



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMATICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

TEOREMA DEL MUESTREO, Y TRANSFORMADAS DE FOURIER CONTINUA Y DISCRETA, CON APLICACIONES

EIKE-CHRISTIAN JACOBUS MANFRED FECHT

DIRIGIDO POR GARRIGOS ANIORTE, GUSTAVO ADOLFO Y ALMIRA
PICAZO, JOSE MARIA

Murcia, 18 de julio, 2018

Declaración de originalidad

Eike-Christian Jacobus Manfred Fecht, autor del TFG "Teorema del muestreo, y transformadas de Fourier continua y discreta, con aplicaciones", bajo la tutela de los profesores Garrigos Aniorte, Gustavo Adolfo y Almira Picazo, Jose Maria , declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 18 de Julio de 2018.

(Nota: en la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

DEDICATORIA

A mi padre.

Agradecimientos

A mis dos tutores Gustavo Adolfo Garrigos Aniorte y Jose Maria Almira Picazo que sin su ayuda, conocimientos y sobretodo su paciencia no hubiese sido posible realizar este proyecto. A mis padres, por haberme proporcionado la mejor educación y lecciones de vida y haberme ayudado a hacer mi sueño realidad, por ayudarme en las situaciones difíciles a pesar de los tantísimos km que nos seperan y que gracias a ellos he conseguido superarlos. A Marisa por apoyarme tantísimo durante este proyecto y animarme siempre. Y a mis amigos que siempre estaban allí.

Resumen

El objetivo de este trabajo es, en primer lugar, desarrollar los fundamentos teóricos de una herramienta muy útil en Análisis, la transformada de Fourier. En segundo lugar identificar los algoritmos que permiten su aplicación directa a señales que aparecen en la Ingeniería, que a menudo son sólo mediciones discretas de datos de una señal continua f . Eso implica pérdida de información, y el objetivo es averiguar cuántas mediciones discretas necesitamos para poder reconstruir razonablemente bien la transformada de Fourier \hat{f} de una señal analógica f , sin necesidad de conocer su expresión analítica $f(t)$ en todo $t \in \mathbb{R}$.

En el capítulo 1 comenzamos introduciendo algunas herramientas importantes para este trabajo. En concreto, los conceptos de convolución y de aproximación de la identidad, sobre los que probaremos algunas propiedades básicas, como el Teorema 1.8 sobre convergencia en norma \mathcal{L}^p de las aproximaciones de la identidad. Después introducimos la definición de la transformada de Fourier en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Elaboramos algunas propiedades, como el lema de Riemann-Lebesgue 1.10, y la acción de la transformada sobre los operadores de traslación, modulación y dilatación. En el ejemplo 1.11, observamos que si $f = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, entonces $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} := \text{sinc}(\pi\xi)$. Otro ejemplo destacado es la gaussiana $f(x) = e^{-\pi x^2}$, que verifica que $\hat{f} = f$. En la última sección de este tema desarrollamos la teoría de la Transformada de Fourier en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Comenzaremos introduciendo el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$ de las funciones suaves rápidamente decrecientes en el infinito. La clase de

Schwartz tiene la gran propiedad que podemos establecer una biyección entre la función y su transformada de Fourier. Como cierre de este capítulo veremos el Teorema de Plancherel 1.28, y algunas de sus aplicaciones.

En el capítulo 2 nos centramos en el estudio del Teorema del Muestreo de Shannon, que justifica el paso de señales analógicas a señales digitales. Este importante resultado nos dice que:

“ Si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ es tal que $\text{sop } \hat{f} \subset [-A/2, A/2]$ (es decir, \hat{f} es de banda limitada $\frac{A}{2}$), entonces se verifica que

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(Ax - k))$$

con convergencia uniforme y en la norma de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Además se verifica que

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 = \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f\left(\frac{k}{A}\right)|^2.”$$

Para su prueba utilizamos el teorema de inversión, ver 1.21, la proposición 1.14, más concretamente la transformada de la modulación, los teoremas de Parseval y de Plancherel, y el ejemplo 1.11. Este teorema se puede generalizar, ver 2.3, donde en vez de considerar sinc, consideramos una función arbitraria $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ cuya transformada $\hat{\varphi}$ vale uno en $[-A/2, A/2]$ y tiene soporte en $[-B/2, B/2]$, para algún $B \geq A$, dando lugar a la siguiente expresión:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right).$$

Con $\hat{\varphi} = \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}$ obtenemos como caso especial el teorema de Shannon. Esto nos motiva en la sección del sobremuestreo, a considerar como $\hat{\varphi}$ un trapecio (ver Ejemplo 1.2) en lugar de la función característica $\chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}$, mejorando con ello la convergencia de la serie. Además, el sobremuestreo permite aproximaciones más robustas, es decir, si se pierde o se perturba algún dato, la serie perturbada se sigue pareciendo a la serie original; ver el Teorema 2.7. Después hablamos de los errores de *aliasing*, ver 2.4, que ocurren cuando consideramos la aproximación

$$f^*(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(Ax - k))$$

pero el soporte de \hat{f} no está contenido en $[-A/2, A/2]$. Entonces, f^* pasa a ser una señal diferente de f , que denominamos un “alias”. Como cierre de la sección del teorema del muestreo vemos unos aplicaciones a objetos cotidianos como el CD y el teléfono, ver 2.6. Por último, estudiamos el principio de incertidumbre que nos dice que: “*Ninguna señal puede ser simultáneamente limitada en tiempo y en frecuencias*”. Este es un hecho importante en la práctica ya que no puede ocurrir que una señal sea de banda limitada y con soporte compacto. Este principio también tiene una interpretación en mecánica cuántica, la desigualdad de Heisenberg, ver 2.9, que afirma que no se puede disminuir simultáneamente la desviación típica de la posición y de la frecuencia de una partícula.

En el capítulo 3 estudiamos la transformada de Fourier discreta (TFD), donde las señales son vectores de \mathbb{C}^N , $f = (f[0], f[1], \dots, f[N-1])$, y la transformada \hat{f} es otro vector de \mathbb{C}^N dado por la fórmula

$$\hat{f}[k] := \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad 0 \leq k < N.$$

Probaremos que el sistema de vectores formado por las potencias de las raíces primitivas de la unidad, $\mathbf{e}_k = (e^{\frac{2\pi i k n}{N}})_{0 \leq n < N}$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$ forma una base ortogonal del espacio de Hilbert $\ell_2(N) = (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ver 3.5. Esto nos lleva a una fórmula de inversión y una identidad de Plancherel para la transformada de Fourier discreta, ver Teorema 3.8, así como otros resultados similares a los del capítulo 1 en el caso discreto. Como cierre de este capítulo describimos brevemente el algoritmo de la transformada de Fourier rápida FFT, que permite reducir el número de operaciones para calcular la TDF de $O(N^2)$, que para N grandes puede ser muy costoso, a tan sólo $O(N \log N)$ operaciones.

En el capítulo 4 desarrollamos un algoritmo que nos permite, a partir de un conjunto finito de muestras de una señal analógica $f(t)$, hallar una buena aproximación de $\hat{f}(\xi)$ sin necesidad de conocer la expresión analítica de $f(t)$ en todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es muy útil, pues en muchos problemas aplicados no es posible medir los valores de $f(t)$ en todo $t \in \mathbb{R}$, o bien no disponemos de una expresión analítica para $f(t)$, o incluso en ese caso, el cálculo exacto de las integrales involucradas es inabordable.

Así que, a partir de supuestos razonables sobre el ancho de banda y el soporte aproximados de una clase de señales f , debemos seleccionar

un conjunto finito de muestras $\{f(kh) : -N/2 \leq k < N/2\}$, para valores adecuados de h y N , de modo que el cálculo de la TFD nos permita obtener una buena aproximación de $\hat{f}(\xi)$ en un conjunto discreto de puntos $\xi \in \{kf_1\}_{-N/2 \leq k < N/2}$, donde f_1 depende de h y N .

En el capítulo 4 desarrollamos los conceptos fundamentales para poder interpretar bien los datos. Implementamos un algoritmo que permita aplicar a estos datos la DFT, y a partir de ésta, recuperar el valor aproximado de \hat{f} . Analizaremos también problemas que pueden ocurrir en la práctica como Aliasing y Leakage. El concepto de aliasing, que ya introdujimos en 2.4, ocurre cuando tomamos pocas muestras para analizar una señal con ancho de banda grande. El problema denominado *leakage*, o derramamiento espectral, ocurre debido a la truncación que realizamos en f al imponer un número de muestras finito, y que tiene como consecuencia introducir frecuencias altas donde no las había antes. En ambos casos veremos como reducir su efecto en la práctica. Como cierre de este capítulo damos ejemplos gráficos que muestran cómo funciona el algoritmo, utilizando para ello los ejemplos desarrollados en el capítulo 1: la gaussiana, el trapecio y el triángulo (ver 1.2).

Abstract

The aim of this end-of-degree project is, first of all, to develop the theoretical fundamentals of a very useful tool in Analysis, the Fourier's transforms. Secondly, identify the algorithms that allow its direct application to the signals that appear in the Engineering, which are often only discrete data measurements of a continuous signal f . That implies a lose of information, and the objective is based on discrete measurements to be able to reconstruct reasonably well the Fourier transform \hat{f} of an analog signal f , without needing to know the analytic expression $f(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$. In Chapter 1, some important tools are introduced for this project. In particular, convolution and identity approximation concepts, on which we will prove some basic properties, such as Theorem 1.8 on convergence in the \mathcal{L}^p norm of the identity approximations. Then, the definition of the Fourier transform in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ is introduced.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Some properties are also presented, such as the Riemann-Lebesgue lemma 1.10, and the transform action on the translation, modulation and dilatation operators. In Example 1.11, we observe that if $f = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, then $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} := \text{sinc}(\pi\xi)$ another prominent example is the Gaussian $f(x) = e^{-\pi x^2}$ verifying that $\hat{f} = f$. In the last section of this chapter, the theory of the Fourier Transform in the Hilbert space $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ is developed. We will begin by introducing the Schwartz space $S(\mathbb{R})$ of functions rapidly decreasing at infinity. Schwartz's class has the great property that we can establish a bijection between the function and its Fourier transform. As the closing of this chapter Plancherel's Theorem 1.28 will be studied, and some of its

applications as well. Chapter 2 is devoted to the study Shannon's Sampling Theorem, which justifies the passage of analog signals to digital signals. This important result tells us that:

“ If $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ is such that $\text{sop } \hat{f} \subset [-A/2, A/2]$ (that is, \hat{f} is of limited band $\frac{A}{2}$), then it is verified that

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(Ax - k))$$

with uniform convergence and in the $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ norm. It also verifies that

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 = \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f\left(\frac{k}{A}\right)|^2.”$$

To prove it, we use the Fourier inversion theorem, see 1.21, the proposition 1.14, more specifically the modulation transformation, theorems of Parseval and Plancherel, and example 1.11. This theorem can be generalized, see 2.3, where instead of considering sinc, we consider an arbitrary function $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Whose transform $\hat{\varphi}$ takes value one in $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ and has his support in $[-B/2, B/2]$. for some $B \geq A$, leading to the following expression:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right).$$

With $\hat{\varphi} = \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}$, we get Shannon's theorem as a special case. This motivates us in the oversampling section, to consider a trapezium. (See Example 1.2) instead of the characteristic function $\chi_{[-A/2, A/2]}$ improving with it the convergence of the series. In addition, oversampling allows more robust approximations, that is, if any data is lost or disturbed, the disturbed series continues to resemble the original series; see Theorem 2.7. Then we talk about *aliasing* errors, see 2.4, which occur when we consider the approximation

$$f^*(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(Ax - k)),$$

but the support of \hat{f} is not contained in $[-A/2, A/2]$. Then, f^* becomes a signal different from f , which we call an "alias". As a closing section of

the sampling theorem, we see some applications to everyday objects such as the CD and the telephone, see 2.6. Finally, we study the uncertainty principle that tells us that: "No signal can be simultaneously limited in time and in frequencies". This is an important fact in practice since it can not happen that a signal is of limited band and with compact support. This principle also has an interpretation in quantum mechanics, the inequality of Heisenberg, see 2.9, which states that the standard deviation of the position and frequency of a particle can not be simultaneously decreased. In Chapter 3, the discrete Fourier transform (DFT) is studied where the signals are \mathbb{C}^N vectors, and the transform \hat{f} is another \mathbb{C}^N vector given by the formula

$$\hat{f}[k] := \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad 0 \leq k < N.$$

We will prove that the vector system formed by the powers of the primitive roots of the unit, $\mathbf{e}_k = (e^{\frac{2\pi i k n}{N}})_{0 \leq n < N}$ for $k = 0, 1, \dots, N - 1$ forms an orthogonal basis of Hilbert's space $\ell_2(N) = (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ver 3.5. This brings us to an inversion formula and a Plancherel identity for the discrete Fourier transform, see Theorem 3.8, as well as others results similar to those of chapter 1 but in the discrete case. As we close this chapter, we briefly describe the algorithm of the Fast Fourier transform FFT, that allows to reduce the number of operations to calculate the TDF of $O(N^2)$, which for large N can be very expensive, to just $O(N \log N)$ operations. In chapter 4 we develop an algorithm that allows us, starting from finite set of samples of an analogical signal $f(t)$, find a good approximation of $\hat{f}(\xi)$ without needing to know the analytical expression of $f(t)$ in all $t \in \mathbb{R}$. This is very useful, because in many applied problems it is not possible to measure the values of $f(t)$ in all $t \in \mathbb{R}$, or we do not have an analytical expression for $f(t)$, or even in that case, the exact calculation of the integrals involved is unapproachable. So, based on reasonable assumptions about the approximate bandwidth and support of a class of signals f , we must select a finite set of samples $\{f(kh) : -N/2 \leq k < N/2\}$ for adequate values of h and N , so that the calculation of the DFT allows us to get a good approximation of $\hat{f}(\xi)$ in a discrete set of points where f_1 depends on h and N . In chapter 4 we develop the fundamental concepts to be able to read into the data. We implement an algorithm that allows to apply the DFT to

these data, and from this, recover the approximate value of \hat{f} . We will also analyze problems that may occur in practice as Aliasing and Leakage. The concept of aliasing, which we already introduced in 2.4, occurs when we take a few samples to analyze a signal with big bandwidth. The problem called leakage occurs due to the truncation that we perform in f when imposing a finite number of samples, and which has the consequence of introducing high frequencies where there were none before. In both cases we will see how to reduce its effect in practice. As a closing to this chapter we give graphical examples that show how the algorithm works, using the examples developed in chapter 1: the Gaussian, the trapezium and the triangle (see 1.2).

Índice general

1. Transformada de Fourier continua	1
1.1. Introducción	1
1.2. Convoluciones	1
1.3. Aproximaciones de la identidad	5
1.4. Transformada de Fourier	8
1.5. Transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	17
2. Teorema del muestreo	25
2.1. Teorema del muestreo	25
2.2. Sobremuestreo	28
2.3. Estimación del error al usar sobremuestreo	30
2.4. Aliasing	31
2.5. Reducción del error de aliasing	32
2.6. Aplicaciones del teorema del muestreo	33
2.7. Principios del incertidumbre	34
3. Transformada de Fourier discreta	39
3.1. Introducción	39
3.2. Convoluciones circulares	43
3.3. Transformada de Fourier rápida	46
3.4. Desarrollo práctico de la FFT	47
3.5. Operaciones necesarias FFT	50
4. Aplicación	53
4.1. Introducción	53
4.2. Relación entre $\hat{f}(\frac{k}{T})$ y $c_k(f _{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])}$	54

4.3.	Relación entre $\hat{f}(\frac{k}{T})$ y la dft de un vector de muestras de f	55
4.4.	Reorganización del vector de Entrada	56
4.5.	Identificación y reescalado de las frecuencias	57
4.6.	Representación gráfica	57
4.7.	Factores que afectan la aproximación de la transformada de Fourier	58
4.7.1.	Aliasing y como evitarlo	58
4.7.2.	Derramamiento espectral(Leakage)	59
4.8.	Explicaciones del algoritmo	59
4.9.	Ejemplos	61
A. Apendice		69
B. Apendice		73
B.1.	Algoritmo para el cálculo aproximado de la transformada de Fourier a partir de muestras	73
B.2.	Algoritmos de los ejemplos	75
B.2.1.	Gauss	75
B.2.2.	Trapecio	76
B.2.3.	Triangulo	77
B.2.4.	Algoritmo para grabacion y recuperacion de una señal de la vida real	78
Bibliografía		83

Capítulo 1

Transformada de Fourier continua

Seguimos las referencias [6, Cap8] y [9, Cap5]

1.1. Introducción

Denotamos por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ medibles Lebesgue tales que

$$\|f\|_p := \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

El concepto de convolución es una herramienta importante en Análisis que necesitaremos para demostrar algunos resultados de este trabajo.

1.2. Convoluciones

Definición 1.1. Dadas $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ definimos la convolución de f y g como la función:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

cuando la integral está bien definida, es decir cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dy < \infty$$

Ejemplo 1.2. Sean $f(t) = \chi_{[-T, T]}(t)$ y $g(t) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$ con $T > \frac{1}{2}$. Aplicando directamente la fórmula anterior resulta que

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-T, T]}(x-y)\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(y)dy.$$

Aquí podemos observar que si $x - y \in [-T, T]$, que equivale a $y \in [x - T, x + T]$, la integral anterior se escribe de una forma más compacta como

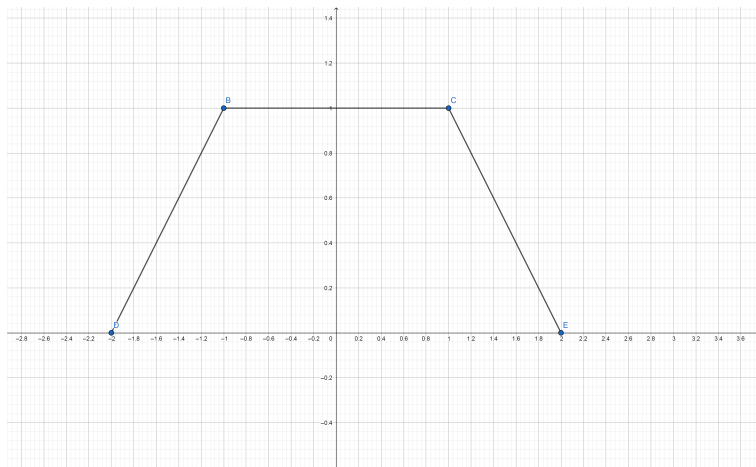
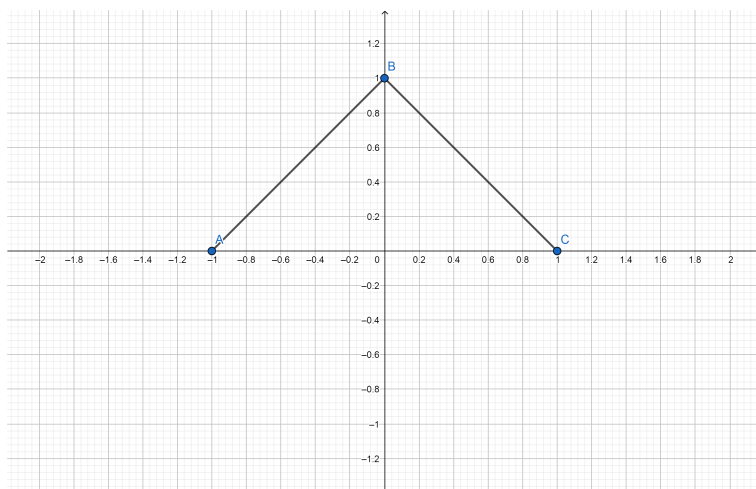
$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi_{[x-T, x+T]}(y)dy = \left| [x - T, x + T] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right|. \quad (1.1)$$

Vamos a analizar casos:

1. Si $x + T < -\frac{1}{2}$ o $x - T > \frac{1}{2}$ entonces la intersección es vacía y en este caso vale $(f * g)(x) = 0$.
2. Desde el punto $x = -\frac{1}{2} - T$ se empiezan a solapar los intervalos en (1.1), hasta el punto $x = \frac{1}{2} - T$ donde se solapan completamente. Así resulta que $(f * g)(x) = x + T + \frac{1}{2}$ para $-\frac{1}{2} - T \leq x \leq \frac{1}{2} - T$.
3. Entre $x = \frac{1}{2} - T$ hasta $x = -\frac{1}{2} + T$, el tamaño del intervalo en (1.1) da justo 1, con lo que $(f * g)(x) = 1$ para $\frac{1}{2} - T \leq x \leq -\frac{1}{2} + T$.
4. A partir del punto $x = -\frac{1}{2} + T$ hasta el punto $x = T + \frac{1}{2}$ va decreciendo el tamaño de (1.1) de la siguiente forma $(f * g)(x) = \frac{1}{2} - x + T$ para $-\frac{1}{2} + T \leq x \leq T + \frac{1}{2}$.

De forma más compacta, resulta que

$$(f * g)(x) = \begin{cases} x + T + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-\frac{1}{2} - T, \frac{1}{2} - T] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - T, -\frac{1}{2} + T] \\ \frac{1}{2} - x + T & \text{si } x \in [-\frac{1}{2} + T, T + \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Figura 1.1: Gráfica para $T = \frac{3}{2}$ Figura 1.2: Gráfica para $T = \frac{1}{2}$

Lema 1.3. Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, entonces $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p = 0$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y usando el lema A.1 resulta que: Dado $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|f - \varphi\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Con lo que

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \leq \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p. \end{aligned}$$

Pero como φ es uniformemente continua y de soporte compacto, podemos afirmar que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p < \frac{\epsilon}{3}$ para h suficientemente pequeño y así obtenemos

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \leq \epsilon.$$

□

Proposición 1.4. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g(x)$ está bien definida en casi todos $x \in \mathbb{R}$. Además $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Por último, si g es acotada, entonces $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Demostración. Definimos la siguiente función auxiliar $h(x, y) := f(x - y)g(y)$ que es medible porque por hipótesis sabemos que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)| |g(y)| dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)| dx \right) dy = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz \right) < \infty, \end{aligned}$$

entonces $h(x, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ por lo que para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$ existe $\int_{\mathbb{R}} |h(x, y)| dy < \infty$. Además, se verifica que:

$$\|f * g\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y)| |g(y)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Veamos por último $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, usando que g es acotada.

$$\begin{aligned}
A &= |(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y + h)g(y)dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - y + h) - f(x - y)||g(y)|dy.
\end{aligned}$$

Donde por el lema 1.3 resulta que

$$A \leq \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_1 \|g\|_{\infty} \rightarrow 0$$

si $h \rightarrow 0$. □

Proposición 1.5. $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ no tiene unidad: Es decir, no existe $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que $u * f = f$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que $\exists u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que $u * f = f$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $\int_{-\delta}^{\delta} |u(t)|dt \leq \frac{1}{2}$ y sea f una función continua tal que es de soporte compacto en $[-\delta, \delta]$ y tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ y $f(0) = 1$. Sabemos que $f = f * u$ como funciones en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ por lo que tenemos la igualdad para casi todo punto y ambas son continuas, por la proposición anterior, por lo que deben ser iguales. Deducimos que ha de verificarse que

$$1 = f(0) = (u * f)(0) = \int_{-\delta}^{\delta} f(t)u(-t)dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} |u(-t)|dt \leq \frac{1}{2},$$

que es una contradicción. □

Esta proposición nos motiva al desarrollo de la siguiente sección:

1.3. Aproximaciones de la identidad

Definición 1.6 (aproximación de la identidad). *Una aproximación de la identidad es una familia de funciones integrables $\{\varphi_{\lambda}\}_{\lambda}$ con $\lambda > 0$ tal que se verifica:*

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda}(x) dx = 1$$

$$2. \sup_{\lambda > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\lambda}(x)| < \infty$$

$$3. \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} |\varphi_{\lambda}(x)| dx = 0 \text{ para todo } \delta > 0$$

El siguiente Lema nos da el principal ejemplo de aproximación de la identidad.

Lema 1.7. Si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, entonces $\{\varphi_{\lambda}(t) = \frac{1}{\lambda} \varphi(\frac{t}{\lambda})\}$ es una aproximación de la identidad.

Demostración. Veamos que se verifican las tres condiciones del aproximante de la identidad:

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\lambda}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

y aplicando el cambio de variable $\frac{x}{\lambda} = u$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1$$

2. Aplicando el mismo cambio de variable deducimos que

$$\sup_{\lambda > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{\lambda}(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| du < \infty$$

3. Una última vez aplicamos el mismo cambio de variable y resulta que

$$\int_{|x| > \delta} |\varphi_{\lambda}(x)| dx = \int_{|u| > \frac{\delta}{\lambda}} |\varphi(u)| du$$

con $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\delta}{\lambda} = \infty$. Si aplicamos el teorema de la convergencia dominada A.2 resulta que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{|u| > \frac{\delta}{\lambda}} |\varphi(u)| du = 0$$

□

Teorema 1.8. (Convergencia en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ de AIR) Si φ es una aproximación de la identidad, entonces se verifica para $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f * \varphi_\lambda = f \text{ convergencia en norma } \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$$

Demostración. Sea φ una aproximación de la identidad, entonces por la propiedad 1 de la definición 1.6

$$f * \varphi_\lambda(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x)) \varphi_\lambda(y) dy.$$

Tomando normas y aplicando el teorema de Minkowski, A.4, resulta que:

$$\|f * \varphi_\lambda(x) - f(x)\|_p \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x-y) - f(x)\|_p |\varphi_\lambda(y)| dy := I.$$

Podemos escribir I de la siguiente forma

$$\int_{|y| \leq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_p |\varphi_\lambda(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_p |\varphi_\lambda(y)| dy.$$

Observamos que se verifica la acotación $\|f(x-y) - f(x)\|_p \leq 2\|f\|_p$. Además por el Lema 1.3 se verifica que $\lim_{y \rightarrow 0} \|f(x-y) - f(x)\|_p = 0$, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|y| < \delta$, entonces $\|f(x+y) - f(x)\|_p < \epsilon$. Concluimos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x-y) - f(x)\|_p |\varphi(y)| dy < \epsilon \sup_\lambda \int_{|y| \leq \delta} |\varphi_\lambda| + 2\|f\|_p \int_{|y| \geq \delta} |\varphi_\lambda|.$$

Tomando límites cuando $\lambda \rightarrow 0$ concluimos la demostración usando las propiedades 2 y 3 de 1.6.

□

1.4. Transformada de Fourier

Definición 1.9 (Transformada de Fourier). *Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, se define su transformada de Fourier como*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Teorema 1.10 (Riemann-Lebesgue). *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, es decir \hat{f} continua y $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.*

Demostración. Veamos que \hat{f} es continua: Sea $\xi_0 \in \mathbb{R}$ y $(\xi_n)_n$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi_0$.

Defino la siguiente sucesión de funciones $f_n(x) := f(x)e^{-2\pi i x \xi_n}$ que converge puntualmente a $f(x)e^{-2\pi i x \xi_0}$ y como $|f_n(x)| = |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada A.2:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi_n} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi_0} dx = \hat{f}(\xi_0) \end{aligned}$$

por lo cual deducimos que \hat{f} es continua. Nos falta ver que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$, para ello aplicamos el lema A.1 ya que sabemos que las funciones de soporte compacto g verifican que $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0$. Así que dado $\epsilon > 0$, sea $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ tal que

$\|f - g\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$ y sea $M > \frac{2\|g'\|_1}{\epsilon}$ resulta que:

$$A = \left| 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(e^{-2\pi i x \xi})' dx \right|$$

que podemos resolver fácilmente por partes y así resulta que:

$$A = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \|g'\|_1$$

Lo cuál implica que si $|\xi| > \frac{M}{2\pi}$, entonces

$$M|\hat{g}(\xi)| < |2\pi i\xi|\|\hat{g}(\xi)\| = A \leq \|g'\|_1.$$

De donde podemos concluir que ha de verificarse que

$$|\hat{g}(\xi)| < \frac{1}{M}\|g'\|_1 \leq \frac{1}{M}M\frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}, \quad |\xi| > \frac{M}{2\pi}.$$

Aplicando la desigualdad triangular obtenemos por tanto que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\xi)| \leq \epsilon, \quad |\xi| > \frac{M}{2\pi}.$$

□

Ejemplo 1.11. Sea $f(x) = \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(x)$. Aplicamos directamente la definición de la transformada de Fourier y resulta que

- si $\xi = 0$, entonces la integral queda como

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(x) dx = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} dx = A.$$

- Si $\xi \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{-1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i \xi} (e^{A\pi i \xi} - e^{-A\pi i \xi}). \end{aligned}$$

De donde aplicamos la fórmula de Euler y resulta que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(A\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Observa que esta función vale en el origen A también, por lo que lo podemos escribir de esta forma también para todos los valores de ξ . Para $A = 1$, esta función se suele llamar "seno cardinal":

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} := \text{sinc}(\pi\xi)$$

Ver Figura 1.3.

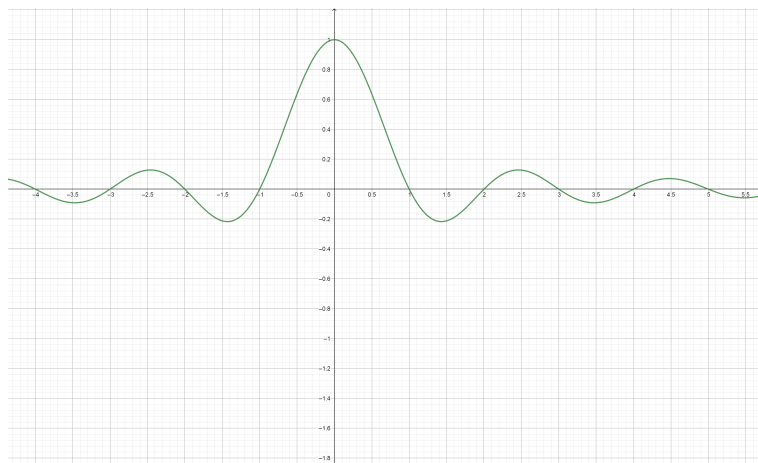


Figura 1.3: Gráfica del seno cardinal.

Observación 1.12. *El ejemplo anterior nos proporciona una función $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que su transformada $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, es decir:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \right| d\xi = \infty. \quad (1.2)$$

Basta demostrar que se verifica

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \infty.$$

Para el cálculo de esta integral consideramos

$$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

Observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx.$$

La integral I_n se puede escribir de la siguiente forma:

$$I_n = \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx.$$

Como $x \in [(j-1)\pi, j\pi]$, resulta que $x \leq j\pi$, con lo que podemos acotar la integral I_n inferiormente por

$$I_n \geq \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{|\sin(x)|}{j\pi} dx = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j\pi} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} |\sin(x)| dx.$$

Ahora bien, para todo j se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_{(j-1)\pi}^{j\pi} |\sin(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2$$

Con lo que obtenemos

$$I_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Tomando límites resulta que

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty$$

ya que el segundo miembro es la serie armónica que sabemos que diverge, concluimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} = \infty$$

con lo que $\text{sinc}(\pi\xi) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Sin embargo $\text{sinc}(\pi\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ya que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \right|^2 d\xi = 2 \int_0^{\infty} \frac{|\sin(\pi\xi)|^2}{\pi^2 \xi^2} d\xi \leq 2 \left[\int_1^{\infty} \frac{1}{\pi^2 \xi^2} d\xi + \int_0^1 \frac{|\pi\xi|^2}{\pi^2 \xi^2} d\xi \right],$$

y ambas integrales son finitas.

Antes de desarrollar más ejemplos de cálculo vamos a desarrollar unos teoremas básicos que nos serán de gran utilidad.

Definición 1.13. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ definimos los siguientes operadores:

1. Traslación: $(T_a)f(x) := f(x - a)$
2. Modulación: $(E_a)f(x) := e^{2\pi i a x} f(x)$
3. Dilatación: $(D_a)f(x) := \lambda f(\lambda x)$

Teorema 1.14. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces se verifica que

1. Dada $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y dadas $a, b \in \mathbb{R}$ que $\widehat{af + bg}(\xi) = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi)$
2. $\widehat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
3. $\widehat{T_a f} = E_{-a}\hat{f}$
4. $\widehat{E_a f} = T_a\hat{f}$
5. $\widehat{D_\lambda f}(\xi) := \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$

Demostración. Vamos a probar los resultados simplemente usando la definición que conocemos de la transformada de Fourier.

1. $\widehat{af + bg}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))e^{-2\pi i x \xi} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = a\hat{f}(\xi) + b\hat{g}(\xi).$
2. $\widehat{\hat{f}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(x)} e^{-2\pi i x \xi} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i x \xi} dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$
3. $\widehat{T_a f}(\xi) = \widehat{f(x-a)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i(u+a)\xi} du = e^{-2\pi i a \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i u \xi} du = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi) = E_{-a}\hat{f}(\xi).$
4. $\widehat{E_a f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x(\xi-a)} dx = \hat{f}(\xi - a) = T_a\hat{f}(\xi)$

5. Hay que ver si se verifica que $\widehat{\lambda f(\lambda x)}(\xi) = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$. Haciendo un cambio de variable en la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda x) e^{-2\pi i x \xi} dx$ de la forma: $\lambda x = t$ resulta que la integral queda como $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \frac{\xi}{\lambda}} dt = \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

□

Proposición 1.15. (*Propiedades de la derivación*): Suponemos que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y L es un número entero no negativo.

1. Si $x^L f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}^L(\mathbb{R})$ y

$$D_{\xi}^{\alpha}[\hat{f}](\xi) = (-2\pi i)^{\alpha} (\widehat{x^{\alpha} f(x)})(\xi), \quad 0 \leq \alpha \leq L.$$

2. Si $f \in \mathcal{C}^L(\mathbb{R})$ y $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ para $0 \leq \alpha \leq L$, y $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ para $0 \leq \alpha \leq L-1$, entonces

$$\widehat{D^{\alpha} f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi), \quad 0 \leq \alpha \leq L$$

Demostración. 1. Aplicamos la derivación paramétrica de integrales, ver A.7, a la función $F(x, \xi) = f(x) e^{-2\pi i x \xi}$ ya que $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \xi) dx$. Así que si derivamos α -veces la transformada de Fourier de f resulta que

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(\alpha)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{\alpha}}{d\xi^{\alpha}} F(x, \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x)^{\alpha} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= (-2\pi i)^{\alpha} \widehat{x^{\alpha} f(x)}(\xi) = (-2\pi i)^{\alpha} \widehat{x^{\alpha} f(x)}(\xi) \end{aligned}$$

Por el teorema A.7 podemos asegurar la continuidad de $\hat{f}^{(\alpha)}(\xi)$ por inducción sobre α .

2. Otra vez vamos a aplicar el teorema A.7 y procedemos por inducción sobre L . Supongamos que $L = 1$ entonces resulta que aplicando integración por partes queda

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi} dx &= f(x)e^{-2\pi ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx \\
&= 2\pi i\xi \hat{f}(\xi),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

ya que suponemos $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Supongamos cierto el resultado para $L - 1$ y vemos que pasa para L . Dado $0 \leq \alpha \leq L$, sea

$$I_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f^\alpha(x)e^{-2\pi ix\xi} dx$$

Aplicamos la hipótesis de inducción y resulta que

$$I_\alpha = (2\pi i\xi)^{\alpha-1} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi} dx.$$

Si procedemos como en (1.3), obtenemos que I_α se queda como

$$I_\alpha = (2\pi i\xi)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$$

usando las hipótesis $f, f', \dots, f^{L-1} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

□

Observación 1.16. Como interpretación podemos decir que si f decae de orden L , entonces \hat{f} suave de orden L , y viceversa, si f es suave de orden L , entonces \hat{f} decae de orden L .

Ejemplo 1.17. Dada la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$ calculamos fácilmente su derivada como $f'(x) = -2x\pi e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x)$. Entonces se verifica la relación siguiente $x f(x) = \frac{-f'(x)}{2\pi}$ aplicando la proposición 1.15 resulta que:

$$(\hat{f})'(\xi) = -2\pi i\xi \widehat{xf}(\xi) = i(\widehat{f'}) (\xi) = i2\pi i\xi \hat{f}(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de separación de variables cuya solución está dada por

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-\pi\xi^2}.$$

Por último

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2} d\xi = 1, \quad (1.4)$$

y que es la función de densidad de la distribución normal.

Ejemplo 1.18. El ejemplo anterior nos proporciona una función f tal que verifica $\hat{f} = f$. Es más, si $\lambda > 0$ y definimos $\varphi_\lambda(x) = e^{\frac{-\pi x^2}{\lambda}} \lambda^{\frac{-1}{2}}$, entonces $\hat{\varphi}_\lambda(\xi) = e^{-\pi\lambda\xi^2}$. En efecto, observamos que:

$$\varphi_\lambda(x) = (D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

con lo que concluimos que se verifica

$$\hat{\varphi}_\lambda(\xi) = \hat{f}(\sqrt{\lambda}\xi)$$

y por el ejemplo anterior sabemos que

$$\hat{f}(\sqrt{\lambda}\xi) = e^{-\pi(\sqrt{\lambda}\xi)^2} = e^{-\pi\lambda\xi^2}.$$

Ejemplo 1.19. El ejemplo 1.18 nos proporciona una aproximación de la identidad. En primer lugar $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ verifica que su integral sobre \mathbb{R} da 1 por 1.4 por lo que obviamente $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Del lema 1.7 deducimos que $\varphi_\lambda(x) = e^{\frac{-\pi x^2}{\lambda}} \lambda^{\frac{-1}{2}}$ es una aproximación de la identidad.

Proposición 1.20. Dadas $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Demostración. De nuevo simplemente aplicamos la mera definición de la convolución, de la transformada de Fourier y el teorema de Fubini A.3.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)e^{-2\pi i(x-t)\xi} e^{-2\pi i t \xi} dt \right) dx \end{aligned}$$

Como $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ por la proposición 1.4 podemos asegurar que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dt dx < \infty$ lo que nos justifica de que podemos aplicar el teorema de Fubini, ver A.3.

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-2\pi i(x-t)\xi} dx \right) g(t)e^{-2\pi i t \xi} dt.$$

Ahora, el cambio de variable $u = x - t$ nos lleva a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2\pi i u \xi} du \right) g(t)e^{-2\pi i t \xi} dt = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

□

Teorema 1.21 (Teorema de la inversión). *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que se verifica que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (1.5)$$

para casi todos los puntos $x \in \mathbb{R}$. Si además f es continua, entonces se da la igualdad para todo x .

Demostración. Consideramos la gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Ya hemos visto que se verifica que $\hat{g} = g$. Además, dado ϵ , entonces $|\hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x}g(\epsilon\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$. Aplicando el teorema de la convergencia dominada A.2, se verifica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)g(\epsilon\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi = I.$$

Por la definición de la transformada de Fourier resulta que

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t} dt \right] g(\epsilon\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Por Fubini lo reducimos a

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon\xi)e^{2\pi i(x-t)\xi} d\xi \right] f(t) dt.$$

Observamos que la función $g(\epsilon\xi)$ es una dilatación de g por lo que aplicando el teorema 1.14 y el hecho de que $\hat{g} = g$ resulta que:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left(\frac{t-x}{\epsilon}\right)}{\epsilon} f(t) dt$$

Ahora bien, si llamo a $g_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{u}{\epsilon}\right)$ que hemos visto en el ejemplo 1.19 que se trata de una aproximación de la identidad por lo que la integral anterior resulta que es una convolución así que todo queda

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * g_\epsilon) = f$$

con convergencia en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ por el teorema 1.8. Como consecuencia del lema A.5 existe una subsucesión del modo que $(f * g_{\epsilon_m}(x) \rightarrow f(x)$ puntualmente para casi todo punto x . Por lo que en resumen podemos deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = f(x) \text{ para casi todo punto.}$$

□

1.5. Transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

El concepto de la transformada de Fourier se puede extender a funciones f del espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, es decir

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Habitualmente $\|f\|_2^2$ se conoce en Teoría de Señales como la energía de la señal f , por lo que podemos considerar el espacio \mathcal{L}_2 como el conjunto de todas las señales de energía finita. De hecho, el ejemplo 1.11 mostraba que la transformada de Fourier de $\chi_{[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$ era la función $\text{sinc}(\xi)$. Esta función está en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, pero no está en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vamos a ver cómo se podría definir la transformada de Fourier en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. En primer lugar, este es un espacio de Hilbert y la norma del espacio proviene del producto escalar:

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle \text{ donde } \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{g}(t) dt.$$

La extensión de la transformada de f a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ la consideramos sobre un subespacio denso de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que sea una isometría respecto de la norma $\|\cdot\|_2$ ya que entonces tendrá extensión única a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Por comodidad desarrollamos el siguiente subconjunto denso de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Definición 1.22. (La clase de Schwartz) Una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ se dice que está en la clase de Schwartz denotado $f \in S(\mathbb{R})$, si f y todas sus derivadas son rápidamente decrecientes en el infinito, es decir, si para todo $k, l \geq 0$

$$|f^{(l)}(x)| < \frac{c_{k,l}}{1 + |x|^k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Observación 1.23. Una definición equivalente es la siguiente:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0 \quad (1.7)$$

Ejemplo 1.24. Ejemplos de funciones que están en la clase de Schwartz son las siguientes:

1. La gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$ sabemos que sus derivadas son de la forma

$$g^{(l)}(x) = p_l(x) e^{-\pi x^2}$$

donde $p_l(x)$ es un polinomio de grado l . Por tanto $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g^{(l)}(x)| < \infty$

ya que $x^k p_l(x) \ll e^{x^2}$.

2. Las funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de soporte compacto que obviamente están en la clase de Schwartz ya que son funciones tales que se verifica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta f(x)| = 0$$

Proposición 1.25. La clase de Schwartz verifica:

1. Si $f \in S(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $x^\alpha f \in S(\mathbb{R})$
2. Si $f \in S(\mathbb{R})$ y $\beta \in \mathbb{N}$ entonces $D^\beta f \in S(\mathbb{R})$
3. $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Demostración. 1. Si consideramos $\gamma, \beta \in \mathbb{N}$ resulta que $x^\gamma D^\beta(x^\alpha f)$ es una combinación lineal de funciones de la forma $x^{\alpha'} D^{\beta'} f$ (Por la regla de Leibniz). Como $f \in S(\mathbb{R})$, resulta que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{\alpha'} |f^{(\beta')}(x)| < \infty$$

con lo que la combinación lineal es finita, lo que nos da $x^\alpha f \in S(\mathbb{R})$.

2. Sean $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$. Entonces $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\alpha |f^{(\beta+\gamma)}(x)| < \infty$ por observación 1.23.

3. Basta tomar $k = 2$ y $l = 0$, en la fórmula (1.6). Entonces

$$|f(x)| \leq \frac{k_\alpha}{1 + |x|^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

y de hecho está en todos los $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p \leq \infty$. □

Lema 1.26. Si $p(x)$ es un polinomio y $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $p(x)f(x) \in S(\mathbb{R})$

Demostración. Sea $p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j$. Entonces $p(x)f(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j f(x)$. Por la proposición 1.25 sabemos que cada $x^j f(x) \in S(\mathbb{R})$, con lo que $p(x)f(x) \in S(\mathbb{R})$. □

Teorema 1.27. La aplicación $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ es biyectiva

Demostración. Veamos en primer lugar que está bien definida, es decir si $f \in S(\mathbb{R})$ nos preguntamos si $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Así que hay que comprobar si la función \hat{f} es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y rápidamente decreciente. En primer lugar, observamos que como $x^\alpha f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \forall \alpha \in \mathbb{N}$ podemos deducir que de la proposición 1.15 que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y

$$D^\beta \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi x)^\beta e^{-2\pi i x \xi} dx = \hat{g}(\xi),$$

donde $g(x) = f(x)(-2\pi x)^\beta$, está en la clase de Schwartz, por el lema 1.26. Por tanto $D^\alpha g$ es integrable y está en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ y por la proposición 1.15 concluimos que

$$\widehat{D^\alpha g}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{g}(\xi).$$

Entonces la función

$$(2\pi i\xi)^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = \widehat{D^\alpha g}(\xi)$$

es una función acotada puesto que es la transformada de una función integrable. Por lo que $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Hemos probado por tanto que la aplicación está bien definida. La biyección se tiene garantizada por el teorema de la inversión 1.21 ya que por la proposición 1.25 resulta que si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. \square

Teorema 1.28. (Teorema de Plancherel) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Demostración. Suponer primero que $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces también $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ y podemos justificar el teorema de Fubini en

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right] \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{2\pi i x \xi} d\xi \right] dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

usando en el último paso la fórmula de inversión (1.5).

Suponer ahora que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Utilizando aproximaciones de la identidad se puede construir una sucesión $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{en las normas de } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ y de } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Como $f_n \in S(\mathbb{R})$, el caso anterior nos da $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}$. Por tanto, $\{\hat{f}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y por completitud existe una función $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\hat{f}_n \rightarrow g \quad \text{en la norma de } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \quad (1.8)$$

Por otro lado,

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f_n(x)] e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})},$$

y por tanto

$$\hat{f}_n(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi) \quad \text{en todo punto } \xi \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

(de hecho, uniformemente). Como la convergencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ implica convergencia en ctp de una subsucesión, deducimos de (1.8) y (1.9) que $g = \hat{f}$ en ctp. En particular, se tiene que

$$\|\hat{f}\|_2 = \|g\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2,$$

lo cual demuestra el teorema. \square

Corolario 1.29. *Existe una única aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que es una biyección lineal tal que*

1. $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
2. $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Demostración. Por el Lema A.8 del apéndice, resulta que si tomamos $X = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $Y = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y consideramos la aplicación $T : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $Tf = \hat{f}$ entonces T es lineal y además sabemos que es continuo ya que $\|T(f)\|_2 = \|f\|_2$, por teorema 1.28. Entonces podemos deducir por el lema que existe una única extensión continua $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}f = \hat{f}$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Es decir, se cumple el punto 2 del enunciado. Ahora bien, para cada $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión de funciones $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que converge a f en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Entonces ha de verificarse que

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{f}_k\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2$$

lo que prueba el primer resultado. \square

Ejemplo 1.30. *Una aplicación del teorema de Plancherel es el cálculo de integrales impropias. Queremos calcular la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$. Donde observamos que la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ no está en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pero si que está en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ver 1.12. Por lo que podemos aplicar el teorema de Plancherel.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi x)^2 dx.$$

Ya hemos estudiado que la función sinc es la transformada de la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Por lo que la integral queda como, por Plancherel,

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi x)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} dx = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = \pi.$$

Recordemos que en el Teorema 1.21 probamos la fórmula de inversión de la transformada de Fourier para funciones en la clase

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) : \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Usando los resultados de esta sección podemos extender la validez de dicha fórmula a una clase un poco mayor

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Obsérvese por ejemplo que la función $f(x) = \text{sinc } x$ pertenece a \mathcal{D}_1 , pero no pertenece a \mathcal{D} .

Corolario 1.31. Si $f \in \mathcal{D}_1$, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \text{en casi todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

En particular, se puede modificar f en un conjunto de medida nula para que sea continua y se cumpla (1.10) en todo x .

Demostración. Basta encontrar una sucesión de funciones $f_n \in \mathcal{D}$ tal que

$$\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}f, \quad \text{en las normas de } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \text{ y } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad (1.11)$$

En efecto, si (1.11) fuera cierto, usando la Fórmula de Inversión (1.5),

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad (1.12)$$

donde la convergencia es uniforme en todo $x \in \mathbb{R}$ porque $\|\hat{f}_n - \mathcal{F}f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$. Por otro lado, el Corolario 1.29 del teorema de Plancherel nos dice que $\|f_n - f\|_2 = \|\hat{f}_n - \mathcal{F}f\|_2 \rightarrow 0$, y por tanto existe una subsucesión tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \quad \text{en casi todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si usamos esta subsucesión en (1.12) obtenemos la identidad buscada (1.10).

Para probar (1.11), escogemos una aproximación de la identidad $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$, con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, y definimos

$$\hat{f}_n := \varphi_n * \mathcal{F}f.$$

Como $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, la convergencia en norma en (1.11) sigue del Teorema 1.8. Sólo falta comprobar que $f_n \in \mathcal{D}$, lo cual es lo mismo que $\hat{f}_n \in \mathcal{D}$. De lo anterior sigue que $\hat{f}_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Por otro lado, la Proposición 1.20 nos da

$$\widehat{\hat{f}_n} = \widehat{\Phi}_n \cdot \widehat{\mathcal{F}f},$$

que siendo el producto de una función de la clase de Schwartz $\widehat{\Phi}_n$, con una función acotada $\widehat{\mathcal{F}f}$ (por el Teorema 1.10), es necesariamente una función de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Por tanto $\hat{f}_n \in \mathcal{D}$, y hemos completado la demostración del corolario. \square

Capítulo 2

Teorema del muestreo

Seguimos las referencias [2, Cap3] y [7, Cap2]

2.1. Teorema del muestreo

En primer lugar recordamos la siguiente notación $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Definición 2.1. (*Banda limitada*) Una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ se dice de banda limitada B si $\hat{f}(\xi)$ posee soporte compacto en $[-B, B]$. Por el Corolario 1.31, podemos suponer que f es continua y cumple

$$f(x) = \int_{-B}^B \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.2. (*Teorema del muestreo*) Sea $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \frac{A}{2}$, o sea que \hat{f} es de banda limitada $A/2$, entonces se verifica que

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(Ax - k))$$

como igualdad en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y con convergencia uniforme en todo $x \in \mathbb{R}$. Además se verifica que

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|f\left(\frac{k}{A}\right)\right|^2.$$

Demostración. Sea $g(\xi) := \hat{f}(\xi)$ para $|\xi| < \frac{A}{2}$ y la extendemos por periodicidad a todo \mathbb{R} . En primer lugar sabemos que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, por lo que $g \in \mathcal{L}^2(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2})$ y por la teoría las series de Fourier resulta que:

$$g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{2\pi i \frac{k}{A} \xi}$$

como igualdad en $\mathcal{L}^2(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2})$. Observamos que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de g verifican

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{A} \xi} d\xi = \frac{1}{A} f\left(\frac{-k}{A}\right).$$

La última igualdad lo hemos obtenido por la fórmula de inversión (2.1) ya que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \frac{A}{2}$. Aplicando el teorema de Plancherel y el de Parseval resulta que:

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = \|g\|_{\mathcal{L}^2(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2})}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(k)|^2 \|e^{-2\pi i \frac{k}{A} x}\|_2^2 = \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(\frac{k}{A})|^2$$

que nos prueba exactamente la fórmula de la energía en dicho caso. Además resulta que

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi) g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} f\left(\frac{k}{A}\right) \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{A} \xi}$$

con convergencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Donde aplicando la fórmula de inversión y el corolario 1.29 resulta que:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} f\left(\frac{k}{A}\right) \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{A} \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi =$$

Sacando el sumatorio fuera, por la convergencia en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, nos quedará el término:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} f\left(\frac{k}{A}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{A} \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (2.2)$$

Donde la integral es la modulación de la transformada inversa. Por lo que podemos usar el teorema 1.14 y teniendo en cuenta que la transformada de la función $\chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi)$ es $\frac{\sin(A\pi\xi)}{\pi\xi}$ obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{A} \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{\sin(\pi(Ax - k))}{\pi(x - \frac{k}{A})} = \frac{A \sin(\pi(Ax - k))}{\pi(Ax - k)}.$$

Ahora bien, (2.2) queda como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{A \sin(\pi(Ax - k))}{\pi(Ax - k)} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{\sin(\pi(Ax - k))}{\pi(Ax - k)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \operatorname{sinc}(\pi(Ax - k)). \end{aligned}$$

Lo que nos da justo la igualdad del enunciado del teorema del muestreo. Por último, para probar la convergencia uniforme basta deshacer lo pasos anteriores

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{|k| \leq N} f\left(\frac{k}{A}\right) \operatorname{sinc}(\pi(Ax - k)) \right| &= \left| \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k}{A}\right) e^{-\frac{2\pi i k \xi}{A}} e^{2\pi i x \xi} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left| \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k}{A}\right) e^{-\frac{2\pi i k \xi}{A}} \right| d\xi \\ &\leq \left[\frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left| \sum_{|k| > N} f\left(\frac{k}{A}\right) e^{-\frac{2\pi i k \xi}{A}} \right|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{|k| > N} |f\left(\frac{k}{A}\right)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad \text{si } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Observación 2.3. También es posible enunciar una versión del teorema del muestreo usando en lugar de sinc una función $\hat{\varphi}(\xi)$ del espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que verifica que vale uno en el soporte de \hat{f} . Suponiendo que $\operatorname{sop}(\hat{\varphi}) \subset [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$

y que $\hat{\varphi} = 1$ en $\text{sop}(\hat{f})$, definimos $g(\xi) := \hat{f}(\xi)$ para $|\xi| < \frac{B}{2}$. Siguiendo la demostración anterior, escribimos

$$g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{2\pi i \frac{k}{B} \xi}$$

como igualdad en $\mathcal{L}^2(\frac{-B}{2}, \frac{B}{2})$. Ahora se verifica que

$$\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)g(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \hat{\varphi}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{B} \xi}, \xi \in \mathbb{R}.$$

Por lo que podemos deducir, otra vez por la fórmula de Inversión (2.1), que:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{-2\pi i \frac{k}{B} \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Ahora bien,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi (x - \frac{k}{B})} d\xi = \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right).$$

Por lo que el teorema del muestreo en forma general quedaría de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

En el caso particular $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[\frac{-A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi)$ recuperamos la versión original del teorema de muestreo de Shannon. Vamos a analizar ahora los casos para otras $\hat{\varphi}(\xi)$.

2.2. Sobremuestreo

En la práctica, como veremos en el Capítulo 4, se hace un sobremuestreo porque queremos aproximaciones que converjan rápido y que sean robustas, es decir, si se pierde o se perturba algún dato, que la serie (2.3) se siga pareciendo al original. En general la convergencia de la serie

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(At - k))$$

puede ser lenta. Para introducir el concepto de sobremuestreo lo que hacemos es, observamos que si $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$, entonces se verifica que $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}] \forall B > A$ y podemos expresar la señal a partir de la sucesión $\{f(\frac{n}{B})\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Observación 2.4. *Para mejorar la convergencia de la serie en vez de multiplicar por una función característica, multiplicamos por una función de forma de un trapecio. En el capítulo 1 desarrollamos la convolución de dos funciones características que es justo un trapecio. En primer lugar recordamos que si $g = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ y $h = \chi_{[-T, T]}$, entonces, por el ejemplo 1.2, resulta que*

$$(g * h)(\xi) = \begin{cases} \xi + T + \frac{1}{2} & \text{si } \xi \in [-\frac{1}{2} - T, \frac{1}{2} - T] \\ 1 & \text{si } \xi \in [\frac{1}{2} - T, -\frac{1}{2} + T] \\ \frac{1}{2} - \xi + T & \text{si } \xi \in [-\frac{1}{2} + T, \frac{1}{2} + T] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Elegimos T de modo que $-\frac{1}{2} + T = \frac{A}{2}$, es decir $T = \frac{A+1}{2}$. Sabemos también que las transformadas de Fourier son $\hat{g}(x) = \text{sinc } \pi x$ y $\hat{h}(x) = 2T \text{sinc } 2T\pi x$, ver 1.11. Por lo que aplicando la proposición 1.20 obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) := \hat{g}(x)\hat{h}(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\sin[(A+1)\pi x]}{\pi x} \\ &= \frac{\cos(A\pi x) - \cos[(A+2)\pi x]}{2\pi^2 x^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Con esta elección la función $\hat{\varphi} = g * h$ (con $T = \frac{A+1}{2}$) cumple que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ y $\text{sop}(\hat{\varphi}) = [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$ con $B = A + 2$. Usando la Observación 2.3 tendremos que, para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ con $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A+2} f\left(\frac{k}{A+2}\right) \frac{\cos(A\pi(x - \frac{k}{A+2})) - \cos[(A+2)\pi(x - \frac{k}{A+2})]}{2\pi^2(x - \frac{k}{A+2})^2}. \quad (2.5)$$

2.3. Estimación del error al usar sobremuestreo

Sea $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\varphi}|_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]} \equiv 1$ y $\text{sop}(\hat{\varphi}) \subset [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$. Sabemos que, para toda $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ se tiene por (2.3) que:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(\frac{k}{B}\right) \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Suponemos que en la práctica medimos una “perturbación” de las muestras:

$$f_k^* = f\left(\frac{k}{B}\right) + \epsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Buscamos estimar el error de la señal reconstruida

$$f^*(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^* \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

es decir, estimar

$$E(x) = |f(x) - f^*(x)| \leq \frac{1}{B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon_k \left| \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right) \right| \quad (2.8)$$

Consideramos la función φ definida en (2.4), que verifica

$$|\varphi(x)| \leq \min \left\{ \frac{1}{\pi^2 x^2}, B \right\}, \quad (2.9)$$

ya que $|\varphi(x)| \leq \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi \leq B$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 2.5. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(x - \frac{k}{B}\right) \right| \leq B + B^2 C.$$

Demostración. Sea $Bx \in \mathbb{R}$ fijo, entonces existe $k_0 = k_0(Bx)$ tal que $|Bx - k_0| \leq \frac{1}{2}$. Si $k \neq k_0$, entonces $|Bx - k| \geq |k - k_0| - |Bx - k_0| \geq |k - k_0| - \frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq k_0} |\varphi(x - \frac{k}{B})| &\leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq k_0} \frac{1}{|x - \frac{k}{B}|^2} = \frac{B^2}{\pi^2} \sum_{k \neq k_0} \frac{1}{|Bx - k|^2} \\ &\leq B^2 \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq k_0} \frac{1}{(|k - k_0| - \frac{1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Elegimos $C = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \neq k_0} \frac{1}{(|k - k_0| - \frac{1}{2})^2}$, por la observación 2.9 resulta que $|\varphi(x - \frac{k_0}{B})| \leq B$. Combinando ambas expresiones se acaba la demostración. \square

Observación 2.6. $C \leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k_0 \neq k} \frac{1}{(k - k_0)^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}$.

Teorema 2.7. Sean f^* y φ como en (2.6), (2.7) y (2.4). Entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f^*(x)| \leq (\sup_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon_k)(1 + BC).$$

Demostración. Usar la ecuación (2.8) y el lema 2.5. \square

2.4. Aliasing

Suponer que queremos reconstruir una señal $f(t)$ de banda limitada $B/2 > A/2$ utilizando únicamente las muestras $f(k/A)$ y la serie

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \text{sinc}(\pi(At - k)).$$

A esta señal f^* , que no tiene por qué coincidir con f , la solemos llamar un “alias” de f . Se puede demostrar que $\widehat{f^*}$ viene explícitamente dada por la fórmula

$$\widehat{f^*}(\xi) = \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + An) \right] \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi),$$

es decir, $\widehat{f^*}$ se obtiene, primero periodizando \widehat{f} , y después cortando con el intervalo $[-A/2, A/2]$. Si el soporte de \widehat{f} está en este intervalo, entonces

$f = f^*$, pero en general pueden ser señales bastante diferentes. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{\sin[2\pi A(x - \frac{1}{2A})]}{\pi(x - \frac{1}{2A})} = -\frac{\sin(2\pi Ax)}{\pi(x - \frac{1}{2A})} \quad \longrightarrow \quad \hat{f}(\xi) = e^{-\frac{i\pi\xi}{A}} \chi_{[-A, A]}(\xi)$$

cumple que $f(k/A) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, y por tanto $f^* \equiv 0$. En general, se puede demostrar que el error de aproximación entre f y f^* cumple

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - f^*(t)| \leq 2 \int_{|\xi| > A/2} |\hat{f}(\xi)| d\xi,$$

y que la igualdad se da en algunos casos (como en el ejemplo anterior).

En muchas aplicaciones en que f es una imagen, o un sonido, el error debido al aliasing produce fenómenos característicos que desvirtúan la señal original. Por ejemplo, las hélices de los aviones, que giran a frecuencia alta, cuando son muestradas por cámaras con frecuencia baja, dan la impresión virtual de girar a velocidad mucho menor e incluso en sentido contrario. Esto es debido a que en \hat{f}^* se han cortado las altas frecuencias, y a que en el proceso de periodización de \hat{f} pueden aparecer picos en frecuencias más bajas.

2.5. Reducción del error de aliasing

Una manera de reducir el error de aliasing consiste en “prefiltrar” la señal f antes de tomar las muestras. Para ello consideramos el operador

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto Pf(x) := \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f} \chi_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]} \right](x) = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Este operador es la proyección ortogonal en el subespacio de las funciones de banda limitada $A/2$, que a menudo se denota como

$$PW_A = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \text{sop}(\hat{f}) \subseteq \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right] \right\},$$

y se denomina espacio de Paley-Wiener. El proceso de filtrado $f \mapsto Pf$ se puede implementar en la práctica (de forma aproximada) con dispositivos electrónicos similares a los ecualizadores.

Si muestreamos la función Pf y reconstruimos obtenemos

$$f^{**}(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Pf)\left(\frac{k}{A}\right) \operatorname{sinc}[\pi(Ax - k)].$$

Como $\operatorname{sop} \widehat{Pf} \subset [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$, el Teorema de Shannon nos da que $f^{**} = Pf$. Por las propiedades de la proyección ortogonal, el error de muestreo con la señal original (en la norma L^2) cumple

$$\|f - f^{**}\|_2 = \|(I - P)f\|_2 = \|(I - P)(f - f^*)\|_2 \leq \|f - f^*\|_2.$$

Por tanto $f^{**} = Pf$ siempre da una mejor aproximación de f que la función de aliasing f^* . Además, el Teorema de Plancherel nos dice que la energía del error mide

$$\|f - f^{**}\|_2^2 = \int_{|\xi| > A/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

2.6. Aplicaciones del teorema del muestreo

Mencionamos aquí algunas aplicaciones sencillas a objetos cotidianos como el CD y el teléfono. Consideramos en primer lugar el CD. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real que supongamos que representa la intensidad de una onda sonora en cada instante t . Argumentos físicos permiten interpretar $\hat{f}(\xi)$ como el contenido en frecuencias de la onda sonora. Además, es conocido que los humanos no podemos escuchar frecuencias superiores a 20.000 Hertz, por lo que en la práctica podemos suponer que: $\operatorname{sop}(\hat{f}) \subseteq [-20.000, 20.000]$. De acuerdo con el teorema del muestreo de Shannon, hay que tomar alrededor de 40.000 muestras por segundo para reconstruir completamente f . Esto justifica por qué en los CDs las señales de audio se registran tomando 44.100 muestras por segundo. También hay CDs de alta definición, que obtienen excelentes calidades sonoras mediante sobremuestreos de alrededor de 100.000 muestras por segundo.

Por otro lado, la transmisión de señales por teléfono es muy costosa, y no puede alcanzar esos niveles de muestreo sin saturar las líneas. En diversos estudios se descubrió que basta considerar frecuencias entre 300 y 3400 Hertz para poder entender razonablemente bien una conversación telefónica. Así que otra vez de acuerdo con el teorema de Shannon, serían suficientes tomar 6800 muestras por segundo.

2.7. Principios del incertidumbre

Teorema 2.8. *Ninguna señal puede ser simultáneamente limitada en tiempo y en frecuencias.*

Demostración. Sean $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y supongamos que el soporte de \hat{f} sea compacto y f no sea idénticamente nula, es decir que $\text{sop}(\hat{f}) \subset [-R, R]$. Defino por el otro lado

$$F(z) := \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

En primer lugar observamos que la función $h(\xi, z) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z}$ es medible y cumple para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo que $h(\cdot, z) \in \mathcal{L}^1(-R, R)$ (porque \hat{f} es de soporte compacto). Es holomorfa en $z \in \mathbb{C}$ ya que es producto de funciones holomorfas y además $|D_z h(\xi, z)| = |\hat{f}(\xi) 2\pi \xi| e^{-2\pi \xi y} \in \mathcal{L}^1(-R, R)$ con lo que por el teorema A.7 resulta que $F \in H(\mathbb{C})$ y por el otro lado, por el teorema de inversión sabemos que $F(x) = f(x)$. Ahora bien, si f fuera de soporte compacto, entonces existen a y b tales que $f = 0$ en $\mathbb{R} \setminus (a, b)$. Y por el principio de la identidad de funciones holomorfas, resulta que $F|_{\mathbb{R} \setminus (a, b)} = 0$, pero por el principio de la acumulación de los ceros resulta que F tiene que ser idénticamente nula, lo cuál no puede ser. □

Esto significa que en la práctica no puede ocurrir que una señal sea de banda limitada y con soporte compacto. El siguiente teorema muestra que f y \hat{f} tampoco pueden estar simultáneamente muy localizadas en torno al origen, aunque sus soportes no sean compactos.

Teorema 2.9. *(Desigualdad de Heisenberg):*

Si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces se verifica que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}.$$

Demostración. En primer lugar recordamos que tenemos la siguiente igualdad $\widehat{f'(\xi)} = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$. Además vamos a considerar $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$

e $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)| d\xi$ y ahora aplicamos el teorema de Plancherel y el teorema 1.15 resultando

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)| d\xi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f'(\xi)}|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx.$$

Ahora bien, estamos en las condiciones de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ver A.6 por lo que resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right) &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} \right|^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, si derivamos $|f(x)|^2 = f(x) \overline{f(x)}$ respecto de x resulta que

$$(|f(x)|^2)' = f'(x) \overline{f(x)} + f(x) \overline{f'(x)} = 2 \operatorname{Re}(f(x) \overline{f'(x)}).$$

De donde podemos afirmar ahora que ha de verificarse que

$$\frac{1}{4\pi^2} \left| \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} \right) \right|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x (|f(x)|^2)' dx \right|^2.$$

Haciendo la última integral, por partes, teniendo en cuenta la hipótesis de que tenemos una función de la clase de Schwartz (rápidamente decreciente), resulta que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x (|f(x)|^2)' dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x (|f(x)|^2)' dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por lo que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 = 0$$

y por tanto obtenemos que la integral queda como

$$\lim_{R \rightarrow \infty} - \int_{-R}^R |f(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -\|f\|_2^2.$$

Por lo que finalmente podemos concluir que

$$\frac{1}{16\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(|f(x)|^2)' dx \right|^2 = \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2},$$

y tenemos la desigualdad pedida del enunciado. □

Corolario 2.10. *Si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces se verifica que*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\|f\|_2^4}{16\pi^2}$$

Demostración. Consideramos la siguiente función auxiliar:

$$F_{x_0, \xi_0}(x) = e^{-2\pi i x \xi_0} f(x + x_0) = E_{-\xi_0}(T_{-x_0}(f)).$$

Por la proposición 1.14 resulta que su transformada queda como:

$$\hat{F}_{x_0, \xi_0}(\xi) = T_{-\xi_0} E_{x_0} \hat{f}(\xi) = e^{2\pi i x_0(\xi + \xi_0)} \hat{f}(\xi + \xi_0).$$

Así resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |F_{x_0, \xi_0}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x + x_0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx,$$

y del mismo modo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{F}_{x_0, \xi_0}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi + \xi_0)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Aplicando el teorema 2.9 a la función F_{x_0, ξ_0} acabamos la demostración. □

Observación 2.11. *En Mecánica Cuántica, el estado de una partícula se describe con una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1$. La probabilidad de que la posición de una partícula esté localizada en E viene dada por*

$$P(\text{pos} \in E) = \int_E |f(t)|^2 dt$$

y la probabilidad de que la frecuencia esté en E' viene dada por

$$P(\text{frec} \in E') = \int_{E'} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Por tanto, la posición y la frecuencia media vienen dadas por

$$\bar{P} = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \quad \text{y} \quad \bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

y las varianzas de la posición y frecuencia son

$$\sigma_P^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \bar{P})^2 |f(t)|^2 dt \quad \text{y} \quad \sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{f})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

El teorema de Heisenberg nos dice que

$$\sigma_P^2 \sigma_f^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Es decir, si la posición está muy localizada y σ_P es pequeño, entonces $\sigma_f \geq \frac{1}{4\pi\sigma_P}$ es grande y por tanto la frecuencia está muy dispersa.

Capítulo 3

Transformada de Fourier discreta

Seguimos las referencias [1, Cap2], [2, Cap5], [5] y [9, Cap7]

3.1. Introducción

En primer lugar observamos que las señales digitales (discretas), que medimos a partir de una muestra, son sucesiones de números reales o complejos. En segundo lugar hay que observar que podríamos expresarlos en señales de la forma $\{f(kT)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ con $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pero en la práctica las señales con las que trabajamos en aplicaciones empiezan y terminan en tiempo finito. Así que, en el contexto discreto trabajamos con sucesiones finitas de números.

Definición 3.1. (señales) Llamamos señal discreta de tamaño N a cualquier vector $f = (f[0], f[1], \dots, f[N-1]) \in \mathbb{C}^N$

Observación 3.2. Consideramos el conjunto $\mathbb{Z}_N = \{e^{\frac{2\pi i n}{N}}, n \in \mathbb{Z}\}$ y observamos que se verifica que $e^{m\frac{2\pi i}{N}} = e^{n\frac{2\pi i}{N}}$ si y solo si $n \equiv m \pmod{N}$ porque $2\pi i$ es un periodo fundamental de la función exponencial compleja $\exp(z) = e^z$. Se sigue que podemos establecer un isomorfismo entre el grupo $G = (\mathbb{Z}_N, \cdot)$ y el grupo cociente $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Vamos a estudiar el análisis de Fourier sobre este grupo y usaremos la notación $\mathbb{Z}(N)$ para referirnos a ambos

grupos.

Proposición 3.3. *El espacio vectorial V de todas las funciones $f : \mathbb{Z}(N) \rightarrow \mathbb{C}$ es un espacio vectorial Euclídeo con el producto hermitico definido como:*

$$\langle F, G \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \overline{G(k)} \quad (3.1)$$

Demostración. Sean F, G y $H \in V$. Vamos a comprobar que 3.1 es un producto hermitico

1. $\langle F, G \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \overline{G(k)} = \overline{\sum_{k=0}^{N-1} G(k) \overline{F(k)}} = \overline{\langle G, F \rangle}$
2. $\langle F+H, G \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} (F(k) + H(k)) \overline{G(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \overline{G(k)} + \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \overline{G(k)} = \langle F, G \rangle + \langle H, G \rangle$
3. $\langle \lambda F, G \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda F(k) \overline{G(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \overline{G(k)} = \lambda \langle F, G \rangle$

□

Observación 3.4. *Si consideramos el espacio vectorial de dimension N $\mathbb{C}^N = \{(z_1, \dots, z_N) \text{ tales que } z_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } k\}$ junto con el producto escalar $\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \dots + z_N \overline{w_N}$ que a veces se denota $\ell_2(N) = (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, obtenemos un espacio vectorial Euclídeo que es isomorfo al espacio V definido más arriba.*

Se sigue que podemos identificar el conjunto de las señales discretas de tamaño N con el espacio de Hilbert $\ell_2(N) = (\mathbb{C}^N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Teorema 3.5. *La familia*

$$\{\mathbf{e}_k(n) = e^{\frac{2\pi i k n}{N}}\}_{k=0}^{N-1}$$

es una base ortogonal de $\ell_2(N)$. Además, se verifica que $\|\mathbf{e}_k\| = \sqrt{N}$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Demostración. Como la dimension del espacio es N , sólo hace falta comprobar que la familia $\{\mathbf{e}_k(n)\}_{k=0}^{N-1}$ que hemos definido anteriormente, forma un conjunto de vectores ortogonales dos a dos, pues todo sistema ortogonal de vectores no nulos es necesariamente libre. Ahora bien:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}_k(n) \overline{\mathbf{e}_l(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i l n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}})^n = S$$

que es una serie geometrica, por lo que su suma vale

$$S = \frac{1 - e^{2\pi i (k-l)}}{1 - e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}}} = 0.$$

(Cuando $k \neq l$, $0 \leq k, l \leq N$, tenemos que $e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}} \neq 1$): Se sigue que $\{\mathbf{e}_k(n)\}_{k=0}^{N-1}$ es una familia ortogonal. Además, un simple cálculo confirma que $\|\mathbf{e}_k\| = \sqrt{N}$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$. \square

Definimos ahora la transformada de Fourier discreta (TFD) sobre el espacio $\ell_2(N)$.

Definición 3.6. Sea $f \in \mathbb{C}^N$ definimos su TFD, que denotamos por $\hat{f} = (\hat{f}[0], \dots, \hat{f}[N-1])$, como:

$$TFD(f)[k] = \hat{f}[k] := \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad 0 \leq k < N.$$

Obsérvese que $\hat{f}[k] = \langle f, \mathbf{e}_k \rangle$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$, donde los \mathbf{e}_k son los vectores que aparecen en el teorema 3.5.

Ejemplo 3.7. (Muestra del coseno) Dada la función $f(x) = \cos(x)$, tomamos una muestra a partir de los puntos $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$, donde obtenemos que $f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = 0, f(\pi) = -1$ y $f(\frac{3\pi}{2}) = 0$, en forma compacta escribimos $f_0 = 1, f_1 = 0, f_2 = -1, f_3 = 0$. Vamos a calcular $F = \hat{f}$. Por definición,

$$F_j = \sum_{k=0}^3 f_k e^{-\frac{\pi i k j}{2}} = 1 - (-i)^{2j} = 1 - (-1)^j, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

donde se ha aplicado que $e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$. Por tanto, hemos comprobado que $DFT(1, 0, -1, 0) = (0, 2, 0, 2)$.

Teorema 3.8. Sea $f \in \mathbb{C}^N$ una señal discreta. Entonces:

$$1. \text{ (Fórmula de inversión) } f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}, 0 \leq n < N.$$

$$2. \text{ (Identidad de Plancherel) } \|f\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}(k)|^2$$

Demostración. En primer lugar por el Teorema 3.5 podemos descomponer cualquier señal $f \in \mathbb{C}^N$ como

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \mathbf{e}_k$$

al ser $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{N-1}$ (por el teorema 3.5) base, donde observamos que λ_k son números complejos. Y como estamos en un espacio vectorial Euclídeo, podemos calcular

$$\langle f, \mathbf{e}_m \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m \right\rangle.$$

Otra vez aplicando el teorema 3.5 podemos deducir que

$$\langle f, \mathbf{e}_m \rangle = \lambda_m \|\mathbf{e}_m\|^2$$

y, por tanto,

$$\lambda_m = \frac{\langle f, \mathbf{e}_m \rangle}{\|\mathbf{e}_m\|^2} = \frac{\hat{f}(m)}{N},$$

de modo que

$$f = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{f}(k)}{N} \mathbf{e}_k$$

y, evaluando en n ,

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

que es justo lo que queríamos probar. Y además tenemos que, aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \frac{\hat{f}(k)}{N} \mathbf{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} |\hat{f}(k)|^2 \|\mathbf{e}_k\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}(k)|^2,$$

que es la fórmula de Plancherel. □

Observación 3.9. (*Transformada de Fourier inversa*)

Vamos a relacionar el cálculo de la DFT con la DFT inversa. Para ello únicamente hay que observar que:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\hat{f}(k) e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}} = \frac{1}{N} \overline{TFD(\hat{f})}.$$

3.2. Convoluciones circulares

Hemos visto que en el grupo $\mathbb{Z}(N)$, dos elementos de la forma $e^{m \frac{2\pi i}{N}} = e^{n \frac{2\pi i}{N}}$ son iguales si y sólo si n y m son congruentes módulo N . Para extender la señal $f \in \mathbb{C}^N$ (para valores de la forma $f(n-m)$) lo que hacemos es extenderla como sucesiones N -periódicas con índices en \mathbb{Z} , es decir que se verifica que

$$\text{si } n \equiv m \pmod{N}, \text{ entonces } f(n) = f(m)$$

y así la expresión $f(n-m)$ tiene sentido para $0 \leq n < N$ y $0 \leq m < N$. Así podemos definir un concepto similar a la operación de la convolución para funciones.

Definición 3.10. (*Convolución circular*) Dadas dos señales $f, h \in \mathbb{C}^N$ la señal $f \circledast h \in \mathbb{C}^N$ dada por la expresión

$$(f \circledast h)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)h(n-m)$$

recibe el nombre de convolución circular de las señales f y h .

Lema 3.11. Si $f[n]$ es N -periódica, entonces

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n] = \sum_{n=-l}^{N-1-l} f[n], \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sea f una señal N -periódica, veamos que

$$S = \sum_{t=-l}^{N-1-l} f[t] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n].$$

En primer lugar observamos que podemos partir S en los siguientes dos sumandos:

$$S = \sum_{t=-l}^{-1} f[t] + \sum_{t=0}^{N-1-l} f[t].$$

Ahora bien, usando que f es una señal N -periódica y considerando el siguiente cambio de variable $u = t + N$, resulta que el primer miembro queda como:

$$\sum_{t=-l}^{-1} f[t + N] = \sum_{u=N-l}^{N-1} f[u].$$

Y así juntando ambos miembros resulta que

$$S = \sum_{u=N-l}^{N-1} f[u] + \sum_{t=0}^{N-1-l} f[t] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n].$$

□

Proposición 3.12. Dadas las señales $f, h \in \mathbb{C}^N$ se verifica que $f \circledast h = h \circledast f$

Demostración. Sean $f, h \in \mathbb{C}^N$ N -periódicas, y usando directamente la definición 3.10 resulta que

$$(f \circledast h)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m-N)h(n-m+N)$$

por N -periodicidad y además, considerando el cambio de variable $t = n - m + N$ obtenemos

$$(f \circledast h)(n) = \sum_{t=n+1}^{n+N} f(n-t)h(t)$$

y por el Lema 3.11 resulta por tanto

$$(f \circledast h)(n) = \sum_{t=0}^{N-1} f(n-t)h(t) = (h \circledast f)(n).$$

□

Teorema 3.13. Si las señales $f, h \in \mathbb{C}^N$, entonces la señal convolución $g = f \circledast h$ verifica que

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k)\hat{h}(k) \text{ para } 0 \leq k \leq N-1.$$

Demostración. Aplicando la definición de la transformada de Fourier discreta y usando la fórmula $g(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(n-m)h(m)$ resulta que

$$\hat{g}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)e^{\frac{-2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} f(n-m)h(m) \right] e^{\frac{-2\pi i k n}{N}}.$$

Como la serie es finita, podemos conmutar el orden de esta y, usando que, $e^a e^b = e^{a+b}$ y $n = (n-m) + m$, obtenemos que:

$$\hat{g}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n-m)e^{\frac{-2\pi i k (n-m)}{N}} \right] h(m)e^{\frac{-2\pi i k m}{N}}$$

Ahora bien, si vemos que se verifica que

$$S = \hat{f}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(n-m)e^{-\frac{2\pi ik(n-m)}{N}}$$

habremos acabado. En primer lugar si hacemos un cambio de variable de la forma $t = n - m$, obtenemos que

$$S = \sum_{t=-m}^{N-1-m} f(t)e^{-\frac{2\pi ikt}{N}}$$

por el Lema 3.11 resulta que

$$S = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-\frac{2\pi ikt}{N}}$$

que es justo por definición $\hat{f}(t)$. Con lo que se verifica que

$$\hat{g}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(k)h(m)e^{-\frac{2\pi ikm}{N}} = \hat{f}(k) \sum_{m=0}^{N-1} h(m)e^{-\frac{2\pi ikm}{N}}$$

o sea, usando que $\hat{h}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)e^{-\frac{2\pi ikm}{N}}$ obtenemos que $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)\hat{h}(k)$. □

3.3. Transformada de Fourier rápida

El cálculo de la TFD de una señal puede ser muy costoso ya que por la fórmula

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-\frac{2\pi ikn}{N}}, \quad 0 \leq k < N$$

obtenemos que para señales $f \in \mathbb{C}^N$ hay que hacer $N(N-1)$ sumas y N^2 multiplicaciones, o sea que hay que hacer $O(N^2)$ operaciones que para un número N muy grande puede ser muy costoso. En la vida real hay que tomar cantidades muy elevadas de muestras como ya vimos en los ejemplos

que analizamos en la sección del teorema del muestreo. En particular, esto es así porque en muchos casos el ancho de banda de la señal es elevado, lo que fuerza a tomar una frecuencia de muestreo elevada. La transformada de Fourier rápida es un algoritmo para el cálculo de la transformada de Fourier discreta que funciona bien si el tamaño de la muestra N es una potencia de dos. Este algoritmo reduce la complejidad de los cálculos, en vez de $O(N^2)$ operaciones, sólo requiere $O(N \log_2(N))$ operaciones.

Teorema 3.14. (Cooley, Tukey) Si $N = 2^l$, entonces existe un algoritmo que calcula la TFD de cada señal $f \in \mathbb{C}^N$ utilizando a lo sumo $kN \log_2(N)$ operaciones complejas, pudiendo tomarse $k = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 3.15. Consideramos una señal de tamaño $N = 2^{20} \approx 10^6$ y un ordenador que hace $2^{30} \approx 10^9$ operaciones por segundo, entonces se tardaría aproximadamente

$$2 \cdot \frac{N^2}{2^{30}} \approx \frac{2 \cdot 2^{40}}{2^{30}} \approx 2 \cdot 2^{10} \text{ seg.}$$

Que son como 2048 segundos, o sea aproximadamente 34 minutos en calcular la TFD. El teorema de Cooley y Tuckey nos asegura que si aplicamos este algoritmo, resulta que se tardaría

$$\frac{1,5 \cdot 2^{20} \cdot \log_2(2^{20})}{2^{30}} = \frac{30 \cdot 2^{20}}{2^{30}} \approx \frac{30}{10^6} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ seg.}$$

Por lo que hay una mejora notable ya que de un cálculo computacional de 34 minutos, lo reducimos a ni siquiera una diezmilésima de segundo.

Ahora bien, eso nos motiva para desarrollar este algoritmo en detalle para los N tales que sean una potencia de 2, es decir $N = 2^l$.

3.4. Desarrollo práctico de la FFT

Vamos a desarrollar en esta sección el algoritmo FFT para el cálculo de la DFT. Para ello probamos dos proposiciones, que nos indican como calcular las frecuencias pares e impares. Juntas nos dan exactamente la FFT. Para las frecuencias pares vamos a agrupar los sumandos que definen los $\hat{f}[2k]$ del siguiente modo:

Proposición 3.16. Sea $N = 2^l$, entonces se verifica que

$$\hat{f}[2k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} (f[m] + f[m + \frac{N}{2}]) e^{-\frac{2\pi i k m}{N}}.$$

Demostración. En primer lugar usando la definición de la TFD para las frecuencias pares y separando la suma, resulta que:

$$\hat{f}[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i (2k)n}{N}} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i (2k)n}{N}}$$

Ahora bien, hacemos el cambio $n = m + \frac{N}{2}$ en el segundo sumando y vamos a simplificar el segundo sumando, que llamamos por comodidad

$$\begin{aligned} S_1[k] &= \sum_{n=\frac{N}{2}}^N f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f[m + \frac{N}{2}] e^{-\frac{2\pi i k (m + \frac{N}{2})}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f[m + \frac{N}{2}] e^{-\frac{2\pi i k m}{N}} e^{-2\pi i k}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $e^{-2\pi i k}$ vale 1. Podemos dejar $S_1[k]$ como:

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f[m + \frac{N}{2}] e^{-\frac{2\pi i k m}{N}}.$$

Por lo que resulta que $\hat{f}[2k]$ se queda del siguiente modo

$$\hat{f}[2k] = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} (f[m] + f[m + \frac{N}{2}]) e^{-\frac{2\pi i k m}{N}}.$$

□

Observación 3.17. Por lo que concluimos que cuando las frecuencias son pares, podemos calcular $\hat{f}[2k]$ haciendo la TFD de la siguiente señal

$$f_p[n] = f[n] + f\left[n + \frac{N}{2}\right], \quad 0 \leq n < \frac{N}{2}$$

que es $\frac{N}{2}$ -periódica.

Del mismo modo, para recuperar la señal completamente, nos interesa saber qué pasa exactamente para las frecuencias impares. Que nos lleva a la siguiente proposición.

Proposición 3.18. Sea $N = 2^l$, entonces se verifica que

$$\hat{f}[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} (f[n] - f\left[n + \frac{N}{2}\right]) e^{-\frac{2\pi i k n}{\frac{N}{2}}}$$

Demostración. Igual que en la proposición 3.16 podemos separar primero la DFT, evaluada para las frecuencias impares, en dos sumandos

$$\hat{f}[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i (2k+1)n}{N}} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^N f[n] e^{-\frac{2\pi i (2k+1)n}{N}}$$

Haremos una reagrupación parecida a la anterior, o sea un cambio de la forma $n = m + \frac{N}{2}$ en la segunda suma, que llamamos $S_2[k] := \sum_{n=\frac{N}{2}}^N f[n] e^{-\frac{2\pi i (2k+1)n}{N}}$.

Entonces

$$\begin{aligned} S_2[k] &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f\left[m + \frac{N}{2}\right] e^{-\frac{2\pi i (2k+1)(m+\frac{N}{2})}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f\left[m + \frac{N}{2}\right] e^{-\frac{2\pi i (2k+1)m}{N}} e^{-\frac{2\pi i (2k+1)\frac{N}{2}}{N}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, observa que el término $e^{-\frac{2\pi i (2k+1)\frac{N}{2}}{N}}$ se simplifica como $e^{-\pi i (2k+1)} = e^{-\pi i} e^{-2\pi i k} = -1$ por lo que $S_2[k]$ vale

$$S_2[k] = - \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi im}{N}} f[m + \frac{N}{2}] e^{-\frac{2\pi ikm}{N}}.$$

Con lo que se verifica que

$$\hat{f}[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi in}{N}} (f[n] - f[n + \frac{N}{2}]) e^{-\frac{2\pi ikn}{N}}.$$

□

Observación 3.19. Esta fórmula muestra que cuando las frecuencias son impares podemos calcular $\hat{f}[2k+1]$ haciendo la TFD de la señal

$$f_i[n] = e^{-\frac{2\pi in}{N}} (f[n] - f[n + \frac{N}{2}]), \quad 0 \leq n < \frac{N}{2}$$

que también es $\frac{N}{2}$ -periódica.

3.5. Operaciones necesarias FFT

Las proposiciones 3.16 y 3.18 muestran que podemos calcular la DFT de una señal discreta de un tamaño de una potencia de dos, o sea $N = 2^l$, aplicando la DFT a dos señales del tamaño $\frac{N}{2} = 2^{l-1}$. Ahora bien, queremos ver que justamente se cumple el teorema de Cooley, Tukey, tal algoritmo tiene un coste logarítmico. Definimos la cantidad C_N := "número de sumas y multiplicaciones complejas necesarias para calcular la TFD usando la FFT de $f \in \mathbb{C}^N$ ", entonces se satisface lo siguiente:

Proposición 3.20. Para cada señal $f \in \mathbb{C}^N$ se verifica que $C_N \leq \frac{3}{2} N \log_2(N)$.

Demostración. Sea $f \in \mathbb{C}^N$ una señal. Observamos que para el cálculo de f_i y f_p (los coeficientes desarrollados en la proposición 3.16 y 3.18) necesitamos N sumas complejas y $\frac{N}{2}$ multiplicaciones, lo que nos da un total de $\frac{3}{2}N$ operaciones. Por lo que para una N de la forma $N = 2^l$ ha de verificarse que

$$C_N = 2C_{\frac{N}{2}} + \frac{3}{2}N$$

Lo que podemos resumir como la siguiente ecuación en recurrencias finitas:

$$a_{2^l} = 2a_{2^{l-1}} + \frac{3}{2}2^l$$

Para saber la condición inicial, observamos que si solo tenemos una muestra, entonces ha de verificarse directamente $\hat{f}[0] = f[0]$, por lo que no hay que hacer ninguna operación, o sea que $C_1 = 0$, y por tanto, $a_1 = 0$. Vamos a iterar esta sucesión e intentamos ver una estructura. Por comodidad, ponemos $k = \frac{3}{2}$ Paso 1:

$$a_{2^l} = 2(2a_{2^{l-2}} + k2^{l-1}) + k2^l = 2^2a_{2^{l-2}} + 2k2^l$$

Paso 2:

$$a_{2^l} = 2^2(2a_{2^{l-3}} + k2^{l-2}) + 2k2^l = 2^3a_{2^{l-3}} + 3k2^l$$

Siguiendo iterando se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia:

$$a_{2^l} = 2^l a_1 + lk2^l = lk2^l,$$

ya que sabemos que $a_1 = 0$. Por el otro lado teníamos que $N = 2^l$ con lo que $l = \log_2(N)$. Por lo que la solución de la recurrencia queda como:

$$a_{2^l} = kN \log_2(N).$$

Lo que podemos traducir en lenguaje computacional como

$$C_N = kN \log_2(N).$$

□

Capítulo 4

Aplicación

Seguimos las referencias [3, Cap3, Cap4 y Cap5] y [1, Cap2]

4.1. Introducción

En este capítulo desarrollamos un algoritmo que nos permite, discretizando el problema de hallar la transformada de Fourier de una señal analógica $f(t)$, hallar una buena aproximación a los valores de la transformada de Fourier de $f(t)$ sin la necesidad de conocer su expresión analítica $f(t)$. Vimos en el capítulo de la transformada de Fourier continua, que el cálculo directo de la transformada de Fourier de la señal $f(t)$ utilizando la mera definición de esta, es, en la mayoría de los casos, imposible, bien porque el cálculo de las integrales involucradas es inabordable o bien porque no disponemos de una expresión analítica para $f(t)$. Así que desarrollamos los conceptos fundamentales para poder interpretar bien los datos. También implementamos un algoritmo para calcular bien la DFT y mostrar su utilidad. Vamos a analizar también problemas que pueden ocurrir en la práctica como Aliasing y *Leakage*. El concepto de Aliasing ya fue introducido en 2.4. Recordamos que si tomamos muestras con frecuencia de muestreo baja puede ser que se recupere una señal "alias". *Leakage*, o derramamiento espectral, es un problema que ocurre por el hecho de que imponemos un número de muestras finito, con lo que pueden aparecer frecuencias altas que no están presentes en la señal original. También veremos como reducir su efecto en

la práctica.

Los cálculos que se explican en este capítulo son extremadamente útiles en la práctica porque permiten, en numerosos contextos, calcular el comportamiento en frecuencias de todo tipo de señales analógicas. Este tipo de señales aparecen en numerosas disciplinas como, por ejemplo, la física, la ingeniería, la medicina, la geología, etc. Cada aplicación concreta implica trabajar con una clase bastante específica de señales cuyas propiedades generales son bien conocidas y, en particular, cuyo ancho de banda máximo es bien conocido. Así, por ejemplo, en electroencefalografía, las señales obtenidas al medir los potenciales eléctricos que llegan a través de la piel a cada uno de los electrodos colocados en el cuero cabelludo, no superan nunca los 70Hz. Este conocimiento a priori del tipo de señal a estudiar permite desarrollar la tecnología adecuada para tomar muestras que hagan la señal grabada fiable, hasta el punto de permitir, por ejemplo, el cálculo del comportamiento en frecuencias de las señales registradas con exquisita fidelidad. Si no fuera así, no sería posible utilizar esta información para cuestiones tan delicadas como el diagnóstico clínico. Así, en cada contexto concreto se utiliza una frecuencia de muestreo apropiada. En el caso de la electroencefalografía la tasa de muestreo mínima requerida es 500Hz, pero a veces se usan frecuencias de muestreo de hasta 2000Hz. Cada aplicación impone sus propias normas y modula su propia tecnología.

4.2. Relación entre $\hat{f}(\frac{k}{T})$ y $c_k(f|_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$

Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Consideramos $f_T(t)$ la extensión T -periódica de $f|_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$. Como $f|_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \in \mathcal{L}^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ podemos calcular los coeficientes de su serie de Fourier asociada de la siguiente manera

$$c_k(f_T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt.$$

Ahora bien, sabemos que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, por lo que para un T suficientemente grande podemos asumir que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} |f(t)| dt$$

es muy pequeño, por lo que obtenemos la siguiente aproximación:

$$c_k(f_T) \cong \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right).$$

Esto nos relaciona la transformada de Fourier de f con los coeficientes de Fourier de la señal f_T para un T suficientemente grande mediante la fórmula:

$$T c_k \cong \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right). \quad (4.1)$$

Además si la señal f fuera de soporte compacto se daría la igualdad (para T suficientemente grande).

4.3. Relación entre $\hat{f}(\frac{k}{T})$ y la dft de un vector de muestras de f

Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y tomamos muestras en $0, h, 2h, \dots, (N-1)h$, donde N es el tamaño de la muestra. Entonces nuestra muestra se queda como vector de la siguiente forma $f = (f(0), f(h), \dots, f((N-1)h))$, donde $Nh = T$. Calculando la transformada de Fourier discreta suponemos que los datos de la salida sean de la siguiente forma $dft(f) = (Y_0, \dots, Y_{N-1})$. De acuerdo con el desarrollo de la transformada de Fourier discreta, ver 3.6, ha de verificarse que $Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(jh) e^{-\frac{2\pi i k j}{N}}$. Esta suma la queremos asociar con la integral compleja de la transformada de Fourier. Para ello lo que hacemos es demostrar que Y_k se puede ver como una suma de Riemann. Ahora bien, de $Nh = T$ obtenemos que el periodo de muestreo es $h = \frac{T}{N}$ y así se verifica también que $\frac{h}{T} = \frac{1}{N}$ y así para cada índice j se verifica que $\frac{j}{N} = \frac{jh}{T}$ que es una partición del intervalo $[0, T)$. Ahora bien multiplicando por h resulta que

$$h Y_k = h \sum_{j=0}^{N-1} f(jh) e^{-\frac{2\pi i k j h}{T}}$$

que es una suma de Riemann. Por tanto para una h suficientemente pequeña se verifica que:

$$hY_k \cong \int_0^T f(t)e^{-\frac{2\pi ikt}{T}} dt \cong Tc_k.$$

De forma más compacta obtenemos

$$hY_k \cong Tc_k. \quad (4.2)$$

Con lo que juntando las fórmulas (4.1) y (4.2) resulta la fórmula general que nos asocia el concepto del cálculo de los coeficientes de Fourier, la transformada de Fourier y la TFD:

$$hY_k \cong \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) \cong Tc_k. \quad (4.3)$$

4.4. Reorganización del vector de Entrada

Sea $f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y tomamos muestras uniformes en el intervalo simétrico $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con periodo de muestreo h . Así obtenemos el siguiente vector de muestras:

$$v = \left(f\left(-\frac{T}{2}\right), f\left(-\frac{T}{2} + h\right), \dots, f(-h), f(0), f(h), \dots, f\left(\frac{T}{2} - h\right) \right).$$

Para aplicar la fórmula (4.3) tenemos que partir de un vector de muestras del intervalo $[0, T)$. Para ello lo que hacemos es extender la señal de manera periódica, por lo que una reorganización de los datos es necesaria. Por lo que resulta que realmente tenemos que calcular la transformada de Fourier del siguiente vector:

$$w = \left(f(0), f(h), f(2h), \dots, f\left(\frac{T}{2} - h\right), f\left(-\frac{T}{2}\right), f\left(-\frac{T}{2} + h\right), \dots, f(-h) \right)$$

Ya podemos aplicar la fórmula (4.3) a este vector w . Observamos también que de esta forma estamos interpretando los vectores como sucesiones de periodo N que es el tamaño del vector. Esto lo hacemos en el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias con lo que vamos a obtener frecuencias negativas y positivas. Vemos ahora en la siguiente sección como asociarlos exactamente

4.5. Identificación y reescalado de las frecuencias

En primer lugar obtenemos la frecuencia cero, que asociamos a Y_0 , y que viene dada por $hY_0 \cong \hat{f}(0)$. Las otras frecuencias se hallan a partir de la frecuencia fundamental f_1 , que es la frecuencia estrictamente positiva y más pequeña que podemos recuperar a partir de las muestras. Esta la hacemos corresponder con Y_1 , por lo que resulta que

$$hY_1 \cong \hat{f}(f_1).$$

Con lo que hY_1 es la contribución a la señal f de la frecuencia f_1 . A partir de esta frecuencia fundamental construimos

$$hY_2 \cong \hat{f}(2f_1)$$

y así sucesivamente hasta

$$hY_{\frac{N}{2}} \cong \hat{f}\left(\left(\frac{N}{2} - 1\right)f_1\right)$$

ya que la TFD es $\frac{N}{2}$ -periódica y el resto de frecuencias que tenemos son negativas y por la relación que resulta por ser $\frac{N}{2}$ -periódica $\hat{f}\left(\frac{N}{2}\right) = \hat{f}\left(\frac{-N}{2}\right)$ y $\hat{f}(N - 1) = \hat{f}(-1)$ con lo que a partir de $\frac{N}{2}$ hasta $N - 1$ obtenemos las frecuencias negativas con lo que

$$hY_{N-k} = \hat{f}(-kf_1) \text{ para } k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}.$$

4.6. Representación gráfica

Vimos en la sección anterior que nos hace falta la frecuencia fundamental f_1 para dibujar cada aportación en frecuencias en el sitio correcto, así que veamos cómo calcular aproximadamente tal frecuencia. Una manera heurística es la siguiente. Como el periodo de la muestra es h y hemos supuesto que $T = Nh$, se verifica que la frecuencia adecuada es $f_1 = \frac{1}{Nh} = \frac{1}{T}$ con lo que se verifica por la fórmula (4.3) que

$$hY_k \cong \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) = \hat{f}(kf_1) = \hat{f}(f_k) \text{ para } k = \frac{-N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Vemos ahora otro modo de abordar esta cuestión. En primer lugar estamos suponiendo que el periodo de muestreo es h , por lo que la frecuencia de muestreo (sampling) es $f_s = \frac{1}{h}$. Si tenemos una señal de ancho de banda b , ha de verificarse por el teorema del muestreo que $2b \leq f_s$ con lo que $b \leq \frac{1}{2h}$, con lo que la frecuencia más alta que podríamos tomar es $\frac{1}{2h}$ si tomamos muestras con periodo h . Además, hay que colocar las frecuencias equidistribuidas, además hay N ya que nuestro tamaño de muestreo es N . A parte de esto, hay que colocarlas en un intervalo simétrico respecto del origen de coordenadas ya que hay frecuencias negativas y positivas. Por lo que las frecuencias tienen que encontrarse en el intervalo $(\frac{-1}{2h}, \frac{1}{2h})$, con lo que la frecuencia mínima será $\frac{-N}{2}f_1 = \frac{-1}{2h}$ y la máxima $\frac{N}{2}f_1 = \frac{1}{2h}$. En todo caso obtenemos con este razonamiento que $f_1 = \frac{1}{Nh} = \frac{1}{T}$. El resto de frecuencias queda como $f_k = kf_1 = \frac{k}{Nh}$ para $k = \frac{-N}{2}, \frac{-N}{2} + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$. Por la fórmula (4.3) resulta por tanto que:

$$hY_k \cong \hat{f}(kf_1) = \hat{f}(f_k) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2},$$

y por el otro lado:

$$hY_{N+k} \cong \hat{f}(kf_1) = \hat{f}(f_k) \text{ para } k = -1, -2, \dots, \frac{-N}{2}.$$

4.7. Factores que afectan la aproximación de la transformada de Fourier

4.7.1. Aliasing y como evitarlo

Ya nombramos varias veces en este trabajo lo que es el Aliasing. Vemos ahora como se puede evitar. O bien incrementamos la frecuencia de muestreo acercándonos lo máximo posible para que se verifique el teorema de muestreo o con un filtro paso bajo para que se adapte a nuestra velocidad de muestreo y mostrar así la señal filtrada. Ambas técnicas se pueden combinar, pero en la práctica se usará sobremuestreo.

4.7.2. Derramamiento espectral(Leakage)

En la práctica disponemos de un número de muestras finitas, lo que es equivalente a considerar una señal f y truncarla, este truncamiento es equivalente a multiplicar por la función característica $\chi_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(\xi)$. Por la proposición 1.20 resulta que la transformada de nuestra señal f es la de la transformada de f convolucionada con la señal sinc, lo que tiene el efecto de suavizar la señal y por otro lado producir frecuencias altas donde antes no habían, debido a las oscilaciones del sinc. Además vimos por el principio de incertidumbre que lo que ocurre es que la señal digital no será de banda limitada, ya que al tomar un número finito de muestras ya es limitada en el tiempo. Hay dos casos donde no se produce el problema del derramamiento espectral.

1. La señal es de soporte compacto tal que $\text{sup}(f) \subset [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$ con lo que al multiplicarlo por la función característica no se produce ningún cambio y así no se da el caso de Leakage.
2. La señal es periodica y R es un múltiplo del periodo, en tal caso tampoco se produce Leakage.

En el resto de los casos, que va a ser la mayoría, el derramamiento espectral es inevitable. La única forma de reducir su efecto es aumentar el rango de la muestra, lo que implica tomar más muestras ya que si no se hace esto, baja la frecuencia de muestro y se produce Aliasing cuando lo que se buscaba era reducir el efecto del derramamiento espectral. De esta forma la función sinc se hace más estrecha y así se reduce el efecto de Leakage.

4.8. Explicaciones del algoritmo

Los cálculos presentados en las secciones anteriores, que nos permiten aproximar numéricamente los valores de la transformada de Fourier de una señal analógica "arbitraria" $f(t)$ se han implementado en forma de algoritmo en el apéndice B. Concretamente, el algoritmo se ha escrito en Matlab (Octave) en el fichero transformadaAprox.m, que es una función de Matlab. Para llamar a dicha función se nos pide dar como entrada los siguientes datos:

1. func=Nombre de un fichero Matlab que calcula la función $f(t)$.
2. funcf=Nombre de un fichero Matlab que calcula la función $\hat{f}(\xi)$.
3. h =Periodo de muestreo que vamos a usar para tomar muestras de $f(t)$.
4. T = Valor extremo del intervalo $[-T, T]$, donde se toman las muestras con periodo de muestreo h .

La salida del programa es una figura que contiene las siguientes tres gráficas (de izquierda a derecha)

1. Gf1=Aparecen la señal $f(t)$ y las muestras tomadas en el intervalo $[-T, T]$.
2. Gf2=Aparece la parte real de la transformada $\hat{f}(\xi)$ de $f(t)$ en el intervalo de frecuencias $[\frac{-1}{2h}, \frac{1}{2h}]$.
3. Gf3=Aparece la parte imaginaria de la transformada $\hat{f}(\xi)$ de $f(t)$ en el intervalo de frecuencias $[\frac{-1}{2h}, \frac{1}{2h}]$.

Se supone que conocemos $f(t)$ y $\hat{f}(\xi)$ y el algoritmo muestra cómo de bueno es el cálculo aproximado de $\hat{f}(\xi)$ a partir de las muestras $f(kh)$. Además, vamos a analizar unos ejemplos de la vida real donde grabamos distintos sonidos. Queremos ver cuánto valen sus frecuencias altas y bajas. Concretamente, el algoritmo se ha escrito en Matlab (Octave) en el fichero grabar.m, que es una función de Matlab. Para llamar a dicha función se nos piden como entrada solamente la duración en segundos de la grabación y como salida obtenemos

1. senalsalida: El sonido que grabamos como audio.
2. senalgrabada: La señal digital.

A parte de esto, implementamos la función calculofrecanalog.m en Matlab que nos pide como entrada la señal digital, que en este caso es la senalgrabada y un paso de muestreo h y como salida obtenemos una figura que contiene las siguientes tres gráficas (de izquierda a derecha)

1. Gf1=Aparece la señal grabada f_m .
2. Gf2=Aparece la parte real de la transformada de Fourier aproximada.
3. Gf3=Aparece la parte imaginaria de la transformada de Fourier aproximada.

4.9. Ejemplos

Ejemplo 4.1. *En primer lugar considero el cálculo de la gaussiana que vimos en el ejemplo 1.17 que se verificaba $\hat{f} = f$, el código de la gaussiana está en el Apendice, ver B.2.1.*

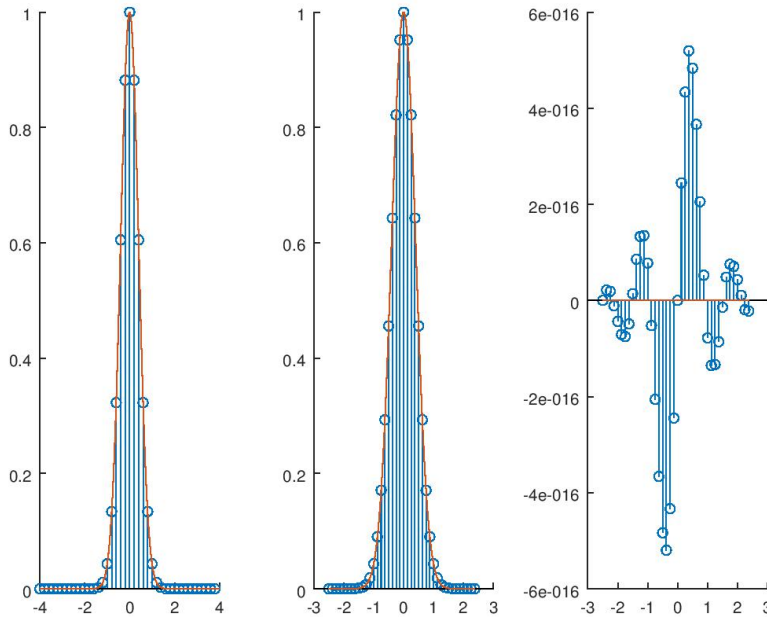


Figura 4.1: Salida: La gaussiana y su transformada. Donde hemos elegido $h = 0,2$ y el intervalo de muestras en $(-4, 4)$. Aunque el paso de muestreo no es muy pequeño, se aproxima casi perfectamente. Además se observa que la parte imaginaria es prácticamente 0. Por lo que hay muy poco error. La señal no es de banda limitada, sin embargo se recupera tan bien. Eso se debe a que

Ejemplo 4.2. En segundo lugar consideramos el trapecio, ver 2.4, donde elijo A de la siguiente forma: $A = \frac{3}{2}$. En el Apéndice está el código para ambas señales, ver B.2.2

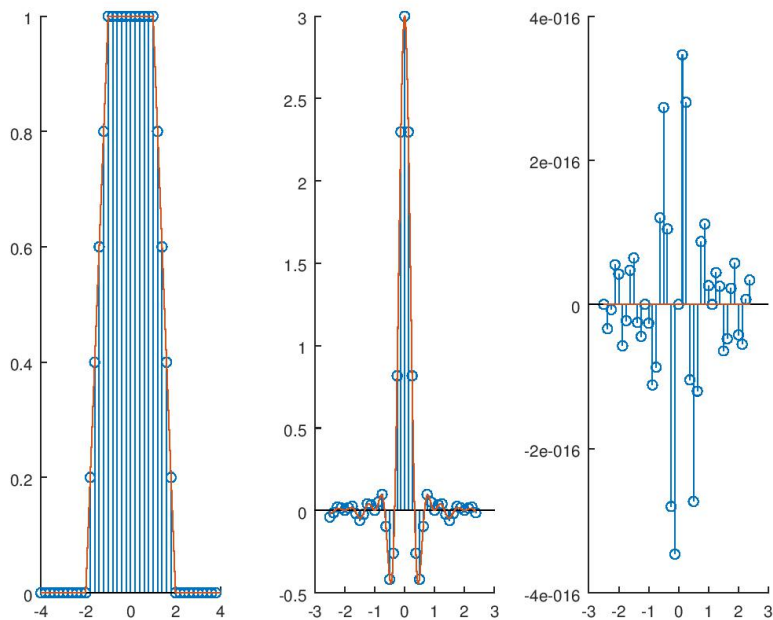


Figura 4.2: Salida del programa: Donde he elegido $h = 0,2$ y la longitud del intervalo $L = 4$.

Reponemos ahora un ejemplo de una señal de banda limitada. Donde quiero calcular ahora la transformada de

$$f(x) = \frac{\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)}{2\pi^2 x^2}$$

que es la transformada de Fourier del trapecio, ver 2.4. Por lo que sabemos que su transformada será de banda limitada.

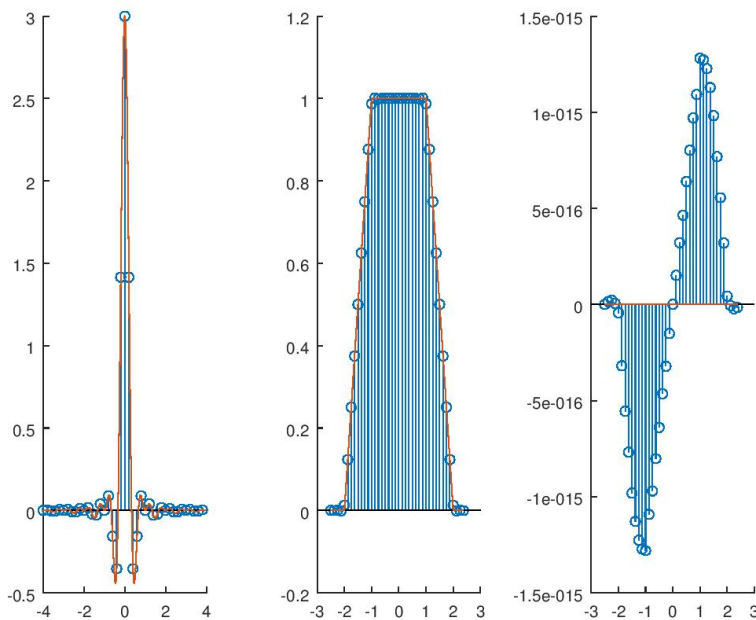


Figura 4.3: Salida del programa: La función $f(x) = \frac{\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)}{2\pi^2 x^2}$ y su transformada. Donde hemos elegido $h = 0,2$ y la longitud del intervalo $L = 4$.

Ejemplo 4.3. Por último, consideramos el triángulo, 2.4, que resulta ser la convolución $f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) * \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$. Donde como en el trapecio resulta que nos proporcionan dos ejemplos. Uno donde la transformada es de banda limitada y otro donde no.

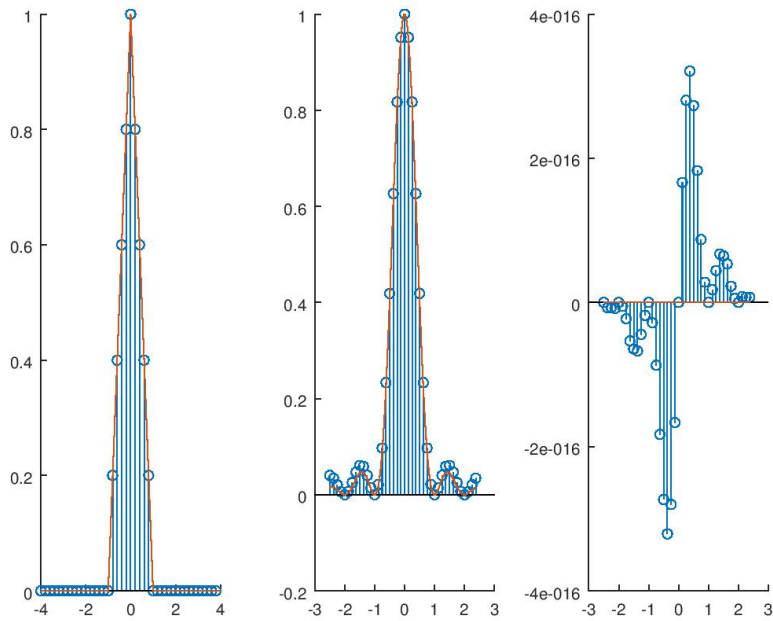


Figura 4.4: Salida del programa: La función $f(x) = \frac{\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)}{2\pi^2 x^2}$ y su transformada. Donde hemos elegido $h = 0,2$ y la longitud del intervalo $L = 4$.

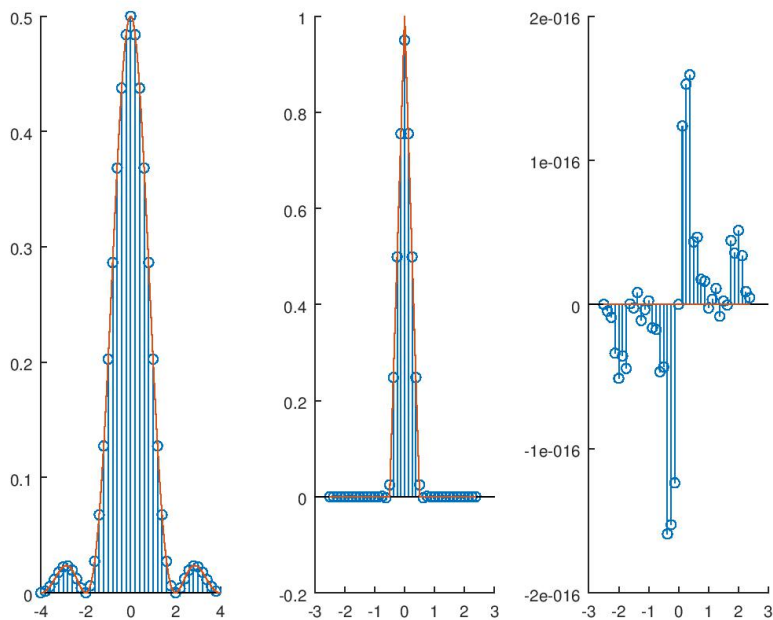


Figura 4.5: Salida del programa: La función $f(x) = \frac{1-\cos(\pi t)}{\pi^2 t^2}$. y su transformada. Donde hemos elegido $h = 0,2$ y la longitud del intervalo $L = 4$.

Ejemplo 4.4. *Vamos a analizar el sonido de una botella de 50 cl.*

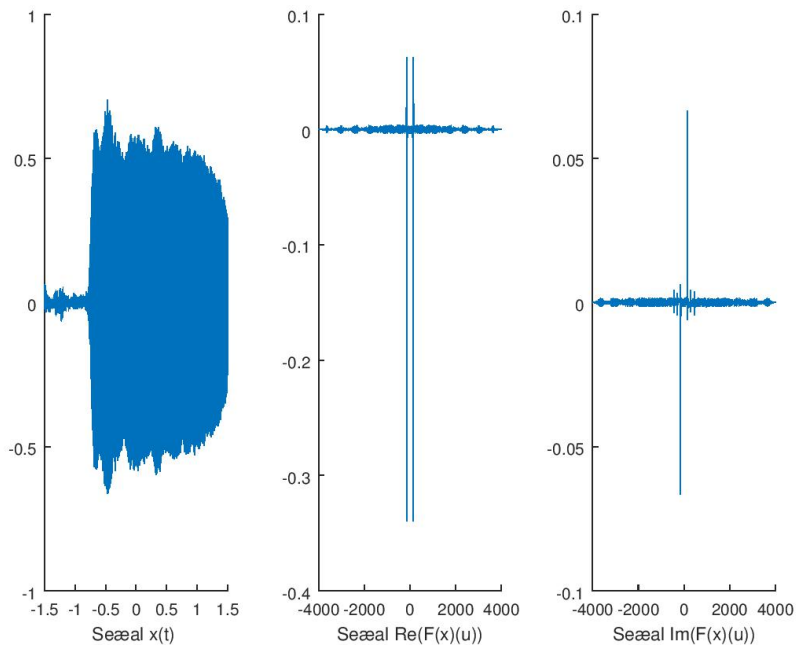


Figura 4.6: Salida del programa: El sonido que resulta al soplar la botella de 50 cl y su transformada. Donde hemos elegido $h = \frac{1}{8000}$ y una duración de tres segundos para la grabación del audio. La frecuencia fundamental de esta botella es 90 Hertz.

Ejemplo 4.5. *Vamos a analizar el sonido de una botella de 10 cl.*

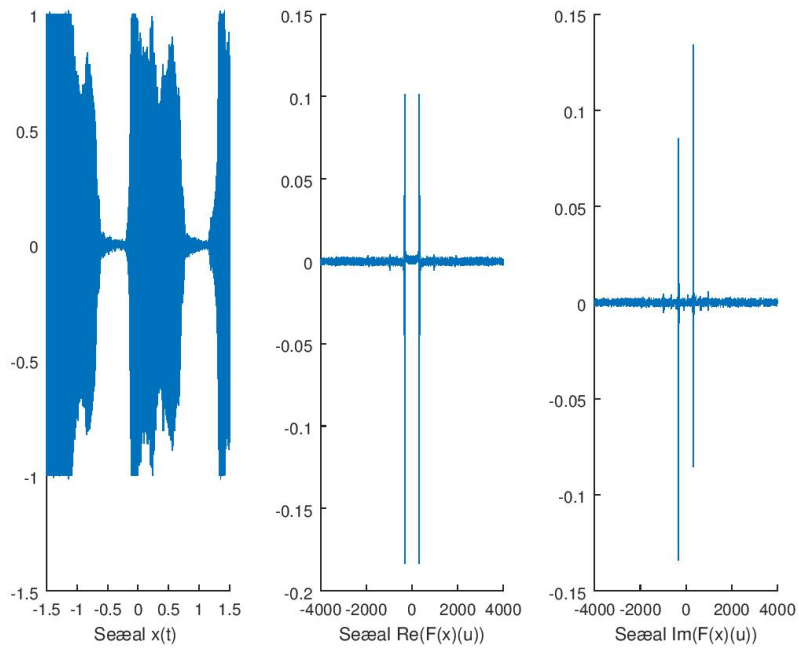


Figura 4.7: Salida del programa: El sonido que resulta al soplar la botella de 10 cl vacía y su transformada. Donde hemos elegido $h = \frac{1}{8000}$ y una duración de tres segundos para la grabación del audio. La frecuencia fundamental de esta botella es 350 Hertz.

Apéndice A

Apendice

Lema A.1. *El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.*

Demostración. Se puede consultar en [6, Cap8, Prop.8.17]. □

Teorema A.2 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables, la cual converge puntualmente a una función medible f . Si existe una función g integrable cumpliendo que para todo n se da la desigualdad $|f_n| \leq g$; entonces la función f es integrable con $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.*

Demostración. Se puede consultar en [6, Cap2, Prop.2.24] □

Teorema A.3. (Teorema de Fubini-Tonelli) *Si la siguiente integral*

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y) < \infty,$$

entonces

$$\int_B f(x, y) dy < \infty \text{ casi todo punto } x \in A$$

$$\int_A f(x, y) dx < \infty \text{ casi todo punto } x \in B$$

y además

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_{A \times B} f(x, y) d(x, y),$$

Demostración. Se puede consultar en [6, Cap2, Prop.2.37] □

Teorema A.4. (*Desigualdad de Minkowski para integrales*) Supongamos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible. Entonces:

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dx \right|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Demostración. Se puede consultar en [6, Cap6, Prop.6.5] □

Lema A.5. Si $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, entonces existe una subsucesión (n_k) tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ en casi todo punto.

Teorema A.6. (*Desigualdad de Hölder*) Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para toda función medible de valores reales o complejos f y g sobre S , se tiene que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Para $p = q = 2$ se reduce a la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Se puede consultar en [6, Cap6, Prop.6.2]

Teorema A.7. (*Derivación de integrales parametricas*)

Sea (X, μ) espacio medible y $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(\cdot, z) \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ para todo $z \in \Omega$. verificando:

1. Existe $D_t f(x, z)$ para todo $x \in X$ y $t \in \Omega$
2. Existe $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tal que $|D_z f(x, z)| \leq h(x)$ para todo x y z .

Definimos $F(z) := \int_X f(x, z) d\mu$. Entonces:

F es holomorfa en Ω y $F'(z) = \int_X D_z f(x, z) d\mu(x)$

Demostración. Se puede consultar en [6, Cap2, Lema 2.27]. □

Lema A.8. *Sea X un espacio de Banach, Y un subespacio vectorial denso y $T : Y \rightarrow X$ lineal y continua, entonces existe $T' : X \rightarrow X$ lineal y continua tal que $T'(x) = T(x) \forall x \in Y$*

Apéndice B

Apendice

B.1. Algoritmo para el cálculo aproximado de la transformada de Fourier a partir de muestras

```
function y=transformadaAprox(f,F,h,Longi)

%Le pasamos como parametros f,
%que es la señal analogica que suponemos conocido.
%F que es la transformada de Fourier de la
%señal f que suponemos conocido tambien.
%h que es el periodo de muestras
%Longi que es el intervalo simetrico de la muestra (-L,L)

close all;

funcion = str2func(f);
funcionF = str2func(F);
```

```

t=(-Longi):(0.01*h):Longi;
% Con esta variable nos referimos del tiempo,
% que es la ordinal de la señal
m= (-Longi):h:(Longi-h);
% Es para tomar muestras con periodo de muestreo h
n=1:1:length(m);
% n es el tamaño del array v.

f=funcion(t);
fm=funcion(m);

% Para dibujar la señal hacemos

figure;

subplot(1,3,1);
hold on;
stem(m, fm);
plot(t, x);
xlabel('Señales f(t) y f[n*T] ')
hold off

% Reordenamos el vector de muestras
% antes de aplicar la fft usando la teoría desarrollado en aplicacion
r=length(fm)
s=[fm((r/2+1):1:(r)), fm(1:1:(r/2))];

subplot(1,3,2);
fs=h*fft(s);

% Ahora se reordenan las frecuencias fs

rr=length(fs);

```

```

fs=[fs((rr/2+1):1:(rr)), fs(1:1:(rr/2))];

%Ahora se dibuja el resultado,
%Teniendo en cuenta tambien que hay que poner sus frecuencias en el sitio
%adecuado de acuerdo con lo que vimos de calcular su frecuencia fundamental

%El cálculo de las partes reales con la correspondiente gráfica

hold on
stem((-1/(2*h):(1/(length(s)*h)):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),real(fs));
plot((-1/(2*h):(0.01*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),
F((-1/(2*h):(0.01*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)))));
xlabel('Señales Re(F(x)(u)) y Re(fft(x[n])) ');

%El cálculo de las partes imaginarias con la correspondiente gráfica

subplot(1,3,3);

hold on
stem((-1/(2*h):(1/(length(s)*h)):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),imag(fs));
plot((-1/(2*h):(0.01*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),
imag(F((-1/(2*h):(0.01*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h))))));
xlabel('Señales Im(F(x)(u)) y Im(fft(x[n])) ');

```

B.2. Algoritmos de los ejemplos

B.2.1. Gauss

```

function y=gauss(t)

y=exp(-pi.*t.^2);

```

B.2.2. Trapecio

En primer lugar el algoritmo para hallar el trapecio:

```
function y=trapecio(t)

close all;

y= zeros(size(t));

for i = 1:length(t)

    if abs(t(i))>3

        y(i) = 0;

    elseif abs(t(i))<=2

        y(i)=1;

    elseif 2<abs(t(i))<3

        y(i)=-sign(t(i))*t(i)+3;

    end

end

end
```

Y su transformada de Fourier

```
function y=trapeciof(t)

y=zeros(size(t));
```

```

for i=1:length(t)
    if abs(t(i))<0.005
        y(i)=3;    //El límite cuando t tiende a 0
    else
        y(i)=(cos(2*pi.*t(i))-cos(4*pi.*t(i)))./(2*pi.^2.*t(i).^2);
    end
end
end

```

B.2.3. Triangulo

En primer lugar el algoritmo para hallar el triangulo:

```

function y=triangulof(t)

y=zeros(size(t));
for i=1:length(t)
    if abs(t(i))>1/2
        y(i)=0;
    else y(i)=1-2*sign(t(i))*t(i);
    end
end
end

```

Y su transformada:

```

function y=triangulof(t)

y=zeros(size(t));

for i=1:length(t)
    if abs(t(i))<0.005
        y(i)=1./2; //El limite cuando t tienda a 0
    else

        y(i)=(1-cos(pi.*t(i)))./(pi.^2*t(i).^2);
    end
end

```

end

B.2.4. Algoritmo para grabacion y recuperacion de una señal de la vida real

El algoritmo para grabar:

```
function [senal_salida,senal_grabada] = grabacion(duracion)

%Parametros de salida;
%Vamos a obtener un array de dos dimensiones
%de la siguiente forma

%senal_salida: objeto de audio

%senal_grabada: señal de audio

%Parametros de entrada;
%duracion: tiempo para grabar en segundos

%fs es la frecuencia del muestreo que serán
% 8000 Hertz.
fs=8000;
%Creacion del objeto de grabacion
senal_salida=audiorecorder(fs,16,1);

%Mensaje de informacion
msgbox('Empezando Grabacion',' Grabadora ');

pause;
%Grabacion del sonido

recordblocking(senal_salida,duracion);
%Mensaje de informacion
```



```
msgbox('Terminando Grabacion',' Grabadora ');

%Paso los valores del objeto a una señal

senal_grabada=getaudiodata(senal_salida, 'single');

%Grabamos y guardamos la señal

wavwrite(senal_grabada,fs,uiputfile({'*.wav'},'Guardar como'));

end
```

El algoritmo para la recuperacion de una señal de la vida real.

```
function y=calculoofrecanalog(fm,h)
%Le pasamos como parametros xm que son datos
%de la señal grabada.

%h es el periodo de muestreo.
%que le pasamos 1/8000 como parametro.
n=length(fm);

Longi=n*h/2;

m= (-Longi):h:(Longi-h);

length(m)
% Se toman muestras con periodo de muestreo h

n=1:1:length(m);
% n es la longitud del vector de muestras

% Ahora vamos a dibujar la función f(t)
```

```
% conjuntamente con las muestras tomadas xm

figure;

subplot(1,3,1);

hold on;

plot(m, fm);

xlabel('Señal f(t) ')

hold off

% Reordenamos el vector de muestras

% antes de aplicar la fft. Y luego se aplica y se escala

% (multiplicando por el periodo de muestreo h)

r=length(fm);

s=[fm((r/2+1):1:(r)), fm(1:1:(r/2))];
```

```
subplot(1,3,2);

fs=h*fft(s);

% Ahora se reordenan las frecuencias fs

rr=length(fs);

fs=[fs((rr/2+1):1:(rr)), fs(1:1:(rr/2))];

% Ahora se dibuja el resultado,

%(También es necesario colocar cada

% frecuencia hallada en su lugar correspondiente).

% PRIMERO LAS PARTES REALES

hold on

plot((-1/(2*h)):1/(length(s)*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),real(fs));

xlabel('Señal Re(F(x)(u))');

% AHORA LAS PARTES IMAGINARIAS
```

```
subplot(1,3,3);
```

```
hold on
```

```
plot((-1/(2*h)):1/(length(s)*h):(1/(2*h)-1/(length(s)*h)),imag(fs));
```

```
xlabel('Señal Im(F(x)(u))');
```

```
y=fs;
```

```
end
```

Bibliografía

- [1] ALMIRA, JOSÉ M. Y AGUILAR-DOMINGO, MOISÉS *Neuromatemáticas El lenguaje eléctrico del cerebro*, Colección: ¿Qué sabemos de?, 2016
- [2] ALMIRA, JOSÉ M. *Matemáticas para la recuperación de señales: una introducción*, Grupo Editorial Universitario, 2005
- [3] AMIDROR, ISAAC *Mastering the Discrete Fourier Transform in One, Two or Several Dimensions*, Springer, 2013
- [4] BUTZ, TILMAN *Fouriertransformation für Fußgänger*, Springer, 2012
- [5] CABUZO, ANTONIO R. *La transformada de Fourier discreta y formato JPEG (Trabajo Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2018)*
- [6] FOLLAND, GERALD B. *Real analysis : modern techniques and their applications*, segunda edición, New York : Wiley, 1999
- [7] MALLAT, STÉPHANE *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 2009
- [8] PERÉZ, SARA *La transformada de Fourier y aplicaciones a las EDPs. (Trabajo Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2016)*
- [9] STEIN, ELIAS M. Y SHAKARCHI RAMI *Fourier Analysis an introduction*, Princeton University Press, 2003