $\varepsilon > 0$, existen un entero $N = N_\varepsilon$ y 2^N rectángulos R_1, \dots, R_{2^N} , cada uno de ellos de dimensiones 1×2^{-N} , tales que:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} R_j \right| < \varepsilon$$

y que además cumplen la siguiente propiedad: si \tilde{R}_j es la traslación de R_j de dos unidades en la dirección de su lado mayor, entonces los conjuntos \tilde{R}_j son disjuntos dos a dos y por tanto satisfacen



que:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} \tilde{R}_j \right| = 1.$$

Este resultado se consigue encajando un rectángulo en cada uno de los triángulos T'_j de la siguiente figura (que forman un árbol de Perron), de forma que al trasladarlos dos unidades queden en los triángulos reflejados T_j^* . Los triángulos T'_j tienen un alto solapamiento y, por ello, la unión de los rectángulos tendrá medida muy pequeña. Sin embargo, los traslaciones de los rectángulos, al caer dentro de los triángulos reflejados T_j^* , serán disjuntos.

El motivo de hacer en el trabajo esta construcción, que aparentemente nada tiene que ver con el Análisis Armónico, es la exposición en el capítulo 3 del contraejemplo del multiplicador del disco dado por Charles Fefferman en su artículo *The multiplier problem for the ball*, publicado en *Annals of Mathematics* en 1971.

El problema del multiplicador de la bola (o del disco en dimensión $n = 2$) surgió a partir de la siguiente pregunta: ¿es cierto que

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (2)$$

con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$? Es decir, ¿se cumple la fórmula de inversión para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

En $L^2(\mathbb{R}^n)$ el resultado es cierto por el teorema de Plancherel. Además, cuando $n = 1$, es cierto incluso para todo $p \in (1, +\infty)$ por un teorema de M. Riesz (1927).

Sin embargo, el problema se complica para $n > 1$ y $p \neq 2$.

Para relacionar este problema de convergencia con el de acotación del multiplicador del disco necesitamos el siguiente teorema de análisis funcional:

Teorema. Sea X un espacio de Banach, sea D un subespacio denso de X . Sea $\{T_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales y acotados en X . Son equivalentes:

1. Se cumple:

(a) $\|T_N x\| \leq C \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_N \|T_N x - x\|_X = 0$ para todo $x \in D$.

2. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T_N x - x\| = 0$ para todo $x \in X$.

Se define el operador multiplicador (de Fourier) de la bola $B(0, R)$ como

$$S_R f(x) := \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Consideremos el subespacio denso $D = \mathfrak{X}_C := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}$ del espacio $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Como consecuencia del teorema de inversión, cuando $f \in \mathfrak{X}_C$, se tiene $S_R f = f$ para R suficientemente grande.

Por tanto, el teorema enunciado establece que la relación de convergencia de los multiplicadores para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ equivale a la acotación uniforme en $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ de los operadores $S_{B(0,R)}$.

De hecho, veremos que la acotación uniforme de los S_R equivale a la acotación del multiplicador de la bola unidad

$$Sf(x) := \int_{|\xi| \leq 1} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Es decir, es suficiente comprobar si el operador S es o no acotado en un denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$ (da igual en qué denso porque, por un lema de densidad, la acotación de un operador entre espacios de Banach en un denso equivale a la existencia de una única extensión acotada en todo el espacio).

A finales de los años 60, ya se sabía que el multiplicador de la bola no era acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \notin (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$. La *conjetura del disco* afirmaba que el operador del disco era acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$, pero sólo se había demostrado el caso trivial $p = 2$.

Sin embargo, Charles Fefferman publicó en 1971 su artículo *The Multiplier Problem for the Ball*, en el que daba una demostración de que el multiplicador de la bola no está acotado para $p \neq 2$.

Seguiremos la demostración presentada en el libro de E. M. Stein [14], dividiéndola en lemas para facilitar su lectura y completando varios pasos que en el libro sólo se esbozan. La forma de proceder será la siguiente.

1. Para empezar, demostraremos el hecho que ya hemos comentado: la acotación del multiplicador de la bola unidad equivale a la acotación uniforme de los S_R para $R > 0$.
2. A continuación, comprobaremos que la acotación de un operador T en L^p equivale a la acotación de su extensión vectorial en $L^p_{\ell^2}$.
3. Veremos entonces que la acotación del multiplicador de la bola unidad equivale a la acotación uniforme de los multiplicadores de bolas de centro y radio arbitrario en norma $L^p_{\ell^2}$.
4. Por último, probaremos que la acotación del multiplicador de la bola unidad equivale a la acotación uniforme en norma $L^p_{\ell^2}$ de los multiplicadores de los semiespacios que pasan por el origen con vector director arbitrario.

Este último punto nos dará una acotación superior de la norma $L^p_{\ell^2}$ de los multiplicadores de los semiespacios que pasan por el origen con vector director arbitrario. Esto constituirá la primera parte de la prueba.

La segunda parte consistirá en acotar inferiormente esta norma $L_{\ell^2}^p$ de los multiplicadores de los semiespacios. En concreto, estudiaremos la acotación inferior del multiplicador del semiespacio en $n = 2$ cuando lo aplicamos a funciones características de rectángulos adecuadas.

Más concretamente, si elegimos las funciones características $f_j = \chi_{R_j}$ de los rectángulos de Besicovitch construidos en el Capítulo 2. Estas funciones tendrán la propiedad de que

$$\left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

se puede hacer arbitrariamente pequeño pero

$$\left\| \left(\sum_j |S^{u_j} f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

es aproximadamente 1. Por tanto, el multiplicador de la bola unidad no puede estar acotado, acabando así el contraejemplo.

Una vez demostrado que $S: \mathfrak{X} \rightarrow L^p$ no está acotado en norma $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ para $p \in (1, 2)$ y dimensión $n = 2$, razonaremos de forma directa para dimensiones superiores $n > 2$. Finalmente, el resultado para $p > 2$ se obtendrá por dualidad.

Las principales referencias seguidas han sido: [8], [9] y [10] en el Capítulo 1; [12] y [14] en el Capítulo 2; y [14] y [11] en el Capítulo 3. Todos los dibujos que aparecen son originales.

Notación

Dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

el producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^n .

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotamos su norma euclídea por

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

La primera derivada parcial de la función f en \mathbb{R}^n con respecto a la variable j -ésima, x_j , se denota por $\partial_j f$ (o $\partial_{x_j} f$ si queremos especificar que derivamos respecto a la variable x_j).

La m -ésima derivada parcial con respecto a la variable j -ésima se denota por $\partial_j^m f$.

Un *multi-índice* α es una n -upla ordenada de enteros no negativos.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ denota su tamaño y $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ denota el producto de los factoriales de sus entradas.

Para un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, denotamos por $\partial^\alpha f$ la derivada $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$.

El número $|\alpha|$ indica el orden de diferenciación total de $\partial^\alpha f$. El espacio de funciones en \mathbb{R}^n tales que todas sus derivadas de orden $|\alpha| \leq N$ son continuas se denota por $C^N(\mathbb{R}^n)$ y el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en \mathbb{R}^n se denota por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Denotaremos que una función f está en $C^N(\mathbb{R}^n)$ y además tiene soporte compacto poniendo $f \in C_C^N(\mathbb{R}^n)$. De forma análoga, $f \in C_C^\infty$ querrá decir que f está en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y tiene soporte compacto.

Diremos que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice, denotamos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Por ejemplo:

$$(-2\pi i x)^\alpha = \prod_{j=1}^n (-2\pi i x)^{\alpha_j}.$$

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de un conjunto A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Por último, denotaremos la bola abierta de centro p y radio R por $B(p, R)$.

Los resultados de teoría de la medida, de convoluciones y de aproximaciones de la identidad regulares (abreviadas A.I.R.) que son usados en el presente trabajo aparecen en el apéndice.

Capítulo 1

La Transformada de Fourier

1.1 Definiciones, ejemplos y propiedades básicas.

1.1.1 Propiedades básicas

Definición 1.1. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos su **transformada de Fourier** como la función

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.2. A veces, si una función tiene una expresión larga (por ejemplo, es una composición de funciones), denotaremos su transformada por $(f)^\wedge$ en lugar de por \hat{f} .

Proposición 1.3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces:

1. \hat{f} está **bien definida** para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.
2. $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pues $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. (\hat{f} **acotada**.)
3. $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$. (\hat{f} es **continua**.)
4. $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es decir:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0. \quad (\text{Lema de Riemann-Lebesgue})$$

5. $\hat{f} \in UC(\mathbb{R}^n)$. (\hat{f} es **uniformemente continua**.)

Demostración. 1. $\hat{f}(\xi)$ está *bien definido* para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, pues la integral que lo define es *absolutamente convergente*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} \underset{f \in L^1}{<} +\infty.$$

2. La misma estimación nos da que \hat{f} es *acotada*.

3. Veamos que \widehat{f} es *continua*.

Sea $\xi_n \rightarrow \xi_0$ una sucesión convergente en \mathbb{R}^n . Tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi_n \cdot x} dx$$

Como $|f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi_n \cdot x}| = |f(x)| \in L^1(dx)$, aplicamos el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi_n \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi_0 \cdot x} dx = \widehat{f}(\xi_0).$$

4. Usaremos la aproximación de funciones integrables por funciones simples. Para ello, necesitamos conocer que la transformada de una función simple tiene límite 0 en el infinito.

Así pues, empezamos calculando la transformada de $\chi_{[a,b]}$:

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \frac{e^{-2\pi i x \cdot \xi}}{-2\pi i \xi} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{-2\pi i a \cdot \xi} - e^{-2\pi i b \cdot \xi}}{2\pi i \xi}.$$

Esta expresión tiende a 0 cuando $|\xi| \rightarrow \infty$ pues:

$$\left| \frac{e^{-2\pi i \xi \cdot a} - e^{-2\pi i \xi \cdot b}}{2\pi i \xi} \right| \leq \frac{|e^{-2\pi i \xi \cdot a}| + |e^{-2\pi i \xi \cdot b}|}{|2\pi i \xi|} = \frac{2}{2\pi |\xi|} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.$$

Análogamente, si $g = \chi_{\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]}$ en \mathbb{R}^n , entonces aplicando el teorema de Fubini:

$$\widehat{g}(\xi) = \prod_{j=1}^n \frac{e^{-2\pi i \xi_j \cdot a_j} - e^{-2\pi i \xi_j \cdot b_j}}{2\pi i \xi_j},$$

que también tiende a 0 cuando $|\xi| \rightarrow \infty$ en \mathbb{R}^n .

Aproximamos ahora en la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$ una función integrable arbitraria f por una función simple h (es decir, una función que es combinación lineal finita de funciones como la g).

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser las funciones simples densas en $L^1(\mathbb{R}^n)$ (ver teorema 4.17 del apéndice), existe h función simple tal que $\|f - h\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos entonces que:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{h}(\xi)| + |\widehat{h}(\xi)| \leq \|f - h\|_{L^1} + |\widehat{h}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\widehat{h}(\xi)|.$$

Como $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{h}(\xi) = 0$ existe $M > 0$ tal que si $|\xi| > M$, entonces $|\widehat{h}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$, así que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\widehat{h}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $|\xi| > M$, entonces $|\widehat{f}(\xi)| < \varepsilon$. Es decir:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

5. La última afirmación del enunciado se tiene porque cualquier función continua en \mathbb{R}^n con límite 0 en el infinito es uniformemente continua. \square

Observación 1.4. Nótese que

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = e^{-2\pi i \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{e^{-2\pi i \xi \cdot \frac{a-b}{2}} - e^{-2\pi i \xi \cdot \frac{b-a}{2}}}{2\pi i \xi} = e^{-2\pi i \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\sin(\pi \xi (b-a))}{\pi \xi}.$$

Por tanto, la función característica $f = \chi_{[a,b]}$ es un ejemplo de que la transformada de Fourier de una función $f \in L^1$ puede no estar en L^1 (recordemos que $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \infty$).

Veamos algunas propiedades básicas de la Transformada de Fourier.

Proposición 1.5 (Linealidad de la TF). *La transformada de Fourier es \mathbb{C} -lineal.*

Es decir, dadas $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$:

$$(c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2)^\wedge(\xi) = c_1 \cdot \widehat{f_1}(\xi) + c_2 \cdot \widehat{f_2}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Es consecuencia directa de la linealidad de la integral. □

Proposición 1.6 (Conjugación). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, entonces:*

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración.

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot x}} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot x} dx} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \quad \square$$

La siguiente definición simplifica bastante la notación.

Definición 1.7 (Producto tensorial). Dadas $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, se define $f \otimes g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Proposición 1.8 (Separación de variables). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, entonces:*

$$(f \otimes g)^\wedge = \widehat{f} \otimes \widehat{g}.$$

En otras palabras, la transformada de Fourier conserva la separación de variables.

Demostración. Llamemos $\mathbf{x}_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}_2 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+m})$, y de forma análoga, cambiando x por ξ , definimos $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}_1$ y $\boldsymbol{\xi}_2$. Tenemos entonces que:

$$(f \otimes g)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \otimes g)(\mathbf{x}) \cdot e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x}_1) \cdot g(\mathbf{x}_2) \cdot e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Como $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n+m} \xi_j \cdot x_j = \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_2$, entonces $e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} = e^{-2\pi i \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1} \cdot e^{-2\pi i \mathbf{x}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_2}$. Así que:

$$\begin{aligned} (f \otimes g)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \left(f(\mathbf{x}_1) \cdot e^{-2\pi i \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1} \right) \cdot \left(g(\mathbf{x}_2) \cdot e^{-2\pi i \mathbf{x}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_2} \right) d\mathbf{x} \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_1) \cdot e^{-2\pi i \mathbf{x}_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1} d\mathbf{x}_1 \int_{\mathbb{R}^m} g(\mathbf{x}_2) \cdot e^{-2\pi i \mathbf{x}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_2} d\mathbf{x}_2 \\ &= \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}_1) \cdot \widehat{g}(\boldsymbol{\xi}_2) = (\widehat{f} \otimes \widehat{g})(\boldsymbol{\xi}). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 1.9 (TF de una convolución). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que:

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Demostración. Por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y) dy \right) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)} \cdot g(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot y} dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot y} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)} dx \right) dy \stackrel{z=x-y}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot y} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot z} dz \right) dy = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Nótese que se puede usar el teorema de Fubini porque existe la integral iterada:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot (x-y)} \cdot g(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot y}| dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| dx \right) dy \stackrel{z=x-y}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz \right) dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene al estar $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Introducimos notación que será útil más adelante.

Definición 1.10. Dada una función medible $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) definimos:

- La **traslación** de f de vector $y \in \mathbb{R}^n$ como

$$(\tau_y f)(x) := f(x-y).$$

- La **dilatación** de factor $R > 0$ como

$$(\delta^R f)(x) := f(R \cdot x).$$

- La **modulación** (multiplicar por una función de módulo 1) de vector $\eta \in \mathbb{R}^n$ de una función f como

$$M_\eta f(x) := e^{2\pi i \eta \cdot x} \cdot f(x).$$

- La **reflexión** de f como

$$\tilde{f}(x) := f(-x).$$

Además, en la práctica siempre pondremos f_t para referirnos a la dilatación siguiente:

$$f_t(x) = \frac{1}{t^n} \cdot \delta^{1/t}(f)(x) = \frac{1}{t^n} \cdot f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Proposición 1.11. *Las traslaciones y las modulaciones son isometrías de $L^p(\mathbb{R}^n)$ (para $p \in (0, +\infty]$) y las dilataciones son operadores acotados con $\|\delta^R\|_{L^p \rightarrow L^p} = R^{-n/p}$.*

Demostración. El caso $p = +\infty$ es sencillo. Supongamos que $p \in (0, +\infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|\tau_y f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p dz \right)^{1/p} = \|f\|_p, \\ \|M_\eta f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |e^{2\pi i x \cdot \eta} f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|f\|_p, \\ \|\delta^R f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(R \cdot x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{R^n} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} = R^{-n/p} \|f\|_p. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 1.12 (Propiedades básicas de la T.F.). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Transformada de una traslación:*

$$\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \cdot \widehat{f}(\xi) = (M_{-y} \widehat{f})(\xi). \quad (1.1)$$

2. *Transformada de una modulación: si $\eta \in \mathbb{R}^n$, entonces:*

$$(M_\eta f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi - \eta) = (\tau_\eta \widehat{f})(\xi). \quad (1.2)$$

3. *Transformada de una aplicación lineal invertible: sean $T \in GL(n, \mathbb{R})$ una aplicación lineal invertible de \mathbb{R}^n y $S = (T^*)^{-1}$ la inversa de la traspuesta de T . Entonces:*

$$(f \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1} \cdot (\widehat{f} \circ S). \quad (1.3)$$

En particular:

(a) *Transformada de una rotación: si T es una rotación, entonces $(f \circ T)^\wedge = \widehat{f} \circ T$.*

(b) *Transformada de una dilatación: si $Tx = t^{-1}x$, con $t > 0$, entonces la fórmula (1.3) queda:*

$$\widehat{\delta^{1/t} f}(\xi) = t^n \cdot \widehat{f}(t \cdot \xi) = t^n \cdot (\delta^t \widehat{f})(\xi). \quad (1.4)$$

(c) *Transformada de dilataciones f_t :*

$$(\widehat{f_t})(\xi) = \widehat{f}(t \cdot \xi) = (\delta^t \widehat{f})(\xi). \quad (1.5)$$

Demostración. 1. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(\widehat{\tau_y f})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \underset{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot (z+y)} dz = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \cdot \widehat{f}(\xi).$$

2. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(M_\eta f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \eta \cdot x} \cdot f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot (\xi - \eta)} dx = \widehat{f}(\xi - \eta).$$

3. Como T es invertible ($T \in GL(n, \mathbb{R})$), podemos hacer el cambio de variable $y = Tx$, y queda:

$$\begin{aligned} (f \circ T)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \\ &= |\det T|^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot (T^{-1}y)} dy = \\ &= |\det T|^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i (S\xi) \cdot x} dx = \\ &= |\det T|^{-1} \cdot \widehat{f}(S\xi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, obteniendo así el resultado. En la segunda línea hemos usado que si S es la traspuesta de T^{-1} , entonces $\langle \xi, T^{-1}x \rangle = \langle S\xi, x \rangle$ por definición de traspuesta.

En particular, si T es una rotación, entonces $|\det T| = 1$, con lo que se tiene $(f \circ T)^\wedge = \widehat{f} \circ T$. Si $Tx = \frac{1}{t}x$ con $t > 0$, entonces $S(x) = tx$, luego $|\det S| = t^n$. Por tanto:

$$\widehat{\delta^{1/t}f}(\xi) = (f \circ T)^\wedge(\xi) = t^n \widehat{f}(t\xi).$$

Dividiendo entre t^n :

$$\widehat{(f_t)}(\xi) = \left(\frac{1}{t^n} \delta^{1/t}f\right)^\wedge(\xi) = \frac{1}{t^n} \widehat{\delta^{1/t}f}(\xi) = \widehat{f}(t\xi),$$

donde a su vez, con la notación de dilatación, $\widehat{f}(t\xi) = (\delta^t \widehat{f})(\xi)$. □

Veamos ahora cómo se relaciona la transformada de Fourier con la derivación.

Proposición 1.13 (Derivación y TF). *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sea α un multiíndice.*

1. Si $x^\alpha \cdot f(x) \in L^1(dx)$ para todo $|\alpha| \leq k$, entonces

$$\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \partial^\alpha[\widehat{f}] = [(-2\pi i(\cdot))^\alpha \cdot f(\cdot)]^\wedge \quad (1.6)$$

donde los puntos del miembro de la derecha significan que aplicamos la transformada a toda la función $(-2\pi i x)^\alpha \cdot f(x)$, y que esta transformada evaluada en un $\xi \in \mathbb{R}^n$ es igual a $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

2. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, entonces:

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \cdot \widehat{f}(\xi). \quad (1.7)$$

Observación 1.14. En el primer apartado, la hipótesis $x^\alpha f(x) \in L^1(dx)$ para todo $|\alpha| \leq k$ es equivalente a que $(1 + |x|^k) \cdot f(x) \in L^1(dx)$. Necesitaremos esto para un corolario.

Demostración. 1. Basta probar el caso $\alpha = e_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj})$ con $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y luego aplicar inducción sobre $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Si $\alpha = e_j$, aplicando el lema de derivación de integrales paramétricas¹ (lema 4.6 del apéndice), \widehat{f} es derivable con respecto a ξ_j y su derivada es:

$$\partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi) = \partial_{\xi_j} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\xi_j} [f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}] dx.$$

¹Lo podemos aplicar pues $f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}$ es C^∞ con respecto a la variable ξ y su derivada es integrable porque por hipótesis $x^\alpha \cdot f(x)$ lo es para todo $|\alpha| \leq k$.

Como $e^{-2\pi i \xi \cdot x} = e^{-2\pi i \sum \xi_k \cdot x_k} \implies \partial_{\xi_j} [f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}] = (-2\pi i x_j) \cdot f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}$, así que:

$$\partial_{\xi}^{\alpha} \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (-2\pi i x_j) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = [(-2\pi i (\cdot))^{\alpha} \cdot f(\cdot)]^{\wedge}(\xi)$$

probando así el caso $\alpha = e_j$ con $j \in \{1, \dots, n\}$.

Supongamos que el enunciado es cierto para $|\alpha| \leq N_0$, con $k > N_0 \geq 1$ (hipótesis de inducción). Veamos que entonces también se cumple para $|\alpha| = N_0 + 1$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $|\alpha| = N_0 + 1$, existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j \geq 1$ y $\alpha' := \alpha - e_j$ cumple $|\alpha'| = N_0 \geq 1$, de forma que le podemos aplicar la hipótesis de inducción. Entonces:

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}^{\alpha} \widehat{f}(\xi) &= \partial_{\xi}^{\alpha'} (\partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi)) \stackrel{\text{Caso } |\alpha|=1}{\stackrel{\downarrow}{=}} \\ &= \partial_{\xi}^{\alpha'} [(-2\pi i (\cdot))^{e_j} \cdot f(\cdot)]^{\wedge}(\xi) \stackrel{\text{Hip. Induc.}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \\ &= \left[(-2\pi i (\cdot))^{\alpha'} [(-2\pi i (\cdot))^{e_j} \cdot f(\cdot)] \right]^{\wedge}(\xi) \stackrel{\alpha=\alpha'+e_j}{\stackrel{\downarrow}{=}} \\ &= [(-2\pi i x)^{\alpha} \cdot f(x)]^{\wedge}(\xi). \end{aligned}$$

2. La demostración se da en la sección 4.3 del apéndice. □

Veamos ahora que la suavidad de una función implica el decaimiento de su transformada, y el decaimiento de una función implica la suavidad de su transformada.

Corolario 1.15. (*Principio de dualidad suavidad-decaimiento*)

1. *Suavidad implica decaimiento: si f cumple las hipótesis del segundo apartado de la proposición anterior, entonces:*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_{f,k}}{1 + |\xi|^k}.$$

2. *Decaimiento implica suavidad: si $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^N}$ con $N > n + k$, entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Primer apartado.

n = 1 Tenemos

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \frac{\widehat{f^{(k)}}(\xi)}{(2\pi i \xi)^k} \right| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|2\pi \xi|^k} = \frac{C'_{f,k}}{|\xi|^k}.$$

La primera igualdad se tiene por el segundo apartado de la proposición 1.13, la desigualdad se cumple por la proposición 1.3 (que nos daba $\|\widehat{g}\|_{\infty} \leq \|g\|_1$); y la última igualdad se obtiene llamando $C'_{f,k} := \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{(2\pi)^k}$, que es una constante que depende de f y de k .

Así que

$$|\xi|^k \cdot |\widehat{f}(\xi)| \leq C'_{f,k}$$

y, de nuevo por la proposición 1.3,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} =: C''_f.$$

Sumando ambas desigualdades y poniendo $C_{f,k} = C'_{f,k} + C''_f$:

$$(1 + |\xi|^k) \cdot |\widehat{f}(\xi)| \leq C_{f,k}.$$

$n \geq 1$ Por el caso $n = 1$, aplicado a la variable j -ésima, tenemos que

$$|\xi_j|^k \cdot |\widehat{f}(\xi)| \leq \|\partial_{\xi_j}^k f\|_{L^1} = C_{f,k,j} \text{ para todo } j = 1, \dots, n.$$

para ciertas constantes $C_{f,k,j}$. Así que

$$\begin{aligned} |\xi|^k \cdot |\widehat{f}(\xi)| &\leq (|\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^k \cdot \left(\sqrt[k]{|\widehat{f}(\xi)|} \right)^k = \\ &= \left(|\xi_1| \cdot \sqrt[k]{|\widehat{f}(\xi)|} + \dots + |\xi_n| \cdot \sqrt[k]{|\widehat{f}(\xi)|} \right)^k \leq \\ &\leq \left(\sqrt[k]{C_{f,k,1}} + \dots + \sqrt[k]{C_{f,k,n}} \right)^k =: C'_{f,k}. \end{aligned}$$

siendo la primera desigualdad cierta por la desigualdad triangular:

$$|\xi| = |(\xi_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \xi_n)| \leq |(\xi_1, 0, \dots, 0)| + \dots + |(0, \dots, 0, \xi_n)| = |\xi_1| + \dots + |\xi_n|.$$

Como $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} = C''_f$, juntando ambas desigualdades tenemos:

$$(1 + |\xi|^k) \cdot |\widehat{f}(\xi)| \leq C_{f,k}.$$

Segundo apartado.

Si $|f(x)| \cdot (1 + |x|^k) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces por el primer apartado de la proposición anterior 1.13 tenemos que $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Ahora veamos por qué $|f(x)| \cdot (1 + |x|^k) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es una condición más débil que $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^N}$ con $N > n + k$.

Si $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^N}$ con $N > n + k$, entonces

$$(1 + |x|^k) \cdot |f(x)| \leq \frac{C \cdot (1 + |x|^k)}{(1 + |x|^N)} \leq \frac{C'}{1 + |x|^{N-k}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

donde la inclusión se tiene por ser $N - k > n$ siendo n la dimensión del espacio.

Se pone la condición $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^N}$ en el enunciado porque es más sencilla de comprobar que la otra. \square

1.1.2 Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de transformadas de Fourier de funciones concretas.

Ejemplo 1.16. Consideremos $f(x) = e^{-2\pi|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces

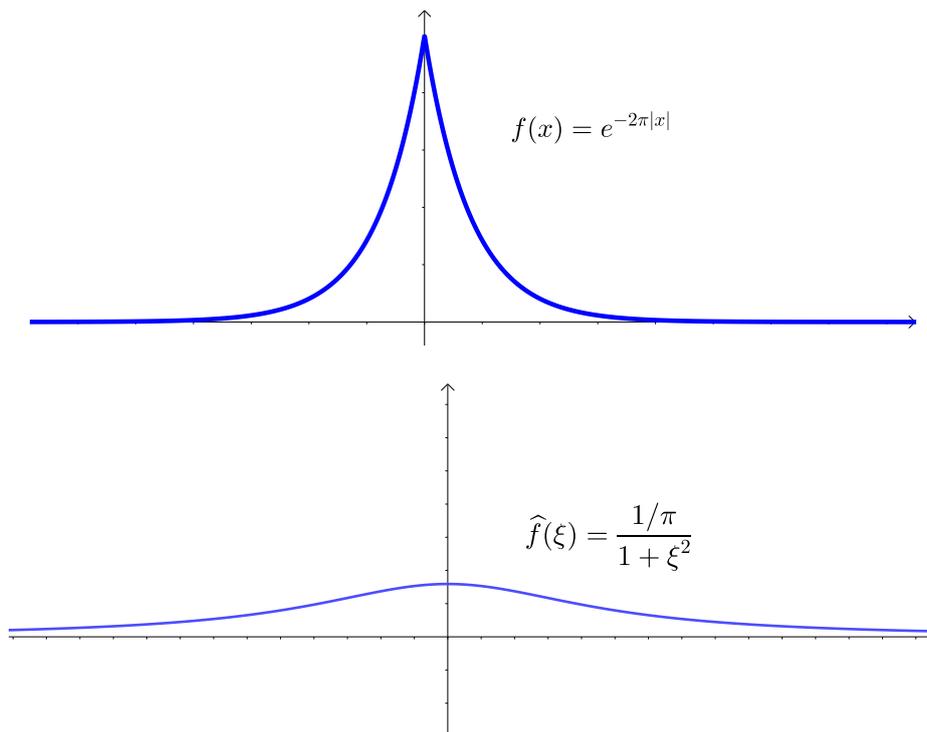
$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|x|} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x \cdot (1+i\xi)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x \cdot (1-i\xi)} dx = \\ &= \left[\frac{e^{-2\pi x \cdot (1+i\xi)}}{-2\pi(1+i\xi)} \right]_{x=0}^{x=+\infty} + \left[\frac{e^{2\pi x \cdot (1-i\xi)}}{2\pi(1-i\xi)} \right]_{x=-\infty}^{x=0} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}. \end{aligned}$$

Es decir:

$$(\widehat{e^{-2\pi|x|}})(\xi) = \frac{1/\pi}{1+\xi^2} \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}$$

que decae como $1/\xi^2$, que no es mucho.

Este ejemplo nos muestra que la existencia de un pico en $x = 0$ hace que f no decaiga muy rápido, incluso siendo de clase C^∞ en el resto de dominio.



El siguiente resultado es muy importante: nos da la transformada de Fourier de una gaussiana. Lo sorprendente es que para $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, se tiene $f = \widehat{f}$ en \mathbb{R}^n .

Para probarlo, necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.17. *Se tiene que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = 1.$$

Demostración del lema. Es el caso $b = \pi$ del lema 4.8 del apéndice. □

Proposición 1.18 (T.F. de una gaussiana). Sea $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Entonces $\varphi = \widehat{\varphi}$ en \mathbb{R}^n .

Además, dado $t > 0$:

$$\widehat{\varphi}_t(\xi) = \widehat{\varphi}(t\xi) = e^{-\pi|t\xi|^2}. \quad (1.8)$$

Demostración. Demostremos primero el resultado en dimensión $n = 1$. Por la fórmula (1.6) de la derivada de la transformada, tenemos que $(\widehat{f})'(\xi) = \widehat{h}(\xi)$ con

$$h(x) = -2\pi ix \cdot f(x) = -2\pi ix \cdot e^{-\pi x^2} = i \cdot \frac{d}{dx}(e^{-\pi x^2}) = i \cdot f'(x).$$

Entonces, por la fórmula (1.7) de la transformada de una derivada:

$$\widehat{h}(\xi) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Linealidad}}}{=} i \cdot (\widehat{f'})^{\wedge}(\xi) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ (1.7)}}{=} i \cdot (2\pi i\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi \cdot \widehat{f}(\xi).$$

Así que:

$$(\widehat{f})'(\xi) = \widehat{h}(\xi) = -2\pi\xi \cdot \widehat{f}(\xi).$$

Se sigue que

$$\frac{d}{d\xi}(e^{\pi\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi)) = e^{\pi\xi^2} \cdot (-2\pi\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) + 2\pi\xi \cdot e^{\pi\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi) = 0,$$

de forma que $e^{\pi\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi)$ es constante. Para saber qué constante, evaluamos en $\xi = 0$ y usamos el lema:

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i0 \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} dx \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Lema}}}{=} 1.$$

Así que $e^{\pi\xi^2} \cdot \widehat{f}(\xi) = 1 \implies \widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

El caso n -dimensional se sigue del Teorema de Fubini y de que $|x|^2 = \sum_1^n x_j^2$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} \cdot e^{-2\pi i\xi x} dx \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2} \cdot e^{-2\pi i\xi_j x_j} dx_j \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Caso } n=1}}{=} \prod_{j=1}^n e^{-\pi\xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2}.$$

La fórmula (1.8) se deduce entonces de lo que hemos demostrado junto con la fórmula (1.5). \square

1.2 El teorema de inversión

Probamos ahora uno de los teoremas fundamentales de la transformada de Fourier, que nos permite recuperar una función a partir de su transformada si ambas están en L^1 .

Teorema 1.19 (Teorema de inversión). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\varphi(x) := e^{-\pi|x|^2}$. Definimos:

$$\varphi_t(x) := \frac{1}{t^n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \text{ con } t > 0$$

que es una aproximación de la identidad por el teorema 4.31 del apéndice (pues $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ por el lema 1.17).

Trabajamos con $f * \varphi_t(x)$ por tener mejores propiedades que la función f y converger a ésta cuando $t \rightarrow 0^+$, por ser $\{\varphi_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad (a partir de ahora, A.I.R.). Tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * \varphi_t}(\xi) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_t}(\xi) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right] \varphi(t \cdot \xi) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

donde la última igualdad se tiene por la definición de \widehat{f} y por la proposición 1.18.

Aplicando el teorema de Fubini² a la expresión de arriba queda:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot \varphi(t\xi) d\xi \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \delta^t \widehat{\varphi}(y-x) dy.$$

Recordemos que $\delta^t \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{t^n} \cdot (\delta^{1/t} \widehat{\varphi})(\xi)$, así que la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \widehat{\varphi} \left(\frac{y-x}{t} \right) dy & \underset{\varphi = \widehat{\varphi}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \varphi \left(\frac{y-x}{t} \right) dy \underset{\varphi \text{ es par}}{=} \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \varphi \left(\frac{x-y}{t} \right) dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \varphi_t(x-y) dy = f * \varphi_t(x). \end{aligned}$$

El teorema 4.32 del apéndice establece que si $f \in L^1$, entonces $f * \varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f$ en L^1 .

Por tanto, existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ con $f * \varphi_{t_n}(x) \rightarrow f(x)$ en casi todo punto³ $x \in \mathbb{R}^n$

Falta ver qué vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada al integrando pues:

$$|\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}| = |\widehat{f}(\xi) \cdot e^{-\pi|t_n \xi|^2} \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}| = |\widehat{f}(\xi)| \cdot e^{-\pi|t_n \xi|^2} \leq |\widehat{f}(\xi)| \cdot e^0 = |\widehat{f}(\xi)| \in L^1(d\xi).$$

Aplicándolo, queda:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}] d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

pues cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene $t_n \rightarrow 0$, y por tanto $\widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) = e^{-\pi|t_n \xi|^2} \rightarrow e^0 = 1$.

²Lo podemos aplicar porque existe la integral iterada

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \varphi(t\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x}| dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right) d\xi = \|f\|_1 \left(\frac{\pi}{\pi t^2} \right)^{n/2} < \infty$$

usando el lema 1.17 y que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$.

³Esto es así por que al tomar una sucesión cualquiera $\{t_n\}$, tenemos que $f * \varphi_{t_n}(x) \rightarrow f(x)$ en L^1 , así que por el teorema 4.21 del apéndice, existe una subsucesión $\{t_{n_k}\}$ que converge en casi todo punto a f . Tomamos entonces esa subsucesión como sucesión t_n . Resumiendo: hay convergencia en casi todo punto de $f * \varphi_{t_n}$ a f .

Como consecuencia:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi_{t_n}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} f * \varphi_{t_n}(x) = f(x)$$

donde la última igualdad es en casi todo punto. Por tanto, se cumple que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. □

Corolario 1.20 (Unicidad de la T.F.). Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces $f = g$ en casi todo punto.

Demostración. Sea $h := f - g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por hipótesis.

Por tanto, aplicando el teorema de inversión a $\widehat{h} \in L^1$, tenemos

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\xi = 0$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Luego $f(x) = g(x)$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. □

Para poder aplicar el Teorema de Inversión a $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ necesitamos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por eso se trabaja en el siguiente conjunto:

Definición 1.21. Se define:

$$\mathfrak{X} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

Definición 1.22. Sea $f \in \mathfrak{X}$. Se define la transformada de Fourier inversa (puntual) como

$$f^\vee(x) := \widehat{f}(-x).$$

El teorema de inversión lo que establece es que $(\widehat{f})^\vee = (f^\vee)^\wedge = f$.

Proposición 1.23. Sea $N > n$ y $p \in [1, +\infty)$. Se da la siguiente cadena de inclusiones:

$$C_C^\infty \subseteq C_C^N \subseteq \mathfrak{X} \subseteq L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p.$$

Demostración. Veamos las inclusiones una por una:

1. La primera inclusión es clara.
2. La segunda inclusión se tiene por el lema 1.15 de dualidad suavidad-decaimiento: *suavidad implica decaimiento* nos daba que si $f \in C_C^N$ entonces

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_{f,N}}{1 + |\xi|^N} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

3. La tercera inclusión se tiene porque $\|g\|_\infty \leq \|\widehat{g}\|_1 < \infty$ para $g \in \mathfrak{X}$. Esto se justifica por el teorema de inversión, que nos da $g = (\widehat{g})^\vee$, y por la proposición 1.3 $\|(\widehat{g})^\vee\|_\infty \leq \|\widehat{g}\|_1$, ya que entonces:

$$\|g\|_\infty = \|(\widehat{g})^\vee\|_\infty \leq \|\widehat{g}\|_1 < +\infty.$$

Luego si $g \in \mathfrak{X}$, entonces $g \in L^1$ (por definición de \mathfrak{X}) y $g \in L^\infty$.

4. La última inclusión se tiene por la proposición 4.22 del apéndice, pues nos dice que $L^1 \cap L^\infty \subseteq L^p$ para todo $p \in [1, +\infty)$. □

Corolario 1.24. \mathfrak{X} es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, +\infty)$.

Demostración. Como C_C^∞ es denso en L^p para todo $p \in [1, +\infty)$ (teorema 4.34 del apéndice) y $C_C^\infty \subseteq \mathfrak{X} \subseteq L^p$ para $p \in [1, +\infty)$, obtenemos que \mathfrak{X} es denso en L^p para $p \in [1, +\infty)$. □

1.3 Teorema de Plancherel y transformada en $L^2(\mathbb{R}^n)$

1.3.1 El teorema de Plancherel

El siguiente teorema es el análogo a la Identidad de Parseval y nos permitirá definir la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.25 (Teorema de Plancherel). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Demostración. Procedemos como en el teorema de inversión: sea $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ y sea $\varphi_t(x) := \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$ para $t > 0$. Por el teorema 4.31 del apéndice, $\{\varphi_t\}_{t>0}$ es AIR.

Vamos a demostrar el teorema para $f * \varphi_t$ y luego usaremos que $f * \varphi_t \xrightarrow{L^2} f$ para $f \in L^2$.

Sea

$$I_t := \int_{\mathbb{R}^n} |(f * \varphi_t)^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}_t(\xi)|^2 d\xi$$

donde la última igualdad está justificada por la T.F. de una convolución (proposición 1.9).

Por la proposición 1.18, $\widehat{\varphi}_t(\xi) = \widehat{\varphi}(t \cdot \xi) = e^{-\pi|t\xi|^2}$. Usando esto y que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, nos queda:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}_t(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot \overline{\widehat{f}(\xi)} \cdot e^{-2\pi|t \cdot \xi|^2} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot y} dy \right)} e^{-2\pi|t \cdot \xi|^2} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)} \cdot e^{2\pi i \xi \cdot y} dy \right) e^{-2\pi|t \cdot \xi|^2} d\xi. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini⁴ y queda:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(y)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi \right) dx \right) dy$$

La integral de dentro vale:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot \varphi(\sqrt{2t} \cdot \xi) d\xi = (\delta^{\sqrt{2t}} \varphi)^\wedge(x-y) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2t})^n} \cdot \widehat{\varphi}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2t}}\right) = \varphi_{\sqrt{2t}}(x-y), \end{aligned}$$

habiendo usado en el paso de la primera a la segunda línea la fórmula (1.4) y que $\varphi = \widehat{\varphi}$.

Por tanto:

$$I_t = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{f(y)} \cdot \varphi_{\sqrt{2t}}(x-y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \overline{f * \varphi_{\sqrt{2t}}(x)} dx = \langle f, f * \varphi_{\sqrt{2t}} \rangle_{L^2}$$

⁴Lo podemos aplicar porque existe la integral iterada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \cdot \overline{f(y)} \cdot e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} | d\xi \right) dx \right) dy = \|f\|_1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2\pi t^2} \right)^{n/2} < +\infty$$

usando que $f \in L^1$ y el lema 4.8 del apéndice.

teniendo la segunda igualdad porque φ toma valores reales, luego $\varphi = \bar{\varphi}$.

Por el teorema de convergencia de A.I.R., $f * \varphi_{\sqrt{2t}} \xrightarrow{L^2} f$ cuando $t \rightarrow 0$, por estar $f \in L^2$. Así que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_t = \lim_{t \rightarrow 0} \langle f, f * \varphi_{\sqrt{2t}} \rangle_{L^2} \underset{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ continuo}}{=} \langle f, \lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi_{\sqrt{2t}} \rangle_{L^2} = \langle f, f \rangle_{L^2} = \|f\|_{L^2}^2$$

Falta calcular el límite de la izquierda usando la definición de I_t :

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_t = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi.$$

Por el teorema de la convergencia monótona, tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_t = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Lo podemos aplicar porque dada $t_n \searrow 0$, $|g_n(\xi)| = e^{-2\pi|t_n\xi|^2} \leq |e^{-2\pi|t_{n+1}\xi|^2}| = |g_{n+1}(\xi)|$.

En resumen, hemos obtenido:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

donde la integral de la derecha es $\|f\|_{L^2}$, que es finita por estar f en L^2 . Por ello, la de la izquierda, que es $\|\hat{f}\|_{L^2}$, también es finita, y por tanto $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. \square

1.3.2 Consecuencias del teorema de Plancherel

El teorema de Plancherel se traduce en que el operador

$$\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \subseteq L^2 \rightarrow L^2$$

$$f \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f}$$

cumple $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Es decir, \mathcal{F} es una *isometría lineal*.

Podemos aprovechar esto para extender \mathcal{F} a todo L^2 . Para ello, tenemos el siguiente lema general:

Lema 1.26. Sean X, Y espacios de Banach, y sea $D \subseteq X$ un subespacio denso en X . Si $T: D \rightarrow Y$ es un operador lineal y continuo (es decir, $\|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$), entonces existe un único operador $\bar{T}: X \rightarrow Y$ lineal y continuo que extiende a T , es decir, con $\bar{T}x = Tx$ para todo $x \in D$. Además, cumple que

$$\|\bar{T}\|_{X \rightarrow Y} = \|T\|_{D \rightarrow Y} = \sup_{x \in D, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

y que \bar{T} es una isometría si y sólo si T es una isometría.

Demostración. Si $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ es una sucesión de D con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (tal sucesión siempre existe por ser D denso en X), entonces definimos:

$$\bar{T}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n).$$

Vayamos por pasos:

1. El *límite existe*: basta ver que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pues Y es un espacio de Banach.

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \underset{\substack{\leq \\ \uparrow \\ T \text{ continua}}}{\leq} \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$$

ya que $\|T\|$ es una constante finita (T lineal y continua implica que es acotada, i.e., $\|T\| < +\infty$) y $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$ pues (x_n) es de Cauchy por ser convergente.

2. $\bar{T}(x)$ no depende de la sucesión (x_n) elegida.

Para verlo, sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en D convergentes a x . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (T(x_n) - T(y_n)) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ T \text{ lineal}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n - y_n) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ T \text{ continua}}}{=} \\ &= T(\lim_n (x_n - y_n)) = T(\lim_n x_n - \lim_n y_n) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \lim x_n = x = \lim y_n}}{=} T(0 - 0) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ T \text{ lineal}}}{=} 0. \end{aligned}$$

Nótese que todos los límites existen por el punto anterior y por ser (x_n) e (y_n) convergentes.

3. $\bar{T}: X \rightarrow Y$ es *lineal y continua*.

Lineal:

$$\bar{T}(ax + by) = \lim T(ax_n + by_n) = a \lim T(x_n) + b \lim T(y_n) = a\bar{T}(x) + b\bar{T}(y)$$

para todos $a, b \in \mathbb{K}$ (cuerpo base de espacio vectorial), $x, y \in X$.

Continua (basta ver que es un operador acotado por la proposición 4.9 del apéndice):

$$\|\bar{T}x\| = \|\lim T x_n\| \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \|\cdot\| \text{ continua}}}{=} \lim \|T x_n\| \underset{\substack{\leq \\ \uparrow \\ T \text{ continua}}}{\leq} \lim \|T\| \cdot \|x_n\| \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \|\cdot\| \text{ continua}}}{=} \|T\| \cdot \|x\|.$$

4. \bar{T} es *único*.

Supongamos que existiera \bar{T}' otro operador lineal y continuo que extiende a T . Dado $x \in X$, por ser D denso en X , existe $\{x_n\}_n \subset D$ tal que $\lim x_n = x$. Tenemos:

$$\bar{T}'(x) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \bar{T}' \text{ continua}}}{=} \lim \bar{T}'(x_n) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \bar{T}' \text{ extiende a } T}}{=} \lim T(x_n) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Definición de } T}}{=} \bar{T}(x).$$

5. Se tiene $\|\bar{T}\|_{X \rightarrow Y} = \|T\|_{D \rightarrow Y} = \sup_{x \in D, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ pues cumple la doble desigualdad:

$$\|\bar{T}x\| = \|\lim_n T x_n\| = \lim_n \|T x_n\| \leq \lim \|T\|_{D \rightarrow Y} \cdot \|x_n\| = \|T\|_{D \rightarrow Y} \|x\| \implies \|\bar{T}\|_{X \rightarrow Y} \leq \|T\|_{D \rightarrow Y}$$

y

$$\|T\|_{D \rightarrow Y} = \sup_{x \in D} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \in X} \frac{\|\bar{T}x\|_Y}{\|x\|_X} = \|\bar{T}\|_{X \rightarrow Y}.$$

siendo la desigualdad entre los supremos cierta porque $D \subset X$ y $\bar{T}|_D = T$.

6. \bar{T} es una *isometría* si y sólo si T lo es.

$$\boxed{\leftarrow} \|\bar{T}x\|_Y = \|\lim T x_n\|_Y = \lim \|T x_n\|_Y = \lim \|x_n\|_X = \|\lim x_n\|_X = \|x\|_X$$

$$\boxed{\rightarrow} T = \bar{T}|_D, \text{ así que si } \bar{T} \text{ es una isometría, } T \text{ también.} \quad \square$$

Este lema permite definir $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pues:

- $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$ es una isometría lineal (en particular, es lineal y continua).
- $L^1 \cap L^2$ denso en L^2 por estar $C_C^\infty \subseteq L^1 \cap L^2$ y ser C_C^∞ denso en L^2 .

Corolario 1.27. *Existe una única $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que*

1. $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ para toda $f \in L^1 \cap L^2$
2. $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ para toda $f \in L^2$.

Además, \mathcal{F} es biyectiva, donde la inversa viene dada como la única extensión lineal y continua del operador $(\mathcal{G}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$ definido inicialmente para $g \in L^1 \cap L^2$.

Demostración. Los dos apartados se siguen como consecuencia del lema tomando:

$$D = L^1 \cap L^2, \quad X = L^2, \quad Y = L^2, \quad T = \mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$$

obteniendo en consecuencia la única extensión lineal y continua $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, que es una isometría por serlo $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2$. (Abusamos de notación llamando de la misma forma a la transformada en $L^1 \cap L^2$ y a su extensión a todo L^2 .)

Veamos ahora la *biyectividad*. Para ello, buscamos un candidato a inversa. Tomando como guía el teorema de inversión, parece que un buen candidato es

$$(\mathcal{G}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = (\mathcal{F}g)(-x)$$

definido inicialmente para $g \in L^1 \cap L^2$ (para que las integrales sean finitas y \mathcal{G} vaya a parar a L^2). Dada $g \in L^1 \cap L^2$, \mathcal{G} va a parar a L^2 por ser $\mathcal{G}g = \mathcal{F}g(-x)$ e ir \mathcal{F} a parar a L^2 por Plancherel.

Como \mathcal{F} es lineal y continuo (pues es una isometría lineal), \mathcal{G} también lo es.

Por tanto, por el lema 1.27 de extensión de operadores, tenemos que \mathcal{G} se extiende de forma continua a todo L^2 . Abusando de notación, llamaremos $\mathcal{G}: L^2 \rightarrow L^2$ a esta extensión.

Por el corolario 1.24, \mathfrak{X} es denso en L^2 . En particular, $\mathfrak{X} \subset L^1 \cap L^2$, así que \mathcal{G} está bien definida en \mathfrak{X} .

Por el teorema de inversión, tenemos:

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(f) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f) = f$$

para toda $f \in \mathfrak{X} \subset L^1 \cap L^2$. Es decir:

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = I|_{\mathfrak{X}}.$$

Por la densidad de \mathfrak{X} en L^2 y por ser \mathcal{F} y \mathcal{G} continuos en $L^1 \cap L^2$ (en particular, en \mathfrak{X}), tenemos que

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G}) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) = I|_{L^2}.$$

Es decir, \mathcal{F} es biyectiva y $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$ □

Veamos cómo se extienden propiedades demostradas en el teorema 1.12 para la transformada de Fourier en L^1 a la transformada de Fourier en L^2 .

Proposición 1.28 (Propiedades de la T.F. en L^2). *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que:*

1. $(\mathcal{F} \circ \tau_y)(f) = (M_{-y} \circ \mathcal{F})(f)$.
2. $(\mathcal{F} \circ M_a)(f) = (\tau_a \circ \mathcal{F})(f)$.
3. $(\mathcal{F} \circ \delta^R)(f) = (R^n \cdot \delta^{1/R} \circ \mathcal{F})(f)$.

Demostración. Se razonan de forma análoga. Probamos el segundo y dejamos indicado el tercero.

Segundo apartado.

Sabemos que si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces por la fórmula (1.1) ya demostrada:

$$(\mathcal{F} \circ M_a)(f) = (\tau_a \circ \mathcal{F})(f).$$

Es decir, tenemos el resultado buscado en L^1 . Para probarlo en L^2 usamos que $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2 y que estamos trabajando con operadores continuos.

\mathcal{F} es una isometría de L^2 (por el corolario 1.27) y M_a y τ_a también son isometrías de L^2 (por la proposición 1.11), así que las composiciones (en el orden que sea) de estos operadores también son isometrías. En particular, son *continuas*.

Además, sabemos que $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2 . Por tanto, dada $f \in L^2$, existe $\{f_n\}_n \subseteq L^1 \cap L^2$ tal que $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Por ser las composiciones de \mathcal{F} , M_a y τ_a operadores continuos de L^2 , tenemos que:

$$(\mathcal{F} \circ M_a)(f) = (\mathcal{F} \circ M_a)(\lim_n f_n) = \lim_n (\mathcal{F} \circ M_a)(f_n) = \lim_n (\tau_a \circ \mathcal{F})(f_n) = (\tau_a \circ \mathcal{F})(\lim_n f_n) = (\tau_a \circ \mathcal{F})(f)$$

donde todos los límites se consideran en L^2 .

Así que $\mathcal{F} \circ M_a = \tau_a \circ \mathcal{F}$ en L^2 .

Tercer apartado.

En este caso, δ^R no es una isometría, pero sí es un operador continuo por ser un operador acotado con $\|\delta_R\|_{L^2 \rightarrow L^2} = R^{n/2}$ (por la proposición 1.11).

Por tanto, razonando exactamente igual que en el apartado anterior, se obtiene el resultado. \square

1.3.3 Definición de la T.F. en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Hemos visto que dada $f \in L^2$ y una sucesión cualquiera $\{f_n\} \subset L^1 \cap L^2$ (denso en L^2) con $f_n \rightarrow f$ en L^2 , entonces

$$\mathcal{F}f(\xi) = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(\xi)$$

por el lema de extensión de \mathcal{F} , donde la notación L^2 - significa que tomamos el límite en L^2 .

Pero nos gustaría tener una sucesión de funciones concreta con la que trabajar. Para ello, tomemos $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ con $R_n \nearrow +\infty$. Definamos $f_n(x) = f(x) \cdot \chi_{B(0, R_n)}$ (es decir, truncamos la función f por bolas de radio cada vez mayor).

Tenemos que:

1. $f_n \in L^1 \cap L^2$, pues si $f \in L^2$, como $|f \cdot \chi_{B(0, R_n)}| = |f_n| \leq |f|$, entonces $f_n \in L^2$ y está también en L^1 porque

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_n| = \int_{B(0, R_n)} |f| \leq \left(\int_{B(0, R_n)} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B(0, R_n)} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2 \cdot |B(0, R_n)|^{\frac{1}{2}} < \infty$$

donde la última desigualdad se tiene porque $f \in L^1 \cap L^2$ y $|B_{R_n}| < +\infty$. Así que $f_n \in L^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $f_n \rightarrow f$ en L^2 pues:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f_n|^2 = \int_{|x| > R_n} |f|^2 \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ pues es la cola de la integral de una función integrable.

Se usan entonces estas f_n para dar la definición concreta de la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.29 (T.F. en $L^2(\mathbb{R}^n)$). Se define la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{F}f(\xi) := L^2\text{-}\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| \leq R} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Observación 1.30. Hacemos hincapié en que el límite es en L^2 . La convergencia puntual del límite es un problema mucho más difícil. Lo comentaremos al comienzo del capítulo 3.

1.4 Anexo

1.4.1 Clase \mathfrak{X}_C

Sea

$$\mathfrak{X}_C := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposición 1.31. *Si $1 \leq p < +\infty$, entonces \mathfrak{X}_C es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Ya sabemos que \mathfrak{X} es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Así que para ver que \mathfrak{X}_C es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es suficiente ver que es denso en \mathfrak{X} . Es decir, basta aproximar cada $f \in \mathfrak{X}$ por funciones de \mathfrak{X}_C en la norma L^p .

Sea $\psi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{B(0,1)} \equiv 1$, $\text{sop } \psi \subset B(0,2)$.

Sea $\varphi = \psi^\vee$. Es decir, $\varphi(x) = \widehat{\psi}(-x)$. Tenemos que:

1. $\varphi \in L^1$ pues

$$\|\varphi\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}(-x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\psi}(y)| dy = \|\widehat{\psi}\|_{L^1} < \infty$$

pues, por estar $\psi \in C_C^\infty$, el corolario 1.15 de dualidad suavidad-decaimiento nos da que $\widehat{\psi} \in L^1$.

2. Además, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ pues:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot e^{2\pi i 0 \cdot \xi} dx = \widehat{\varphi}(0) = (\psi^\vee)^\wedge(0) = \psi(0) = 1$$

siendo el penúltimo paso cierto por el teorema de inversión (que podemos aplicar pues $\psi \in C_C^\infty \subset \mathfrak{X}$).

Por tanto, $\varphi_t = \frac{1}{t^n} \cdot \varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$ con $t > 0$ es A.I.R. (por el teorema 4.31 del apéndice).

Veamos que, si $f \in \mathfrak{X}$

1. $\varphi_t * f \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2. $\varphi_t * f \in \mathfrak{X}_C$ para todo $t > 0$.

La primera afirmación se sigue del teorema 4.32 del apéndice, que podemos aplicar por estar $f \in \mathfrak{X} \subset L^p$.

Para ver la segunda, necesitamos comprobar que:

1. $\varphi_t * f \in L^1$: cierto porque

$$\|\varphi_t * f\|_{L^1} \stackrel{\text{Young}}{\leq} \|\varphi_t\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^1} < +\infty.$$

2. $(\varphi_t * f)^\wedge \in L^1$: cierto porque

$$\|(\varphi_t * f)^\wedge\|_{L^1} = \|\widehat{\varphi}_t \cdot \widehat{f}\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(t\xi) \cdot \widehat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t\xi) \cdot \widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \|\widehat{f}\|_{L^1} < \infty$$

siendo la primera igualdad cierta por la transformada de una convolución (proposición 1.9), la segunda por la transformada de φ_t (fórmula (1.5)), la tercera por el teorema de inversión, la cuarta porque $\psi \leq 1$, y la última porque $f \in \mathfrak{X}$.

3. $(\varphi_t * f)^\wedge$ tiene soporte compacto: cierto porque

$$(\varphi_t * f)^\wedge(\xi) = \widehat{\varphi}_t(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) = \widehat{\varphi}(t \cdot \xi) \cdot \widehat{f}(\xi) = \psi(t \cdot \xi) \cdot \widehat{f}(\xi)$$

estando la última igualdad justificada por el teorema de inversión.

Así que si $t \cdot \xi \notin \text{sop } \psi \subset B(0, 2)$, lo cual ocurre si $\xi \notin B(0, 2/t)$, entonces $(\varphi_t * f)^\wedge(\xi) = 0$.
Luego $\text{sop } (\varphi_t * f)^\wedge \subset B(0, 2/t)$.

Por tanto, $\varphi_t * f$ es una familia de funciones de \mathfrak{X}_C que converge a f en L^p cuando $t \searrow 0$. Luego \mathfrak{X}_C es denso en \mathfrak{X} y, en consecuencia, es denso en L^p . \square

Proposición 1.32. Si $f \in \mathfrak{X}_C$ entonces existe $R_0 = R_0(f) > 0$ tal que

$$\int_{B(0, R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = f(x)$$

para todo $R \geq R_0$.

Demostración. Basta tomar R_0 de forma que $\text{sop } \widehat{f} \subset B(0, R_0)$ y aplicar el teorema de inversión. \square

Capítulo 2

El conjunto de Kakeya

2.1 Nota histórica sobre el problema

En 1917, el matemático japonés Soichi Kakeya propuso la siguiente versión de lo que ahora se conoce como el *problema de Kakeya* o el *problema de la aguja*: ¿cuál es el ínfimo de las áreas de los conjuntos en \mathbb{R}^2 tales que una aguja de longitud 1 se puede mover de forma continua dentro del conjunto de manera que al final ocupa la posición original pero invertida? A los conjuntos en los que una aguja se puede invertir de forma continua los llamaremos *conjuntos de Kakeya*.

Casi al mismo tiempo, el matemático ruso Abram Samóilovich Besicovitch construyó en 1918 un conjunto compacto B en \mathbb{R}^2 de medida 2-dimensional nula que contenía un segmento de longitud uno en cada dirección cuando trabajaba en un problema sobre la integral de Riemann en \mathbb{R}^2 . A este tipo de conjuntos se les llama *conjuntos de Besicovitch*.

Más tarde se vio que el conjunto B también proporciona la solución al problema de Kakeya: el ínfimo de las áreas de los conjuntos de Kakeya es 0. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, podemos construir un conjunto de medida menor que ε en el que se puede girar una aguja de forma continua hasta volver a su posición inicial quedando invertida.

La construcción de Besicovitch fue simplificada más tarde por Perron (1928), y más tarde por Rademacher (1962) y Schoenberg (1962).

Finalmente, en 1971, Charles Fefferman usó una ligera variante de la mejora de Schoenberg para refutar la conjetura del multiplicador del disco, como explicaremos en el capítulo 3. Es este el motivo para tratar estos problemas geométricos, que aparentemente nada tienen que ver con el Análisis Armónico.

Nosotros no seguiremos la construcción de Fefferman. Usaremos la de Perron, más conocida como *El árbol de Perron*, ya que es la que da E.M. Stein ([14] páginas 434-440), autor que tomamos como referencia principal para el contraejemplo del multiplicador del disco. Hemos ampliado su construcción, detallándola de forma exhaustiva y dando información adicional. También puede consultarse en el libro de Miguel de Guzmán ([12] páginas 201-207).

Como aviso previo, no resolveremos por completo ninguno de los dos problemas: ni el de Kakeya ni el de Besicovitch. A partir de la construcción que vamos a hacer del árbol de Perron, no requiere mucho trabajo adicional construir tanto un conjunto de Kakeya de área arbitrariamente pequeña como un conjunto de Besicovitch. Estas construcciones se pueden consultar en el libro de Miguel de Guzmán [12] (páginas 209-212).

Los motivos de no completar las construcciones son el espacio limitado del que disponemos y que el objetivo central del trabajo es el problema del multiplicador de la bola.

2.2 Notación y nociones previas

Dado S un conjunto medible, vamos a denotar por $|S|$ su medida de Lebesgue. Por ejemplo, dado un triángulo ABC , denotamos por $|ABC|$ su área.

Abusando de notación, cuando tengamos un segmento AB denotaremos por $|AB|$ su longitud (no su medida de Lebesgue, que es cero). Además:

- Cuando digamos que una unión es disjunta, siendo los conjuntos de la unión de medida no nula, nos referiremos a que es *disjunta salvo en un conjunto de medida nula*.
- Cuando digamos que una unión es disjunta, siendo los conjuntos de la unión segmentos, nos referiremos a que es *disjunta salvo en un número finito de puntos*.

Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos $\tau_a((x, y)) := \tau_{(a,0)}((x, y)) = (x + a, y)$. El motivo es que todas las traslaciones que realizaremos serán traslaciones horizontales hacia la izquierda.

Podríamos usar la notación $\tau_a(x, y) = (x - a, y)$, pero preferimos la primera para que al leer, por ejemplo, $\tau_{-2}(ABC)$, el signo negativo nos recuerde que la traslación es hacia la izquierda.

La traslación aplicada a un segmento o a un triángulo se entenderá como la imagen de un conjunto por una aplicación, esto es, el resultado de trasladar todo el segmento o todo el triángulo.

Denotaremos los triángulos por sus tres vértices escritos en orden antihorario. Por ejemplo, los 3 triángulos que aparecen en la figura 2.1 se pueden denotar por ABC , AMC y MBC .

En la sección 4.4 del anexo recordamos un par de definiciones y resultados que usaremos con frecuencia en este capítulo.

2.3 Construcción base

En el siguiente lema recogemos una serie de propiedades que agilizarán la construcción general.

Lema 2.1 (Perron). *Sea ABC un triángulo arbitrario, colocado en el plano de forma que AB sea la base, es decir, de forma que AB esté en el eje x con el punto A a la izquierda del B . Sea M el punto medio de A y B , de forma que MC , la mediana de AB , divide el triángulo en otros dos: $T_1 := AMC$ y $T_2 := MBC$.*

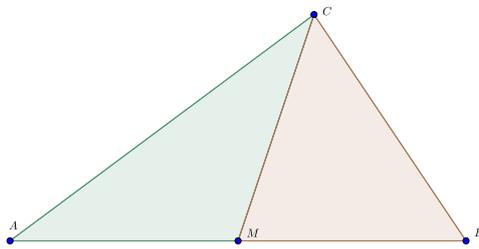


Figura 2.1: Triángulo de partida.

Dado $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, definimos los siguientes conjuntos:

1. Sea

$$\Phi_\alpha(ABC) := T_1 \cup \tau_{-(1-\alpha)|AB|}(T_2)$$

con $\tau_{-(1-\alpha)|AB|}(MBC) = M'B'C'$ en la figura 2.1.

Por tanto, la constante de proporcionalidad entre los triángulos $\Phi^h(ABC) = AB'P$ y ABC es α . Esto implica que

$$|\Phi^h(ABC)| = |AB'P| = \alpha^2|ABC|.$$

Ahora pasemos a estudiar $\Phi^a(ABC)$. Definamos P_R como el corte de la recta horizontal que pasa por P con el segmento MC , y P_Q como el corte de esa misma recta con $M'C'$.

Para empezar, $PP_R C$ es semejante a AMC por tener sus lados las mismas direcciones.

Como $|AP| = \alpha|AC|$ y $AP \cup PC = AC$ (unión disjunta), tenemos que $|AP| + |PC| = |AC|$ y por tanto $|PC| = (1 - \alpha)|AC|$. Así que la constante de proporcionalidad entre los triángulos $PP_R C$ y AMC es $(1 - \alpha)$. Por ello:

$$|PP_R C| = (1 - \alpha)^2 \cdot |AMC| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}.$$

Además, QPP_Q es congruente con $PP_R C$, luego tienen la misma área:

$$|QPP_Q| = |PP_R C| = (1 - \alpha)^2 \cdot |AMC| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}.$$

Razonando igual con los triángulos $P_Q PC'$ (que es semejante a $C'M'B'$) y con PRP_R , obtenemos:

$$|PRP_R| = |P_Q PC'| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}.$$

Como

$$\Phi^a(ABC) = PP_R C \cup QPP_Q \cup P_Q PC' \cup PRP_R$$

siendo estas uniones disjuntas, tenemos que:

$$|\Phi^a(ABC)| = |PP_R C| + |QPP_Q| + |P_Q PC'| + |PRP_R| = 4(1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2} = 2(1 - \alpha)^2 \cdot |ABC|.$$

Luego, como $\Phi(ABC) = \Phi^h(ABC) \cup \Phi^a(ABC)$ (unión disjunta), tenemos que:

$$\Phi(ABC) = |\Phi^h(ABC)| + |\Phi^a(ABC)| = \alpha^2|ABC| + 2(1 - \alpha)^2|ABC| = [\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2]|ABC|.$$

Por último, el lado derecho de $\Phi^h(ABC)$, que es $B'P$, es paralelo a BC por ser $B'C'$ una traslación de BC y estar $B'P$ en la misma recta que $B'C'$; y el lado izquierdo de $\Phi^h(ABC)$, que es AP , está en la misma recta que AC pues $P = AC \cap B'C'$. \square

2.4 El árbol de Perron

De cara a obtener el resultado que necesitamos en el capítulo 3, vamos a proceder del siguiente modo: construimos un conjunto formado por 2^n triángulos con bases en la misma recta y trasladados de tal forma que su medida es menor que ε . En cada uno de esos triángulos encajaremos un rectángulo. Como los rectángulos estarán dentro de los triángulos y estos se solapan de forma que su área es estrictamente menor que ε , el área de los rectángulos solapados será también menor que ε . Sin embargo, los triángulos habrán sido trasladados de tal forma que al reflejarlos sobre sus vértices serán disjuntos y, por tanto, los rectángulos reflejados también serán disjuntos.

Observación 2.3. Aunque acabemos de decir que reflejamos los rectángulos y en el enunciado que daremos pondrá que los trasladamos, veremos que son equivalentes en este caso.

Teorema 2.4. *Sea ABC un triángulo cualquiera, con $A = (x_0, 0)$ y $B = (x_1, 0)$ con $x_0 < x_1$. Consideremos la partición de AB*

$$A_j = \left(x_0 + j \cdot \frac{x_1 - x_0}{2^n}, 0 \right) = \left(x_0 + j \cdot \frac{|AB|}{2^n}, 0 \right)$$

con $j = 0, 1, \dots, 2^n$, y llamemos $T_j = A_{j-1}A_jC$ para $j = 1, \dots, 2^n$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto K que es unión de traslaciones horizontales de los T_j tal que $|K| < \varepsilon$.

Demostración. Primera etapa.

Con la partición del enunciado, el lado AB queda dividido en 2^n segmentos $A_{j-1}A_j$ de la misma longitud:

$$|A_{j-1}A_j| = \frac{|AB|}{2^n} \quad \text{para todo } j = 1, \dots, 2^n.$$

Consideremos entonces los 2^n triángulos disjuntos $T_j = A_{j-1}A_jC$ con $j = 1, \dots, 2^n$.

Para empezar, aplicamos la construcción del lema a los triángulos $A_{2j}A_{2j+2}C = T_{2j+1} \cup T_{2j+2}$. Como A_0, A_1, \dots, A_{2^n} están equiespaciados, el punto medio de la base $A_{2j}A_{2j+2}$ es A_{2j+1} (para todo $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$).

Dado $\alpha_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, hacemos $\Phi_{\alpha_1}(A_{2j}A_{2j+2}C)$ para todo $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. Es decir, para cada $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ trasladamos los triángulos $T_{2j+2} = A_{2j+1}A_{2j+2}C$ a la izquierda $(1 - \alpha_1) \cdot \frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades.

Consideramos entonces los 2^{n-1} hearts y los 2^n arms de las 2^{n-1} construcciones $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$).

Los arms de los diferentes $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ se van a solapar entre sí. No vamos a determinar su solapamiento, ya que acotaremos su área superiormente por la suma de las áreas (como si fueran disjuntos).

Por el lema 4.45, el lado derecho de $\Phi^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ es paralelo a $A_{2j+2}C$ y mide $\alpha_1 \cdot |A_{2j+2}C|$.

Por el mismo lema, el lado izquierdo de $\Phi^h(A_{2j+2}A_{2j+4}C)$ es paralelo a $A_{2j+2}C$, y mide también $\alpha_1 \cdot |A_{2j+2}C|$.

Así que el lado derecho de $\Phi^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ tiene la misma dirección y longitud que el lado izquierdo de $\Phi^h(A_{2j+2}A_{2j+4}C)$. Esto es válido para todo $j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. Por tanto, podemos trasladar todos los $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ de forma que los hearts forman un único triángulo que será semejante a ABC , ya que el lado más a la izquierda estará en la misma recta que $A_0C = AC$ y medirá $\alpha_1 \cdot |AC|$; el lado más a la derecha será paralelo a $A_{2^n}C = BC$ y medirá $\alpha_1 \cdot |BC|$; y la base está en la misma

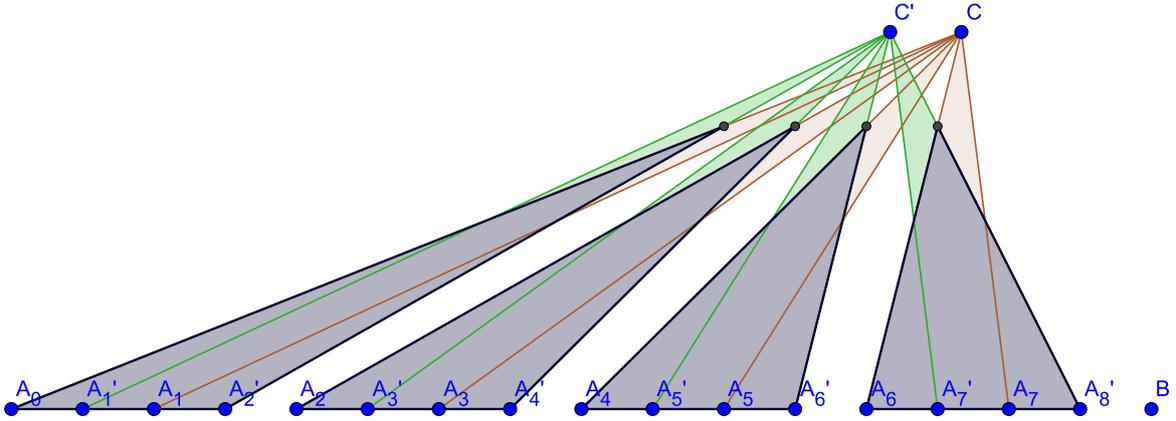


Figura 2.3: Primer paso de la primera etapa para $n = 3$.

recta que AB y mide

$$\sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_1 \cdot |A_{2j}A_{2j+2}| = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_1 \cdot \frac{|AB|}{2^{n-1}} = \alpha_1 \cdot \frac{|AB|}{2^{n-1}} \cdot \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} 1 = \alpha_1 \cdot \frac{|AB|}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = \alpha_1 |AB|.$$

Es decir, los lados de ABC y del triángulo formado por la unión de los *hearts* una vez trasladados los $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-1}-1$) son paralelos dos a dos, y por tanto son triángulos semejantes con razón de semejanza α_1 .

Podemos dar explícitamente qué traslaciones hacemos:

- El triángulo $\Phi(A_0A_2C)$ no se traslada.
- El triángulo $\Phi(A_2A_4C)$ se traslada $-(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades, ya que el punto A_2 (que no se ha trasladado al aplicar Φ), tiene coordenadas $(x_0 + 2\frac{|AB|}{2^n})$, y el vértice derecho de la base de $\Phi(A_0A_2C)$ es $\tau_{-(1-\alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}}(A_2)$. Por tanto, para juntar el lado derecho de $\Phi(A_0A_2C)$ con el izquierdo de $\Phi(A_2A_4C)$ tenemos que trasladar este último conjunto $-(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades.
- Si suponemos como hipótesis de inducción que $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ es trasladado $-(j-1)(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades para $j \geq 2$ (lo hemos comprobado para $j = 2$), entonces el triángulo $\Phi(A_{2j+2}A_{2j+4}C)$ deberá ser trasladado $-j(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades, pues el vértice derecho de $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$ es el resultado de trasladar A_{2j+2} primero $-(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades al aplicar Φ , y luego ha sido trasladado otras $-(j-1)(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades para juntarlo con el vértice derecho de $\Phi(A_{2j-2}A_{2j}C)$. Por tanto, para pegar el vértice izquierdo de $\Phi(A_{2j+2}A_{2j+4}C)$, que es A_{2j+2} , con el vértice derecho del corazón que tiene a la izquierda, lo tenemos que trasladar

$$-(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}} + (-(j-1)(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}) = -j(1 - \alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$$

unidades.

Denotamos entonces

$$\widehat{\Phi}_j(A_{2j}A_{2j+2}C) := \tau_{-j(1-\alpha)\frac{|AB|}{2^n}}(\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)).$$

A la figura formada por todas estas traslaciones la llamamos $\Psi_1(ABC)$. Es decir:

$$\Psi_1(ABC) := \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j(A_{2j}A_{2j+2}C).$$

Nota: sólo hemos realizado traslaciones de los triángulos originales T_1, \dots, T_{2^n} . En concreto, los triángulos con subíndice par han sido trasladados $-(1-\alpha_1) \cdot \frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades, y los triángulos con subíndice $2j+1, 2j+2$ han sido trasladados $-j(1-\alpha_1)\frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-1}$). *Fin de la nota.*

Vamos a acotar la medida de $\Psi_1(ABC)$. Sea

$$\Psi_1^h(ABC) := \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C),$$

refiriéndonos con $\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ a $\tau_{-j(1-\alpha)\frac{|AB|}{2^n}}(\Phi^h(A_{2j}A_{2j+2}C))$. Como hemos explicado ya, $\Psi_1^h(ABC)$ es un triángulo semejante a ABC con factor de proporcionalidad α_1 , que está formado por los $\Phi_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ puestos uno a continuación del otro (para eso hemos elegido las traslaciones concretas que dan lugar a los $\widehat{\Phi}$). Por tanto, la unión de arriba es disjunta. Luego:

$$|\Psi_1^h(ABC)| = \left| \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C) \right| = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)|.$$

Como la medida es invariante por traslaciones, y $\widehat{\Phi}_j$ es una traslación de $\Phi(A_{2j}A_{2j+2}C)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)| &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\Phi^h(A_{2j}A_{2j+2}C)| = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_1^2 \cdot |A_{2j}A_{2j+2}C| \\ &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_1^2 \cdot \frac{|ABC|}{2^{n-1}} = 2^{n-1} \cdot \alpha_1^2 \cdot \frac{|ABC|}{2^{n-1}} = \alpha_1^2 \cdot |ABC|. \end{aligned}$$

Sea

$$\Psi_1^a(ABC) := \Psi_1(ABC) \setminus \Psi_1^h(ABC) \subseteq \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C)$$

donde con $\widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C)$ nos referimos a $\tau_{-j(1-\alpha)\frac{|AB|}{2^n}}(\Phi^a(A_{2j}A_{2j+2}C))$. La inclusión se tiene porque

$$\begin{aligned} \Psi_1(ABC) &= \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j(A_{2j}A_{2j+2}C) = \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \left[\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C) \cup \widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C) \right] \\ &= \left(\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C) \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C) \right) = \Psi_1^h(ABC) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C) \right). \end{aligned}$$

Y por ello

$$\Psi_1^a(ABC) = \Psi_1(ABC) \setminus \Psi_1^h(ABC) \subseteq \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C).$$

No podemos asegurar que haya igualdad porque $\Psi_1^h(ABC)$ puede tener intersección no vacía con $\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)$ (de hecho, tiene intersección no vacía). Por tanto, al quitar a $\Psi_1(ABC)$ el conjunto $\Psi_1^h(ABC)$ nos vamos a quedar con un conjunto igual o más pequeño que $\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)$. Entonces, como la medida es subaditiva:

$$|\Psi_1^a(ABC)| \leq \left| \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} \widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C) \right| \leq \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)|$$

y al ser la medida invariante por traslaciones, queda:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\widehat{\Phi}_j^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)| &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} |\Phi^a(A_{2^j}A_{2^{j+2}}C)| = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} 2(1 - \alpha_1)^2 |A_{2^j}A_{2^{j+2}}C| = \\ &= \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} 2(1 - \alpha_1)^2 \frac{|ABC|}{2^{n-1}} = 2^{n-1} \cdot 2(1 - \alpha_1)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2^{n-1}} = 2(1 - \alpha_1)^2 |ABC|. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} |\Psi_1(ABC)| &= |\Psi_1^h(ABC) \cup \Psi_1^a(ABC)| \leq |\Psi_1^h(ABC)| + |\Psi_1^a(ABC)| \leq \\ &\leq \alpha_1^2 |ABC| + 2(1 - \alpha_1)^2 |ABC| = [\alpha_1^2 + 2(1 - \alpha_1)^2] \cdot |ABC|. \end{aligned}$$

En realidad, Ψ_1 depende de α_1 y de n , así que sería $\Psi_{1;n,\alpha_1}$.

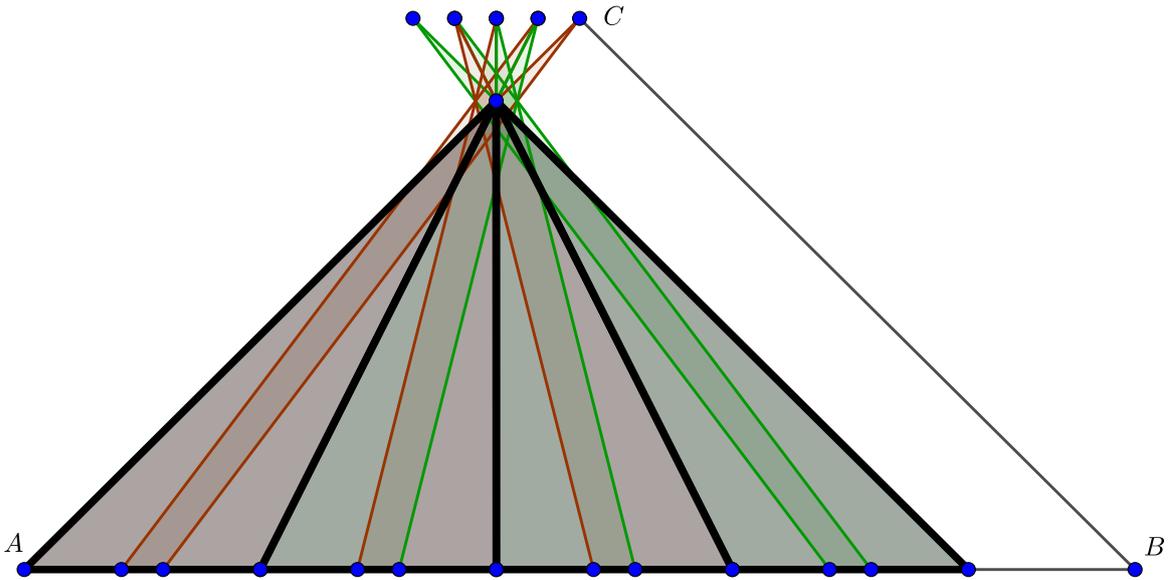


Figura 2.4: Primer paso del caso general con $n = 3$.

Segunda etapa.

Definimos ahora $\Psi_2(ABC) := \Psi_{1,n-1,\alpha_2}(\Psi_{1,n}^h(ABC))$, donde $\alpha_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ es un nuevo factor de proporcionalidad y ponemos $n - 1$ porque ahora tenemos la mitad de triángulos que antes: 2^{n-1} . Es decir, consideramos la división de $\Psi^h(ABC)$ (triángulo semejante a ABC con factor de proporcionalidad α_1) dada por los $\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$. Razonamos como antes intercambiando ABC por $\Psi_1^h(ABC)$ y queda:

$$|\Psi_2^h(ABC)| = \alpha_2^2 |\Psi_1^h(ABC)| = \alpha_2^2 \cdot (\alpha_1^2 \cdot |ABC|) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdot |ABC|$$

$$|\Psi_2^a(ABC)| \leq 2(1 - \alpha_2)^2 |\Psi_1^h(ABC)| = 2(1 - \alpha_2)^2 \alpha_1^2 |ABC|.$$

Aclaración importante: ahora debemos tener en cuenta que cuando traslademos $\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ (con $j \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$) para construir $\Psi_2(ABC)$, no se traslada sólo este triángulo, sino que trasladamos también los *arms* correspondientes. Es decir, al trasladar $\widehat{\Phi}_j^h(A_{2j}A_{2j+2}C)$ para formar $\Psi_2(ABC)$, vamos a entender que se traslada todo $\widehat{\Phi}_j(A_{2j}A_{2j+2}C)$, que recordemos que es una unión de traslaciones de $T_{2j+1} = A_{2j}A_{2j+1}C$ y $T_{2j+2} = A_{2j+1}A_{2j+2}C$. Por tanto, se trasladan las traslaciones de T_{2j+1} y de T_{2j+2} .

Esto es lo que debemos tener en cuenta a partir de ahora en todas las etapas: *cuando digamos que se traslada parte de una figura, se trasladan todos los triángulos cuya intersección da lugar a esa figura*. Esto no va a dar lugar a confusión porque en cada paso cada triángulo estará en una única figura de las que se traslade en ese paso.

Hacemos esto así para que el conjunto obtenido al final sea una unión de traslaciones de los T_j .

El motivo de no razonar con toda la figura sino de decir que trasladamos sólo parte de ella es porque es más fácil seguir la construcción así, centrándonos en los *hearts* y “olvidándonos” de los *arms*. Esto no influye en el cálculo del área porque siempre acotamos superiormente el área que cubren los *arms* $\widehat{\Phi}_j^a(A_{2j}A_{2j+2}C)$ considerándolos como si fueran disjuntos. Así que cualquier solapamiento que pueda perderse con nuevas traslaciones no influye en nuestra acotación del área. *Fin de la aclaración.*

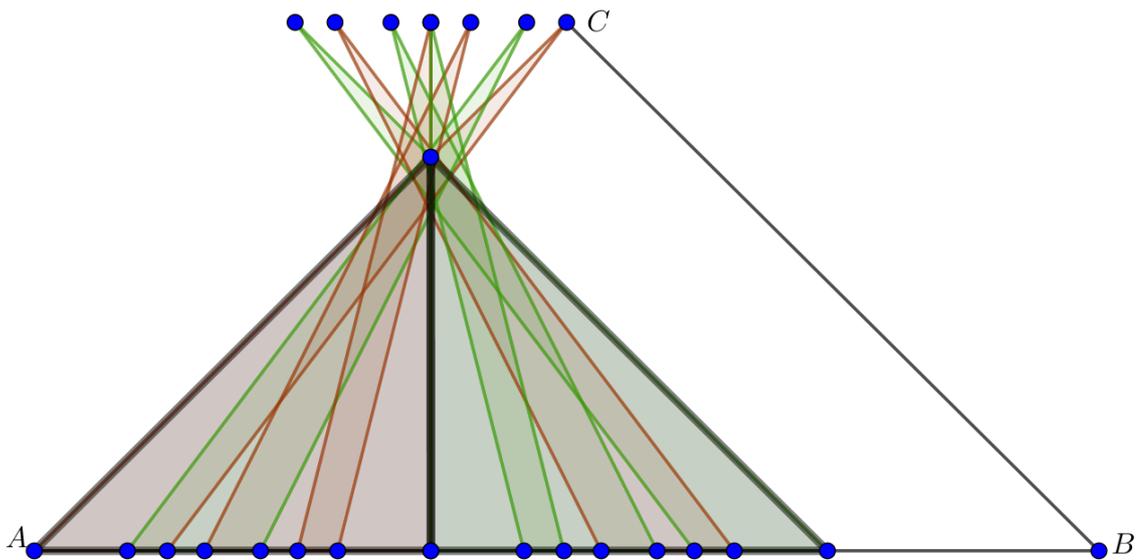


Figura 2.5: Segundo paso del caso general con $n = 3$.

Etapa k -ésima.

En general, definimos $\Psi_k(ABC) := \Psi_{1,n-(k-1),\alpha_k}(\Psi_{k-1}^h(ABC))$. Procedamos por inducción: nuestra hipótesis es que para el paso $k-1$ se tiene:

$$|\Psi_{k-1}^h(ABC)| = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k-1}^2 \cdot |ABC|$$

$$|\Psi_{k-1}^a(ABC)| \leq 2(1 - \alpha_{k-1})^2 \alpha_1^2 \dots \alpha_{k-2}^2 \cdot |ABC|$$

Queremos probar que se cumple la fórmula análoga para el caso k -ésimo (es decir, intercambiando $k-1$ por k en la fórmula de arriba). Haciendo uso del caso $k=1$ conseguimos reducir el problema al caso $k-1$, y aplicamos entonces la hipótesis de inducción:

$$|\Psi_k^h(ABC)| = |\Psi_{1,n-(k-1),\alpha_k}(\Psi_{k-1}^h(ABC))| \stackrel{\uparrow}{=} \alpha_k^2 \cdot |\Psi_{k-1}^h(ABC)|$$

Construcción de Ψ_1

$$\stackrel{\uparrow}{=} \alpha_k^2 \cdot \alpha_1^2 \dots \alpha_{k-1}^2 \cdot |ABC| = \alpha_1^2 \dots \alpha_k^2 \cdot |ABC|$$

Hipótesis inducción

$$|\Psi_k^a(ABC)| \leq 2(1 - \alpha_k)^2 \cdot |\Psi_{k-1}^h(ABC)| \stackrel{\uparrow}{=} 2(1 - \alpha_k)^2 \alpha_1^2 \dots \alpha_{k-1}^2 |ABC|$$

Hipótesis inducción

Sea

$$K := \Psi_n^h(ABC) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n \Psi_k^a(ABC) \right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |K| &\leq |\Psi_n^h(ABC)| + \sum_{k=1}^n |\Psi_k^a(ABC)| = \\ &= \left(\alpha_1^2 \dots \alpha_n^2 + 2 \sum_{k=1}^n 2 \alpha_1^2 \dots \alpha_{k-1}^2 (1 - \alpha_k)^2 \right) \cdot |ABC| \end{aligned}$$

Si tomáramos $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$, entonces la expresión de arriba quedaría

$$\begin{aligned} |K| &\leq \alpha^{2n} |ABC| + \sum_{k=1}^n 2(1 - \alpha)^2 \alpha^{2(k-1)} |ABC| \leq \alpha^{2n} |ABC| + \sum_{k=1}^{+\infty} 2(1 - \alpha)^2 \alpha^{2(k-1)} |ABC| \\ &= \left[\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha)^2 \frac{1}{1 - \alpha^2} \right] \cdot |ABC| = \left[\alpha^{2n} + \frac{2(1 - \alpha)}{1 + \alpha} \right] \cdot |ABC| \leq [\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha)] \cdot |ABC| \end{aligned}$$

Así que dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha = \alpha_\varepsilon$ y existe $n = n_{\alpha_\varepsilon}$ tales que

$$\alpha^{2n} + 2(1 - \alpha) < \frac{\varepsilon}{|ABC|}$$

con lo que $|K| < \varepsilon$. □

Observación 2.5. Las traslaciones exactas que aplicamos sobre cada rectángulo a lo largo del proceso se describen en el anexo 2.5.1 para no interrumpir la lectura de la prueba.

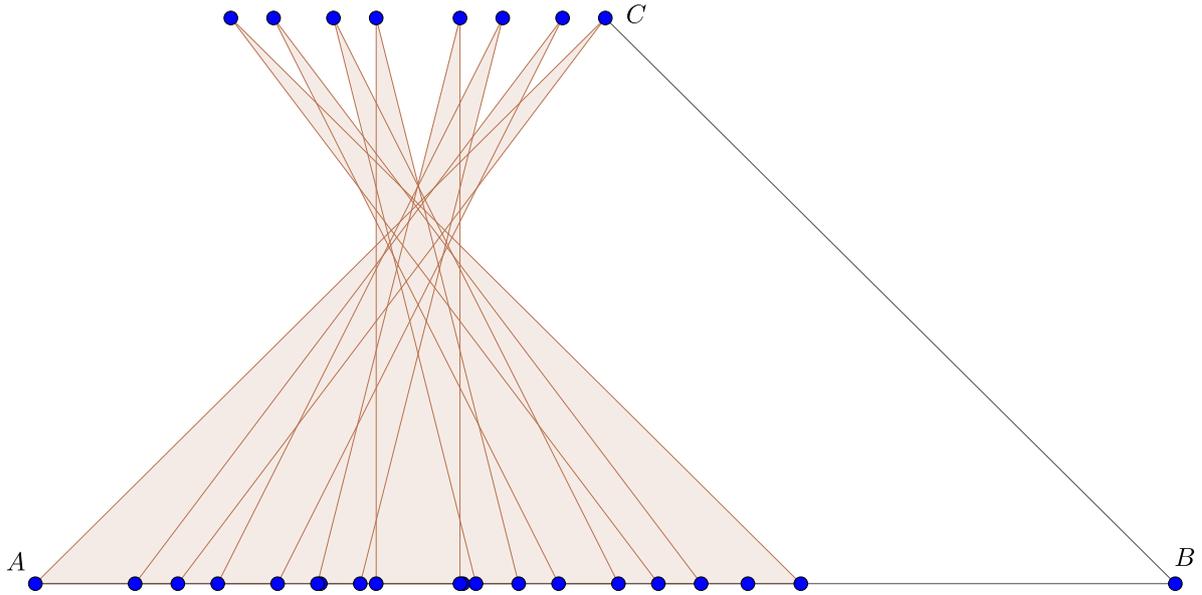


Figura 2.6: Tercer y último paso del caso general con $n = 3$. Conjunto K .

Encaje de los rectángulos en la construcción

Teorema 2.6. *Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen un entero $N = N_\varepsilon$ y 2^N rectángulos R_1, \dots, R_{2^N} , cada uno de ellos de dimensiones 1×2^{-N} , tales que:*

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} R_j \right| < \varepsilon$$

y las traslaciones de dos unidades en la dirección del lado mayor de los R_j , que denotaremos por $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^{2^N}$, son disjuntas dos a dos y cumplen

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} \tilde{R}_j \right| = 1.$$

Demostración. Consideremos la construcción de K de la demostración del teorema 2.4: sea ABC un triángulo con base AB , sea $T_j = A_{j-1}A_jC$, con $1 \leq j \leq 2^n$, uno de los triángulos que conforman ABC , y sea T'_j la traslación horizontal de T_j a la izquierda que forma parte de K . Los T_j tienen un vértice común, C . Llamemos C_j al vértice correspondiente a C en T'_j .

Entonces, definimos T_j^* como el triángulo obtenido al reflejar T'_j a través de C_j . O, lo que es lo mismo, definimos T_j^* como el triángulo obtenido al reflejar T_j a través de C y luego aplicarle la misma traslación que hay que aplicar a T_j para llevarlo a T'_j . Esta segunda forma de verlos nos será más útil para razonar.

Aunque hemos visto que los triángulos T'_j se solapan mucho, los triángulos reflejados T_j^* son disjuntos dos a dos.

Veamos por qué. Sea T_j^R la reflexión de T_j a través de C . Si $j_1 < j_2$, entonces T_{j_2} está a la derecha de T_{j_1} , por lo que $T_{j_2}^R$ está a la izquierda de $T_{j_1}^R$.

Para obtener T_j^* a partir de T_j^R , lo único que tenemos que hacer es aplicar a T_j^R la misma traslación que hay que aplicar a T_j para obtener T'_j .

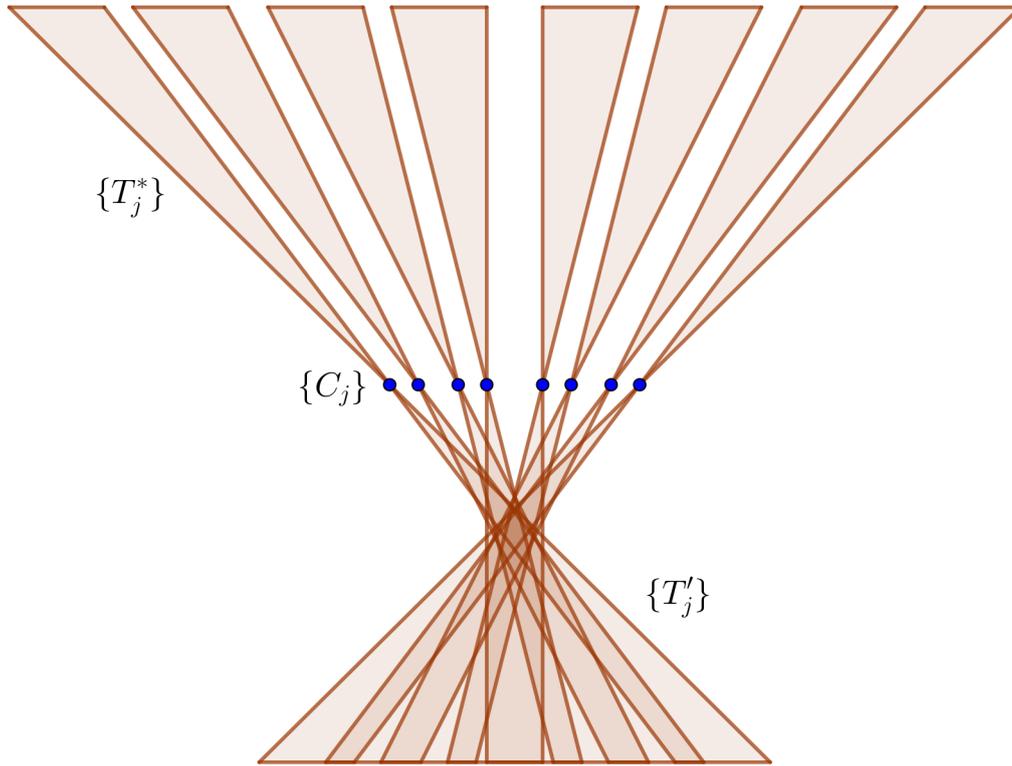


Figura 2.7: Conjunto K y las reflexiones de los triángulos que lo forman.

Como cuanto mayor es j , mayor es la longitud de la traslación que hay que aplicar a T_j para obtener T_j' , resulta que cuanto mayor es j , mayor es la traslación que hay que aplicar a T_j^R para obtener T_j^* .

Pero el T_j^R está más a la izquierda cuanto mayor es j , siendo los $\{T_j^R\}_j$ disjuntos. Por tanto, como las traslaciones son todas a la izquierda y son de mayor longitud cuanto mayor es j , tenemos que los triángulos T_j^* serán disjuntos y estarán más a la izquierda cuando mayor sea j , quedando sus vértices C_j todos en la misma horizontal.

Tras todas estas consideraciones, pasemos a la prueba.

Fijemos como triángulo ABC un triángulo equilátero de altura 2.

A continuación, supongamos que T_j' es uno de los triángulos que conforman K . Dibujamos su mediana, es decir, la recta que va del vértice C_j al punto medio de la base, marcando los puntos P_1 y P_2 a distancias $1/2$ y $3/2$ del vértice (existen tales puntos pues la altura de ABC es 2, así que la altura de T_j es 2 y, por tanto, la mediana desde C_j en T_j' medirá al menos 2).

Sea R_j el rectángulo cuyo eje mayor es P_1P_2 con lados 1 y 2^{-N} .

En el anexo 2.5.2 se justifica lo siguiente: como el ángulo en el vértice C_j es mayor que $c_2 \cdot 2^{-n}$ para alguna constante positiva c_2 , existe un entero positivo c_1 constante tal que eligiendo $N = n + c_1$ se tiene $R_j \subset T_j'$.

Ahora, sea $\tilde{R}_j \subset T_j^*$ la reflexión de R_j a través de C_j . Se tiene $\tilde{R}_j \subset T_j^*$ pues la reflexión conserva la inclusión. Tenemos por tanto 2^n rectángulos R_j de dimensiones 1×2^{-N} de forma que sus reflejados \tilde{R}_j son disjuntos.

Pero nosotros buscábamos $2^N = 2^{c_1} \cdot 2^n$ rectángulos. Como K junto con los triángulos reflejados es compacto, podemos tomar 2^{c_1} copias de K disjuntas obteniendo así 2^N rectángulos de lados 1 y 2^{-N} que están contenidos en un conjunto de medida a lo sumo

$$2^{c_1} \cdot [\alpha^{2^n} + 2(1 - \alpha)] \cdot |T|, \tag{2.1}$$

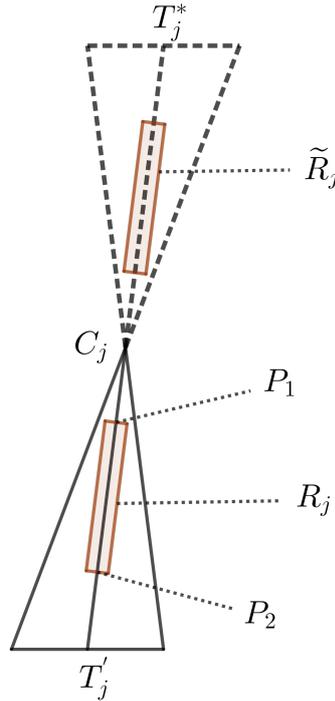


Figura 2.8: Rectángulos 1×2^{-N} dentro de los triángulos.

mientras que los correspondientes rectángulos reflejados son todos disjuntos y la medida de su unión (que no es más que la suma de sus áreas) es 1.

Dado $\varepsilon > 0$, existen α lo suficientemente próximo a 1 y $n \in \mathbb{N}$ (dependiente de α) lo suficientemente grande tales que la medida (2.1) es menor que ε , completando la prueba del teorema. \square

Veamos un resultado sobre la construcción que hemos hecho del árbol de Perron.

Al final de la demostración del teorema 2.4 observábamos que la medida del conjunto K tendía a 0 si elegíamos el mismo factor $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ en todos los pasos suficientemente cercano a 1 y hacíamos $n \rightarrow \infty$.

Ahora vamos a cuantificar la acotación del área de K eligiendo unos α_i concretos en cada paso. De hecho, después daremos una referencia en la que se establece que la acotación realizada en la siguiente proposición con los α_i diferentes es óptima.

Veámoslo:

Proposición 2.7. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto plano P_ε de medida menor que $C \cdot |\log \varepsilon|^{-1}$ (donde C es una constante fija e independiente de ε) que contiene un rectángulo de dimensiones $1 \times \varepsilon$ en todas las direcciones del plano.*

Demostración. Al acabar la demostración del teorema 2.4 tomábamos

$$\Psi_k(ABC) := \Psi_{1,n-(k-1)}(\Psi_{k-1}^h(ABC))$$

usando en cada paso el mismo factor de proporcionalidad α para las traslaciones.

Sin embargo, vamos a ver que podemos afinar más los factores elegidos en cada paso, de forma que el área del conjunto obtenido sea aún menor:

Si definimos $\Psi_k(ABC) := \Psi_{1,n-(k-1),\alpha_k}(\Psi_{k-1}^h(ABC))$ con un factor α_k distinto en cada paso, entonces, como ya hemos visto, la cota del área de K es:

$$|K| \leq [\alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_n^2 + 2[(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1 - \alpha_2)^2 + \dots + \alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{n-1}^2(1 - \alpha_n)^2]] \cdot |T_0|$$

Tomemos en concreto

$$\alpha_k := 1 - \frac{1}{n+2-k} = \frac{n+1-k}{n+2-k} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n$$

Entonces tenemos un producto telescópico:

$$\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k = \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{n+2-j} = \frac{n+1-k}{n+1}.$$

Además:

$$\alpha_k(1 - \alpha_{k+1}) = \frac{n+1-k}{n+2-k} \cdot \frac{1}{n+2-(k+1)} = \frac{n+1-k}{n+2-k} \cdot \frac{1}{n+1-k} = \frac{1}{n+2-k} = 1 - \alpha_k,$$

Aplicando esta última relación repetidas veces:

$$\alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_k^2 \cdot (1 - \alpha_{k+1})^2 = \alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{k-1}^2 (1 - \alpha_k)^2 = \dots = (1 - \alpha_1)^2 = \left(\frac{1}{n+2-1} \right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Así que:

$$\begin{aligned} |K| &\leq \left[\alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_n^2 + 2 \left[(1 - \alpha_1)^2 + \alpha_1^2 (1 - \alpha_2)^2 + \dots + \alpha_1^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{n-1}^2 (1 - \alpha_n)^2 \right] \right] \cdot |ABC| = \\ &= \left[\left(\frac{n+1-n}{n+1} \right)^2 + 2 \left[(1 - \alpha_1)^2 + (1 - \alpha_1)^2 + \dots + (1 - \alpha_1)^2 \right] \right] \cdot |ABC| = \\ &= \left[\frac{1}{(n+1)^2} + 2n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \right] \cdot |ABC| = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \cdot |ABC| \leq \frac{2n+2}{(n+1)^2} \cdot |ABC| \leq \frac{2}{n+1} \cdot |ABC|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < 1$), es posible elegir n suficientemente grande para que $2^{-(n+1)} < \varepsilon$. Entonces $2^{n+1} > \varepsilon^{-1}$, luego $(n+1) \log_2(2) = n+1 > \log_2(\varepsilon^{-1})$. Así que:

$$|K| \leq \frac{2}{n+1} |ABC| < \frac{2}{\log_2(\varepsilon^{-1})} \cdot |ABC|.$$

El conjunto del plano buscado P_ε será entonces una unión finita de conjuntos como el K rotados. \square

De hecho, se puede demostrar que la cota hallada es la óptima:

Proposición 2.8. *Existe $C > 0$ tal que si un subconjunto del plano contiene a un rectángulo de dimensión $\varepsilon \times 1$ en cada dirección, entonces su área debe ser mayor que $\frac{C}{|\log \varepsilon|}$.*

Demostración. Ver los artículos de Antonio Córdoba [4] y [5]. \square

A continuación, explicamos algunos de los detalles que hemos quitado del desarrollo del capítulo para agilizar su lectura.

2.5 Anexos

2.5.1 Traslaciones realizada en las construcción del conjunto K

En resumen, el conjunto K no es más que aplicar una serie de traslaciones consecutivas a los triángulos $T_k = A_{k-1}A_kC$ con $k = 1, \dots, 2^n$. Estas traslaciones son las descritas a continuación. Cuando un triángulo aparezca en varios casos, se entiende que las traslaciones se componen unas con otras.

Para empezar, están las *traslaciones correspondientes a aplicar* Φ . Son las siguientes:

T_k con $k \equiv 1 \pmod{2}$ se traslada $(1 - \alpha) \frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades a la izquierda

ya que en el *primer paso* para cada par de triángulos T_{2j+1}, T_{2j+2} ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$), el triángulo T_{2j+2} se traslada hacia la izquierda $(1 - \alpha)$ veces la base, que es $\frac{|AB|}{2^{n-1}}$.

T_k con $k \equiv 3, 4 \pmod{4}$ se traslada $(1 - \alpha)\alpha \frac{|AB|}{2^{n-2}}$ unidades a la izquierda

ya que en el *segundo paso* para cada cuatro triángulos $T_{4j+1}, T_{4j+2}, T_{4j+3}, T_{4j+4}$ ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$), los dos triángulos más a la derecha, que son T_{4j+3}, T_{4j+4} se trasladan hacia la izquierda $(1 - \alpha)$ veces la base, que es $\frac{\alpha|AB|}{2^{n-2}}$.

En general, en el *paso* $h \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$:

T_k con $k \equiv 2^{h-1} + 1, \dots, 2^{h-1} + 2^{h-1} \pmod{2^h}$ se traslada $(1 - \alpha)\alpha^{h-1} \frac{|AB|}{2^{n-h}}$ unid. a la izq.

ya que en el *paso* h -ésimo ($h \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$), para cada 2^h triángulos triángulos $T_{2^h j+1}, T_{2^h j+2}, \dots, T_{2^h j+(2^h-1)}, T_{2^h j+2^h}$ ($j = 0, 1, \dots, 2^{n-h} - 1$), los 2^{h-1} triángulos más a la derecha, que son $T_{2^h j+2^{h-1}+1}, \dots, T_{2^h j+2^h}$ se trasladan hacia la izquierda $(1 - \alpha)$ veces la base, que es $\frac{\alpha^{h-1}|AB|}{2^{n-h}}$.

Además, tenemos también las *traslaciones que se realizan para "pegar" los* Φ de forma que sus *hearts* formen un único *heart*, que es semejante a ABC . Estas traslaciones son las siguientes:

-En el primer paso, para $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$:

T_k con $k \in \{2^1 \cdot j - 1, 2^1 \cdot j\}$ se traslada $(j - 1)(1 - \alpha) \frac{|AB|}{2^{n-1}}$ unidades a la izquierda

pues el par de triángulos j -ésimo se trasladaba $j - 1$ veces $(1 - \alpha)$ por la longitud de la base original de cada par de triángulos, que era $\frac{|AB|}{2^{n-1}}$.

-Para $j = 1, 2, \dots, 2^{n-2}$:

T_k con $k \in \{2^2 \cdot j - 3, 2^2 \cdot j - 2, 2^2 \cdot j - 1, 2^2 \cdot j\}$ se traslada $(j - 1)(1 - \alpha) \frac{\alpha|AB|}{2^{n-2}}$ unidades a la izquierda

pues la cuaterna de triángulos j -ésima se trasladaba $j - 1$ veces $(1 - \alpha)$ por la longitud de la base formada por dos pares de triángulos consecutivos, que era $\frac{\alpha|AB|}{2^{n-2}}$.

-En general, en el *paso* $h \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ para $j = 1, 2, \dots, 2^{n-h}$:

T_k con $k \in \{2^h \cdot j - (2^h - 1), \dots, 2^1 \cdot j\}$ se traslada $(j - 1)(1 - \alpha) \frac{\alpha^{h-1}|AB|}{2^{n-h}}$ unidades a la izquierda

pues el conjunto j -ésimo de 2^h triángulos se trasladaba $j - 1$ veces $(1 - \alpha)$ por la longitud de la base formada por dos conjuntos de 2^{h-1} triángulos consecutivos, que era $\frac{\alpha^{h-1}|AB|}{2^{n-h}}$.

2.5.2 Cálculo de las constantes de los rectángulos.

Probamos en esta sección que existe $c_2 > 0$ constante (no depende de n) tal que el ángulo del vértice C_j (ver figura 2.5.2) cumple $\widehat{C}_j > c_2 \cdot 2^{-n}$ para todo $j = 1, \dots, 2^n$.

Para empezar, como la altura de ABC es 2, las medianas desde C_j de los T'_j son mayores o iguales a 2, con lo que tiene sentido definir P_1 y P_2 .

Como queremos acotar inferiormente los ángulos \widehat{C}_j de manera uniforme (es decir, sin depender del j) y sin que c_2 dependa de n tampoco, vamos a considerar el más pequeño de ellos.

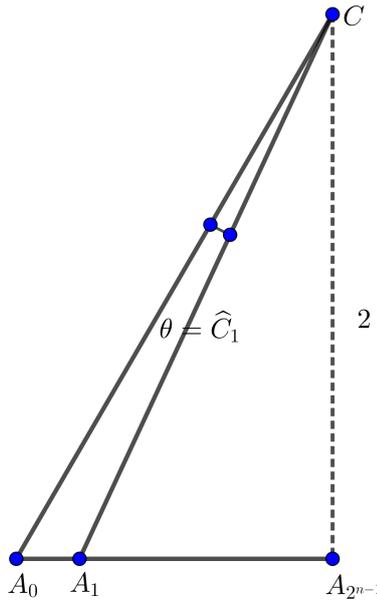
Como estamos considerando ABC equilátero y estamos dividiendo en 2^n triángulos (número par), hay simetría.

Los ángulos más pequeños son \widehat{C}_1 y \widehat{C}_{2^n} . Esto es así por el teorema del coseno, ya que \widehat{C}_1 y \widehat{C}_{2^n} son los ángulos correspondientes a los triángulos de los extremos T_1 y T_{2^n} , y estos tienen la misma base que el resto de los T_j pero sus otros dos lados, que son los que determinan el ángulo, son más largos. Por tanto, el coseno de estos ángulos será mayor y por tanto el ángulo será menor.

Es más, repitiendo este argumento, tenemos:

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_{2^n} < \widehat{C}_2 = \widehat{C}_{2^{n-1}} < \dots < \widehat{C}_{2^{n-1}} = \widehat{C}_{2^{n-1}+1}$$

Como la altura es 2 y ABC es equilátero, sus lados miden $|AB| = |BC| = |CA| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



Por tanto, $|A_i A_{i+1}| = \frac{|AB|}{2^n} = \frac{4\sqrt{3}}{2^n \cdot 3}$ para todo $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Así que

$$|A_1 A_{2^n-1}| = \frac{|AB|}{2} - |A_0 A_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{2^n \cdot 3}.$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$|A_1 C| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{2^n \cdot 3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}.$$

Como ya conocemos $|A_0 A_1|$, $|A_1 C|$ y $|CA_0|$, podemos calcular $\theta = \widehat{C}_1 = \angle A_1 C A_0$ aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \theta = \frac{|A_0 C|^2 + |A_1 C|^2 - |A_0 A_1|^2}{2 \cdot |A_0 C| \cdot |A_1 C|}.$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{4 + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{2^n \cdot 3}\right)^2}{2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}} = \frac{\frac{16}{3} + 4 + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 - \frac{16}{3 \cdot 2^{2n}}}{\frac{16}{3}\sqrt{3 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}} = \\
 &= \frac{\frac{28}{3} + \frac{4}{3}\frac{(2^{n-1}-1)^2}{2^{2n-2}} - \frac{16}{3 \cdot 2^{2n}}}{\frac{16}{3}\sqrt{\frac{3 \cdot 2^{2n-2} + (2^{n-1}-1)^2}{2^{2n-2}}}} = \frac{28 \cdot 2^{2n} + 16 \cdot (2^{n-1}-1)^2 - 16}{3 \cdot 2^{2n}} = \frac{7 \cdot 2^{2n} + 4 \cdot (2^{n-1}-1)^2 - 4}{8 \cdot 2^n \cdot \sqrt{3 \cdot 2^{2n-2} + 2^{2n-2} - 2^n + 1}} = \\
 &= \frac{7 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 8 \cdot 2^{n-1}}{8 \cdot 2^n \cdot \sqrt{2^{2n} - 2^n + 1}} = \frac{8 \cdot 2^{2n} - 8 \cdot 2^{n-1}}{8 \cdot 2^n \cdot \sqrt{2^{2n} - 2^n + 1}} = \frac{2^n - \frac{1}{2}}{\sqrt{2^{2n} - 2^n + 1}}.
 \end{aligned}$$

Tiene sentido pues tiende a 1 cuando $n \rightarrow +\infty$, lo que concuerda con que $\theta \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

Queremos acotar θ inferiormente.

Sabemos que si $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{|x|}{\pi/2} \leq |\sin x| \leq |x|$$

siendo la primera desigualdad cierta porque en $[0, \pi/2]$ el seno es cóncavo, así que está por encima de la recta que une $(0, \sin 0)$ con $(\pi/2, \sin \frac{\pi}{2}) = (\pi/2, 1)$, y esa recta es $y = \frac{x}{\pi/2}$; la segunda igualdad es cierta en todo \mathbb{R} .

Por tanto, usando que $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, tenemos que

$$\frac{|x|^2}{\pi^2/4} \leq 1 - \cos^2 x \leq |x|^2.$$

Como nos interesa acotar el ángulo inferiormente, de la segunda desigualdad de la cadena anterior deducimos que

$$|x| \geq \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Por tanto, podemos acotar θ (que seguro que está entre $(0, \pi/2)$ al tender a 0 cuando $n \rightarrow +\infty$) por $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, pues ya conocemos $\cos \theta$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \theta &\geq \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2^n - 1/2}{\sqrt{2^{2n} - 2^n + 1}}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{2^{2n} - 2^n + 1 - (2^{2n} - 2^n + \frac{1}{4})}{2^{2n} - 2^n + 1}} = \\
 &= \sqrt{\frac{3/4}{2^{2n} - 2^n + 1}} > \sqrt{\frac{3/4}{2^{2n}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-n}.
 \end{aligned}$$

Así que podemos elegir como constante $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Una vez probado esto, podemos completar los razonamientos hechos con los rectángulos.

La longitud del arco de centro C_j y radio $1/2$ es $\frac{1}{2} \cdot \widehat{C}_j$ que es mayor o igual que $\frac{1}{2}\theta$ (recordemos que θ era el ángulo más pequeño). Así que para que el rectángulo R_j quepa dentro de T_1 (triángulo de ángulo más pequeño) basta que la longitud l de su lado más corto cumpla

$$l < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-n} \right) = \sqrt{3} \cdot 2^{-n-4},$$

pues $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{-n} \right) < \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \theta \right) \leq \frac{1}{8} \widehat{C}_j \quad \forall j = 1, \dots, 2^n$. Es decir, nos vale $l < \sqrt{3} \cdot 2^{-n-4}$ pues es menor que $\frac{1}{4}$ de la longitud del arco más pequeño, que a su vez es menor que $\frac{1}{4}$ de la longitud de cualquier otro arco.

Como nos vale cualquier $l < \sqrt{3} \cdot 2^{-n-4}$, tomando $l = 2^{-4-n}$ se cumple que R_j está dentro de T'_j para todo j .

Para esta elección, $N = 4 + n$, con lo que $c_1 = 4$.

Capítulo 3

El problema del multiplicador de la bola

En este capítulo usaremos lo estudiado en los dos capítulos anteriores para probar el resultado principal del trabajo: el contraejemplo del multiplicador de la bola.

3.1 Contexto histórico del problema

Uno de los principales problemas del Análisis Armónico ha sido estudiar en qué sentido las Series de Fourier cumplen

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \cdot e^{2\pi i n x} \quad (3.1)$$

si es que lo cumplen, donde $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x) \cdot e^{-2\pi i n x} dx$.

Se presentan muchas cuestiones: ¿converge la serie? ¿En casi todo punto? ¿Converge a f ? ¿Para qué tipo de sumas, sumas simétricas \sum_{-N}^N ?

Podemos enunciar con más precisión algunos de los problemas que se han ido planteando sobre estas cuestiones.

1. Si $f \in C(\mathbb{T})$, ¿es cierta (3.1) para todo $x \in \mathbb{T}$?

La respuesta es que no, y el primer contraejemplo se debe a Du Bois-Reymond (1884). Una prueba más sencilla se sigue del principio de acotación uniforme (ver teorema 1.5 del libro de Duoandikoetxea [6]).

2. ¿Es cierta (3.1) en casi todo punto $x \in \mathbb{T}$ si $f \in C(\mathbb{T})$?

La respuesta es que sí, y viene dada por el Teorema de Carleson (1966). De hecho, la convergencia en casi todo punto se tiene para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $p > 1$ (ver el libro de L. Grafakos [10], Teorema 4.3.16).

3. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, ¿es cierto que (3.1) converge en $L^p(\mathbb{T})$?

Sí, si y sólo si $p \in (1, +\infty)$, por el teorema de Marcel Riesz de 1927 (ver el libro de L. Grafakos [10], Teorema 4.1.8).

Por otro lado, se plantean teoremas completamente análogos para la transformada de Fourier.

En este caso, queremos ver si

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (3.2)$$

y en qué sentido (ver discusión en el libro de Duoandikoetxea [6], sección 1.9). Es decir, queremos ver si se cumple la fórmula de inversión. Los problemas que se plantean entonces son:

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, ¿es cierta (3.2) en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$?

No es verdad, incluso en $n = 1$, por una variación del argumento para series de Fourier.

2. ¿Y en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$?

Es un problema abierto (problema de Carleson) para $n \geq 2$.

En el caso $n = 1$, la respuesta es positiva (ver el libro de L. Grafakos [11], Teorema 11.1.1).

3. ¿Y la convergencia en norma L^p ? Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ (la primera para que tenga sentido $\|f\|_p$ y la segunda para que tenga sentido puntual \hat{f}), ¿se tiene (3.2) entendida como convergencia en L^p ? Es decir, ¿vale la fórmula de inversión en norma L^p ?

Para $p = 2$ es cierto por ser $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ un isomorfismo isométrico.

¿Y para $p \neq 2$?

Si $n = 1$, es cierto para $p \in (1, +\infty)$ por el teorema de M. Riesz sobre series de Fourier y un argumento de transferencia. (ver el libro de L. Grafakos [10], Corolario 4.13.11).

Sin embargo, para $n \geq 2$ no es cierto por el contraejemplo del multiplicador del disco, encontrado por Charles Fefferman (1971). Éste será el objeto de nuestro estudio.

3.1.1 La conjetura del disco

Para entender la relación que hay entre el problema que acabamos de explicar y la acotación del multiplicador de la bola (o del disco si estamos en dimensión $n = 2$), necesitamos el siguiente teorema de Análisis Funcional.

Teorema 3.1 (Relación entre convergencia y acotación). *Sea X un espacio de Banach, sea D un subespacio denso de X . Sea $\{T_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ con $T_N: X \rightarrow X$ una sucesión de operadores lineales y acotados en X . Son equivalentes:*

1. Se cumple:

$$(a) \|T_N x\| \leq C \cdot \|x\| \text{ para todo } x \in D, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \lim_N \|T_N x - x\|_X = 0 \text{ para todo } x \in D.$$

2. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T_N x - x\| = 0$ para todo $x \in X$.

Observación 3.2. La condición 1(a) de acotación en el denso es equivalente a tener acotación en todo el espacio X por el lema 1.26 de densidad. Así que es lo mismo suponer que los operadores T_N están uniformemente acotados en un denso o que suponerlo en todo el espacio. Ponemos la condición del denso porque en principio es más débil (aunque por el lema 1.26 sabemos que no) y, por tanto, más sencilla de comprobar.

Demostración. (1. \implies 2.) Sea $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Como D es denso en X , existe $y \in D$, con $y = y(x, \varepsilon)$, tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|T_N x - x\| &\leq \|T_N x - T_N y\| + \|T_N y - y\| + \|y - x\| \leq \\ &\leq C \cdot \|x - y\| + \|T_N y - y\| + \|y - x\| \leq \\ &\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}(C + 2) \end{aligned}$$

donde el primer paso viene dado por la desigualdad triangular; el segundo paso viene dado por la primera hipótesis de 1. extendida a todo X ; y el tercer paso se tiene por la segunda hipótesis de 1., pues nos garantiza que existe $N_0 = N_0(\varepsilon, y)$ tal que $\|T_N y - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $N \geq N_0$.

Como $y = y(x, \varepsilon)$, en realidad $N_0 = N_0(x, \varepsilon)$.

Por tanto, fijado $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $N_0 = N_0(x, \varepsilon)$ tal que si $N \geq N_0$, entonces $\|T_N x - x\| < \varepsilon$.

Así que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|T_N x - x\|_X = 0$ para todo $x \in X$.

(2. \implies 1.) Como $T_N x \rightarrow x$ para todo $x \in X$, y sabemos que las sucesiones convergentes en espacios métricos están acotadas, tenemos que para cada $x \in X$ existe $C_x > 0$ tal que

$$\sup_{N \geq 1} \|T_N x\| = C_x < +\infty.$$

Por el Principio de Acotación Uniforme (teorema 4.10), existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{N \geq 1} \|T_N\| \leq C$$

Así que $\|T_N x\| \leq \|T_N\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$ (o X) y todo $N \in \mathbb{N}$. □

Veamos la definición formal de multiplicador de la bola antes de continuar.

Definición 3.3. Sea $R > 0$, y sea $f \in \mathfrak{X}$. Se define el operador S_R como

$$S_R f(x) := \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Este operador se suele llamar *multiplicador de Fourier de la bola* $B(0, R)$ o simplemente *multiplicador de la bola* $B(0, R)$.

En el caso $R = 1$, denotamos S_R por S , y lo llamamos simplemente el multiplicador de la bola:

$$S f(x) := \int_{|\xi| \leq 1} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Sea $\{R_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión tal que $\lim R_N = +\infty$. Sea $T_N = S_{R_N}$ para todo $N \in \mathbb{N}$, $D = \mathfrak{X}_C$ y $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sabemos que $\lim_N \|T_N x - x\|_X = 0$ para todo $x \in D$ por el teorema 1.32.

Por tanto, por el teorema 3.1, que se cumpla la relación (3.2) para toda $f \in X = L^p(\mathbb{R}^n)$ equivale a la acotación uniforme en $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ de los operadores $T_N = S_{R_N} : \mathfrak{X}_C \rightarrow L^p$.

No es complicado ver (será lo primero que demostremos) que la acotación uniforme de los S_R equivale a la acotación del multiplicador de la bola unidad

$$S f(x) := \int_{|\xi| \leq 1} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Por tanto, para ver si se cumple (3.2) sólo hay que comprobar si el operador S era o no acotado como operador de L^p en un denso¹ de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

A finales de los años 60, ya se sabía que el multiplicador de la bola no era acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \notin (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$. La *conjetura del disco* afirmaba que el operador del disco era acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in (\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$, pero sólo se había demostrado el caso trivial $p = 2$.

¹Da igual en qué denso porque, por un lema de densidad, la acotación de operadores entre espacios de Banach en un denso equivale a la existencia de una única extensión acotada en todo el espacio; nosotros trabajaremos en \mathfrak{X} porque nos parece el más natural.

Sin embargo, en 1971 Charles Fefferman publicó en *Annals of Mathematics* su artículo *The Multiplier Problem for the Ball*, en el que demostraba que el multiplicador de la bola no está acotado para $p \neq 2$.

Llegó a una contradicción con la relación de acotación para multiplicadores de semiespacios en la norma $L^p_{\ell^2}$ (que veremos más adelante) actuando sobre las funciones características de los rectángulos dados por el teorema 2.6 del capítulo anterior. Para eso necesitábamos la construcción del árbol de Perron.

Hemos seguido la demostración del libro de E.M. Stein ([14] páginas 450-454), fragmentándola en diferentes lemas para facilitar la lectura y generalizando algunos pasos. También ha sido consultada la demostración de L. Grafakos ([11] páginas 339-350).

3.1.2 Consideraciones previas

Tomaremos como subespacio denso ² para trabajar $D = \mathfrak{X}$, que sabemos que es denso en L^p para $p \in [1, +\infty)$ por el teorema 1.24.

El motivo de trabajar en \mathfrak{X} es que en él está bien definida la transformada puntual \hat{f} , que por estar en un subespacio de $L^1 \cap L^2$ coincide con la transformada $\mathcal{F}f$. Además, $\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2$ por Plancherel, y como $f \in \mathfrak{X}$, $\hat{f} \in L^1$. Por tanto, $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$, con lo que la transformada inversa de \hat{f} coincide con $\mathcal{F}^{-1}f$.

Por tanto, podemos escribir el multiplicador de la bola como

$$S_R f(x) = \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} \cdot \chi_{B(0,R)})(x).$$

con la notación de la transformada de L^2 o como:

$$S_R f(x) = (\chi_{B(0,R)} \cdot \hat{f})^\vee(x).$$

que es como escribe habitualmente usando la notación de transformada puntual. Por esta última forma de escribirlo es por lo que se le llama *multiplicador de la bola*.

El contraejemplo dado por Charles Fefferman se obtiene por reducción al absurdo: consiste en suponer que S es acotado para llegar a una contradicción.

Una vez que tengamos que $S: \mathfrak{X} \rightarrow L^p$ no está acotado en norma $\|\cdot\|_{L^p \rightarrow L^p}$ para $p \in (1, 2)$ y dimensión $n = 2$, razonaremos de forma directa para $n \geq 2$ y $p > 2$.

Pasamos a la prueba del contraejemplo.

3.2 Primera parte: acotación superior

Procederemos por reducción al absurdo suponiendo que S es acotado y llegaremos a una contradicción.

La prueba consiste en encontrar una acotación inferior y otra superior la norma $L^p_{\ell^2}$ del multiplicador del semiespacio (definiremos estos conceptos más adelante) y ver que estas cotas son contradictorias.

Para ello, necesitamos varios pasos previos, que dividimos en diferentes secciones.

²Como ya hemos dicho, da igual la elección del denso. Se podrían elegir otros como C^∞_C , clase de Schwartz \mathcal{S} o el ya mencionado \mathfrak{X}_C . Nos valdría cualquiera en el que tenga sentido la definición puntual \hat{f} de la transformada y podamos usar tanto el teorema de Plancherel como la fórmula de inversión.

3.2.1 Acotación de S equivale a acotación uniforme de los S_R

Para empezar, vemos en el siguiente resultado que la acotación uniforme de los S_R ($R > 0$) equivale a la acotación de $S = S_1$. En concreto, demostramos que *si el multiplicador de la bola unidad está acotado, entonces lo está el multiplicador de la bola de cualquier radio y además con la misma cota.*

Por tanto, como comentábamos en la contextualización del problema, es lo mismo suponer que los $S_{B(0,R)}$ están uniformemente acotados que suponer que S está acotado.

Lema 3.4. *Sea $R > 0$. Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para $g \in \mathfrak{X}$, entonces*

$$\|S_R g\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$$

para toda $g \in \mathfrak{X}$.

Demostración. Como siempre, sea δ^R la dilatación $\delta^R(g)(x) = g(R \cdot x)$.

Veamos que $(\delta^{1/R})^{-1} \circ S \circ \delta^{1/R} = S_R$.

- Para empezar, $(\delta^{1/R})^{-1} = \delta^R$.
- Además:

$$\begin{aligned} S(\delta^{1/R}(g(x))) &= \int_{|\xi| \leq 1} \widehat{\delta^{1/R}g}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{|\xi| \leq 1} R^n \cdot \widehat{g}(\xi \cdot R) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \stackrel{z=\xi \cdot R}{=} \\ &= \int_{|z| \leq R} R^n \cdot \widehat{g}(z) \cdot e^{2\pi i x \cdot \frac{z}{R}} \cdot \frac{1}{R^n} dz = S_R g \left(\frac{x}{R} \right) = [\delta^{1/R}(S_R g)](x). \end{aligned}$$

Aplicando entonces δ^R a ambos lados, nos queda:

$$\delta^R(S(\delta^{1/R}(g(x)))) = \delta^R[\delta^{1/R}(S_R g)](x) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (\delta^R)^{-1} = \delta^{1/R}}}{=} S_R g(x)$$

para toda $g \in \mathfrak{X}$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por tanto, $(\delta^{1/R})^{-1} \circ S \circ \delta^{1/R} = S_R$, como habíamos dicho. Así que:

$$\begin{aligned} \|S_R(g)\|_{L^p} &= \|(\delta^{1/R})^{-1}(S(\delta^{1/R}))(g)\|_{L^p} \leq \|(\delta^{1/R})^{-1}\| \cdot \|S\| \cdot \|\delta^{1/R}\| \cdot \|g\|_{L^p} = \\ &= \frac{1}{\|\delta^{1/R}\|} \|S\| \cdot \|\delta^{1/R}\| \cdot \|g\|_{L^p} = \|S\| \cdot \|g\|_{L^p} \leq A_p \cdot \|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

donde el último paso se tiene de que por hipótesis $\|S\| \leq A_p$. Hemos obtenido entonces la acotación de los multiplicadores de las bolas de radio arbitrario. \square

Observación 3.5. En todo el cálculo, $\|\cdot\|$ representa la norma de operadores de $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.

3.2.2 Espacios L^p con valores vectoriales

Para dar un salto en la acotación, veamos que *si S está acotado, entonces su correspondiente operador con valores vectoriales está acotado con la misma cota.*

La probamos en un contexto más general.

Para empezar, definimos los espacios L^p con valores vectoriales. Son espacios en los que consideramos funciones con valores vectoriales $f: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^M, \ell^2)$ con $M > 1$ en lugar de funciones con valores escalares $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se define entonces la norma siguiente:

Definición 3.6 (Norma $L^p_{\ell^2}$). Sea $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^M, \ell^2)$ una función medible con $n, M \geq 1$ enteros. Se define

$$\|\vec{f}\|_{L^p_{\ell^2}} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\vec{f}(x)\|_{\ell^2}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^M |f_j(x)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

Es decir, la norma de una función con valores vectoriales está dada por la norma L^p de la norma euclídea de los valores de la función.

Se puede comprobar que es una norma. Con ella se define el siguiente espacio normado.

Definición 3.7 (Espacios L^p con valores vectoriales). Se define el espacio L^p con valores vectoriales como

$$L^p_{\ell^2} := \{ \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^M, \ell^2) \mid \vec{f} \text{ es medible y } \|\vec{f}\|_{L^p_{\ell^2}} < +\infty \}$$

Este espacio es un espacio de Banach, hecho que damos por conocido sin demostración.

Dado $T: L^p \rightarrow L^p$ un operador lineal, podemos definir su operador lineal con valores vectoriales asociado como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: L^p_{\ell^2} &\rightarrow L^p_{\ell^2} \\ \vec{f} = \{f_j\} &\mapsto \mathbf{T}\vec{f} = \{Tf_j\}_{j=1}^M. \end{aligned}$$

Es decir, se toma la imagen componente a componente.

Teorema 3.8. Dado $T: L^p \rightarrow L^p$, son equivalentes:

1. Existe $A_p > 0$ tal que

$$\|Tf\|_p \leq A_p \cdot \|f\|_p \quad \forall f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. Existe $A_p > 0$ tal que

$$\|\mathbf{T}\vec{f}\|_{L^p_{\ell^2}} \leq A_p \cdot \|\vec{f}\|_{L^p_{\ell^2}} \quad \forall f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$$

para todo entero positivo M . Es decir

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Demostración. La demostración de (2. \implies 1.) es directa: es el caso $M = 1$ de 2.

Veamos entonces la demostración de (1. \implies 2.).

Recordemos que dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$, $\|\vec{x}\|_2 = \sup_{\|\vec{\omega}\|=1} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo. Pero esto es sólo el caso $p = \infty$ de la siguiente propiedad, que nos da una expresión de la norma euclídea en función de p :

Lema 3.9. Dado $p \in (0, +\infty]$, existe una constante $\gamma_p > 0$ que depende de p y de M tal que

$$\|\vec{x}\|_{\ell^2} = \|\vec{x}\|_2 = \gamma_p \cdot \left[\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$.

Demostración. La demostración se da en el anexo al capítulo 3 (ver lema 3.20). □

Con este lema podemos probar (1 \implies 2). Tenemos:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M (Tf_j)^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{T}\vec{f}(x)\|_{\ell_2^p}^p dx \right)^{1/p} \stackrel{\text{Lema}}{=} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \gamma_p^p \left(\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \mathbf{T}\vec{f}(x), \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right)^{p/p} dx \right]^{1/p}.$$

Aplicando el teorema de Tonelli (que podemos usar por ser el integrando no negativo) y viendo que

$$\langle \mathbf{T}\vec{f}(x), \vec{\omega} \rangle = \sum T f_j(x) \cdot \bar{\omega}_j = T \left(\sum f_j \cdot \bar{\omega}_j \right)(x) = T(\langle \vec{f}, \vec{\omega} \rangle)(x),$$

la expresión de arriba queda:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M (Tf_j)^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left[\gamma_p^p \int_{\mathbb{S}^{M-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle T(\langle \vec{f}, \vec{\omega} \rangle)(x)|^p dx \right) d\sigma(\vec{\omega}) \right]^{1/p}$$

Por hipótesis, $\|T(\langle \vec{f}, \vec{\omega} \rangle)\|_p^p \leq A_p^p \cdot \|\langle \vec{f}, \vec{\omega} \rangle\|_p^p$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^M (Tf_j)^2 \right)^{1/2} \right\|_p &\leq \left[\gamma_p^p \int_{\mathbb{S}^{M-1}} A_p^p \cdot \|\langle \vec{f}, \vec{\omega} \rangle\|_p^p d\sigma(\vec{\omega}) \right]^{1/p} = \\ &= A_p \left[\gamma_p^p \int_{\mathbb{S}^{M-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \vec{f}(x), \vec{\omega} \rangle|^p dx \right) d\sigma(\vec{\omega}) \right]^{1/p} \stackrel{\text{Tonelli y Lema}}{=} \\ &= A_p \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|\vec{f}(x)\|_2^p dx \right]^{1/p} = A_p \cdot \|\vec{f}\|_{L_{\ell_2^2}^p}. \quad \square \end{aligned}$$

Aplicación al multiplicador de la bola

Aplicamos el resultado anterior al multiplicador de la bola.

Corolario 3.10. Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para $g \in \mathfrak{X}$, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \quad (3.3)$$

para todas $f_1, \dots, f_M \in \mathfrak{X}$.

Demostración. Es consecuencia del lema 3.4 y del teorema 3.8, tomando $T = S_R$. \square

3.2.3 Multiplicador de bolas de centro y radio arbitrario

Hemos probado la acotación en $L_{\ell_2^2}^p$ del multiplicador S_R de una bola de radio arbitrario centrada en el origen. A continuación, veremos que esto garantiza la acotación en $L_{\ell_2^2}^p$ del multiplicador de una bola de radio y centro arbitrarios.

Probaremos la acotación para el multiplicador de la bola de radio R centrada en $u \cdot R$, con u un vector unitario fijo. Es decir, dado $u \in \mathbb{R}^n$ consideramos el multiplicador de la bola:

$$B(Ru, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - Ru| < R\}$$

dado por

$$S_R^u f(x) := \int_{B(Ru, R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

para todas $f \in \mathfrak{X}$.

El sentido de considerar estas bolas es que cuando $R \rightarrow +\infty$ cubren el semiespacio $\{\xi \cdot u > 0\}$, como veremos más adelante.

Para empezar, veamos que el multiplicador de la bola $B(Ru, R)$ es una composición de modulaciones con el multiplicador de la bola $B(0, R)$.

Lema 3.11. *Sea $R > 0$ y $u \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. Para toda $f \in \mathfrak{X}$ se tiene:*

$$S_R^u f(x) = e^{2\pi i x \cdot Ru} \cdot S_R(f \cdot e^{-2\pi i u \cdot R(\cdot)})(x) = [(M_{Ru} \circ S_R \circ M_{-Ru})f](x).$$

Demostración. Haciendo el cambio $\lambda = \xi - uR$ que lleva $B(Ru, R) \mapsto B(0, R)$.

$$S_R^u f(x) = \int_{\xi \in B(Ru, R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \underset{\lambda = \xi - u \cdot R}{=} \int_{\lambda \in B_R} \widehat{f}(\lambda + u \cdot R) \cdot e^{2\pi i x(\lambda + u \cdot R)} d\lambda.$$

Usando que $\widehat{f}(\xi - \eta) = (M_\eta f)^\wedge(\xi)$ (recordemos el teorema 1.12), nos queda:

$$S_R^u f(x) = e^{2\pi i x \cdot Ru} \cdot \int_{B(0, R)} (M_{-Ru})^\wedge(\lambda) \cdot e^{2\pi i x \cdot \lambda} d\lambda = M_{Ru}(S_R(M_{-u}f)). \quad \square$$

Corolario 3.12. *Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para toda $g \in \mathfrak{X}$, entonces:*

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.4)$$

Demostración. Usando el lema 3.11 que acabamos de probar en el primer paso que hay a continuación, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \left(\sum_{j=1}^M |e^{2\pi i u_j \cdot R(\cdot)} \cdot S_R(f_j \cdot e^{-2\pi i u_j \cdot R(\cdot)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \\ &= \left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R(f_j \cdot e^{-2\pi i u_j \cdot R(\cdot)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por el corolario 3.10 tenemos que si S es acotado, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Así que, aplicándoselo a la expresión anterior:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_R^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j \cdot e^{-2\pi i u_j \cdot R(\cdot)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

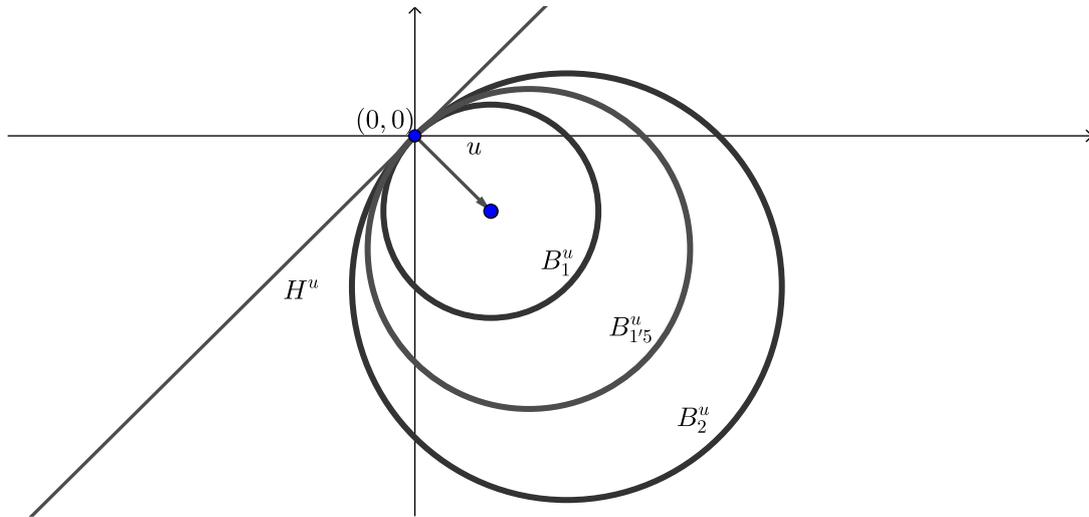
□

3.2.4 Multiplicador de semiespacios

Denotemos por

$$H^u := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u > 0\}.$$

Lema 3.13. *La función característica de $B(Ru, R)$ converge puntualmente a la función característica de H^u cuando $R \rightarrow +\infty$.*



Demostración. Tenemos que $B(Ru, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - R \cdot u| < R\}$ y $H^u = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot u > 0\}$.

Sea $x \in H^u$, es decir, $\langle u, x \rangle = \langle x, u \rangle > 0$. Queremos ver si existe un $R > 0$ tal que $x \in B(Ru, R)$.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x \in B(Ru, R) &\iff |x - Ru|^2 < R^2 \iff \langle x - Ru, x - Ru \rangle \leq R^2 \iff \\ &\iff \langle x, x \rangle - \langle x, Ru \rangle - \langle Ru, x \rangle + \langle Ru, Ru \rangle \leq R^2 \iff \\ &\iff |x|^2 \leq 2R\langle u, x \rangle \iff R \geq \frac{|x|^2}{2\langle u, x \rangle}. \end{aligned}$$

\uparrow
 $\langle u, x \rangle > 0$

donde el último paso se tiene porque $\langle u, x \rangle > 0$ al estar $x \in H^u$.

Así que si $R \geq \frac{|x|^2}{2\langle u, x \rangle}$ y $x \in H^u$, entonces $x \in B(Ru, R)$.

Además, cualquier vector $x \in B(Ru, R)$ está también en H^u ($B(Ru, R) \subseteq H^u$) pues $x \in B(Ru, R)$ equivale, por lo que acabamos de ver, a que $|x|^2 \leq 2\langle u, x \rangle R \iff \langle u, x \rangle \geq \frac{|x|^2}{2R} > 0$ (donde el > 0 se tiene porque si $x \in B(Ru, R)$ entonces $x \neq 0$).

Por tanto, $\chi_{B(Ru, R)}$ converge a χ_{H^u} puntualmente cuando $R \rightarrow +\infty$. \square

Denotemos el *multiplicador del semiespacio* H^u por

$$S^u f(x) := \int_{\xi \cdot u > 0} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

para $f \in \mathfrak{X}$.

Proposición 3.14. Dada $f \in \mathfrak{X}$, $S_R^u f \rightarrow S^u f$ en L^2 cuando $R \rightarrow +\infty$.

Demostración. Por definición:

$$S_R^u f(x) = \int_{\xi \in B(Ru, R)} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \cdot \chi_{B(Ru, R)}(\xi) d\xi$$

y

$$S^u f(x) = \int_{\xi \in H^u} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \cdot \chi_{H^u}(\xi) d\xi,$$

así que

$$\|S_R^u f - S^u f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{B(Ru, R)}(\xi) - \chi_{H^u}(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

El integrando está acotado por

$$(|\chi_{B(Ru, R)}(\xi)| + |\chi_{H^u}(\xi)|)^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 \leq 4 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2$$

cota que no depende de R .

Como $f \in L^2$, por Plancherel $\hat{f} \in L^2$, así que $|\hat{f}|^2 \in L^1$ y por tanto podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada. Nos queda entonces que:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|S_R^u f - S^u f\|_2^2 \stackrel{\text{T.C.D.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{R \rightarrow +\infty} |\chi_{B(Ru, R)}(\xi) - \chi_{H^u}(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

estando la segunda igualdad justificada porque $\chi_{B(Ru, R)} \rightarrow \chi_{H^u}$ puntualmente cuando $R \rightarrow +\infty$.

En resumen: $\|S_R^u f - S^u f\|_2^2 \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow +\infty$. \square

Teorema 3.15. Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para toda $g \in \mathfrak{X}$, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Demostración. Consideremos ahora una colección de vectores unitarios $\{u_1, \dots, u_M\}$ y una colección de funciones $\{f_1, \dots, f_M\} \subset \mathfrak{X}$.

Por la proposición 3.14, $\|S_R^{u_1} f_1 - S^{u_1} f_1\|_2^2 \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow +\infty$. Así que la proposición 4.21 nos garantiza que existe $\{R(1, n)\}_n$ sucesión con $\lim R(1, n) = +\infty$ tal que

$$S_{R(1, n)}^{u_1} f_1 \rightarrow S^{u_1} f_1$$

en casi todo punto.

De la misma forma, $\|S_R^{u_2} f_2 - S^{u_2} f_2\|_2^2 \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow +\infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} R(1, n) = +\infty$, así que existe una subsucesión de $R(1, n)$, que denotamos por $R(2, n)$, tal que $S_{R(2, n)}^{u_2} f_2 \rightarrow S^{u_2} f_2$ en casi todo punto cuando $n \rightarrow +\infty$. Es más, como $R(2, n)$ es subsucesión de $R(1, n)$, tenemos $S_{R(j, n)}^{u_j} f_j \rightarrow S^{u_j} f_j$ en casi todo punto cuando $n \rightarrow \infty$ para $j = 1, 2$.

Iterando hasta u_M y f_M , tenemos finalmente $\{R(M, n)\}_n \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_n R(M, n) = +\infty$ con

$$S_{R(M, n)}^{u_j} f_j \rightarrow S^{u_j} f_j \tag{3.5}$$

en casi todo punto cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $j = 1, \dots, M$.

Así que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\sum_{j=1}^M |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right|^p dx & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Por (3.5)}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^M |S_{R(M, n)}^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{p/2} dx \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \text{Fatou}}}{\leq} \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\| \left(\sum_{j=1}^M |S_{R(M, n)}^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ S_R^u \text{ acotado}}}{\leq} \\ & \leq A_p^p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \end{aligned}$$

pudiendo aplicar el Lema de Fatou (ver teorema 4.10) por ser las funciones que conforman la sucesión del integrando no negativas; y siendo S_R^u acotado por el lema 3.12. \square

3.3 Segunda parte: acotación inferior

El teorema anterior constituye el primer ingrediente para probar el teorema: nos da la acotación superior.

Ahora vamos a conseguir acotación inferior mediante el siguiente lema:

Lema 3.16. *Sea R un rectángulo del plano \mathbb{R}^2 cuyos lados tienen longitudes 1 y 2^{-N} y sea u un vector unitario en la dirección del lado más largo de R . Sea $\tilde{R} = 2u + R$.*

Entonces existe una constante $c' > 0$ tal que:

$$|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\tilde{R}}.$$

Antes de demostrarlo, necesitamos introducir un poco de notación y probar un resultado previo.

Definición 3.17. Vamos a denotar por S^+ el multiplicador del semiespacio para $n = 1$. Es decir, S^+ es el multiplicador de la semirrecta $\xi > 0$:

$$(S^+ f)(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

para $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Necesitamos que esté en L^1 para poder definir la transformada de Fourier puntual \hat{f} .

El resultado previo que necesitamos es el siguiente:

Lema 3.18. *Si $f = \chi_{[a,b]}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos:*

$$|(S^+ f)(x)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| \right| \quad \text{si } x \notin [a, b].$$

Demostración. En general, dada $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, tenemos:

$$S^+ f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x+i\varepsilon)\xi} d\xi$$

donde la convergencia es en L^2 .

Veámoslo. Llamando $(S_\varepsilon f)(x) := \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x+i\varepsilon)\xi} d\xi$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|S^+ f - S_\varepsilon f\|_2 &= \|\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \chi_{[0,+\infty)})(x) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \chi_{[0,+\infty)} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\xi})(x)\|_{L^2(dx)} \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathcal{F} \text{ isometría}}}{=} \|\hat{f}(\xi) \cdot \chi_{[0,+\infty)}(\xi) \cdot (1 - e^{-2\pi\varepsilon\xi})\|_{L^2(d\xi)} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot |1 - e^{-2\pi\varepsilon\xi}|^2 d\xi \right)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \end{aligned}$$

por el teorema de la convergencia dominada, ya que:

- $|1 - e^{-2\pi\varepsilon\xi}| = 1 - e^{-2\pi\varepsilon\xi} < 1$ pues estamos considerando $\varepsilon > 0$ y $\xi \in [0, +\infty)$.
- $\hat{f} \in L^2$ por el teorema de Plancherel, así que $|\hat{f}|^2 \in L^1$.

Por tanto, $S_\varepsilon f \rightarrow S^+ f$ en norma L^2 . Así que existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_n$ con $\lim \varepsilon_n = 0$ tal que $S_{\varepsilon_n} f \rightarrow S^+ f$ en casi todo punto (por la proposición 4.21 del apéndice).

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i(x+i\varepsilon)\cdot\xi} d\xi &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot e^{-2\pi i\xi y} dy \right) \cdot e^{2\pi i(x+i\varepsilon)\xi} d\xi \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{2\pi i(x-y+i\varepsilon)\xi} d\xi \right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \frac{e^{2\pi i\xi(x-y+i\varepsilon)} \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}}{2\pi i(x-y+i\varepsilon)} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x-i\varepsilon} dy. \end{aligned}$$

Así que

$$(S^+ f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i(x+i\varepsilon_n)\cdot\xi} d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x-i\varepsilon_n} dy.$$

Recordemos que nos interesaba $f = \chi_{[a,b]}$, con lo que la expresión se simplifica, quedando:

$$(S^+ f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{y-x-i\varepsilon_n} dy$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \notin [a, b]$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada pues

$$\frac{1}{|y-x-i\varepsilon|} \cdot \chi_{[a,b]}(y) < \frac{1}{|y-x|} \cdot \chi_{[a,b]}(y) \in L^1(dy).$$

Por tanto:

$$(S^+ f)(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{y-x-i\varepsilon} dy \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{T.C.D.}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{1}{y-x} dy = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| \right].$$

Así que

$$|(S^+ f)(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \ln \left| \frac{b-x}{a-x} \right| \right| \quad \text{si } x \notin [a, b]. \quad \square$$

Ahora sí que podemos demostrar el lema que enunciamos de acotación inferior.

Demostración del lema 3.16. Caso particular.

Consideremos el rectángulo $R = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2^{N+1}}, \frac{1}{2^{N+1}}\right]$, que tiene sus lados paralelos a los ejes. Tenemos que

$$\chi_R(x_1, x_2) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x_1) \cdot \chi_{[-\frac{1}{2^{N+1}}, \frac{1}{2^{N+1}}]}(x_2).$$

Si una función F se puede escribir como $F(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$ y u es un vector unitario en la dirección de x_1 (es decir, $u = (1, 0)$), entonces:

$$(S^u F)(x_1, x_2) = S^+ f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Esto es así por la transformada del producto tensorial y porque $u = (1, 0)$, luego $\xi \cdot u > 0 \iff \xi_1 > 0$:

$$\begin{aligned} (S^u F)(x_1, x_2) &= \int_{\xi \cdot u > 0} \widehat{F}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\xi_1 > 0} \widehat{f}_1(\xi_1) \cdot \widehat{f}_2(\xi_2) \cdot e^{2\pi i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\xi \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_0^{+\infty} \widehat{f}_1(\xi_1) \cdot e^{2\pi i x_1 \xi_1} d\xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_2(\xi_2) \cdot e^{2\pi i x_2 \xi_2} d\xi_2 \stackrel{\text{Teorema de Inversión}}{=} \\ &= S^+ f(x_1) \cdot f_2(x_2). \end{aligned}$$

Así que:

$$(S^u \chi_R)(x_1, x_2) = [S^+ \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}](x_1) \cdot \chi_{[-2^{-N-1}, 2^{-N-1}]}(x_2).$$

Sea $\tilde{R} = R + 2u$ la traslación de R de 2 unidades a lo largo de su eje mayor, que en este caso es el eje x_1 . Es decir, $\tilde{R} = [3/2, 5/2] \times [-2^{-N-1}, 2^{-N-1}]$.

Queremos ver que $|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\tilde{R}}$ para una constante $c' > 0$.

Como $\chi_{\tilde{R}} = 0$ si $x_1 \notin [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, la acotación es trivial fuera de $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

Para $x_1 \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, usamos el lema 3.18 que hemos probado con $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$. Nos da que:

$$|(S^+ f_1)(x_1)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \ln \left| \frac{+\frac{1}{2} - x_1}{-\frac{1}{2} - x_1} \right| \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \ln \left| \frac{x_1 + \frac{1}{2}}{x_1 - \frac{1}{2}} \right| \right| \quad \text{si } |x_1| > \frac{1}{2}.$$

En particular, nos sirve para $x_1 \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$. Para $x_1 = x$ en este intervalo tenemos:

$$\left| \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \right| \stackrel{x > \frac{1}{2}}{=} \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \stackrel{\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}}{>} 1 + \frac{1}{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

donde la desigualdad se tiene por ser $\frac{1}{x-1/2}$ estrictamente decreciente.

Luego:

$$|(S^+ f_1)(x)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \ln \left| \frac{x + \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} \right| \right| > \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{3}{2} =: c' \quad \text{si } \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}. \quad (3.6)$$

Como

$$(S^u \chi_R)(x_1, x_2) = [S^+ \chi_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}](x_1) \cdot \chi_{(-2^{-N-1}, 2^{-N-1})}(x_2)$$

tomando valores absolutos tenemos que:

$$|(S^u \chi_R)(x_1, x_2)| = |(S^+ \chi_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})})(x_1)| \cdot |\chi_{(-2^{-N-1}, 2^{-N-1})}(x_2)| \geq c' \cdot \chi_{\tilde{R}}(x_1, x_2)$$

donde la última desigualdad se tiene trivialmente si $(x_1, x_2) \notin \tilde{R}$ al ser el miembro izquierdo mayor o igual que 0 y ser el derecho 0; y si $(x_1, x_2) \in \tilde{R}$ se tiene por la desigualdad (3.6).

Así que $|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\tilde{R}}$ como queríamos probar.

Caso de un rectángulo arbitrario.

Podemos obtener la misma desigualdad para un rectángulo cualquiera R_j de lados 1 y 2^{-N} . Sea u_j un vector unitario en la dirección del lado más largo.

Sea \mathcal{R} la rotación que lleva u_j a $u = (1, 0)$.

Tenemos que

$$S^{u_j} \chi_{R_j}(x) = \int_{H^{u_j}} \widehat{\chi_{R_j}}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Haciendo el cambio $\eta = \mathcal{R}\xi$ de forma que $\eta \in H^u \iff \xi \in H^{u_j}$, nos queda:

$$\int_{H^u} \widehat{\chi_{R_j}}(\mathcal{R}^{-1}\eta) \cdot e^{2\pi i x(\mathcal{R}^{-1}\eta)} d\eta = \int_{H^u} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R_j}(y) \cdot e^{-2\pi i y(\mathcal{R}^{-1}\eta)} dy \right) e^{2\pi i x(\mathcal{R}^{-1}\eta)} d\eta.$$

Haciendo el cambio $z = (\tau_v \circ \mathcal{R})(y)$, combinación de la misma rotación que antes con una traslación para que $y \in R_j \iff z \in R$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \int_{H^u} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R_j}((\tau_v \circ \mathcal{R})^{-1}(z)) \cdot e^{-2\pi i(\tau_v \circ \mathcal{R})^{-1}(z) \cdot (\mathcal{R}^{-1}\eta)} dz \right) e^{2\pi i x(\mathcal{R}^{-1}\eta)} d\eta = \\ & = \int_{H^u} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_R(z) \cdot e^{-2\pi i(z+v) \cdot \eta} dz \right) e^{2\pi i x(\mathcal{R}^{-1}\eta)} d\eta \end{aligned}$$

habiendo usado en el último paso que $y = (\tau_v \circ \mathcal{R})^{-1}(z) \in R_j \iff z \in R$ y que por la proposición 4.11, podemos aplicar \mathcal{R} y τ_v a ambos lados de $(\tau_v \circ \mathcal{R})^{-1}(z) = \mathcal{R}^{-1} \circ \tau_v^{-1}(z) \cdot (\mathcal{R}^{-1}\eta) = \tau_v^{-1}(z) \cdot \eta = (z+v) \cdot \eta$.

Tenemos ahora que:

$$\begin{aligned} & \int_{H^u} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_R(z) \cdot e^{-2\pi i(z+v) \cdot \eta} dz \right) e^{2\pi i x(\mathcal{R}^{-1}\eta)} d\eta = \\ & = \int_{H^u} e^{-2\pi i v \cdot \eta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_R(z) \cdot e^{-2\pi i z \cdot \eta} dz \right) e^{2\pi i \mathcal{R}x \cdot \eta} d\eta = \\ & = \int_{H^u} \widehat{\chi_R}(\eta) \cdot e^{2\pi i(\mathcal{R}x-v) \cdot \eta} d\eta = \\ & = \int_{H^u} \widehat{\chi_R}(\eta) \cdot e^{2\pi i(\tau_v \circ \mathcal{R})(x) \cdot \eta} d\eta = \\ & = (S^0 \chi_R)((\tau_v \circ \mathcal{R})(x)) \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos y aplicando lo que sabemos para R y S^0 , queda:

$$|S^{u_j} \chi_{R_j}(x)| = |(S^0 \chi_R)((\tau_v \circ \mathcal{R})(x))| \geq c' \cdot \chi_{\widetilde{R}}((\tau_v \circ \mathcal{R})(x)) = c' \cdot \chi_{\widetilde{R}_j}(x)$$

teniendo la última igualdad porque $(\tau_v \circ \mathcal{R})(x) \in R \iff x \in R_j$, así que aplicando traslaciones de vector $2u_j$ a ambos conjuntos, tenemos que $x \in \widetilde{R}_j \iff (\tau_v \circ \mathcal{R})x \in \widetilde{R}$. \square

3.4 Contraejemplo del multiplicador de la bola

Teorema 3.19 (Contraejemplo del multiplicador de la bola). *Supongamos que $n \geq 2$ y $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$. El operador S no es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sean R_1, \dots, R_{2^N} los rectángulos obtenidos en la construcción del teorema 2.6 (los que se intersecan).

Vamos a buscar una contradicción con que $\|Sf\|_{L^p} \leq A_p \cdot \|f\|_{L^p}$, primero para $p < 2$ y $n = 2$.

Como hemos visto, si $\|Sf\|_{L^p} \leq A_p \cdot \|f\|_{L^p}$ entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |S^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (3.7)$$

Tomemos $M = 2^N$, $f_j = \chi_{R_j}$ y u_j el vector en la dirección “positiva” del eje mayor de R_j para $j = 1, \dots, 2^N$. Es decir, la dirección tal que los $\tilde{R}_j = R_j + 2u_j$ son disjuntos dos a dos como en el teorema 2.6.

Como $|S^{u_j}(\chi_{R_j})| \geq c' \cdot \chi_{\tilde{R}_j}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^M |S^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\geq \left\| \left(\sum_{j=1}^M |c' \cdot \chi_{\tilde{R}_j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = c' \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{\tilde{R}_j}| \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= c' \cdot \left\| (\chi_{\cup \tilde{R}_j})^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = c' \cdot \|\chi_{\cup \tilde{R}_j}\|_{L^p} = c'. \end{aligned}$$

Hemos usado que $\chi^k = \chi$ para $k \neq 0$ y que $\left| \bigcup_{j=1}^M \tilde{R}_j \right| = 1$.

Por otra parte, vamos a intentar acotar superiormente el miembro derecho de (3.7). Para ello, vamos a emplear la desigualdad de Hölder (teorema 4.18) con exponentes $p_1 \mapsto \frac{2}{p} > 1$ y $p_2 \mapsto q = (1 - \frac{p}{2})^{-1}$ (exponente dual de $\frac{2}{p}$).

Como $\text{sop } \sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}(x)|^2 = \bigcup_{j=1}^M R_j =: E$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \stackrel{\text{Sop}=E}{=} \left\| \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \cdot \chi_E \right\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{p}}}^{\frac{1}{p}} \cdot \|\chi_E\|_{L^q}^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} dx \right)^{\frac{p \cdot \frac{1}{p}}{2}} \cdot \left(\int_E 1 dx \right)^{\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E 1 dx \right)^{\frac{1}{p \cdot q}} = 1^{\frac{p}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p \cdot q}} \end{aligned}$$

donde el último paso se tiene porque

1. Por el teorema 2.6:

$$\int_E 1 \, dx = |E| = \left| \bigcup_{j=1}^M R_j \right| = \varepsilon.$$

2. Además:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right) dx = \sum_{j=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{R_j}| dx = \sum |R_j| = 1.$$

Así que juntando la cadena de desigualdades obtenida, nos queda:

$$c' \leq \left\| \left(\sum_{j=1}^M |S^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot 1 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{pq}}$$

Como $p < 2$, entonces $\frac{p}{2} < 1$, luego $q = (1 - \frac{p}{2})^{-1} > 0$ luego $pq = p(1 - \frac{p}{2})^{-1} > 0$, así que $\varepsilon^{\frac{1}{pq}}$ tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Tomando ε suficientemente pequeño para que $A_p \cdot \varepsilon^{1-\frac{p}{2}} < c'$, llegamos a una contradicción.

Así que S no es un operador acotado de L^p , esto es, con la norma de operadores de L^p para $p \in (1, 2)$.

Dimensión $n \geq 3$.

Para dimensiones mayores, tomemos la misma colección de rectángulos $\{R_j\}$ en el plano \mathbb{R}^2 , con $u_j = (u_{j,1}, u_{j,2})$ los vectores en el sentido positivo de la dirección del eje mayor. Considerémoslos inmersos en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ con $n \geq 3$, es decir, con $u_j = (u_{j,1}, u_{j,2}, 0, \dots, 0)$.

Definimos entonces

$$f_j(x_1, x_2, x') := \chi_{R_j}(x_1, x_2) \cdot f(x')$$

con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-2}$, $f \in \mathfrak{X}$ (para poder aplicar la fórmula de inversión) tal que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-2})} \neq 0$.

Sea S^{u_j} como siempre el multiplicador del semiespacio

$$H^{u_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u_j > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot u_{j,1} + x_2 \cdot u_{j,2} > 0\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |S^{u_j} f_j(x_1, x_2, x')| &= \left| \int_{H^{u_j}} \widehat{f}_j(\xi_1, \xi_2, \xi') \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi \right| \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{TF de } \otimes}}{=} \\ &= \left| \int_{x_1 \cdot u_{j,1} + x_2 \cdot u_{j,2} > 0} \widehat{\chi_{R_j}}(\xi_1, \xi_2) \cdot \widehat{f}(\xi') \cdot e^{2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} e^{2\pi i x' \cdot \xi'} \, d\xi \right| = \\ &= \left| \int_{x_1 \cdot u_{j,1} + x_2 \cdot u_{j,2} > 0} \widehat{\chi_{R_j}}(\xi_1, \xi_2) \cdot e^{2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \, d(\xi_1, \xi_2) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \widehat{f}(\xi') \cdot e^{2\pi i x' \cdot \xi'} \, d\xi \right| \geq \\ &\geq |c' \cdot \chi_{\tilde{R}_j}(x_1, x_2)| \cdot |f(x')| \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n-2})$.

Procediendo entonces como antes, se obtiene:

$$\left\| \left(\sum |S^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \geq \left\| \left(\sum |c' \cdot \chi_{\tilde{R}_j} \otimes f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p =$$

$$= c' \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{\tilde{R}_j}|^2 \right)^{1/2} \otimes |f| \right\|_p = c' \cdot \left\| \sum |\chi_{\tilde{R}_j}| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-2})} = c' \cdot \|f\|_p$$

siendo el penúltimo paso cierto por el teorema de Fubini.

Por otro lado, aplicando el teorema de Tonelli tenemos:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \otimes |f|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} |f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^M |\chi_{R_j}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}$$

El primer factor del último miembro no es más que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-2})}$. Así que, usando la acotación del caso 2-dimensional para el otro factor, queda:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^M |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-2})} \cdot 1^{p/2} \cdot \varepsilon^{1/pq}.$$

Así que:

$$\left\| \left(\sum |S^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_1^N |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-2})} \cdot \varepsilon^{1/pq}$$

que podemos hacer tender a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por las mismas consideraciones que en el caso $n = 2$, teniendo en cuenta que $\|f\|_p \neq 0$.

¿Por qué el resultado para $p > 2$ se tiene por dualidad?

Para empezar, el operador del disco es autoadjunto:

$$\begin{aligned} \langle Sf, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \xi} \cdot \chi_B(\xi) d\xi \right) \cdot \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{-2\pi i \xi y} dy \right) e^{2\pi i x \cdot \xi} \cdot \chi_B(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot e^{2\pi i \xi \cdot (x-y)} \cdot \chi_B(\xi) \cdot \overline{g(x)} dy \right) d\xi \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \chi_B(\xi) \cdot \overline{e^{2\pi i \xi \cdot (y-x)} \cdot g(x)} dx \right) d\xi \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \chi_B(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot y} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} g(x) dx} \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \chi_B(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot y} \widehat{g}(\xi) \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{\chi_B(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot y} \widehat{g}(\xi)} \right) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot y} \widehat{g}(\xi) d\xi} dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{Sg(y)} dy = \\
 &= \langle f, Sg \rangle
 \end{aligned}$$

para toda $f, g \in \mathfrak{X}$.

Por la proposición 4.23 del apéndice, si p y q son exponentes conjugados, se tiene:

$$\|g\|_{L^q} = \sup \left\{ \left| \int f \cdot \bar{g} \right| : \|f\|_p = 1, f \in \mathfrak{X} \right\}$$

tomando $f \in \mathfrak{X}$ por ser denso.

Así que, si S es un operador acotado de L^p , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \|Sg\|_{L^q} &= \sup_{\|f\|_p=1} |\langle f, Sg \rangle| \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ S \text{ autoadjunto}}}{=} \sup_{\|f\|_p=1} |\langle Sf, g \rangle| \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ \text{Hölder}}}{\leq} \\
 &\leq \sup_{\|f\|_p=1} \|Sf\|_p \cdot \|g\|_q \stackrel{\substack{\leq \\ \uparrow \\ S \text{ acotado}}}{\leq} \sup_{\|f\|_p=1} A_p \cdot \|f\|_p \cdot \|g\|_q = A_p \cdot \|g\|_q
 \end{aligned}$$

Así que si S estuviera acotado en L^p con $p > 2$, entonces estaría acotado en L^q para $q \in (1, 2)$, llegando a una contradicción con lo que hemos demostrado antes.

Así que S no puede estar acotado en L^p para $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$. □

3.5 Anexo

3.5.1 Lema de la norma euclídea

Veamos ahora la demostración del lema que hemos usado de caracterización de la norma euclídea en términos de la integral de la esfera.

Lema 3.20. *Dado $p \in (0, +\infty]$, existe una constante $\gamma_p > 0$ que depende de p y de M tal que*

$$\|\vec{x}\|_2 = \gamma_p \cdot \left[\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$.

Demostración del lema. Vamos a probarlo para $\|\vec{x}\|_2 = 1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$.

Como $\|\vec{x}\| = 1$, existe $R \in SO(\mathbb{R}^M)$ rotación (si lo quisiéramos hacer en \mathbb{C}^M se usa una rotación del grupo unitario $SU(\mathbb{C}^M)$) tal que $\vec{x} = R\vec{e}_1$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) &= \int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle R\vec{e}_1, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \vec{v}=R^{-1}\vec{\omega}}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle R\vec{e}_1, R\vec{v} \rangle|^p d\sigma(\vec{v}) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ R \text{ isometría}}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle|^p d\sigma(\vec{v}) = \\ &= \text{cte} > 0 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se tiene haciendo el cambio $\vec{\omega} = R\vec{v}$ y teniendo en cuenta que $d\sigma(\vec{\omega}) = d\sigma(\vec{v})$ (pues la medida de la esfera es invariante por rotaciones); la tercera igualdad se tiene porque las rotaciones son isometrías, y por tanto $\langle R\vec{e}_1, R\vec{v} \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle$; y la última desigualdad se tiene porque hay un conjunto de medida > 0 donde el integrando es positivo.

Llamando $\rho_{p,M}$ a la constante, para obtener el enunciado queremos que ocurra

$$\rho_{p,M} = \frac{1}{\gamma_p^p} \cdot \|\vec{x}\|_2^p = \frac{1}{\gamma_p^p}$$

donde el último paso se tiene por ser $\|\vec{x}\| = 1$.

Así que tomamos $\gamma_p := \frac{1}{\sqrt[p]{\rho_{p,M}}}$ y queda:

$$\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) = \frac{1}{\gamma_p^p} \implies \|\vec{x}\|_2 = 1 = \gamma_p \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $\|\vec{x}\|_2 \neq 1$, con $\vec{x} \neq 0$ (el caso $\vec{x} = 0$ es trivial) entonces $\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1$. Por tanto, por lo que acabamos de probar:

$$1 = \gamma_p \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^{M-1}} \left| \langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \vec{\omega} \rangle \right|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2} \cdot \gamma_p \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Luego

$$\|\vec{x}\|_2 = \gamma_p \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^{M-1}} |\langle \vec{x}, \vec{\omega} \rangle|^p d\sigma(\vec{\omega}) \right)^{\frac{1}{p}}$$

como queríamos probar. □

Capítulo 4

Apéndice

4.1 Resultados previos

4.1.1 Teoría de la medida e integración

Teorema 4.1 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, $f_n \geq 0$, tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo j , y $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n (= \sup_n f_n)$. Entonces:*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

(Ver [8], Teorema 2.14, página 50.)

Teorema 4.2 (Lema de Fatou). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces*

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

En particular, si además existe $\lim_n f_n = f$ en casi todo punto, entonces $\int f \leq \liminf \int f_n$.

(Ver [8], Teorema 2.18 y Corolario 2.19, página 52.)

Teorema 4.3 (Teorema de la Convergencia Dominada). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^1 tal que*

- 1. $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto y*
- 2. existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ en casi todo punto para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $f \in L^1$ y $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

(Ver [8], Teorema 2.24, página 54.)

Teorema 4.4 (Tonelli). *Sean (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espacios de medida σ -finitos. Si f es una función medible no negativa en $X \times Y$, entonces las funciones $g(x) = \int f(x, y) d\nu(y)$ y $h(y) = \int f(x, y) d\mu(x)$ son funciones medibles no negativas de X e Y respectivamente y, además:*

$$\int f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

(Ver [8], Teorema 2.37 a), página 67.)

Teorema 4.5 (Fubini). Sea $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible. Sean $f_x(y) := f(x, y)$ y $f_y(x) := f(x, y)$ donde $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$. Denotemos con m_p, m_q, m_r con $r = p + q$ las correspondientes medidas de Lebesgue. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La función f es integrable sobre \mathbb{R}^{p+q} .
- Existe al menos una de las integrales iteradas de $|f|$.

Si se da alguna de estas condiciones, entonces las integrales iteradas conmutan.

(Ver [3], Teoremas A.3.8 y A.3.9, páginas 355-356.)

Teorema 4.6 (Lema de derivación de integrales paramétricas). Supongamos que $f: X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, con $-\infty < a < b < \infty$ y que $f(\cdot, t): X \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable para cada $t \in [a, b]$. Sea $F(t) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$.

1. Supongamos que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo x, t . Si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, y) = f(x, t_0)$ para todo x , entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$; en particular, si $f(x, \cdot)$ es continuo para cada x , entonces F es continua.
2. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe y hay una $g \in L^1(\mu)$ tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ para todos x, t . Entonces F es diferenciable y $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$.

(Ver [8], Teorema 2.27, página 56.)

Teorema 4.7 (Teorema del Cambio de Variable). Supongamos que $T \in GL(n, \mathbb{R})$.

1. Si f es una función medible Lebesgue de \mathbb{R}^n , entonces $f \circ T$ también lo es. Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(m)$, entonces

$$\int f(x) dx = |\det T| \int f \circ T(x) dx.$$

2. Si $E \in \mathcal{L}^n$, entonces $T(E) \in \mathcal{L}^n$ y $m(T(E)) = |\det T| \cdot m(E)$.

(Ver [8], Teorema 2.44, páginas 73-74.)

Lema 4.8 (Integral gaussiana). Si $b > 0$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-b|x|^2) dx = \left(\frac{\pi}{b} \right)^{n/2}$$

Demostración del lema. El caso $n = 1$ se tiene porque:

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Para verlo calculemos I^2 .

$$I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-by^2} dy \right).$$

Aplicando Tonelli (por ser el integrando positivo) queda:

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} \cdot e^{-by^2} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-b(x^2+y^2)} dx \right) dy.$$

Haciendo el cambio a polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, nos queda:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r \cdot e^{-br^2} = 2\pi \cdot \left[\frac{e^{-br^2}}{-b/2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi \cdot \frac{e^0}{b/2} = \frac{\pi}{b}$$

obteniendo así el caso $n = 1$.

Para el caso n genérico, aplicamos Fubini y usamos que $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-b|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-bx_1^2} \dots e^{-bx_n^2} dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-bx_1^2} dx_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-bx_n^2} dx_n \right) = \left(\frac{\pi}{b} \right)^{n/2}$$

donde la última igualdad se tiene por el caso $n = 1$. □

4.1.2 Espacios de Banach

El primer apartado del siguiente teorema caracteriza los operadores continuos, también llamados operadores acotados.

Teorema 4.9 (Caracterización de operadores continuos). *Sean X e Y espacios normados.*

1. *Si $T: X \rightarrow Y$ es lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *T es continua en 0.*
- (b) *La imagen por T de un conjunto acotado en X es un conjunto acotado en Y .*
- (c) $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} < \infty$.
- (d) $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para algún $M \geq 0$ y para todo x de X .
- (e) *T es uniformemente continua en X .*
- (f) *T es continua.*

2. *Si denotamos por $L(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y , entonces $L(X, Y)$ es un espacio vectorial y la función definida para cada T de $L(X, Y)$ mediante la fórmula*

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}$$

es una norma en $L(X, Y)$. Además, si Y es un espacio de Banach, entonces lo es $(L(X, Y), \|\cdot\|)$.

3. *La composición de aplicaciones lineales y continuas es lineal y continua.*

(Ver [3], Proposición 1.1.5, páginas 13-14.)

Teorema 4.10 (Principio de Acotación Uniforme). *Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea A un subconjunto de $L(X, Y)$. Si X es un espacio de Banach y $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in X$, entonces $\sup_{T \in A} \|T\| < \infty$.*

(Ver página 163, teorema 5.13 de [8])

4.1.3 Espacios de Hilbert

Proposición 4.11. Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces:

$$\|Tx\|_H = \|x\|_H \quad \forall x \in H \iff \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Demostración. $\boxed{\leftarrow}$ Es el caso particular $x = y$.

$\boxed{\rightarrow}$ Para ver que $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in H$ basta ver que sus partes reales e imaginarias son iguales.

$$\begin{aligned} \|Tx + Ty\|^2 &= \langle Tx + Ty, Tx + Ty \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Ty, Ty \rangle + \langle Ty, Tx \rangle + \langle Tx, Ty \rangle = \\ &= \langle Tx, Tx \rangle + \langle Ty, Ty \rangle + \overline{\langle Tx, Ty \rangle} + \langle Tx, Ty \rangle = \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\Re(\langle Tx, Ty \rangle) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\|Tx + Ty\|^2 = \|T(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle).$$

Así que $\Re(\langle x, y \rangle) = \Re(\langle Tx, Ty \rangle)$.

Para las partes imaginarias, hacemos:

$$\begin{aligned} \|Tx + iTy\|^2 &= \langle Tx + iTy, Tx + iTy \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle iTy, iTy \rangle + \langle Tx, iTy \rangle + \langle iTy, Tx \rangle = \\ &= \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\Re(\langle Tx, iTy \rangle) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle Tx, iTy \rangle). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\|Tx + iTy\|^2 = \|T(x + iy)\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, iy \rangle).$$

Así que $\Re(\langle x, iy \rangle) = \Re(\langle Tx, iTy \rangle)$. Es decir, $\Im(\langle x, y \rangle) = \Im(\langle Tx, Ty \rangle)$.

Por tanto, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$. □

4.1.4 Espacios L^p

Fijemos un espacio de medida (X, \mathcal{M}, μ) .

Definición 4.12. Sea f una función medible en X y sea $p \in (0, +\infty)$. Definimos:

$$\|f\|_p := \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p}$$

permitiendo la posibilidad de que $\|f\|_p = +\infty$.

Definición 4.13. Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}$$

Abreviaremos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p(\mu)$ o $L^p(X)$ o simplemente L^p si esto no genera confusión. Como hacemos con L^1 , consideramos que dos funciones definen el mismo elemento de L^p cuando son iguales en casi todo punto¹. Esto lo hacemos para que $\|\cdot\|_p$ sea una norma.

¹Para hacerlo con todo rigor hay que tomar el conjunto cociente con la relación de equivalencia "ser igual en casi todo punto".

Definición 4.14. Si f es una función medible en X , definimos:

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

con la convención de que $\inf \emptyset = \infty$. Observemos que el ínfimo se alcanza pues

$$\{x : |f(x)| > a\} = \bigcup_1^\infty \{x : |f(x)| > a + n^{-1}\},$$

y los conjuntos de la derecha son de medida nula, así que también lo es el de la izquierda. $\|f\|_\infty$ se llama el supremo esencial de $|f|$ y a veces se escribe como

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Definición 4.15.

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f : \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\},$$

con la convención de que dos funciones que son iguales en casi todo punto definen el mismo elemento de L^∞ .

Así que $f \in L^\infty$ si y sólo si existe una función medible acotada g tal que $f = g$ en casi todo punto. Se puede tomar $g = f \cdot \chi_E$ con $E = \{x : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\}$.

Proposición 4.16. L^p es un espacio vectorial normado, que de hecho es un espacio de Banach, para todo $p \in [1, +\infty)$.

(Ver [8], Teoremas 6.5, 6.6 y 6.8, páginas 181-184.)

Teorema 4.17. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple $\phi = \sum_1^N a_j \cdot \chi_{R_j}$ donde cada R_j es un producto de intervalos, tal que $\int |f - \phi|^p < \varepsilon$, y existe una función continua g que se anula fuera de un conjunto acotado tal que $\int |f - g|^p < \varepsilon$.

(Ver [8], Proposición 2.41, página 70 para una prueba del caso $p = 1$, que se adapta fácilmente al caso general $p \in [1, +\infty)$.)

Teorema 4.18 (Desigualdad de Hölder). Si $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo par f, g de funciones medibles en X se tiene:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(Ver [8], Proposición 6.2, página 182.)

Proposición 4.19 ($\|\cdot\|_{L^p}$ invariante por traslaciones). Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, entonces

$$\|f(x - y)\|_{L^p(dx)} = \|f\|_{L^p}$$

Demostración. Haciendo el cambio $z(x) = x - y$, tenemos:

$$\|f(x - y)\|_{L^p(dx)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p dz \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p}$$

donde la última igualdad se tiene porque la variable de integración no influye en el valor de la integral (es sólo cambiarle el nombre). \square

Por último, tenemos que la norma L^p es continua respecto a traslaciones:

Teorema 4.20 (Continuidad en L^p). *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, entonces*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(dx)} = 0$$

(Ver [8], Teorema 8.5, página 238.)

Teorema 4.21. *Supongamos que (X, \mathcal{M}, μ) es un espacio de medida y $1 \leq p \leq \infty$. Supongamos que $f \in L^p(\mu)$ y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $L^p(\mu)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

en casi todo punto $x \in X$.

(Ver [1], Teorema 7.23, página 205.)

Proposición 4.22. *Si $0 < p < q < r \leq \infty$, entonces $L^p \cap L^r \subset L^q$ y $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_r^{1-\lambda}$ donde $\lambda \in (0, 1)$ se define como*

$$q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1 - \lambda)r^{-1}, \text{ es decir, } \lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

(Ver [8], Proposición 6.10, página 185.)

Supongamos que p y q son exponentes conjugados. Por la desigualdad de Hölder, cada $g \in L^q$ define un funcional lineal acotado ϕ_g en L^p dado por

$$\phi_g(f) = \int f \cdot \bar{g}.$$

De hecho, la aplicación $g \rightarrow \phi_g$ es casi siempre una isometría de L^q en $(L^p)^*$, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.23. *Supongamos que p y q son exponentes conjugados y $1 \leq q < +\infty$. Si $g \in L^q$, entonces*

$$\|g\|_q = \|\phi_g\| = \sup \left\{ \left| \int f \cdot \bar{g} \right| : \|f\|_p = 1 \right\}.$$

(Ver [8] Proposición 6.13, página 188)

4.1.5 Convolutiones

A continuación, siguiendo el libro de Folland [8] y los apuntes [9], enunciaremos las propiedades más destacadas sobre convoluciones y aproximaciones de la identidad en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Muchas de estas propiedades se vieron el curso de EDP's y Series de Fourier de 3º de grado, si bien restringidas al caso $p = 1$. Las demostraciones para el caso L^p general no son muy diferentes, pero hemos decidido incluir las de aquellas proposiciones que o bien no se vieron, o bien van a ser fundamentales en el desarrollo del trabajo.

Definición 4.24. Sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles de \mathbb{R}^n . La **convolución** de f y g es la función $f * g$ definida por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

para todos los $x \in \mathbb{R}^n$ tales que la integral existe en el sentido de Lebesgue, es decir, siempre que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) \cdot g(y)| dy < +\infty$.

Las propiedades elementales de las convoluciones se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 4.25. *Suponiendo que todas las integrales consideradas existen, tenemos:*

1. $f * g = g * f$ (Conmutatividad)
2. $(c_1 \cdot f + c_2 \cdot g) * h(x) = c_1 \cdot (f * h)(x) + c_2(g * h)(x)$ (Bilinealidad)
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Asociatividad)
4. Para $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$
5. Si A es la clausura de $\{x + y : x \in \text{sop}(f), y \in \text{sop}(g)\}$, entonces $\text{sop}(f * g) \subseteq A$.

Demostración. 1. Haciendo el cambio $z = x - y$ tenemos:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \underset{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) dz = (g * f)(x).$$

2. Se deduce directamente de la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned} (c_1 \cdot f + c_2 \cdot g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (c_1 \cdot f + c_2 \cdot g)(x - y)h(y) dy = \\ &= c_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)h(y) dy + c_2 \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y)h(y) dy = c_1 \cdot (f * h)(x) + c_2(g * h)(x). \end{aligned}$$

3. Se sigue del primer apartado y del teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - z - y)h(z) dy dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - z - y)h(z) dz dy = f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

(Fubini está justificado porque suponemos que existen todas las integrales iteradas involucradas.)

4. Tenemos

$$\begin{aligned} \tau_z(f * g)(x) &= (f * g)(x - z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z - y)g(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_z f(x - y)g(y) dy = [(\tau_z f) * g](x) \end{aligned}$$

Combinando esto con el primer apartado (la conmutatividad), obtenemos que:

$$\tau_z(f * g) = \tau_z(g * f) = (\tau_z g) * f = f * (\tau_z g).$$

5. Recordemos que dada una función medible $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, se define su soporte $\text{sop}(f)$ como el cerrado tal que:

$$(\text{sop}(f))^c = \bigcup \{U \text{ abierto} \mid f \equiv 0 \text{ en casi todo punto de } U\}.$$

Nótese que es una buena definición porque la unión de abiertos es abierta.

Sea $x \in A^c$. Entonces $f(x-y)g(y) = 0$ para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$, pues:

- (a) Para cualquier $y \in \text{sop}(g)$ tenemos $x-y \notin \text{sop}(f)$ (si $x-y \in \text{sop}(f)$, entonces $(x-y)+y = x$ estaría en A , llegando a una contradicción). Por tanto, por estar $x-y \in (\text{sop}(f))^c$, $f(x-y) = 0$ para casi todo $y \in \text{sop}(g)$ (por la definición de soporte).
- (b) $g(y) = 0$ en casi todo $y \in (\text{sop}(g))^c$ (por definición de soporte).

Luego $f * g(x) = 0$ para todo $x \notin A$. Así que $\text{sop}(f * g) \subseteq A$. □

Se pueden imponer varias condiciones sobre f y g para garantizar que $f * g$ esté definida al menos en casi todo punto. A continuación veremos un par de proposiciones de este estilo que además nos dan resultados básicos sobre convoluciones de funciones de L^p .

Teorema 4.26 (Desigualdad de Young). *Si $f \in L^1$ y $g \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$), entonces $f * g(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, y además $f * g \in L^p$ pues*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \quad (\text{Desigualdad de Young})$$

Demostración. Llamemos $G(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| dy \in [0, +\infty]$. Veamos que $G \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Tenemos

$$\begin{aligned} \|G(x)\|_{L^p(dx)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| dy \right\|_{L^p(dx)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y) \cdot g(y)\|_{L^p(dx)} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\|_{L^p(dx)} \cdot |g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^p} \cdot |g(y)| dy = \\ &= \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

donde en el paso a la segunda línea hemos usado que $g(y)$ es una constante con respecto a x y la puedo sacar multiplicando en módulo fuera de la norma; y en el paso intermedio de la segunda línea hemos usado que la norma L^p es invariante por traslaciones (teorema 4.19).

Por simetría, cambiando la f por la g , tendré $\|G(x)\|_{L^p(dx)} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$ que era lo que habíamos enunciado realmente.

Además

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| dy = G(x).$$

Luego $\|f * g\|_{L^p} \leq \|G\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$.

En particular, si $f \in L^1$ y $g \in L^p$, entonces $(f * g) \in L^p$ y por tanto $(f * g)$ es finita en casi todo punto, es decir, existe $(f * g)(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

La proposición anterior lo que nos dice es que si $g \in L^p$, el operador $T_g: L^1 \rightarrow L^p$ con $T_g(f) = f * g$ está bien definido pues $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$.

Veamos que $T_g: L^q \rightarrow L^\infty$, $T_g(f) = f * g$ está bien definido pues $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_q \cdot \|g\|_p$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposición 4.27. Sea $1 \leq p, q \leq +\infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces:

1. $f * g \in UC(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$.
2. Si $1 < p < +\infty$, entonces $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$ (decae en el infinito).

Es decir, la convolución es una *operación regularizante*, pues aunque f y g son funciones genéricas de espacios L^p duales, su convolución es uniformemente continua y acotada. Y si además $p \neq 1, +\infty$, entonces la convolución decae a 0 en el infinito.

Demostración. Primer apartado.

Para ver que $f * g(x)$ está bien definida en todo $x \in \mathbb{R}^n$ basta que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy < +\infty.$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por Hölder:

$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) \cdot g(y)| dy \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f(x-\cdot)\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < +\infty$$

donde la última igualdad se tiene por ser la norma de L^p invariante por traslaciones (proposición 4.19).

Luego

$$\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q < +\infty$$

Así que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora la continuidad uniforme. Para ello, estudiamos la diferencia

$$|f * g(x+h) - f * g(x)|$$

que queremos ver que tiende a 0 cuando h tiende a 0 uniformemente en x (es decir, independientemente del x).

Tenemos:

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \\ &\leq \|f(x+h-\cdot) - f(x-\cdot)\|_{L^p(dy)} \cdot \|g\|_{L^q} = \\ &= \|f(z+h) - f(z)\|_{L^p(dz)} \cdot \|g\|_{L^q} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

donde la convergencia a 0 se tiene por la continuidad de la norma L^p ($1 \leq p < +\infty$) respecto a traslaciones (proposición 4.20).

Así que $\lim_{|h| \rightarrow 0} |f * g(x+h) - f * g(x)| = 0$ uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.

Observación 4.28. Cuando $p = +\infty$, no funciona el lema de la continuidad de la norma L^p respecto de traslaciones. Sin embargo, en el enunciado hemos incluido el caso $p = +\infty$.

Cuando $p = +\infty$, entonces $q = 1$, así que podemos cambiar el rol de f y g en la demostración y funciona igual.

Segundo apartado.

Sabemos que el resultado es cierto para f y g con soporte compacto por el último apartado de la proposición 4.25.

En particular, es cierto para funciones simples, pues tienen soporte compacto.

Como las funciones simples son densas en L^p (proposición 4.17), dadas $f \in L^p$, $g \in L^q$, como C_C es denso en L^p para todo $p \in (1, +\infty)$, existen $\{f_n\}, \{g_n\}$ sucesiones de funciones simples tales que $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ y $\|g - g_n\|_q \rightarrow 0$. Como $f_n * g_n$ tiene soporte compacto por ser f_n y g_n simples, t.

Pero

$$\|f_n * g_n - f * g\|_\infty \leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Así que, como $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f_n * g_n)(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por tener soporte compacto), debe ser $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f * g)(x) = 0$ también (si fuera distinto de 0, no se tendría $\|f_n * g_n - f * g\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$). \square

Proposición 4.29. Si $f \in C_{bde}^k(\mathbb{R}^n)$ (es decir, $f, \partial^\alpha f$ con $|\alpha| \leq k$ son continuas y acotadas) y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in C_{bde}^k(\mathbb{R}^n)$ y se cumple

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = [(\partial^\alpha f) * g](x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Basta ver que

$$\partial^\alpha (f * g)(x) = \partial^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x - y) \cdot g(y) dy = [(\partial^\alpha f) * g](x)$$

donde la igualdad está justificada por el lema de derivación de integrales paramétricas² (proposición 4.6). \square

De nuevo, esta propiedad nos recuerda que *la convolución es regularizante*: por muy mal comportamiento que tenga la función $g \in L^1$, al hacer la convolución con una función suave f , $f * g$ gana toda la regularidad de la f .

4.1.6 Aproximaciones de la identidad

Definición 4.30. Una familia de funciones de L^1 , $\{\varphi_t\}_{t>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ se dice que es una **aproximación de la identidad regular** (abreviado A.I.R.) si cumple:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x) dx = 1 \quad \forall t > 0.$ (Están normalizadas.)
2. $\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x)| dx = A < +\infty$ (Es decir, las normas L^1 están acotadas.)
3. $\forall \delta > 0, \int_{|y| \geq \delta} |\varphi_t(y)| dy \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ (Las colas tienen área que tiende a 0.)

Veamos algunos ejemplos

²Lo podemos aplicar porque existe $\partial_x^\alpha [f(x - y)g(y)] = g(y) \cdot \partial_x^\alpha f(x - y)$ por ser $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, y porque

$$|\partial_x^\alpha [f(x - y)g(y)]| = |g(y)| \cdot |\partial_x^\alpha f(x - y)|$$

está acotado como función de y por el producto de $|g(y)|$ por una constante (pues $\partial^\alpha f$ está acotado para todo α con $|\alpha| \leq k$ por hipótesis), que es integrable pues $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.31. Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fija, con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$.

Definimos:

$$\varphi_t(x) := \frac{1}{t^n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ es A.I.R.

Demostración. Veámos que cumple la definición:

1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \cdot \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) dz = 1$$

habiendo hecho el cambio $\frac{x}{t} = z$ en la penúltima igualdad.

2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z)| dz = \|\varphi\|_{L^1} < +\infty$$

donde la desigualdad se tiene por estar $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y la igualdad se tiene por el mismo cambio de variable que en el apartado anterior.

Así que $\sup_{t > 0} \|\varphi_t\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1} < +\infty$.

3.

$$\int_{|x| \geq \delta} |\varphi_t(x)| dx = \int_{|x| \geq \delta} \left| \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right| \cdot \frac{1}{t^n} dx = \int_{|z| \geq \delta/t} |\varphi(z)| dz \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

habiendo hecho en la última igualdad el mismo cambio de variable que en los apartados anteriores y habiendo aplicado al final el teorema de la convergencia dominada por ser la cola de una integral de una función de L^1 . \square

El siguiente teorema es fundamental en el desarrollo de toda la teoría. Las AIR se definen así precisamente para que se pueda demostrar este teorema.

Teorema 4.32 (Convergencia L^p de AIR). Si $\{\varphi_t\}_{t > 0}$ es AIR, entonces:

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < +\infty$, entonces $f * \varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f$ en norma L^p .

Esto significa que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|f * \varphi_t(x) - f(x)\|_{L^p} = 0$$

2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap UC$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0^+} f * \varphi_t(x) = f(x)$ uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir, converge en norma L^∞ : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|f * \varphi_t - f\|_\infty = 0$.

(Es decir, el caso $p = +\infty$ necesita la hipótesis adicional de que f sea uniformemente continua).

Demostración. Primer apartado. Tenemos que ver que $f * \varphi_t(x) - f(x)$ tiende a 0 en norma L^p . Podemos escribir su módulo como $|f * \varphi_t(x) - f(x) \cdot 1|$ y sustituir el 1 por $\int \varphi_t$ por la primera propiedad de ser AIR. Esto nos permite agrupar las integrales como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
|f * \varphi_t(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \cdot \varphi_t(y) dy - f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y) dy \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \cdot \varphi_t(y) dy \right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\varphi_t(y)| dy = \\
&= \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\varphi_t(y)| dy
\end{aligned}$$

Hemos separado en estas dos integrales para intentar aprovechar ahora después la propiedad 3 de AIR (que las colas de las integrales tienden a 0 cuando $t \rightarrow 0$).

Tomando normas en $L^p(dx)$ a izquierda y derecha (pues lo que queremos ver es que hay convergencia en L^p), tenemos:

$$\begin{aligned}
&\|f * \varphi_t(x) - f(x)\|_{L^p(dx)} \leq \\
&\leq \left\| \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| \cdot |\varphi_t(y)| dy \right\|_{L^p(dx)} \leq \\
&\leq \int_{|y| \leq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} \cdot |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| > \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} \cdot |\varphi_t(y)| dy
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por la desigualdad integral de Minkowski (ver [8] Teorema 6.19, página 194).

Por el lema de continuidad de la norma L^p respecto a traslaciones (proposición 4.20), tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ (que no depende de x ; el x es la variable de la función) con $\|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} < \varepsilon$ para todo $|y| \leq \delta$.

Además, por la propiedad 3 de la definición de AIR, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\varepsilon, \delta)$ tal que $\int_{|y| > \delta} |\varphi_t(y)| dy < \varepsilon$ si $t \in (0, t_0)$.

Luego:

$$\|f * \varphi_t(x) - f(x)\|_{L^p(dx)} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)| dy + 2\|f\|_{L^p} \cdot \varepsilon$$

Por la propiedad 2 de la definición de AIR, $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(y)| dy \leq A$ para alguna constante A , esto para todo $t > 0$. Así que

$$\|f * \varphi_t(x) - f(x)\|_{L^p(dx)} \leq \varepsilon A + 2\|f\|_{L^p} \varepsilon$$

si $t \in (0, t_0)$. Es decir:

$$\|f * \varphi_t - f\|_{L^p} \leq (A + 2\|f\|_{L^p}) \varepsilon$$

para todo $t \in (0, t_0)$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos el resultado.

Segundo apartado.

La demostración es análoga. □

Observación 4.33. La demostración del primer apartado falla en $p = +\infty$ porque el lema de continuidad de la norma L^p respecto a traslaciones no se puede aplicar en ese caso. En realidad, la prueba vale en cualquier espacio de Banach en el que se cumpla $\lim_{y \rightarrow 0} \|f(x-y) - f(x)\| = 0$.

Corolario 4.34. Si $1 \leq p < +\infty$, entonces $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Vamos a dar una forma constructiva de aproximar funciones de L^p por funciones C_C^∞ (es decir, no sólo voy a ver la densidad, sino que voy a tener una sucesión concreta con la que aproximar).

Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p dx < \varepsilon$$

porque por el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|^p \cdot \chi_{|x|>R}(x) dx \underset{\text{TCD}}{\leq} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \lim_{R \rightarrow +\infty} |f(x)|^p \cdot \chi_{|x|>R}(x) dx = 0$$

Llamo entonces $\tilde{f} := f \cdot \chi_{B_R(0)} \in L_C^p$ (están en L^p y tienen soporte compacto, al estar contenido en la bola $B_{R+1}(0)$).

Para regularizar la \tilde{f} , la convoluciono con una AIR: tomo $\varphi_t * \tilde{f}$ donde $\{\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \cdot \varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$ es AIR como ya vimos, siendo $\varphi \in C_C^\infty$ fija con $\int \varphi = 1$.

Como $p \neq +\infty$, por el primer apartado del teorema de convergencia de AIR tenemos:

$$\|\varphi_t * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

y $\tilde{f} * \varphi_t \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$ (por el último apartado de la proposición 4.25: por tener \tilde{f} y φ_t soporte compacto, su convolución también). □

Corolario 4.35 (Lema C^∞ de Urysohn). *Si $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ con K compacto y U abierto, entonces existe $\Psi \in C_C^\infty(U)$ (es decir, C^∞ con soporte compacto contenido en U) tal que*

$$\begin{cases} 0 \leq \Psi \leq 1 \\ \Psi|_K \equiv 1 \\ \Psi|_{U^c} \equiv 0 \end{cases}$$

(Ver [8], Teorema 8.18, página 245.)

4.2 Fórmulas de Leibniz

Las siguientes fórmulas son necesarias para demostrar en la siguiente sección la fórmula de la transformada de Fourier de una derivada. Incluimos la demostración por no haber encontrado una referencia en la que se demuestre de forma completa.

Proposición 4.36.

$$\frac{d^m}{dt^m}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k} g}{dt^{m-k}} \quad \forall f, g \in C^m(\mathbb{R})$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre m .

El caso $m = 1$ es la regla de derivación del producto ya conocida. Simplemente la tenemos que escribir con al forma del enunciado:

$$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt} = \binom{1}{0} \frac{d^1 f}{dt^1} \cdot \frac{d^0 g}{dt^0} + \binom{1}{1} \cdot \frac{d^0 f}{dt^0} \cdot \frac{d^1 g}{dt^1} = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{1-k} g}{dt^{1-k}}.$$

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $m \geq 1$. Queremos ver que entonces también es cierta para $m + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(f \cdot g) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^m}{dt^m}(f \cdot g) \right) \stackrel{\text{Hip. Inducción}}{=} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k} g}{dt^{m-k}} \right] \stackrel{\text{Linealidad}}{=} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k} g}{dt^{m-k}} \right] \stackrel{\text{Caso } m=1}{=} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^{k+1} f}{dt^{k+1}} \cdot \frac{d^{m-k} g}{dt^{m-k}} + \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k+1} g}{dt^{m-k+1}} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} \frac{d^j f}{dt^j} \cdot \frac{d^{m-j+1} g}{dt^{m-j+1}} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k+1} g}{dt^{m-k+1}} = \\ &= \binom{m}{0} \frac{d^0 f}{dt^0} \cdot \frac{d^{m+1} g}{dt^{m+1}} + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] \cdot \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{m-k+1} g}{dt^{m-k+1}} + \binom{m}{m} \cdot \frac{d^{m+1} f}{dt^{m+1}} \cdot \frac{d^0 g}{dt^0} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \cdot \frac{d^k f}{dt^k} \cdot \frac{d^{(m+1)-k} g}{dt^{(m+1)-k}}. \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Proposición 4.37.

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \cdot (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g) \quad \forall f, g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$$

donde $\beta \leq \alpha$ significa $\alpha_i \geq \beta_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. (siendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$).

Demostración. Aplicamos n veces la proposición anterior:

$$\begin{aligned}
 \partial^{(\alpha_1, 0, \dots, 0)}(f \cdot g) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} (\partial^{(\beta_1, 0, \dots, 0)} f) \cdot (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, 0, \dots, 0)} g) \\
 \partial^{(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0)}(f \cdot g) &= \partial^{(0, \alpha_2, 0, \dots, 0)} \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} (\partial^{(\beta_1, 0, \dots, 0)} f) \cdot (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, 0, \dots, 0)} g) \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Linealidad de } \partial}}{=} \\
 &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \partial^{(0, \alpha_2, 0, \dots, 0)} [(\partial^{(\beta_1, 0, \dots, 0)} f) \cdot (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, 0, \dots, 0)} g)] = \\
 &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{\beta_2} (\partial^{(0, \beta_2, 0, \dots, 0)} (\partial^{(\beta_1, 0, \dots, 0)} f)) \cdot (\partial^{(0, \alpha_2 - \beta_2, 0, \dots, 0)} (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, 0, \dots, 0)} g)) \right) = \\
 &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{\beta_2} (\partial^{(\beta_1, \beta_2, 0, \dots, 0)} f) \cdot (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, 0, \dots, 0)} g) \right) = \\
 &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} (\partial^{(\beta_1, \beta_2, 0, \dots, 0)} f) \cdot (\partial^{(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, 0, \dots, 0)} g)
 \end{aligned}$$

donde el paso de la tercera a la cuarta línea está justificado porque $f, g \in C^{|\alpha|}$, así que da igual el orden de derivación.

Iterando así hasta α_n , llegamos al resultado:

$$\partial^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial^\beta f) \cdot (\partial^{\alpha - \beta} g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f) \cdot (\partial^{\alpha - \beta} g)$$

donde $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dots \cdot \binom{\alpha_n}{\beta_n}$. □

4.3 Transformada de Fourier de una derivada

En realidad, la fórmula para el cálculo de la transformada de Fourier de la derivada de una función se puede hacer con las hipótesis mínimas para que existan las derivadas y sus transformadas de Fourier. Estas hipótesis son $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ (para que existan las derivadas) y $\partial^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo α con $|\alpha| \leq N$ (para que estén bien definidas las transformadas).

La prueba en este caso requiere algo más de trabajo.

Lema 4.38 (Integración por partes en \mathbb{R}^n). *Si $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) \cdot g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (\partial^\alpha g)(x) dx$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Demostración. Basta probar el caso $\alpha = e_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj})$ con $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ y luego aplicar inducción sobre $|\alpha|$.

Caso $|\alpha| = 1$.

Supongamos, por simplificar la notación, que $j = 1$. Llamando $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_1} f)(x) \cdot g(x) dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{x_1 \in \mathbb{R}} (\partial_{x_1} f)(x_1, x') \cdot g(x_1, x') dx_1 \right] dx'$$

En la integral que tiene dimensión 1, $\int_{x_1 \in \mathbb{R}} (\partial_{x_1} f)(x_1, x') \cdot g(x_1, x') dx_1$, podemos aplicar integración por partes para obtener:

$$\int_{x_1 \in \mathbb{R}} (\partial_{x_1} f)(x_1, x') \cdot g(x_1, x') dx_1 = - \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x') (\partial_{x_1} g)(x_1, x') dx_1$$

Veamos por qué tiene sentido aplicar integración por partes y por qué es ese el resultado.

Para empezar, como $f \in C_C^\infty$, entonces $\partial^\alpha f \in C_C^\infty$ para todo multiíndice α .

Por tanto, existe $N_\alpha > 0$ tal que $\text{sop}(\partial^\alpha f) \cdot g \subset [-N_\alpha, N_\alpha]^n$. En particular, para $\alpha = \mathbf{0}$, existe $N_0 > 0$ tal que $\text{sop}[f \cdot g] \subset [-N_0, N_0]^n$.

Así que tomando como límite de integración $N > \max\{N_\alpha, N_0\}$ en la fórmula de integración por partes habitual para un cerrado y acotado, se obtiene:

$$\int_{-N}^N (\partial_{x_1} f)(x_1, x') \cdot g(x_1, x') dx_1 = [f(x_1, x')g(x_1, x')]_{x_1=-N}^{x_1=N} - \int_{-N}^N f(x_1, x') (\partial_{x_1} g)(x_1, x') dx_1$$

siendo $[f(x_1, x')g(x_1, x')]_{x_1=-N}^{x_1=N} = 0$ por estar $\text{sop} f \subset [-N_0, N_0]^n$ y ser $N > N_0$.

Así que tomando límites cuando $N \rightarrow \infty$, esta fórmula queda:

$$\int_{x_1 \in \mathbb{R}} (\partial_{x_1} f)(x_1, x') \cdot g(x_1, x') dx_1 = - \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x') (\partial_{x_1} g)(x_1, x') dx_1$$

como decíamos arriba.

Sustituyendo en la integral de \mathbb{R}^n , obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_1} f)(x) \cdot g(x) dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \left[- \int_{x_1 \in \mathbb{R}} f(x_1, x') \cdot (\partial_{x_1} g)(x_1, x') dx_1 \right] dx' = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (\partial_{x_1} g)(x) dx.$$

Caso $|\alpha| = N$ arbitrario.

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $|\alpha| = N$ con $N \geq 1$ (hipótesis de inducción). Queremos ver que entonces es cierta para $|\alpha| = N + 1$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Como $|\alpha| \geq 1$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_j \geq 1$. Supongamos, por simplificar la notación, que $j = 1$ (para $j \neq 1$ el razonamiento es el mismo).

Definamos $\alpha' := \alpha - e_1 = (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, con los que $|\alpha'| = |\alpha| - 1 = N$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) \cdot g(x) dx & \stackrel{\text{Hip. Inducción}}{=} (-1)^{|\alpha'|} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_1} f)(x) \cdot (\partial^{\alpha'} g)(x) dx \stackrel{\text{Caso } N=1}{=} \\ & = (-1) \cdot (-1)^{|\alpha'|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot [\partial_{x_1} (\partial^{\alpha'} g)](x) dx = \\ & = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot (\partial^\alpha g)(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Este lema en realidad lo que me dice es que $\langle \partial^\alpha f, g \rangle = \langle f, (-\partial^\alpha)g \rangle$, siendo $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g$. Es decir, $(-\partial)^\alpha$ es el operador adjunto de ∂^α .

Corolario 4.39. Si $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. Llamando $e_\xi(x) := e^{2\pi i \xi \cdot x}$, tenemos:

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = \langle \partial^\alpha f, e_\xi \rangle = \langle f, (-\partial)^\alpha(e_\xi) \rangle = (2\pi i \xi)^\alpha \langle f, e_\xi \rangle = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi). \quad \square$$

Lema 4.40. Si $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq N$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\Phi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha \Phi\|_{L^1} < \varepsilon$$

para todo $|\alpha| \leq N$.

Demostración. Sea $\chi \in C_C^\infty$ con $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi|_{B(0,1)} \equiv 1$, $\chi|_{B(0,2)} \equiv 0$. Sabemos que tal función existe por el lema C^∞ de Urysohn 4.35.

Definamos³ $\chi_m(x) := \chi(\frac{x}{m})$. Entonces

$$\|\chi_m \cdot f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

por el teorema de la convergencia dominada al ser $|\chi_m f - f| \leq |\chi_m f| + |f| \leq |f| + |f| = 2|f| \in L^1$.

Nótese que $\chi_m \cdot f \in C_C^N$ pues $f \in C^N$ y $\chi_m \in C_C^\infty$.

Además:

$$\|\partial^\alpha(\chi_m \cdot f) - \partial^\alpha f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Para justificarlo, es necesario aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Por la desigualdad triangular,

$$|\partial^\alpha(\chi_m \cdot f) - \partial^\alpha f| \leq |\partial^\alpha(\chi_m \cdot f)| + |\partial^\alpha f|.$$

³Nota: las χ_m se llaman truncaciones, pues lo que hacen es truncar f de forma suave con la bola de centro 0 y radio n .

Como $\partial^\alpha f \in L^1$, basta ver que $|\partial^\alpha(\chi_m f)| \leq h(x) \in L^1$.

Por la fórmula de Leibniz n -dimensional (4.37), tenemos:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(\chi_m f)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(\chi_m)(x) \cdot (\partial^\gamma f)(x) \right| \leq \\ &\leq |\chi_m(x)| \cdot |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{0 \neq \beta \leq \alpha} |\partial^\beta(\chi_m)(x)| \cdot |\partial^{\alpha-\beta} f(x)| \end{aligned}$$

habiendo separado en el paso de la primera a la segunda línea el caso $\beta = 0$ del caso $\beta \neq 0$.

Por un lado

$$|\chi_m(x)| \cdot |\partial^\alpha f(x)| \leq |\partial^\alpha f(x)| \in L^1(dx)$$

por hipótesis.

Por otro lado:

$$|\partial^\beta(\chi_m)(x)| \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Regla Cadena}}}{=} \frac{1}{m^{|\beta|}} \cdot \left| (\partial^\beta \chi) \left(\frac{x}{m} \right) \right| \leq \frac{\|\partial^\beta \chi\|_\infty}{m^{|\beta|}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

siendo el último paso cierto por ser $m \geq 1$ (recordemos que $m \in \mathbb{N}$), $|\beta| \geq 1$ y por ser $\|\partial^\beta \chi\|_\infty < \infty$ por tener $\partial^\beta \chi$ soporte compacto para todo β ,

Tenemos entonces que $|\partial^\alpha(\chi_m f)| \leq h(x) \in L^1$.

Por tanto, como veíamos antes, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada, de forma que para $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\partial^\alpha(f\chi_{m_0}) - \partial^\alpha f\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $|\alpha| \leq N$ (cogiendo el mínimo de los m_0 de cada α , que como son un número finito, existe).

Llamemos ahora $g = f \cdot \chi_{n_0}$.

Tomemos la A.I.R. (proposición 4.31) $\{\varphi_t = \frac{1}{t^n} \cdot \varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$ para $\varphi \in C_C^\infty$ con $\int \varphi = 1$.

El teorema 4.32 de convergencia de las A.I.R. garantiza que $g * \varphi_t \rightarrow g$ en L^1 cuando $t \rightarrow 0$.

De hecho, asegura que:

$$(\partial^\alpha g) * \varphi_t \rightarrow (\partial^\alpha g)$$

en L^1 cuando $t \rightarrow 0$ para todo $|\alpha| \leq N$. (Recordemos que $\partial^\alpha g \in L^1$)

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\varepsilon, g, N) > 0$ tal que

$$\max_{|\alpha| \leq N} \|(\partial^\alpha g) * \varphi_{t_0} - (\partial^\alpha g)\|_{L^1} < \varepsilon/2.$$

con $g * \varphi_{t_0} = (\chi_{n_0} f) * \varphi_{t_0} \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y esta es la Φ del enunciado.

Además, $\partial^\alpha \Phi = \partial^\alpha(g * \varphi_{t_0}) = (\partial^\alpha g) * \varphi_{t_0}$, luego

$$\|\partial^\alpha f - \partial^\alpha \Phi\|_{L^1} = \|\partial^\alpha(f - \Phi)\|_{L^1} \leq \|\partial^\alpha(f - g)\|_{L^1} + \|\partial^\alpha(g - \Phi)\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

obteniendo así el enunciado. □

Observación 4.41. En realidad, todo esto vale también L^p , pues el teorema de A.I.R. vale en L^p y la convergencia dominada se mantiene si elevamos el integrando a una potencia p .

Teorema 4.42. Sea $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo α tal que $|\alpha| \leq N$.

Entonces:

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

para todo $|\alpha| \leq N$.

NOTA: este enunciado tiene las hipótesis mínimas para poder definir $\partial^\alpha f$ y $\widehat{\partial^\alpha f}$.

Demostración. Sabemos que el enunciado es cierto para $f \in C_C^\infty$ por el corolario 4.39.

Por el lema 4.40, existen $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tales que

$$\partial^\alpha \varphi_m \xrightarrow{L^1} \partial^\alpha f$$

cuando $m \rightarrow \infty$ para todo α con $|\alpha| \leq N$.

Importante: estamos eligiendo **una sola sucesión que aproxima la función f y todas sus derivadas**. La existencia de esta sucesión nos la garantiza el lema anterior.

En tal caso, por el corolario anterior, $\widehat{\partial^\alpha \varphi_m}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi_m}(\xi)$.

Como

$$|(\partial^\alpha \varphi_m)^\wedge(\xi) - (\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| = |(\partial^\alpha \varphi_m - \partial^\alpha f)^\wedge(\xi)| \leq \|\partial^\alpha \varphi_m - \partial^\alpha f\|_1 \rightarrow 0$$

cuando $m \rightarrow \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| \leq N$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Así que $\lim_m \widehat{\partial^\alpha \varphi_m}(\xi) = \widehat{\partial^\alpha f}(\xi)$.

(Nótese que aquí está incluido el caso $\alpha = (0, \dots, 0)$, es decir, $\lim_m \widehat{\varphi_m}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$).

Tomando entonces el límite cuando $m \rightarrow \infty$ en $\widehat{\partial^\alpha \varphi_m}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi_m}(\xi)$, obtenemos el resultado buscado. \square

4.4 Resultados de geometría elemental

Los siguientes conceptos y resultados están extraídos de [13], páginas 8, 9, 55 y 56.

Definición 4.43. Decimos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **congruentes** (y lo denotaremos por $ABC \equiv A'B'C'$) si son exactamente iguales salvo movimientos rígidos del plano. Es decir, si se pueden renombrar los vértices de forma que $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

En realidad, para comprobar que dos triángulos son congruentes, basta comprobar uno de los siguientes criterios:

- Tienen dos lados iguales (es decir, de la misma longitud) y el ángulo que forman estos dos lados también es el mismo. Es decir, se pueden renombrar los vértices de forma que $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ y se tenga $\angle A = \angle A'$.
- Tienen dos ángulos iguales y el lado común sobre el que se apoyan los ángulos es el mismo. Es decir, se pueden renombrar los vértices de forma que $\angle A = \angle B$ y $|AB| = |A'B'|$.
- Todos sus lados son dos a dos iguales, esto es, se pueden renombrar sus vértices de forma que $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ y $|BC| = |B'C'|$.

Definición 4.44 (Triángulos semejantes.). Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **semejantes** (denotado $ABC \sim A'B'C'$) si tienen la misma forma. Más precisamente, son semejantes si se puede pasar de uno a otro mediante una homotecia y un movimiento rígido, o lo que es lo mismo, si todos los ángulos correspondientes son los mismos y todos los lados correspondientes tienen la misma razón. Esto es, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ y

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Al cociente $\frac{A'B'}{AB}$ lo llamaremos *razón de semejanza* entre los triángulos $A'B'C'$ y ABC (en ese orden).

En realidad, para comprobar que dos triángulos son semejantes es suficiente con comprobar una de las tres condiciones siguientes:

- Que tengan sus tres ángulos iguales (lo que, en realidad, se reduce a comprobar que dos ángulos son iguales, pues los ángulos de un triángulo siempre suman 180). Es decir, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.
- Que tengan dos lados con la misma razón de proporcionalidad y que el ángulo entre ellos sea el mismo. Es decir, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\angle A = \angle A'$.
- Que los tres lados tengan la misma razón de proporcionalidad: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Nótese que dos triángulos son congruentes si y sólo si son semejantes con razón 1.

Si en un triángulo uno de sus lados está en el eje x o en una paralela a éste, nos referiremos a este lado como la base del triángulo.

4.4.1 Demostración detallada del lema 4.45

Lema 4.45 (Perron). *Sea ABC un triángulo arbitrario, colocado en el plano de forma que AB sea la base, es decir, de forma que AB esté en el eje x con el punto A a la izquierda del B . Sea M el punto medio de A y B , de forma que MC , la mediana de AB , divide el triángulo en otros dos: $T_1 := AMC$ y $T_2 := MBC$.*

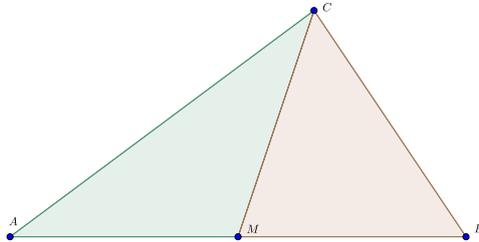


Figura 4.1: Triángulo de partida.

Dado $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, definimos los siguientes conjuntos:

1. Sea

$$\Phi_\alpha(ABC) := T_1 \cup \tau_{-(1-\alpha)|AB|}(T_2)$$

con $\tau_{-(1-\alpha)|AB|}(MBC) = M'B'C'$ en la figura 2.1.

2. Llamamos

$$\Phi_\alpha^h(ABC) := AB'P$$

con $P = AC \cap B'C'$.

3. Denotamos por

$$\Phi_\alpha^a(ABC) := \Phi_\alpha(ABC) \setminus \Phi_\alpha^h(ABC) = QPC' \cup RCP$$

con $Q = C'M' \cap AC$, $R = CM \cap B'C'$.

Entonces, el triángulo $AB'P$ es semejante a ABC con factor de proporcionalidad α . Además, su lado derecho, que es $B'P$, es paralelo a BC ; y el lado izquierdo, AP , está en la misma recta que AC .

Por otro lado, se cumple que:

$$|\Phi_\alpha^h(ABC)| = \alpha^2|ABC| \quad y \quad |\Phi_\alpha^a(ABC)| = 2(1 - \alpha)^2|ABC|$$

y por tanto:

$$|\Phi_\alpha(ABC)| = [\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2]|ABC|.$$

Demostración. Antes de empezar, hagamos un par de consideraciones: el punto $M' = \tau_{-(1-\alpha)|AB|}(M)$ está entre A y M y el punto $B' = \tau_{-(1-\alpha)|AB|}(B)$ está entre M y B por estar $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ y ser $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$. Con lo cual, la situación va a ser siempre la descrita en el dibujo 4.2.

Sea Q el corte de $M'C'$ con AC y R corte de $B'C'$ con MC . ¿Por qué se cortan $C'M'$ y AC ? ¿Y $B'C'$ y MC ? Se cortan porque $\alpha \in (1/2, 1)$, así que $\alpha|AB| = |AB'| > |M'B'| = |MB| = 1/2|AB|$, donde la última igualdad se tiene porque M es el punto medio de AB y la penúltima porque $M'B'$ es una traslación de MB , por lo que la longitud no cambia. Así que M' y M están entre A y B' . Como C' es una traslación horizontal de C , están a la misma altura sólo que C' desplazado a la izquierda, así que $M'C'$ cortará a AC porque M' está a la derecha de A y C' a la izquierda de C . Se razona igual para $C'B'$ y MC (C' está a la izquierda de C y B' está a la derecha de M).

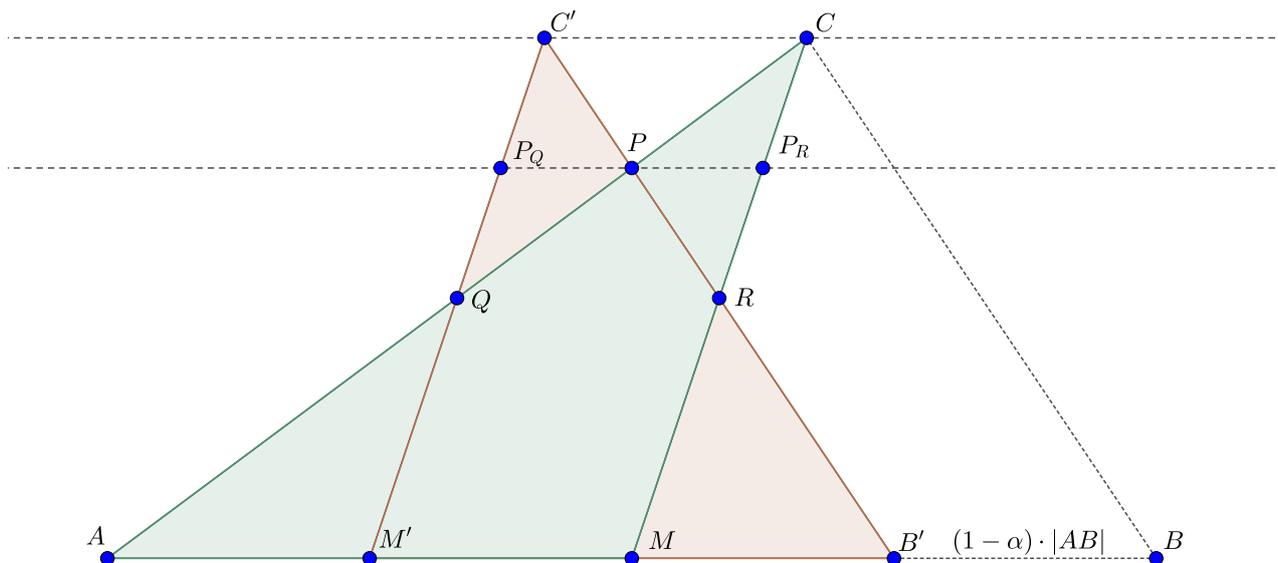


Figura 4.2: Operación básica $\Phi(ABC)$.

Aclarado esto, comencemos con la demostración.

En primer lugar, $\Phi^h(ABC) = AB'P$ es semejante a ABC porque sus lados tienen las mismas direcciones. Esto es así porque A, B', B son colineales, luego AB y AB' están en la misma recta; A, P, C también son colineales, con lo que AC y AP están en la misma recta; y B', P, C' también son colineales, con lo que $B'C'$ y $B'P$ están en la misma recta. Como $B'C'$ es una traslación de BC , tenemos que $B'P$ y BC son paralelos.

Como $AB = AB' \cup B'B$ (unión disjunta), tenemos que $|AB| = |AB'| + |B'B|$. Sabemos que $|B'B| = (1 - \alpha)|AB|$ puesto que B' es la traslación horizontal a la izquierda de B de distancia $(1 - \alpha)|AB|$. Así que

$$|AB'| = \alpha|AB|.$$

Por tanto, la constante de proporcionalidad entre los triángulos $AB'P$ y ABC es α . Esto implica que

$$|\Phi^h(ABC)| = |AB'P| = \alpha^2|ABC|.$$

Ahora pasemos a $\Phi^a(ABC)$.

Definamos P_R como el corte de la recta horizontal que pasa por P con el segmento MC , y P_Q como el corte de esa misma recta con $M'C'$.

Para empezar, $P_C P_R$ es semejante a ACM por tener sus lados las mismas direcciones.

Como $|AP| = \alpha|AC|$ y $AP \cup PC = AC$ (unión disjunta), tenemos que $|AP| + |PC| = |AC|$ y por tanto $|PC| = (1 - \alpha)|AC|$. Así que la constante de proporcionalidad entre los triángulos $P_C P_R$ y ACM es $(1 - \alpha)$. Por ello:

$$|P_C P_R C| = (1 - \alpha)^2 \cdot |ACM| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}.$$

$Q P P_Q$ es congruente con $P_R P_C$. Veámoslo.

Son semejantes porque tienen los mismos ángulos: el ángulo del vértice P es el mismo en ambos por ser opuestos por el vértice y los ángulos de los vértices P_Q y P_R son iguales por resultar de corte de la recta $P_Q P_R$ con los segmentos paralelos MC y $M'C'$.

Es más, son congruentes. ¿Por qué? Porque razonando como hemos hecho arriba con el triángulo $P_R P_C$ pero ahora con $P_Q P_C'$ (semejante en este caso a $B'M'C'$), tenemos que su área también es

$(1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}$. Como P_QPC' y $PP_R C$ tienen la misma altura (sus bases están en la misma recta, y sus vértices superiores, C y C' , están en una misma paralela a esta recta) y la misma área, concluimos que tienen la misma base. Es decir, $|PP_Q| = |PP_R|$. Como PP_Q es el lado correspondiente al ángulo del vértice Q en el triángulo QPP_Q y el lado PP_R es el lado correspondiente al ángulo del vértice C en el triángulo $PP_R C$, y ambos ángulos son iguales (como ya hemos razonado más arriba) y los lados también, los triángulos deben ser congruentes.

En particular, tienen la misma área, con lo que:

$$|P_Q P Q| = |PP_R C| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}.$$

Razonando igual con los triángulos $P_Q C' P \sim C' B' M'$ y con PRP_R , obtenemos que

$$|PRP_R| = |P_Q PC'| = (1 - \alpha)^2 \cdot \frac{|ABC|}{2}$$

Como

$$\Phi^a(ABC) = PP_R C \cup QPP_Q \cup P_Q PC' \cup PRP_R$$

siendo estas uniones disjuntas, tenemos que:

$$|\Phi^a(ABC)| = |PP_R C| + |QPP_Q| + |P_Q PC'| + |PRP_R| = 4 \cdot \frac{(1 - \alpha)^2}{2} \cdot |ABC| = 2(1 - \alpha)^2 \cdot |ABC|$$

Luego, como $\Phi(ABC) = \Phi^h(ABC) \cup \Phi^a(ABC)$ (unión disjunta), tenemos que

$$\Phi(ABC) = |\Phi^h(ABC)| + |\Phi^a(ABC)| = \alpha^2 |ABC| + 2(1 - \alpha)^2 |ABC| = [\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2] |ABC|.$$

Por último, el lado derecho de $\Phi^h(ABC)$, que es $B'P$, es paralelo a BC por ser $B'C'$ una traslación horizontal de BC y estar $B'P$ en la misma recta que $B'C'$; y el lado izquierdo de $\Phi^h(ABC)$, que es AP , es coincidente con AC pues $P = AC \cap B'C'$. \square

Bibliografía

- [1] S. Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*, Springer International Publishing, (2020).
- [2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2011.
- [3] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela y M. Raja. *Análisis Funcional*. Ediciones Electolibris, 2^a edición, 2018.
- [4] A. Córdoba. Por el giro de una aguja. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **2** (1999), 58–66.
- [5] A. Córdoba. *El conjunto de Kakeya*, Pre-Print. Disponible en <https://matematicas.uam.es/antonio.cordoba/>
- [6] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.
- [7] C. Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Annals of Mathematics* **94** (1971), 330–336.
- [8] G. B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 1999.
- [9] G. Garrigós, *Apuntes personales del curso de Análisis Matemático Aplicado 2020-2021 impartido por el profesor Gustavo Garrigós Anierte*, Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia.
- [10] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2014.
- [11] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2009.
- [12] M. de Guzmán, *Real Variable Methods in Fourier Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1981.
- [13] K. H. Hang, H. Wang, *Solving Problems in Geometry*. World Scientific, 2017.
- [14] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 2nd printing with corrections and additions, 1995.