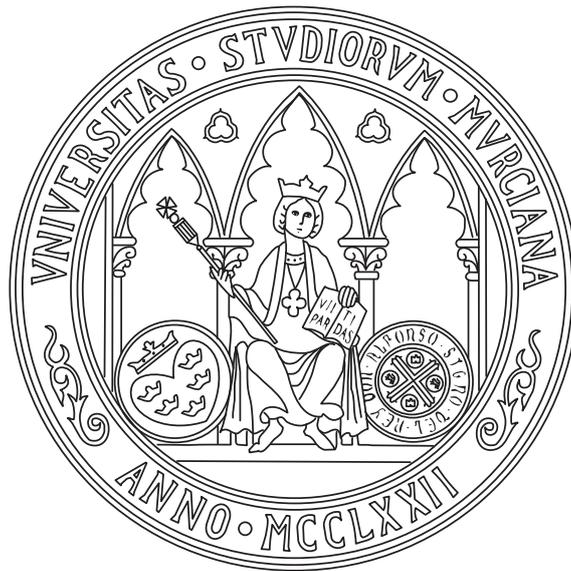


Transformadas de Fourier y de Radon, y aplicaciones



Eduardo Gambín Monserrat
Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia

Trabajo de Fin de Grado
Gustavo Adolfo Garrigós Anierte
Murcia, 2023

Declaración de originalidad

Yo, Eduardo Gambín Monserrat, estudiante de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia, declaro: que el presente trabajo de fin de grado titulado *Transformadas de Fourier y de Radón, y aplicaciones*, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Anior-te, declara que el contenido de este trabajo es original, en el sentido de que se ha citado debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe ningún derecho de propiedad intelectual de terceros.

En Murcia, a 18 de mayo de 2023.

Firma: Eduardo Gambín Monserrat

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

A mis padres, por hacerme estudiar.
A mis amigos, por impedírmelo.
A mi hermana, por prestarme su habitación.
Y a Gustavo, por todo lo que no puedo poner en pocas palabras.

Índice general

Abstract	IX
Resumen	XV
Notación y preliminares	XIX
1. La transformada de Fourier. Funciones de la clase de Schwartz	1
1.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$	4
1.2. Funciones que decrecen rápidamente	7
1.3. Funciones de clase Schwartz	11
1.3.1. Transformadas de funciones de Schwartz	12
1.4. Convoluciones	17
1.4.1. Aproximaciones de la identidad	20
1.5. Fórmula de inversión. Teorema de Plancherel	23
2. La transformada de Radón	27
2.1. Introducción física al problema	28
2.2. Transformada de Radón en tres dimensiones	29
2.3. Transformada dual de Radón	33
2.3.1. Inversión de la transformada de Radón	33
2.4. Generalización a dimensiones superiores	37
2.4.1. La clase \mathcal{A} de funciones suaves transformadas	38
2.4.2. El operador de Laplace fraccionario	40
A. Resultados previos	43
A.1. Integración Lebesgue	43
A.2. Espacios L^p	50
A.3. Funciones con soporte compacto	50
B. Gráficas interactivas	51
Bibliografía	54

Abstract

Given a complex function f defined over \mathbb{R}^d , is it possible to recover it from its integrals over all the hyperplanes in \mathbb{R}^d ? In other words, is it possible to recover f from its projections in all directions? This is the question that this essay tries to answer by means of the *Radon transform*, one of the main contributions of the Austrian mathematician Johann Radon to the field of mathematics¹. The answer is affirmative when f meets certain conditions of regularity and decay.

The Radon transform is an essential tool in medical imaging techniques, such as X-ray computed tomography, and in other fields such as seismic tomography. In the first one, it plays a fundamental role in reconstructing cross-sectional images of the human body. By measuring the X-ray attenuation from various angles around the patient, the Radon transform enables the construction of detailed three-dimensional representations, aiding in the diagnosis and treatment of various medical conditions.

Similarly, in seismic tomography, the Radon transform is employed to analyze seismic wave data, allowing scientists to map the subsurface structures of the Earth, such as oil and gas reservoirs or geological fault lines. The versatility and applicability of the Radon transform make it a powerful mathematical tool in diverse fields, contributing to advancements in both medical and geophysical imaging.

If the transform is computed in two dimensions, then it is called the *X-Ray transform* and the hyperplanes now become rays. Since functions take in two variables (x, y) , and lines in a plane can be described by two variables too (their rotation θ and distance to the origin r), it becomes reasonable that these lines should provide enough information to recover the function. In higher dimensions there is no need to use rays, for hyperplanes are enough (the problem is overdetermined otherwise due to the dimensional considerations described above).

¹Among his other work is the Radon-Nikodym theorem, which is a fundamental result in measure theory, the notion of Radon measure, the Radon-Hurwitz numbers, and the Radon-Riesz property, which is used in Banach space theory.

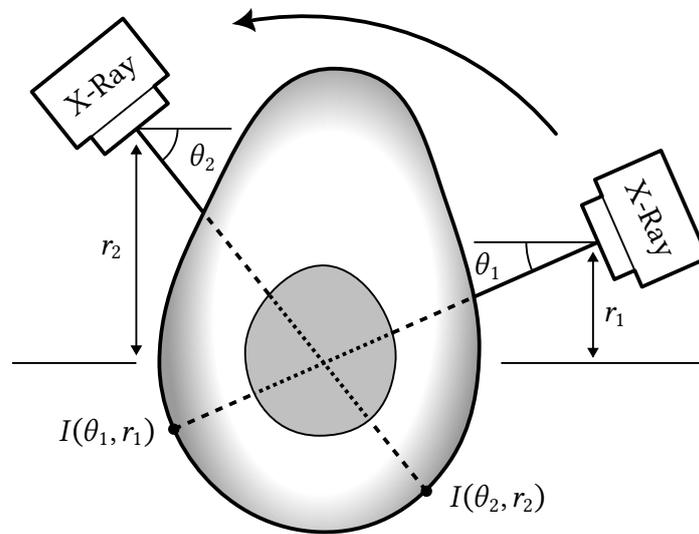


Figure 1: Scanning of an avocado. The X-Ray source rotates around casting rays to obtain more information about the interior. The kernel absorbs more radiation than the pulp, so more intensity is lost in the rays that cross it [9, p. 199]. Source: author.

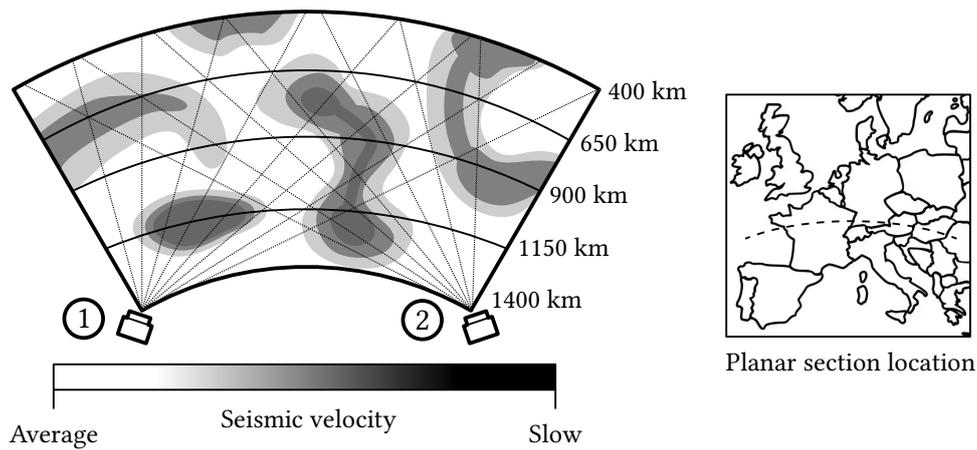


Figure 2: Seismic tomography. The seismic waves are generated by controlled explosions at points (1) and (2) and are recorded by sensors at surface level [6, p. 2]. The Radon transform is used to reconstruct the underground structure. Source: author.

The Radon transform makes use of the *Fourier transform* and some of its properties. This is an integral transform that decomposes a function into its constituent frequencies, and is defined for every Lebesgue integrable complex function f as

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

A visual intuition of the Fourier transform is provided in the introduction of Chapter 1. Some of its properties are also presented there, such as its linearity, its continuity, its decay, its boundedness, and how it is affected by translations and dilations. The first important result we want to prove is the *Fourier inversion formula*, which is one of the key results of the Fourier transform and states that

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi, \quad \text{for almost all } x \in \mathbb{R}^d.$$

Note that for this formula to be meaningful one needs for f and \hat{f} to be at least integrable functions. Indeed, in general, the Fourier transform of an integrable function is not necessarily an integrable function (see Example 1.4). For this reason, we shall prove the inversion formula for functions f in a suitable dense class: the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. This is the set of all infinitely differentiable functions such that all their derivatives decay faster than any polynomial. In other words, an infinitely differentiable function f is in the Schwartz space if and only if

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_\alpha, k}{(1 + |x|)^k}, \quad \text{for all } k \in \mathbb{N} \text{ and } \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

This condition is equivalent to stating that f and all its derivatives are of *rapid decay*, which means that they decay faster than any polynomial at infinity. The Schwartz space is a complex vector space, and we shall prove that the Fourier transform maps $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ to itself (see Corollary 1.21). This is a consequence of the fact that the Fourier transform interchanges differentiation and multiplication by polynomials, and that the Schwartz space is closed under both operations.

We then make a brief detour to study *approximations of the identity*, which are a family of functions that approximate the *Dirac delta* (see below Definition 1.27) when a parameter tends to zero (or infinity, depending on the definition). Using this notation we shall prove that a Schwartz function f can be obtained as the limit of a sequence of convolutions of f with identity approximations. In other words,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x), \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d$$

with uniform convergence in \mathbb{R}^d (see Proposition 1.29). This is a key result that will allow us to prove the inversion formula for the Fourier transform. The proof also uses the fact that the Fourier transform of a convolution $\mathcal{F}(f * g)$ is the product of the Fourier transforms $\hat{f} \cdot \hat{g}$, and the fact that the Gaussian function $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ satisfies

$\hat{\varphi} = \varphi$. Once we have the inversion formula, we can prove that the Fourier transform is an isometry in the Schwartz space, which means that

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

This last result is known as *Plancherel's Theorem*, and marks the end of Chapter 1.

In Chapter 2 we study the Radon transform and its inversion formula. We start briefly discussing the motivation behind its definition, which makes use of *plane integrals*. Recall that any (affine) hyperplane in \mathbb{R}^d can be expressed as

$$\pi_{\vec{n},r} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \vec{n} \cdot x = r \right\}, \quad \text{for some } \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ and } r \in \mathbb{R}.$$

This parametrization is unique except for the identity $\pi_{\vec{n},r} = \pi_{-\vec{n},-r}$, which is the same hyperplane but with opposite orientation. Here, \mathbb{S}^{d-1} denotes the unit sphere in \mathbb{R}^d . Now, given a function f in the Schwartz space, its integral over a hyperplane $\pi_{\vec{n},r}$ is defined as

$$\int_{\pi_{\vec{n},r}} f = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(r\vec{n} + u) du, \quad \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}, r \in \mathbb{R},$$

where $u = u_1\vec{e}_1 + \cdots + u_{d-1}\vec{e}_{d-1}$ and $\{\vec{n}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d-1}\}$ is an orthonormal basis of \mathbb{R}^d . The Radon transform of a Schwartz function f is then defined as the function $\mathcal{R}f$ that maps a hyperplane $\pi_{\vec{n},r}$ to the integral of f over that hyperplane. In other words,

$$\mathcal{R}f(\vec{n}, r) = \int_{\pi_{\vec{n},r}} f, \quad \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}, r \in \mathbb{R}.$$

We then proceed by restricting ourselves to the case $d = 3$. This decision is motivated by the reference book we are following, which only considers this case [9], once all of the results are presented we will see that they can be easily extended to any dimension. We next define the *dual Radon transform* of a function F in $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ as the function $\mathcal{R}^*F(x)$ that maps a point x to the integral of F over the set of planes that pass through x . In other words,

$$\mathcal{R}^*F(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(\vec{n}, \vec{n} \cdot x) d\sigma(\vec{n}), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^d,$$

where $d\sigma$ is the surface measure on \mathbb{S}^{d-1} . Next, we prove that if f is Schwartz function, then

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

where \hat{f} is the Fourier transform of f . Having proved first that this expression is an infinitely differentiable function, we shall finally establish that

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}f) = -8\pi^2 f, \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

where Δ is the Laplacian operator. This result is known as the *Radon inversion formula*, and it is the key result of this chapter.

Extending the results of this chapter to higher dimensions requires the use of a fractional power of the Laplacian operator. Given $a > 0$, this is defined as

$$(-\Delta)^a f = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{2a} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

for a function f for which the above integral makes sense (such as $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ but also a bit less than this; we will not go into details of this definition here). Using this operator, we can prove that

$$(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} (\mathcal{R}^* \mathcal{R} f) = \frac{(2\pi)^d}{\pi} f, \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

which is the generalization of the Radon inversion formula to any dimension. Notice that when $d=2$ this identity gives an inversion formula for the X-ray transform. This marks the end of Chapter 2.

Finally, two appendices are included at the end of this essay. In the first one, we cover preliminary results that are used throughout the essay. These include definitions and properties of the Lebesgue integral, L^p spaces, and compactly supported smooth functions. These are all taken from *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* [4].

In the second appendix, we provide code that implements an interactive visualization of the Fourier transform (see the introduction of Chapter 1 for more details). This code is written in Python using the `matplotlib` library, and it is highly inspired by *3blue1brown's* video *But what is the Fourier Transform? A visual introduction* [7]. We believe this is a good way to complement the theoretical results presented in this essay, and we hope that it will help the reader to better understand the Fourier transform.

Resumen

Dada una función compleja f definida sobre \mathbb{R}^d , ¿es posible recuperarla a partir de sus integrales sobre todos los hiperplanos en \mathbb{R}^d ? En otras palabras, ¿es posible recuperar f a partir de sus proyecciones en todas direcciones? Esta es la pregunta que este trabajo intenta responder mediante la *transformada de Radon*, una de las principales contribuciones del matemático austriaco Johann Radon al campo de las matemáticas². La respuesta es afirmativa cuando f cumple ciertas condiciones de regularidad y decaimiento.

La transformada de Radon es una herramienta esencial en técnicas de visualización de imágenes médicas, como las tomografías computarizada por rayos X, y en otros campos como la tomografía sísmica. En la primera, desempeña un papel fundamental en la reconstrucción de imágenes transversales del cuerpo humano. Al medir la atenuación de los rayos X desde varios ángulos alrededor del paciente, la transformada de Radon permite la construcción de representaciones tridimensionales detalladas, lo que ayuda en el diagnóstico y tratamiento de diversas condiciones médicas (ver Figura 1 en el Abstract).

Del mismo modo, en una tomografía sísmica se emplea la transformada de Radon para analizar datos de ondas sísmicas, lo que permite a los científicos ubicar las estructuras subsuperficiales de la Tierra, como reservas de petróleo y gas o fallas geológicas (ver Figura 2 en el Abstract). La versatilidad y aplicabilidad de la transformada de Radon la convierten en una poderosa herramienta matemática en diversos campos, contribuyendo a los avances tanto en imágenes médicas como en geofísica.

Si la transformada se calcula en dos dimensiones, entonces se denomina *transformada X-Ray* y los hiperplanos ahora se convierten en rayos. Dado que las funciones toman dos variables (x, y) , y las líneas en un plano también pueden ser descritas por dos variables (su rotación θ y la distancia al origen r), resulta razonable que estas líneas proporcionen suficiente información para recuperar la función. En dimensiones superiores no es necesario utilizar rayos, ya que los hiperplanos son suficientes (de lo contrario, el problema estaría sobredeterminado debido a las consideraciones dimensionales descritas anteriormente).

²Entre sus otros trabajos se encuentra el teorema de Radon-Nikodym, que es un resultado fundamental en la teoría de la medida, la noción de medida de Radon, los números de Radon-Hurwitz y la propiedad de Radon-Riesz, que se utiliza en la teoría de espacios de Banach.

La transformada de Radon hace uso de la *transformada de Fourier* y algunas de sus propiedades. Esta es una transformada integral que descompone una función en sus frecuencias constituyentes, y se define para toda función compleja integrable de Lebesgue f como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Una forma de entender visualmente de la transformada de Fourier se puede ver en la introducción del Capítulo 1. También mostramos algunas de sus propiedades, como su linealidad, continuidad, decaimiento, acotación y cómo se ve afectada por las traslaciones y dilataciones. El primer resultado importante que queremos demostrar es la *fórmula de inversión de Fourier*, que es uno de los resultados clave de la transformada y establece que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi, \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Nótese que para que esta fórmula tenga sentido, es necesario que tanto f como \hat{f} sean al menos funciones integrables. De hecho, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es una función integrable (ver Ejemplo 1.4). Por esta razón, demostraremos la fórmula de inversión para funciones f en una clase densa adecuada: la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Este es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables tales que todas sus derivadas decaen más rápido que cualquier polinomio. En otras palabras, una función $f \in C^\infty$ está en el espacio de Schwartz si y solo si

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_\alpha, k}{(1 + |x|)^k}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Esta condición es equivalente a afirmar que f y todas sus derivadas tienen un *decaimiento rápido*, lo que significa que decaen más rápido que cualquier polinomio en el infinito. El espacio de Schwartz es un espacio vectorial complejo, y demostraremos que la transformada de Fourier lleva $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo (ver Corolario 1.21). Esto es consecuencia del hecho de que la transformada de Fourier intercambia la diferenciación y la multiplicación por polinomios, y que el espacio de Schwartz es cerrado bajo ambas operaciones.

Después hacemos un breve desvío para estudiar las *aproximaciones de la identidad*, que son una familia de funciones que aproximan la *delta de Dirac* (ver Definición 1.27) cuando un parámetro tiende a cero (o al infinito, dependiendo de la definición). Utilizando esta notación, demostramos que una función de Schwartz f se puede obtener como límite de una sucesión de convoluciones de f con aproximaciones de la identidad. En otras palabras,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\varepsilon)(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d$$

con convergencia uniforme en \mathbb{R}^d (ver Proposición 1.29). Este es un resultado clave que nos permitirá demostrar la fórmula de inversión de la transformada de Fourier. La demostración también utiliza el hecho de que la transformada de Fourier de una convolución $\mathcal{F}(f * g)$ es el producto de las transformadas de Fourier $\hat{f} \cdot \hat{g}$, y el hecho de que la función gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ satisface $\hat{\varphi} = \varphi$. Una vez que tenemos la fórmula de inversión,

podemos demostrar que la transformada de Fourier es una isometría en el espacio de Schwartz, lo que significa que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Este último resultado se conoce como el *Teorema de Plancherel*, y marca el final del Capítulo 1.

En el Capítulo 2 estudiamos la transformada de Radon y su fórmula de inversión. Comenzamos discutiendo brevemente la motivación detrás de su definición, que hace uso de *integrales sobre planos*. Recordemos que cualquier hiperplano (afín) en \mathbb{R}^d puede ser expresado como

$$\pi_{\vec{n},r} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \vec{n} \cdot x = r \right\}, \quad \text{para algún } \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ y } r \in \mathbb{R}.$$

Esta parametrización es única, salvo por la identidad $\pi_{\vec{n},r} = \pi_{-\vec{n},-r}$, que es el mismo hiperplano pero con la orientación opuesta. Aquí, \mathbb{S}^{d-1} denota la esfera unitaria en \mathbb{R}^d . Ahora, dada una función f en el espacio de Schwartz, su integral sobre un hiperplano $\pi_{\vec{n},r}$ se define como

$$\int_{\pi_{\vec{n},r}} f = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(r\vec{n} + u) du, \quad \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}, r \in \mathbb{R},$$

donde $u = u_1\vec{e}_1 + \dots + u_{d-1}\vec{e}_{d-1}$ y $\vec{n}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d-1}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^d . La transformada de Radon de una función de Schwartz f se define entonces como la función $\mathcal{R}f$ que lleva a un hiperplano $\pi_{\vec{n},r}$ a la integral de f sobre ese hiperplano. En otras palabras,

$$\mathcal{R}f(\vec{n}, r) = \int_{\pi_{\vec{n},r}} f, \quad \vec{n} \in \mathbb{S}^2, r \in \mathbb{R}.$$

Luego procedemos restringiéndonos al caso $d = 3$. Esta decisión está motivada por el libro de referencia que estamos siguiendo, el cual solo considera este caso [9]. Una vez que se presenten todos los resultados, veremos que pueden ser fácilmente extendidos a cualquier dimensión. A continuación, definimos la *transformada de Radon dual* de una función F en $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ como la función $\mathcal{R}^*F(x)$ que asigna a un punto x la integral de F sobre el conjunto de planos que pasan a través de x . En otras palabras,

$$\mathcal{R}^*F(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(\vec{n}, \vec{n} \cdot x) d\sigma(\vec{n}), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^d,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área en \mathbb{S}^{d-1} . A continuación, demostramos que si f es una función de Schwartz, entonces

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier de f . Después de haber demostrado primero que esta expresión es una función infinitamente diferenciable, finalmente establecemos que

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}f) = -8\pi^2 f, \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

donde Δ es el operador Laplaciano. Este resultado se conoce como la fórmula de inversión de Radon y es el resultado clave de este capítulo.

La extensión de los resultados de este capítulo a dimensiones superiores requiere el uso de una potencia fraccionaria del operador Laplaciano. Dado $a > 0$, esto se define como

$$(-\Delta)^a f = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{2a} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

para una función f para la cual la integral anterior tiene sentido (por ejemplo, $f \in S(\mathbb{R}^d)$ y también un poco menos que esto; no entraremos en detalles de esta definición aquí). Utilizando este operador, podemos demostrar que

$$(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} (\mathcal{R}^* \mathcal{R} f) = \frac{(2\pi)^d}{\pi} f, \quad \text{para toda } f \in S(\mathbb{R}^d),$$

lo cual es la generalización de la fórmula de inversión de Radon a cualquier dimensión. Observa que cuando $d = 2$, esta identidad proporciona una fórmula de inversión para la transformada X-Ray. Esto marca el final del Capítulo 2.

Por último, al final de este trabajo se incluyen dos apéndices. En el primero, se presentan resultados preliminares que se utilizan a lo largo del trabajo. Estos incluyen definiciones y propiedades de la integral de Lebesgue, espacios L^p y funciones suaves de soporte compacto. Todos estos conceptos se toman del libro *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* [4].

En el segundo apéndice, se proporciona código que implementa una visualización interactiva de la transformada de Fourier (ver la introducción del Capítulo 1 para más detalles). Este código está escrito en Python utilizando la biblioteca `matplotlib` y está altamente inspirado en el video *But what is the Fourier Transform? A visual introduction* de *3blue1brown* [7]. Consideramos que esta es una buena manera de complementar los resultados teóricos presentados en este trabajo, y esperamos que ayude al lector a comprender mejor la transformada de Fourier.

Notación y preliminares

Reservamos el uso de la letra d para referirnos a la dimensión del espacio en el que estamos trabajando ($d \geq 1$ por lo tanto), que en general será \mathbb{R}^d (donde \mathbb{R} denota, como siempre, el cuerpo de los números reales). También trabajaremos a menudo con el cuerpo de los números complejos, que denotaremos por \mathbb{C} , y el conjunto de los números naturales **incluyendo al cero**, que denotaremos por \mathbb{N} . En ocasiones, utilizaremos también la esfera unitaria d -dimensional \mathbb{S}^{d-1} , cuyos elementos \vec{n} denotaremos con una flecha encima para enfatizar que son vectores unitarios.

Cuando tomemos un punto $x \in \mathbb{R}^d$ (o cualquier espacio vectorial), denotaremos sus coordenadas del modo habitual $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. También será habitual que empleemos la notación *multi-índice* cuando trabajemos con derivadas parciales o “potencias de vectores” (ver (1) debajo). Un **multi-índice** siempre será un vector en \mathbb{N}^d , y vendrá representado por las letras griegas α y β . Asimismo, para $x \in \mathbb{R}^d$ escribimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}, \quad \partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}. \quad (1)$$

(a $|\alpha|$ lo llamaremos el **orden** del multi-índice).

A lo largo de este trabajo se utilizarán varios espacios de funciones, que en general estarán definidos sobre \mathbb{R}^d . En particular, trabajaremos con el espacio de las funciones integrables $L^1(\mathbb{R}^d)$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, el de las infinitamente derivables con soporte compacto $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, y el de las infinitamente diferenciables que tienden a cero en el infinito $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Todos ellos se detallan en el apéndice de este trabajo.

A menudo omitiremos mencionar el espacio vectorial subyacente si este está claro por economía del lenguaje (es decir, escribiremos L^1 en vez de $L^1(\mathbb{R}^d)$, C^∞ en vez de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, etc.). Cuando la dimensión sobre la que trabajemos sea relevante, sin embargo, siempre se especificará. Denotaremos también por $\mathcal{O}(d)$ al grupo de las rotaciones en \mathbb{R}^d .

La transformada de Fourier. Funciones de la clase de Schwartz

En el cuerpo de los números complejos, la exponencial $e^{-2\pi i\theta}$ describe una rotación de θ radianes en el sentido de las agujas del reloj en el plano complejo. Esta función es periódica, con periodo 1. Si la multiplicamos por una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, el resultado que obtenemos es la curva parametrizada

$$\left\{ f(\theta) e^{-2\pi i\theta} \mid \theta \in [a, b] \right\},$$

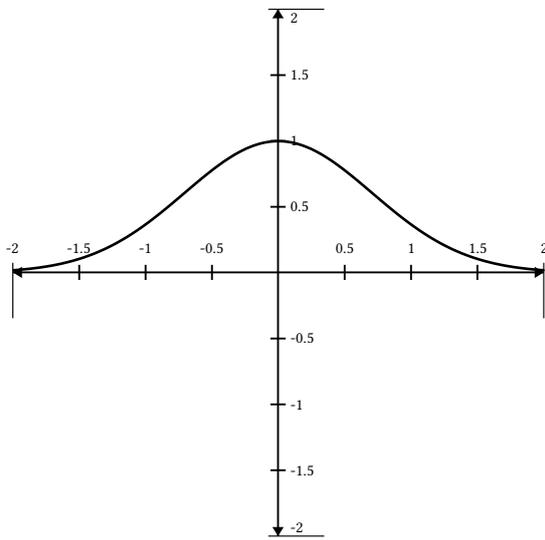
que puede interpretarse como la función f pero “enrollada” alrededor del círculo unidad complejo. Podemos definir el “centro de masa” de esta curva como el “punto medio” de la misma en el intervalo, es decir,

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\theta) e^{-2\pi i\theta} d\theta.$$

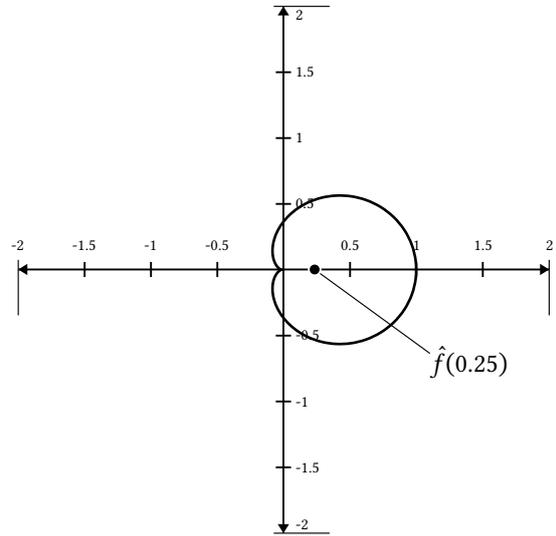
Si en lugar de tomar la exponencial con giro natural la tomamos multiplicada por cierto factor λ , entonces la curva que obtenemos gira λ veces más rápido (ver Figuras 1 y 2 en la página siguiente y en la página 3). Ahora, el centro de masas de la función es otra función $\bar{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\theta) e^{-2\pi i\lambda\theta} d\theta.$$

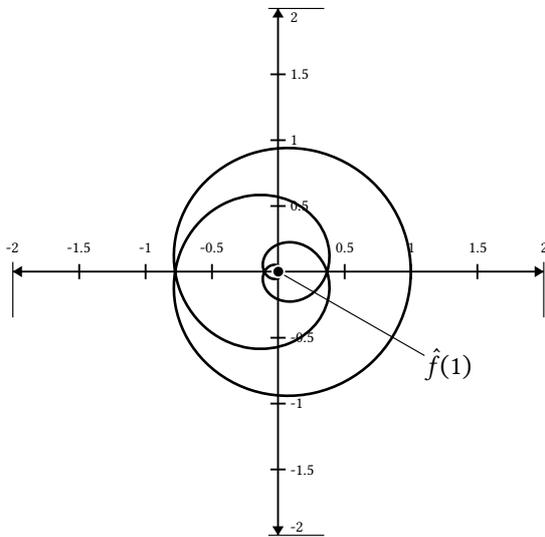
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene soporte en un intervalo $[a, b]$, entonces su transformada de Fourier es precisamente la función $(b-a)\bar{g}$. Para f sin soporte de este tipo, si se le exige las condiciones adecuadas, podemos garantizar que su transformada de Fourier exista con valor finito, y sea un punto del plano complejo.



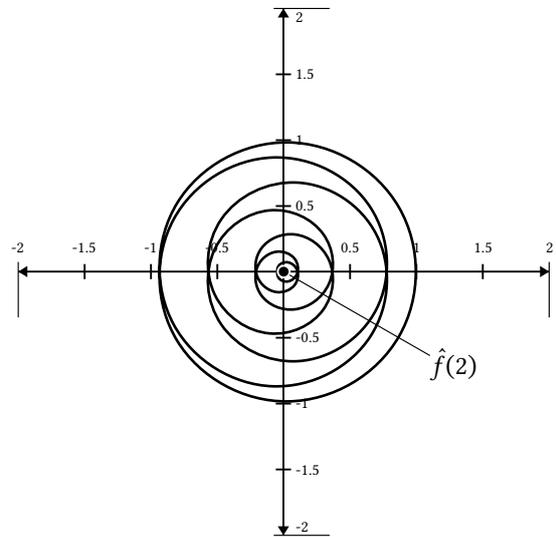
(a) Gráfica de la función Gaussiana $f(\theta) = e^{-\theta^2}$.



(b) Gráfica de la curva $\{f(\theta) e^{-2\lambda\pi i\theta} \mid -2 \leq \theta \leq 2\}$ con $\lambda = 1/4$.

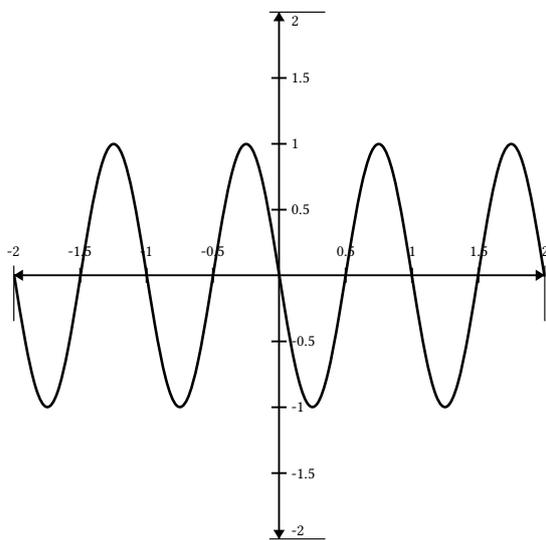


(c) Curva con $\lambda = 1$.

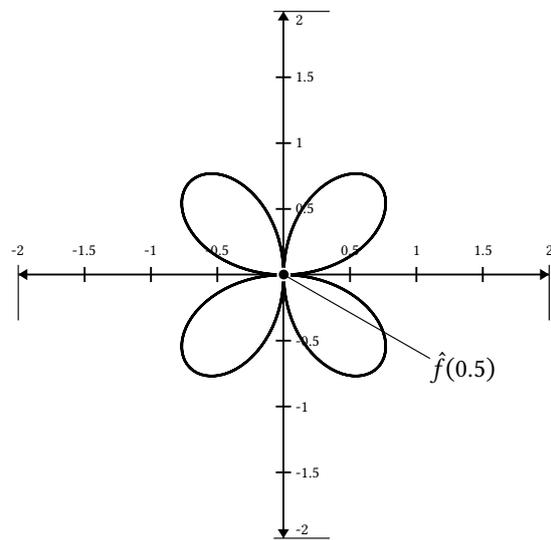


(d) Curva con $\lambda = 2$.

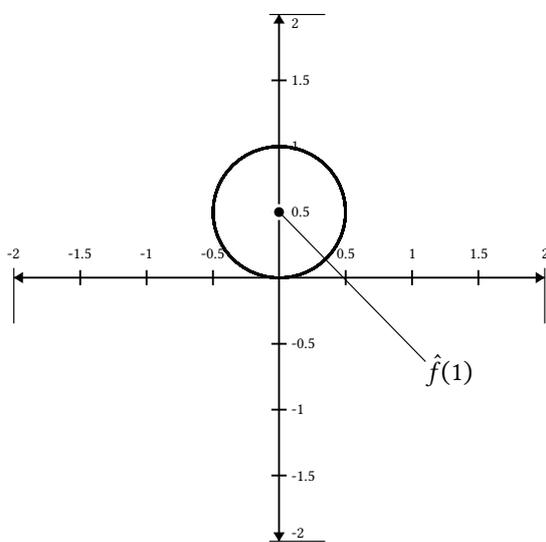
Figura 1: “Enrollado” de la función Gaussiana $f(\theta) = e^{-\theta^2}$ alrededor del círculo unidad complejo a distintas velocidades.



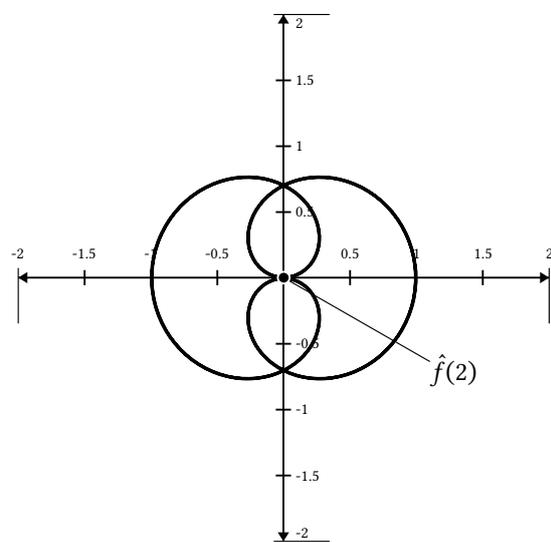
(a) Gráfica del seno natural negado $f(\theta) = \sin(-2\pi\theta)$.



(b) Gráfica de la curva $\{f(\theta) e^{-2\lambda\pi i\theta} \mid -2 \leq \theta \leq 2\}$ con $\lambda = 1/2$.



(c) Curva con $\lambda = 1$.



(d) Curva con $\lambda = 2$.

Figura 2: “Enrollado” del seno alrededor del círculo unidad complejo a distintas velocidades.

Esta forma de visualizar las transformadas de Fourier está tomada del excelente vídeo *But what is the Fourier Transform? A visual introduction* del canal *3Blue1Brown* [7]. Cualquier lector interesado en la explicación visual que acabamos de dar puede encontrar una más detallada en el vídeo, en el que se utilizan animaciones para ver cómo varía la transformada en tiempo real cuando se modifica el λ . En el Apéndice B hemos añadido una implementación de esta visualización en Python para todo aquel interesado en experimentar con ella.

Finalizada esta introducción visual, pasamos a la definición formal de la transformada de Fourier y sus propiedades.

1.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

En adelante, trabajaremos siempre con funciones complejas que toman valores en \mathbb{R}^d . Por ello, omitiremos escribir el espacio cuando esté claro y no infunda a confusión. Así, escribiremos L^1 en lugar de $L^1(\mathbb{R}^d)$, C^∞ en lugar de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, etc.

Definición 1.1. Dada una función $f \in L^1$, su **transformada de Fourier** es la función compleja

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Cuando la expresión de la función que estamos “transformando” es demasiado larga, utilizaremos la notación \mathcal{F} (o $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}$ si la dimensión es relevante) para referirnos a la transformada de la expresión que precede al símbolo. Es decir, $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Nótese que como f es integrable, la integral que define a \hat{f} está bien definida.

Otra forma de entender la transformada de Fourier (aparte de como la hemos visto en la introducción) es verla como una versión continua de los coeficientes de Fourier [9, p. 129]. En efecto, dada una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, su n -ésimo *coeficiente de Fourier* venía dado por la expresión

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad (1.1)$$

y en el sentido apropiado se verificaba que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}. \quad (1.2)$$

La fórmula (1.1) es casi idéntica a la definición de transformada de Fourier, salvo que en el caso de la segunda estamos tratando con valores reales (ξ) y no con enteros (n) (y el recinto de integración no está acotado). Veremos también que la fórmula (1.2) también se verifica para la transformada pero cambiando el sumatorio que aparece en ella por una integral sobre todo el espacio. Este último resultado se conoce como *fórmula de inversión*, y es uno de los resultados centrales de este capítulo.

Veamos algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier.

Proposición 1.2. Si $f \in L^1$, entonces \hat{f} es \mathbb{C} -lineal, uniformemente continua, se desvanece en el infinito, y verifica que $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. El hecho de que \hat{f} sea lineal se deduce directamente de la definición. También es fácil ver que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

Para probar la continuidad uniforme basta con probar que la función es continua y se desvanece en el infinito, pues para cada $\varepsilon > 0$ existe cierto $R_\varepsilon > 0$ tal que si $x \notin \overline{B(0, R_\varepsilon)}$, entonces $|\hat{f}(x)| < \varepsilon$. Al ser $\overline{B(0, R_\varepsilon)}$ un compacto, la función es uniformemente continua en el conjunto, y dado que fuera de ella su valor es tan pequeño como queramos, la función es uniformemente continua en todo \mathbb{R}^d .

Probemos entonces que es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ cualquiera. Tenemos que

$$\left| \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (e^{-2\pi i x \cdot \xi} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \cdot |e^{-2\pi i x \cdot \xi} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}| dx.$$

Sea $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a ξ_0 . Consideramos la sucesión con término general

$$g_n(x) = f(x) \cdot |e^{-2\pi i x \cdot \xi_n} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}|,$$

cuyo límite puntual es la función nula. Dado que

$$|e^{-2\pi i x \cdot \xi_n} - e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}| \leq |e^{-2\pi i x \cdot \xi_n}| + |e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}| = 2,$$

la sucesión está acotada por $2|f(x)|$, que es integrable por serlo f . El Teorema de la Convergencia Dominada nos dice entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g_n(x)| dx = 0,$$

por lo que \hat{f} es continua. La demostración de que \hat{f} se desvanece en el infinito es un resultado conocido como *Lema de Riemann-Lebesgue*, y se puede encontrar en [4, p. 248]. \square

Proposición 1.3. Si $f \in L^1$, entonces:

- a) $\mathcal{F}(f(x-h))(\xi) = e^{-2\pi i h \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$, con $h \in \mathbb{R}^d$;
- b) $\mathcal{F}(f(x) e^{2\pi i x \cdot h})(\xi) = \hat{f}(\xi - h)$, con $h \in \mathbb{R}^d$;
- c) $\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$;
- d) $\mathcal{F}((f \circ R)(x))(\xi) = \hat{f}(R\xi)$, con $R \in \mathcal{O}(d)$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son directas. Si $h \in \mathbb{R}^d$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i \xi \cdot (u+h)} du = e^{-2\pi i \xi \cdot h} \hat{f}(\xi),$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x \cdot h} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (\xi-h)} dx = \hat{f}(\xi-h).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\det \lambda^{-1} I_d| f(u) e^{-2\pi i \lambda^{-1} u \cdot \xi} dx = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1} \xi).$$

Para la última, debemos recordar que al ser R una rotación se tiene que $\det R \in \{-1, 1\}$ y que $R^{-1} = R^t$. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Rx) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\det R| f(u) e^{-2\pi i R^{-1} u \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-2\pi i u \cdot R\xi} dx = \hat{f}(R\xi).$$

□

Veamos ahora un ejemplo de cálculo de transformada con una función sencilla.

Ejemplo 1.4. La *función rectangular* se define como

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1/2, \\ 1 & \text{si } |x| < 1/2. \end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier, utilizamos la definición:

$$\mathcal{F}(\text{rect}(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \text{rect}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-\pi i \xi} - e^{\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

La función resultante se denomina *seno cardinal* o $\text{sinc}(x)$, y no es integrable en \mathbb{R} (ver Lema A.6). Las gráficas de ambas funciones pueden verse en la página siguiente.

El ejemplo anterior es muestra de por qué no resulta sencillo trabajar con el espacio L^1 directamente. En efecto, la transformada de Fourier de una función integrable no tiene por qué ser integrable, y por tanto no pertenecería a L^1 . Un enfoque habitual entonces es restringirse a un espacio de funciones de la forma

$$L^1_{\mathcal{F}} = \left\{ f \in L^1 \mid \hat{f} \in L^1 \right\},$$

donde los teoremas importantes sí son válidos [4, p. 251]. Nosotros vamos a utilizar un camino distinto, basado en el espacio de Schwartz, que es un subespacio de L^1 contenido en $L^1_{\mathcal{F}}$ y que tiene la ventaja de ser invariante por transformada de Fourier. Para poder definirlo, primero debemos conocer el concepto de *función que decrece rápidamente*, que es el que vamos a tratar a continuación.

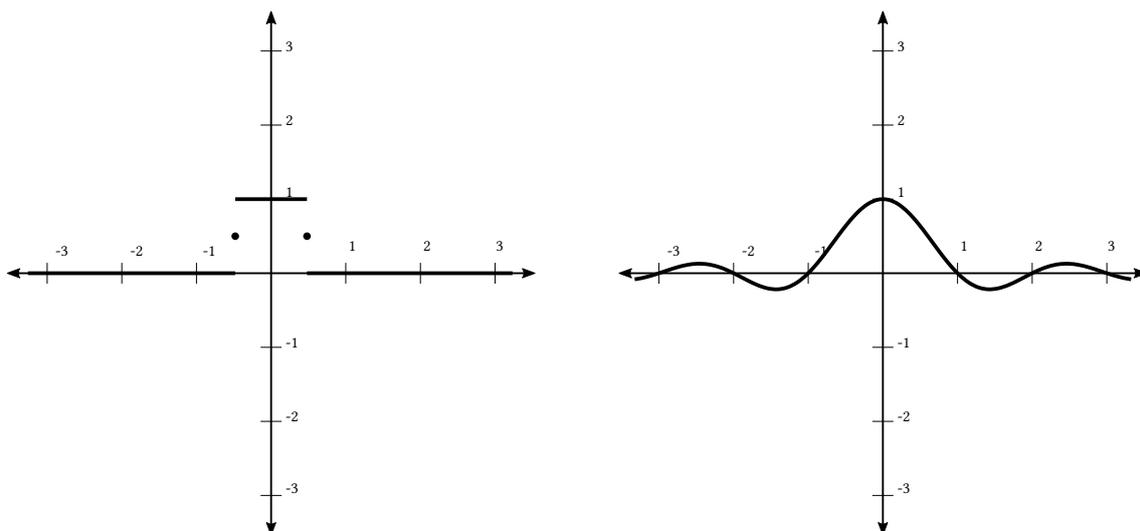


Figura 3: Gráficas de la función $\text{rect}(x)$ y de su transformada de Fourier $\text{sinc}(x)$, respectivamente. La primera tiene soporte compacto, pero la segunda oscila infinitamente (y no lo suficientemente rápido como para ser integrable).

1.2. Funciones que decrecen rápidamente

Hay varias formas de definir este tipo de funciones [4, pp. 236-237][9, pp. 180-181], pues lo que realmente las caracteriza es que convergen más rápido que el inverso de cualquier polinomio. Esto tiene varias formas de ser expresado, pero hay tres que se utilizan más que el resto. Vamos a demostrar que todas ellas son equivalentes.

Proposición 1.5. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes:

1. Para cada multi-índice α , el supremo de $|x^\alpha f(x)|$ en \mathbb{R}^d está acotado.
2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el supremo de $|x|^k |f(x)|$ en \mathbb{R}^d está acotado.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el supremo de $(1 + |x|)^k |f(x)|$ está acotado.

Demostración. Probemos cada implicación:

(1 \Rightarrow 2) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^d$ cualquiera. Para cada $j = 1, \dots, d$ tomamos $\alpha_j = k \cdot \vec{e}_j$. Por hipótesis, existe cierta constante $C_{\alpha_j} > 0$ tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^{\alpha_j} f(x)| \leq C_{\alpha_j}$. Tomamos ahora $C_\alpha = \max_{j=1, \dots, d} \{C_{\alpha_j}\}$. Si x_M^2 es entonces el máximo de los x_j^2 con $j = 1, \dots, d$, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} |x|^k |f(x)| &= (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{k}{2}} |f(x)| \\ &\leq d^{k/2} |x_M|^k |f(x)| \\ &= d^{k/2} |x^{\alpha_M}| \cdot |f(x)| \\ &= d^{k/2} |x^{\alpha_M} f(x)| \\ &\leq d^{k/2} C_{\alpha_M} \\ &\leq d^{k/2} C_\alpha. \end{aligned}$$

Nótese que hemos utilizado que

$$|x_M|^k = |x_M^k| = |x_1^0 \dots x_{M-1}^0 \cdot x_M^k \cdot x_{M+1}^0 \dots x_d^0| = |x^{\alpha_M}|.$$

(2 \Rightarrow 3) Sea $x \in \mathbb{R}^d$ cualquiera y $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, para cada $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ existe $C_j > 0$ tal que

$$C_j = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^j |f(x)|.$$

Un cálculo directo nos dice que

$$(1 + |x|)^k |f(x)| = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |x|^j |f(x)| \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} C_j.$$

(3 \Rightarrow 1) Sea $x \in \mathbb{R}^d$ cualquiera y α un multi-índice. Por hipótesis existe cierta $C_{|\alpha|} > 0$ tal que

$$C_{|\alpha|} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{|\alpha|} |f(x)|.$$

Tenemos entonces que

$$|x^\alpha| = |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_d|^{\alpha_d} \leq |x|^{\alpha_1} \dots |x|^{\alpha_d} = |x|^{|\alpha|} \leq (1 + |x|)^{|\alpha|}$$

luego multiplicando por $|f(x)|$ llegamos a que

$$|x^\alpha f(x)| = |x^\alpha| \cdot |f(x)| \leq (1 + |x|)^{|\alpha|} |f(x)| \leq C_{|\alpha|} < \infty.$$

□

Definición 1.6. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continua se dice que **decrece rápidamente** si verifica cualquiera de las condiciones de la proposición anterior.

A este tipo de funciones también se las conoce como funciones *con decrecimiento rápido*, o funciones *con decaimiento acelerado*, u otros sinónimos. De su definición se deduce lo siguiente inmediatamente.

Corolario 1.7. *Toda función continua con soporte compacto decrece rápidamente.*

Demostración. Sea f continua con soporte compacto. Para cada $k \in \mathbb{N}$, vemos directamente que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^k |f(x)| = \sup_{x \in \text{sop } f} (1 + |x|)^k |f(x)|$$

y como este soporte es un compacto y f es continua, el supremo está acotado. \square

Como ya adelantábamos antes, su principal característica es su velocidad al converger a cero en el infinito. El siguiente resultado lo establece finalmente.

Corolario 1.8. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ con decrecimiento rápido y P un polinomio en d variables. Existe cierto $R > 0$ tal que si $|x| > R$, entonces $|f(x)| < 1/|P(x)|$.*

Demostración. Basta con observar que $|P(x)| \leq C \cdot (1 + |x|)^k$ para cierta $C > 0$ con $k = \text{grad}(P)$ y aplicar el apartado (3) de la Proposición 1.5. \square

Proposición 1.9. *El conjunto de funciones con decrecimiento acelerado es un espacio vectorial cerrado para el producto puntual.*

Demostración. Sean f y g funciones con decrecimiento rápido y $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |af(x) + bg(x)| \leq |a| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| + |b| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |g(x)|$$

y esto último está acotado decrecer rápido ambas funciones. Para ver que es cerrado para el producto, vemos directamente que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^0 |g(x)| < \infty$$

(nótese que la separación de supremos podemos hacerla porque ambos supremos sabemos que existen por ser funciones que decrecen rápido). \square

Nótese que las condiciones anteriores nos dicen que el espacio de estas funciones es un *álgebra* con el producto natural de números complejos. Veamos, por último, que este tipo de funciones son integrables.

Corolario 1.10. Las funciones con decrecimiento acelerado son integrables.

Demostración. Basta con considerar

$$C_{d+1} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{d+1} |f(x)|$$

para ver que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{C_{d+1}}{(1 + |x|)^{d+1}} \, dx$$

y dado que la última integral es convergente (ver Lema A.9), la primera también lo es. \square

Si denotamos por C_A al conjunto de todas las funciones continuas con decrecimiento acelerado, ¿se verifica que $\mathcal{F}(C_A) = C_A$? La respuesta es que no, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11. La función triangular $\text{tri} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

es continua con soporte claramente compacto, pero su transformada de Fourier es la función $\text{sinc}^2(\xi)$ que claramente no tiene decrecimiento acelerado, aunque sí es integrable (de hecho, $\|\text{sinc}^2\|_{L^1} = 1$).

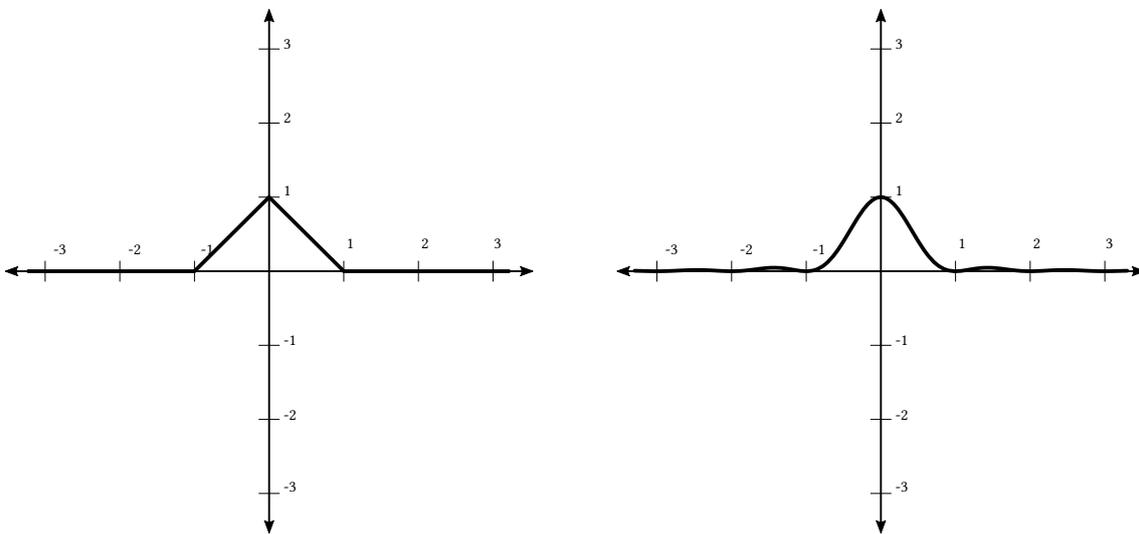


Figura 4: Gráficas de la función $\text{tri}(x)$ y de su transformada de Fourier $\text{sinc}^2(x)$, respectivamente. La primera es de clase C_0 y la segunda L^1 . A diferencia de su versión no cuadrada, la oscilación converge lo suficientemente rápido como para que la integral sea finita.

Como vemos, estamos dando pasos en la buena dirección, pero aún no hemos conseguido nuestro objetivo. Para poder garantizar que \mathcal{F} sea cerrada debemos también exigirles a las funciones que sean extremadamente suaves, pues la transformada de Fourier es muy sensible a ello. Para ello, introducimos el concepto de *clase de Schwartz*.

1.3. Funciones de clase Schwartz

Definición 1.12. Las funciones $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞ con decrecimiento rápido cuyas derivadas parciales también tienen decrecimiento rápido se dicen de **clase Schwartz**. El conjunto de este tipo de funciones se denota por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Como venimos haciendo hasta ahora, cuando la dimensión esté clara, utilizaremos simplemente la notación \mathcal{S} . Veamos algunas propiedades de este tipo de funciones. La primera se deduce de forma casi natural de un resultado que ya hemos visto anteriormente.

Corolario 1.13. *La clase de Schwartz es un espacio vectorial cerrado para el producto puntual.*

Demostración. Solo tenemos que ver cómo se comportan las derivadas, pues ya sabemos que las funciones con decrecimiento rápido forman un espacio vectorial cerrado para el producto (ver Proposición 1.9). Como para todo multi-índice β se cumple de forma clara que

$$\partial_x^\beta (f + g) = \partial_x^\beta f + \partial_x^\beta g$$

y estas últimas son de decrecimiento rápido, está claro que \mathcal{S} es un espacio vectorial. Falta entonces ver que es cerrado para el producto, cosa que vemos por inducción sobre el orden de la derivada. Para $|\beta| = 1$, debe existir cierto $1 \leq r \leq d$ tal que $\beta = \vec{e}_r$. Entonces

$$\partial_x^\beta (fg) = \frac{\partial}{\partial x_r} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x_r} g + f \frac{\partial g}{\partial x_r}$$

y como cada producto es una función de decrecimiento rápido, la suma también lo es (ver Proposición 1.9). Si ahora suponemos que se verifica hasta orden n y tomamos $\beta = \beta_0 + \vec{e}_r$ (de nuevo con $1 \leq r \leq d$) tal que $|\beta| = n + 1$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_x^\beta (fg) &= \partial_x^{\beta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} (fg) \right) \\ &= \partial_x^{\beta_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} g + f \frac{\partial g}{\partial x_r} \right) \\ &= \partial_x^{\beta_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_r} g \right) + \partial_x^{\beta_0} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_r} \right) \end{aligned}$$

y aplicando hipótesis de inducción, tenemos una suma de funciones que decrecen rápido, luego la suma decrece rápido también y hemos terminado. \square

Corolario 1.14. *Las derivadas de cualquier orden de una función de Schwartz también son funciones de Schwartz.*

Demostración. Inmediato, pues cualquier derivada de f es de decrecimiento acelerado, y en particular lo son las derivadas de sus derivadas. \square

El recíproco no es cierto en general, es decir, si existe una función f tal que todas sus parciales sean de clase Schwartz, no necesariamente f es de clase Schwartz. Por ejemplo, cualquier función constante no nula verifica exactamente esto: sus parciales son todas nulas y por tanto de clase Schwartz, pero la propia f no es ni siquiera integrable (y por tanto tampoco tiene decrecimiento rápido).

Corolario 1.15. *La clase de Schwartz es cerrada bajo producto por polinomios.*

Demostración. Dado que S es un espacio vectorial (Corolario 1.13), basta con que probemos este resultado para polinomios de la forma x^α , con $x \in \mathbb{R}^d$ y α multi-índice, pues al final estos son los términos de los polinomios en d variables (multiplicados quizá por alguna constante).

Está claro que $x^\alpha f$ tiene decrecimiento acelerado si f lo tiene (Proposición 1.5), así que tenemos que ver lo que le ocurre a sus derivadas. Lo vemos por inducción sobre el orden de la derivada.

Sea $\beta = \vec{e}_r$ para algún $1 \leq r \leq d$ (es decir, que $|\beta| = 1$). Si $\alpha_r = 0$ entonces no hay nada que probar, así que asumimos $\alpha_r \geq 1$. Entonces

$$\partial_x^\beta (x^\alpha f) = \frac{\partial}{\partial x_r} (x^\alpha f) = \alpha_r x_r^{\alpha_r - 1} \prod_{j \neq r} x_j^{\alpha_j} f + x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_r} = \alpha_r x^{\alpha - \vec{e}_r} f + x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_r},$$

y esta es claramente una suma de funciones que decrecen rápido.

Si lo suponemos cierto para orden n y tomamos β de orden $n + 1$, entonces existe β_0 tal que $\beta = \beta_0 + \vec{e}_r$ (para cierto $1 \leq r \leq d$). Basta entonces aplicar el caso base una vez y luego utilizar la hipótesis de inducción para ver que se verifica la propiedad.

En conclusión, el producto $x^\alpha f$ es una función Schwartz para todo multi-índice α . \square

Proposición 1.16. *Las funciones de Schwartz son uniformemente continuas.*

Demostración. Es consecuencia directa del hecho de que son funciones continuas que tienden a cero en el infinito. \square

1.3.1. Transformadas de funciones de Schwartz

Una vez vistas algunas propiedades, podemos regresar al tema central del capítulo. Toda función de Schwartz, por definición, tiene descenso acelerado, y dado que estas funciones ya hemos visto que son integrables (Corolario 1.10), toda función de Schwartz es integrable.

También vimos que toda función C^∞ con soporte compacto tiene descenso acelerado (Corolario 1.7), así que toda función con soporte compacto es de Schwartz.

Resumimos ambos hechos en el siguiente resultado.

Corolario 1.17. *Toda función C_c^∞ es de Schwartz. Toda función de Schwartz es L^1 . Las inclusiones son estrictas.*

Demostración. Ya hemos visto los contenidos de este resultado. Para ver que las inclusiones son estrictas basta considerar las funciones $e^{-|x|^2}$ y la función $\text{rect}(x)$ vista anteriormente en el capítulo (ver Ejemplo 1.4 en la página 6). La primera está en \mathcal{S} pero no en C_c ya que su soporte claramente no es compacto por ser una función estrictamente positiva, y la segunda está en L^1 pero no en \mathcal{S} , pues no es siquiera continua. \square

Corolario 1.18. *La clase de Schwartz es un conjunto denso en L^1 .*

Demostración. Como C_c^∞ es denso en L^1 (ver Lema A.13) y \mathcal{S} está entre ambos espacios, se deduce que \mathcal{S} también es denso en L^1 . \square

Este último resultado nos garantiza que los resultados que obtenemos no son triviales y pueden ser aplicados a las funciones L^1 si aproximamos estas mediante funciones de Schwartz.

Las propiedades que vimos al comienzo del capítulo para la transformada de funciones L^1 (Proposiciones 1.2 y 1.3) también se aplican a las funciones de Schwartz por lo que acabamos de ver. A esas propiedades añadimos algunas nuevas relacionadas con la diferenciabilidad.

Proposición 1.19. *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces:*

- b) $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f(x))(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$ *con α multi-índice;*
- c) $\mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi) = \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi),$ *con α multi-índice.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre el orden de la derivada. Para el caso base, suponemos que $\alpha = \vec{e}_1$ sin perder generalidad (siempre podemos reordenar los índices). Entonces, al integrar por partes vemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_1} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} f(x_1, x') e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1 \right) e^{-2\pi i \xi' \cdot x'} dx' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\left[f(x_1, x') e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \right]_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi i \xi_1 \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x') e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1 \right) e^{-2\pi i \xi' \cdot x'} dx' \\
 &= 2\pi i \xi_1 \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \\
 &= (2\pi i \xi_1) \hat{f}(\xi).
 \end{aligned}$$

Nótese que hemos utilizado que f desvanece en el infinito cuando $x_1 \rightarrow \pm\infty$ por ser de Schwartz. Si el orden de la derivada es superior, escribimos $\alpha = \alpha_0 + \vec{e}_r$ para algún $r \in \{1, \dots, d\}$ y basta con aplicar el caso base varias veces (todas las derivadas de f también son de Schwartz).

Para la segunda, como por definición

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx,$$

y es cierta la acotación

$$\left| f(x) \cdot \partial_\xi^\alpha e^{-2\pi i \xi \cdot x} \right| = \left| f(x) (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i \xi \cdot x} \right| = \left| (-2\pi i x)^\alpha f(x) \right| \leq \frac{C_\alpha}{(1 + |x|)^{d+1}}$$

para todo α multi-índice y para todo $x \in \mathbb{R}^d$, estamos en condiciones de aplicar el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas, que nos dice que \hat{f} es diferenciable respecto de ξ cuantas veces queramos (todas las derivadas de f son de Schwartz y también verifican la cota que hemos utilizado para sus respectivas constantes). \square

Corolario 1.20. Si $f \in \mathcal{S}$, entonces \hat{f} es de clase C^∞ .

Las propiedades anteriores son de suma importancia, pues nos dicen cómo afecta la derivación a la transformada. Dado que estamos trabajando con funciones de Schwartz y estas son cerradas para productos por polinomios, se puede intuir que la transformada de una función de Schwartz también es de Schwartz. El siguiente resultado lo establece finalmente.

Corolario 1.21. Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Demostración. Veamos que \hat{f} tiene descenso acelerado. Para α cualquiera multi-índice, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} |(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} |\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f(x))(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta por ser la transformada de una función Schwartz y por tanto integrable (Proposición 1.2).

Necesitamos ver ahora que todas sus derivadas también tienen descenso acelerado. Pero como para β un multi-índice cualquiera se tiene que

$$\partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\beta f(x))(\xi),$$

y dado que $f \in \mathcal{S}$, también $(-2\pi i x)^\beta f(x) \in \mathcal{S}$ (Corolario 1.15), y como acabamos de ver, su transformada de Fourier es de descenso rápido, luego $\partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)$ es de descenso rápido y hemos terminado. \square

Recordemos que esto es precisamente por lo que hemos elegido el espacio de Schwartz para trabajar, o al menos es una de las dos razones. La segunda es consecuencia de la fórmula de inversión, para la que todavía no estamos en condiciones de proceder.

Primero nos desviamos ligeramente ahora para introducir una función especial: la función de Gauss (o gaussiana), definida como $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Esta función está en \mathcal{S} , pues es infinitamente diferenciable de forma trivial y claramente tanto ella como sus derivadas tienen descenso acelerado por ser una exponencial. Por el resultado anterior sabemos además que su transformada de Fourier también está en \mathcal{S} , pero ahora vamos un paso más allá.

Teorema 1.22. *La gaussiana es su propia transformada de Fourier, es decir,*

$$\mathcal{F}(\varphi) = \varphi.$$

Demostración. Primero afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Para verlo realizamos el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\
 &\stackrel{*}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} r d\theta dr \\
 &= \left[-e^{-\pi r^2} \right]_0^\infty \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

(nótese que se ha utilizado Fubini en la igualdad señalada). Una vez visto esto, procedemos por inducción sobre la dimensión del espacio, es decir, sobre d .

Para el caso base $d = 1$, tomamos $\Phi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)$ (nótese que $\Phi(0) = 1$ por lo que acabamos de ver). Ahora, como $\varphi'(x) = (e^{-\pi x^2})' = (-2\pi x) e^{-\pi x^2} = (-2\pi x)\varphi(x)$, comprobamos que

$$\begin{aligned}
 \Phi'(\xi) &= (\hat{\varphi})'(\xi) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x) \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= i \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= i(2\pi i \xi) \hat{\varphi}(\xi) \\
 &= (-2\pi \xi) \Phi(\xi).
 \end{aligned}$$

Tomemos ahora $G(\xi) = \Phi(\xi) e^{\pi \xi^2}$. Tenemos que

$$G'(\xi) = \Phi'(\xi) e^{\pi \xi^2} + \Phi(\xi)(2\pi \xi) e^{\pi \xi^2} = 0,$$

por lo que G debe ser una constante. Dado que $G(0) = \Phi(0) = 1$, concluimos que $G \equiv 1$, y por lo tanto $\Phi(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

Supongamos que es cierto ahora para dimensión $d-1$. Por Fubini y aplicando la hipótesis de inducción, vemos directamente que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\pi|x'|^2} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) dx' \\
 &= e^{-\pi \xi_d^2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\pi|x'|^2} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} dx' \\
 &= e^{-\pi \xi_d^2} e^{-\pi|\xi'|^2} \\
 &= e^{-\pi|\xi|^2}.
 \end{aligned}$$

□

En el siguiente apartado realizamos un breve desvío hacia las convoluciones. La motivación de este quedará claro una vez que veamos las aproximaciones de la identidad, herramienta fundamental para la demostración de la fórmula de inversión.

1.4. Convoluciones

Definición 1.23. Dadas dos funciones f y g integrables, su **convolución** es la función dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^d.$$

¿Cuándo está definida la convolución entre dos funciones? El siguiente resultado nos lo establece con claridad.

Desigualdad de Young. Si $f \in L^1$ y $g \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$), entonces su convolución existe en casi todo punto y es también L^p . Además, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$.

Demostración. Ver [4, p. 241]. □

De forma intuitiva, la convolución de dos funciones es el resultado de “superponer” una sobre otra habiendo desplazado e invertido una de ellas previamente. Este desplazamiento es el punto sobre el que se calcula la convolución. La forma más sencilla de ver esto es evaluarla en el origen, donde tenemos que

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(-y) dy.$$

Vamos a trabajar un poco con ellas, así que conviene ver algunas propiedades para utilizarlas más adelante.

Proposición 1.24. Vista como operador $*$: $L^1 \times L^1 \rightarrow L^1$, la convolución es bilineal, conmutativa, y asociativa. Además, conmuta con el conjugado complejo.

Demostración. La bilinealidad es casi una consecuencia inmediata de la definición debido a la linealidad de la integral. Para ver la conmutatividad no tenemos más que hacer un cambio de variables:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - u)g(u) du = (g * f)(x).$$

Para ver la asociatividad también necesitamos utilizar Fubini:

$$\begin{aligned}
 ((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(y)h(x - y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y - z)h(x - y) dz dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(u)h(x - z - u) dz du && (u = y - z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(u)h(x - z - u) du dz && (\text{Fubini}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(g * h)(x - z) dz \\
 &= (f * (g * h))(x).
 \end{aligned}$$

(nótese que podemos aplicar Fubini porque las convoluciones existen en casi todo punto, luego las integrales deben ser finitas en dichos puntos y las funciones que se integran de tipo L^1).

Lo último se comprueba directamente:

$$\overline{f * g} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y) \cdot g(x - y)} dy = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y)} \cdot \overline{g(x - y)} dy = \overline{f} * \overline{g}.$$

□

Las convoluciones también mantienen la suavidad de las funciones. Aunque se puede enunciar un resultado mucho más débil [4, p. 242], aquí nos limitamos a enunciar esta propiedad para funciones de Schwartz.

Proposición 1.25. *Si f y g son funciones Schwartz, entonces su convolución es de clase C^∞ y se verifican las igualdades*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} * g \right)(x) = \frac{\partial}{\partial x} (f * g)(x) = \left(f * \frac{\partial g}{\partial x} \right)(x).$$

Demostración. Basta con aplicar el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas. □

La convolución de dos funciones, a vista de las propiedades que hemos demostrado, parece que mantiene propiedades de las dos funciones que toma como entrada. Dado que en la primera parte del capítulo hemos trabajado con funciones con decaimiento rápido, una pregunta natural que podemos hacernos es si esto también se conserva por convoluciones. La respuesta es afirmativa.

Proposición 1.26. *La convolución de dos funciones Schwartz también es Schwartz.*

Demostración. Dado que

$$1 + |x| \leq 1 + |x - y| + |y| \leq (1 + |x - y|)(1 + |y|),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} (1 + |x|)^k |\partial_x^\alpha (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |y|)^k |f(y)| (1 + |x - y|)^k |\partial_x^\alpha g(x - y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{C_{k(d+1)}}{(1 + |y|)^{d+1}} K_k \, dy \\ &< \infty, \end{aligned}$$

(la última desigualdad es consecuencia del Lema A.9). □

Teorema de convolución. Si f y g son integrables, entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} * \hat{g}.$$

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |g(x - y)| \, dx \, dy \\ &= \|g\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \, dy \\ &= \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

luego el integrando es una función integrable Lebesgue y por lo tanto podemos aplicarle el Teorema de Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) e^{-2\pi i (x - y) \cdot \xi} \, dx \, dy \\ &= (\hat{f} * \hat{g})(\xi). \end{aligned}$$

□

1.4.1. Aproximaciones de la identidad

Definición 1.27. Una sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en L^1 se dice que es una **aproximación de la identidad** si verifica:

- a) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) dx = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,
- b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x)| dx < \infty$,
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} \varphi_n(x) dx = 0$ para cada $\delta > 0$.

Este tipo de funciones son una forma de formalizar la *delta de Dirac*, expresada como

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0; \end{cases} \quad \text{con } \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x) dx = 1.$$

La utilidad de esta “función” (que no está bien definida y por tanto no puede ser una) se pone de manifiesto como sigue. Si asumimos (falsamente) que sí está bien definida, su convolución con cualquier función f integrable vale lo mismo que f en el punto. En efecto, vemos que

$$(f * \delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \delta(x - y) dy = \int_{\{x\}} f(y) \delta(x - y) dy = f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \delta(u) du = f(x).$$

Estas cuentas carecen por completo de rigor, por lo que solo podemos utilizarlas a modo de intuición. La medida nula del conjunto unipuntual $\{x\}$ se ve compensada por el valor infinito de δ en 0. Sin embargo, si fuésemos capaces de definir objetos con cierto rigor que realizaran una tarea similar, quizá podríamos obtener este resultado por otros medios.

Las aproximaciones de la identidad son precisamente esos objetos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.28. En este ejemplo trabajamos en dimensión $d = 1$. La sucesión de funciones con término general

$$\varphi_n(x) = n e^{-\pi(nx)^2}$$

es una aproximación de la identidad (ver Corolario 1.30). Cuando n crece, también lo hace $\varphi_n(0) = n$, pero más pequeño se hace el intervalo con masa positiva. Esto provoca el efecto deseado, y es que la función tiene como límite la delta de Dirac (ver Figura 5).

Vamos a formalizar el argumento que hemos utilizado antes con la delta de Dirac utilizando ahora aproximaciones de la identidad.

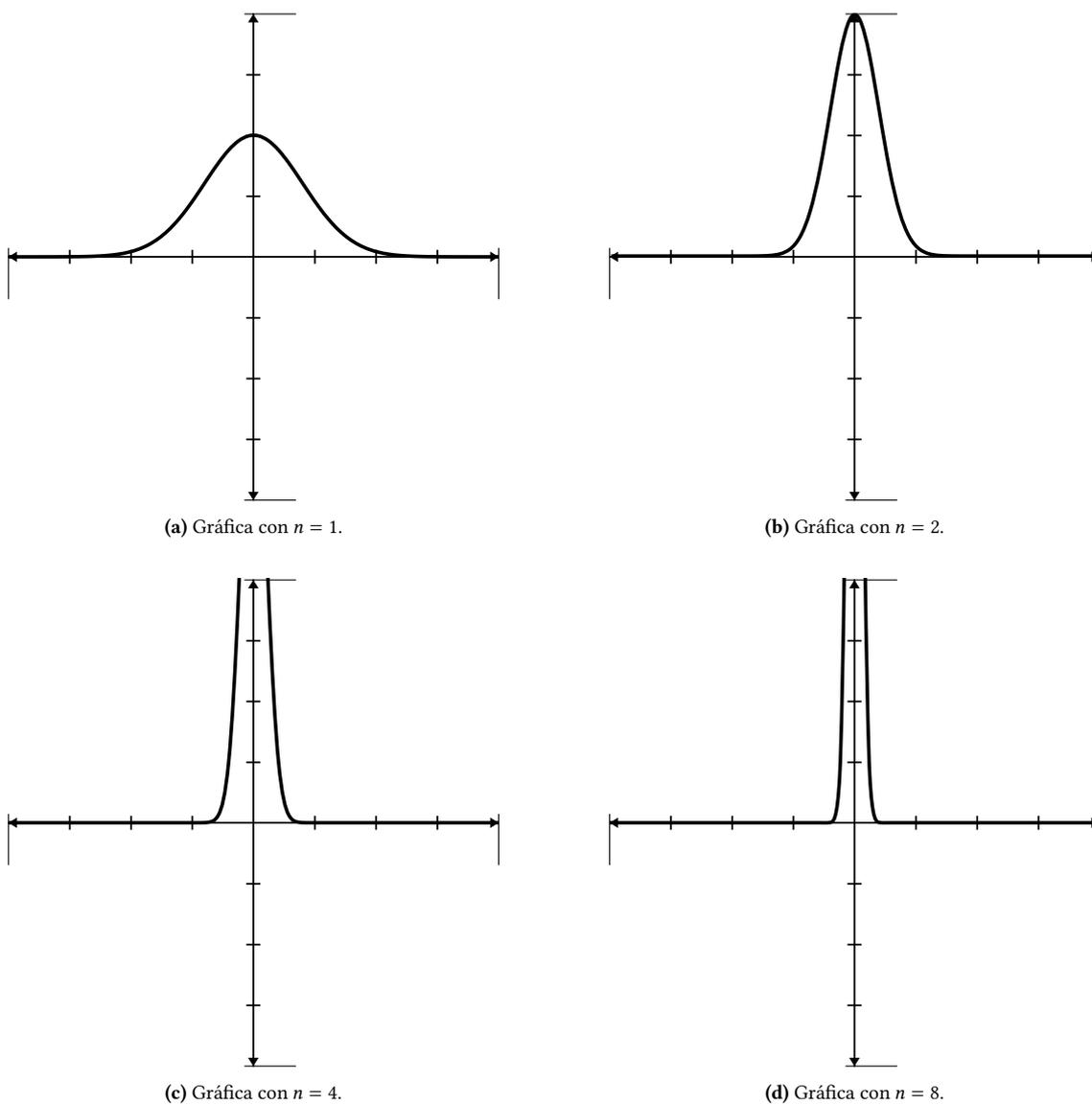


Figura 5: Evolución de $\varphi_n(x) = n e^{-\pi(n x)^2}$ según el crecimiento de n .

Proposición 1.29. Si f es de Schwartz y $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una aproximación de la identidad, entonces

$$(f * \varphi_n)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{uniformemente para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Primero, dado que $\int \varphi_n = 1$ y que las convoluciones son conmutativas (proposición 1.24), escribimos

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_n)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_n(y) \, dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(y) \, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy. \end{aligned}$$

Dado que tenemos un producto de funciones positivas, podemos separar la integral en dos partes. Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, como f es uniformemente continua (Proposición 1.16), existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon/2 \cdot \sup_n \|\varphi_n\|_{L^1} = \varepsilon'$. Así, separamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy &= \int_{|y| \leq \delta} |\varphi_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy \\ &\quad + \int_{|y| > \delta} |\varphi_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy. \end{aligned}$$

La primera integral cumple que

$$\int_{|y| \leq \delta} |\varphi_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| \, dy \leq \varepsilon' \int_{|y| \leq \delta} |\varphi_n(y)| \, dy \leq \varepsilon' \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(y)| \, dy = \varepsilon/2.$$

La segunda, por la tercera propiedad de las aproximaciones de la identidad, debe existir $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0(\delta)$, entonces

$$\int_{|y| > \delta} |\varphi_n(y)| \, dy < \varepsilon/2 \|f\|_{L^\infty}.$$

En resumen, para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces

$$|(f * \varphi_n)(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, lo que implica la convergencia uniforme. \square

Por último, cerramos este desvío hacia las convoluciones y las aproximaciones de la identidad dando un método de obtención de estas últimas.

Corolario 1.30. Si f es integrable y $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = 1$, entonces la sucesión de funciones con término general

$$\varphi_n(x) = n^d f(nx)$$

es una aproximación de la identidad.

Demostración. Veamos que cumple la definición, siendo la primera condición cierta por hipótesis.

Para la segunda, dado que f es integrable, existe $M > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < M$. Así:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x)| dx &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |n^d f(nx)| dx \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)| du \\ &< M. \end{aligned}$$

Para la última, tomamos $\delta > 0$ cualquiera y vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} |\varphi_n(x)| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} |n^d f(nx)| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|u| > n\delta} |f(u)| du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)| \chi_{|u| > n\delta}(u) du \\ &= 0, \end{aligned}$$

siendo este último paso cierto por el Teorema de la Convergencia Dominada dado que f es integrable y que el límite puntual existe y es 0. \square

1.5. Fórmula de inversión. Teorema de Plancherel

Al principio del capítulo hablábamos de cómo la transformada de Fourier era una “versión continua” de los coeficientes de Fourier. Estos últimos, si se utilizaban en condiciones adecuadas, permitían recuperar el valor de la función en todo punto (ver fórmula (1.2)). Ya adelantábamos entonces que este era el caso también para la transformada de Fourier, y es el momento de que lo veamos finalmente.

Pero como era de esperar, antes debemos introducir un último lema.

Fórmula de Multiplicación. La igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) g(y) dy$$

es cierta para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ cualesquiera.

Demostración. Es directo utilizando Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y) e^{-2\pi i x \cdot y} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)f(x) e^{-2\pi i y \cdot x} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\hat{f}(y) dy. \end{aligned}$$

□

Ahora sí, podemos proceder.

Fórmula de Inversión. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Primero vamos a comprobar que $f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) d\xi$. Para ello, consideramos la gaussiana $G(x) = \exp(-\pi|x|^2)$, y definimos la función $\varphi_n(x) = G(n^{-1}x)$. Su transformada de Fourier es de la forma

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \mathcal{F}(G(n^{-1}x)) \stackrel{(1.3)}{=} n^d \hat{G}(n\xi) \stackrel{(1.22)}{=} n^d G(n\xi).$$

Tenemos así que $\hat{\varphi}_n$ es una aproximación de la identidad (Corolario 1.30). Ahora, por la Fórmula de Multiplicación, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}_n(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(\xi)\hat{f}(\xi) d\xi.$$

1. La primera integral verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}_n(x)f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}_n(0-x) dx \quad (\text{exponencial positiva}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \hat{\varphi}_n)(0) \\ &= f(0) \quad (\text{Proposición 1.29}). \end{aligned}$$

2. La segunda integral verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(\xi)\hat{f}(\xi) d\xi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} G(n^{-1}\xi)\hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} G(n^{-1}\xi)\hat{f}(\xi) d\xi \quad (\text{Conv. Dominada}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (G(0) = 1). \end{aligned}$$

Una vez hecho esto, podemos considerar la función $F(y) = f(y + x)$ para ver que

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

(Proposición 1.3 para ver esta última igualdad). □

Este es el resultado más importante del tema, y nos permite recuperar el valor de una función a partir de su transformada de Fourier. Si recordamos la analogía que hicimos en la introducción del capítulo de $\hat{f}(\xi)$ como el “centro de masas” de f con respecto al punto $\xi \in \mathbb{R}^d$, entonces la fórmula de inversión nos dice que $f(x)$ es la suma de todos los centros de masas de f con respecto a todos los puntos $\xi \in \mathbb{R}^d$ de nuevo “enrollados” en el círculo unidad en sentido antihorario.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del anterior.

Teorema de unicidad de la transformada de Fourier. Sean f y g de Schwartz. Si $\hat{f} = \hat{g}$, entonces $f = g$.

Demostración. Por la Fórmula de Inversión, vemos directamente que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = g(x).$$

□

Teorema de Plancherel. Si $f \in S(\mathbb{R}^d)$, entonces $\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

Demostración. Como las funciones que estamos considerando son complejas, se tiene que $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$. De hecho,

$$\mathcal{F}\left(\overline{f(-x)}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \stackrel{x \mapsto (-y)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y)} e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Consideramos ahora $g(x) = \overline{f(-x)}$ y definimos $h = f * g$. Por las propiedades de las convoluciones, $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2$. Basta con utilizar ahora la fórmula de inversión para ver que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(0-x)\overline{f(-x)} dx = h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

La transformada de Radón

Hace mucho tiempo, en la antigua Grecia, un joven matemático llamado Euclides estaba contemplando las sombras que se formaban en el suelo cuando los rayos del sol chocaban contra objetos sólidos. A medida que el sol se movía a lo largo del cielo, las sombras cambiaban de forma y tamaño, y Euclides se dio cuenta de que había una relación entre la forma de la sombra y la forma del objeto que la producía.

Este simple hecho llevó a Euclides a la idea de que se podía conocer la forma de un objeto a partir de su sombra [3, Libro VI]. Años después, el matemático y físico austríaco Johann Radón tomó esta idea y la llevó al siguiente nivel al desarrollar una técnica para reconstruir la forma tridimensional de un objeto a partir de las proyecciones de su sombra en diferentes direcciones.

La técnica que Radón creó se llama la Transformada de Radón y se ha convertido en una herramienta esencial en campos tan diversos como la medicina, la física y la astronomía. Al aplicar la Transformada de Radón a imágenes médicas, los médicos pueden obtener información detallada sobre la anatomía interna del cuerpo humano sin tener que realizar procedimientos invasivos (Allan M. Cormack obtuvo en 1979 el premio Nobel de medicina por implementar este descubrimiento). En física, la transformada de Radón se utiliza para estudiar la estructura de materiales como los cristales [1] y para estudiar el comportamiento de las galaxias [8].

A través de esta historia, podemos ver cómo una simple observación puede conducir a una idea que cambiaría la forma en que entendemos el mundo que nos rodea. La Transformada de Radón es un ejemplo de cómo las matemáticas puede tener un impacto profundo en nuestra vida cotidiana, incluso en áreas que no parecen estar directamente relacionadas con ellas.

2.1. Introducción física al problema

Cuando miramos el cristal de un escaparate, vemos a través de él los objetos que hay dentro de la tienda. Sin embargo, no somos capaces de ver directamente a través de los propios objetos dentro de ella, como por ejemplo una silla o un balón de fútbol. ¿Por qué es esto así? ¿Por qué la luz puede atravesar el cristal del escaparate, pero no la silla o el balón de fútbol? La respuesta es que la luz se comporta de manera diferente cuando atraviesa un objeto sólido que cuando atraviesa un objeto transparente.

Este efecto no es exclusivo de la luz, si no que se aplica a toda la radiación electromagnética. Cuando una onda de este tipo colisiona con la materia, varios fenómenos físicos pueden ocurrir dependiendo de la propia onda y del material del objeto. En particular, parte de la energía de la onda puede ser absorbida por el objeto, efecto conocido como *absorción*. Este fenómeno es el que interviene en las radiografías, donde la intensidad del rayo X disminuye al atravesar un objeto denso como un hueso.

La intensidad que pierde una onda electromagnética al atravesar un objeto está regida por la ley de Beer-Lambert, que establece que la intensidad de la onda disminuye exponencialmente con la longitud del rayo y con la absorción del material. En otras palabras, si la intensidad de la onda es I_0 en el punto de entrada, entonces la intensidad en el punto de salida será $I(L) = I_0 e^{-\mu L}$, donde μ es la absorción del material y L es la longitud del rayo. Nótese que aquí estamos asumiendo que el material es homogéneo, es decir, que la absorción es la misma en todo el objeto.

Pero, ¿qué ocurre si el material no es homogéneo? ¿Qué pasa si la absorción varía a lo largo del objeto? En este caso, la ley de Beer-Lambert ya no es suficiente y necesitamos una nueva forma de calcular la intensidad de la onda en el punto de salida. Para ello, vamos a considerar un caso más general, en el que la absorción del material varía a lo largo de la longitud del rayo. En este caso, la intensidad de la onda en el punto de salida será “una suma continua de todos los valores de absorción que se encuentran a lo largo del rayo”. La teoría de este capítulo se centra en cómo calcular esta suma continua, que se denomina habitualmente *transformada X-Ray*. Dada una función f , esta se define como

$$\mathcal{X}f(L) = \int_L f(x) dx,$$

donde L es una línea en el plano. Si en lugar de trabajar en dos dimensiones trabajamos en tres o más, podemos extender la transformada X-Ray a la *transformada de Radón*. Esta considera la intersección de un hiperplano con un objeto (en lugar de un rayo) y se define como

$$\mathcal{R}f(\pi) = \int_{\pi} f(x) dx,$$

donde π es un hiperplano en el espacio. Nuestro objetivo en este capítulo es darle sentido a estas definiciones y estudiar sus propiedades.

2.2. Transformada de Radón en tres dimensiones

Tomemos π un plano afin cualquiera en el espacio y denotemos por \vec{n}_π su vector normal unitario. Tomamos también $r \in \mathbb{R}$ la distancia del plano al origen de coordenadas con signo (es decir, permitimos que r tome valores negativos). Así, el plano π se puede definir como el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$x \cdot \vec{n}_\pi = r.$$

Denotaremos en adelante por $\pi_{\vec{n},r}$ al plano π con vector normal \vec{n} y distancia al origen r . Nótese que todo plano puede ser parametrizado de dos formas, ya que $\pi_{\vec{n},r} = \pi_{-\vec{n},-r}$. Así, existe una correspondencia directa entre el conjunto de todos los planos en el espacio, que vamos a denotar por Π , y el conjunto de clases de equivalencia en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con la relación $(\vec{n}, r) \sim (-\vec{n}, -r)$. En nuestros cálculos no resultará un problema, pero es importante al menos tenerlo en cuenta.

Ahora que hemos conseguido parametrizar los planos, podemos definir una integral sobre ellos rigurosamente.

Definición 2.1. Dado un plano $\pi_{\vec{n},r}$ y una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, definimos su **integral sobre el plano** $\pi_{\vec{n},r}$ como

$$\int_{\pi_{\vec{n},r}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2) du_1 du_2,$$

donde \vec{e}_1 y \vec{e}_2 son dos vectores tales que $\{\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sea una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

El primer paso es evidente, debemos probar que esta definición no depende de los vectores \vec{e}_1 y \vec{e}_2 elegidos. Para ello, vamos a considerar otro par de vectores \vec{f}_1 y \vec{f}_2 que sean ortogonales a \vec{n} y que también formen una base ortonormal en \mathbb{R}^3 . Debe existir entonces una rotación R tal que $\vec{e}_1 = R\vec{f}_1$ y $\vec{e}_2 = R\vec{f}_2$. Es fácil ver entonces que podemos transformar una integral en la otra aplicando el cambio de variables $u_1 \mapsto R^{-1}u_1$ y $u_2 \mapsto R^{-1}u_2$.

Así, la integral sobre el plano $\pi_{\vec{n},r}$ es independiente de la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ escogida. Además tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ fijo. Se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\pi_{\vec{n},r}} f \right) dr = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx.$$

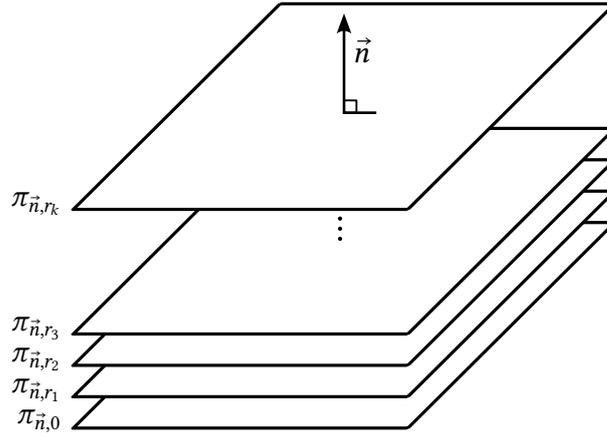


Figura 1: Descomposición del espacio en planos paralelos. Fijado $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$, para todo punto $x \in \mathbb{R}^3$ existe un único $r > 0$ tal que x pertenece a $\pi_{\vec{n}, r}$.

Demostración. Denotemos por \mathcal{B} a la base ortonormal en \mathbb{R}^3 formada por \vec{n} , \vec{e}_1 y \vec{e}_2 . Tomemos ahora R la rotación que lleva la base canónica en \mathbb{R}^3 a \mathcal{B} . Un cálculo directo nos dice que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f(Rx) |\det R| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x_1 \vec{n} + x_2 \vec{e}_1 + x_3 \vec{e}_2) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &\stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1 \vec{n} + u) \, du \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\pi_{\vec{n}, x_1}} f \right) \, dx_1 \end{aligned}$$

(nótese que se ha utilizado Fubini en la igualdad señalada *). □

Vemos entonces que integrar sobre todo el espacio es lo mismo que tomar un vector unitario cualquiera e integrar sobre todos los planos que tienen ese vector como normal, cosa que de manera intuitiva tiene bastante sentido (ver Figura 1). Ya estamos en condiciones de definir la transformada de Radón.

Definición 2.3. Dada una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, su **transformada de Radón** es la función

$$\mathcal{R}f(\vec{n}, r) = \int_{\pi_{\vec{n}, r}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + u) \, du.$$

La transformada de Radón toma funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ y las convierte en funciones que toman como entrada un vector unitario y de un número real (o de un plano, según se mire). Una duda razonable que nos puede surgir es si las funciones de salida son de Schwartz, y la respuesta es que no del todo. Primero, nos será conveniente cuando $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ esté fijo escribir

$$\mathcal{R}f(\vec{n}, r) = \mathcal{R}f(\vec{n})(r).$$

Definición 2.4. Denotamos por $C(\mathbb{S}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ al espacio de funciones continuas que toman valores en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y que fijado $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ tienen como salida una función de Schwartz. Es decir, que una función F pertenece a este espacio si y solo si

$$\sup_{n \in \mathbb{S}^2} \sup_{r \in \mathbb{R}} (1 + |r|^k) |\partial_r^k F(\vec{n}, r)| < \infty \quad \text{y} \quad (\partial_r^k F)(\vec{n}, r) \in C(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$$

para todo $k \geq 0$.

De este modo, denotamos ahora por $C(\mathbb{S}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ al espacio de funciones que toman valores en la esfera y que tienen como salida una función de Schwartz. Veamos que la transformada de Radón lleva funciones de Schwartz a este espacio.

Teorema 2.5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces $\mathcal{R}f \in C(\mathbb{S}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Demostración. Vamos a probar que fijado $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$, la función $r \mapsto \mathcal{R}f(\vec{n})(r)$ decae rápidamente. Sea $k \in \mathbb{N}$. Como f es de Schwartz, existe cierta constante $C_k > 0$ tal que

$$(1 + |r|)^k (1 + |w|)^k |f(r\vec{n} + w)| \leq C_k.$$

Así, se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} (1 + |r|)^k |\varphi(r)| &= (1 + |r|)^k |\mathcal{R}f(\vec{n})(r)| \\ &= (1 + |r|)^k \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + w) \, dw \right| \\ &\leq (1 + |r|)^k \int_{\mathbb{R}^2} |f(r\vec{n} + w)| \, dw \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{C_k}{(1 + |w|)^k} \, dw \end{aligned} \tag{2.1}$$

y esto último está acotado si $k \geq 3$. Para $k = 0, 1, 2$, no es difícil ver que

$$(1 + |r|)^k \leq (1 + |r|)^3,$$

luego

$$(1 + |r|)^k |\varphi(r)| \leq (1 + |r|)^3 |\varphi(r)| \leq C_3$$

y por lo tanto φ es de descenso rápido. Falta ver ahora que sus derivadas lo son, pero primero debemos comprobar que, en efecto, esta función es derivable. Para ello vamos a utilizar el lema de integración de integrales paramétricas, cuyas hipótesis nos exigen que el integrando sea L^1 , que exista su derivada respecto al parámetro y que esté acotada por una función L^1 que no dependa del parámetro. Las dos primeras están cubiertas por ser $f \in \mathcal{S}$, mientras que la última es consecuencia directa de la cota (2.1). Así pues, la función es derivable y se cumple que

$$\varphi^{(k)}(r) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^k}{\partial r^k} (f(r\vec{n} + w)) \, dw.$$

Como f es Schwartz, sus derivadas verifican las mismas propiedades que ella, luego un argumento similar al que hemos utilizado antes demuestra que todas las derivadas de φ son también de descenso rápido. En conclusión $\varphi \in \mathcal{S}$. \square

En adelante, escribiremos $\mathcal{R}f(\vec{n})(r)$ cuando queramos referirnos a la transformada como función en $C(\mathbb{S}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. Para evitar confusiones, en adelante utilizaremos la notación $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ para referirnos a la transformada de Fourier de $\mathcal{R}f(\vec{n}, r)$ en su segunda variable (con $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ fijo), y $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}$ para referirnos a la transformada de Fourier habitual en tres dimensiones de una función cualquiera.

Teorema 2.6. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces para todo $\vec{n} \in \mathbb{S}$ se verifica que*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}f(\vec{n}))(s) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}f(s\vec{n}).$$

Demostración. Un cálculo directo nos dice que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}f(\vec{n}))(s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\vec{n})(r) e^{-2\pi i r s} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + \mathbf{w}) e^{-2\pi i r s} d\mathbf{w} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + \mathbf{w}) e^{-2\pi i s \vec{n} \cdot (r\vec{n} + \mathbf{w})} d\mathbf{w} dr, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que

$$rs = sr = sr \cdot 1 + 0 = sr(\vec{n} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \cdot \mathbf{w} = s\vec{n} \cdot (r\vec{n} + \mathbf{w}).$$

Si $\mathbf{w} = (u, v)$, basta ahora con tomar la rotación que lleve la base $\{\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a la base canónica para comprobar que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}f(\vec{n}))(s) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(r, u, v) e^{-2\pi i (s\vec{n} \cdot (r, u, v))} d(r, u, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (s\vec{n}) \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= \mathcal{F}_{\mathbb{R}^3}f(s\vec{n}). \end{aligned}$$

De nuevo, le hemos dado la vuelta a los diferenciales utilizando Fubini. \square

A consecuencia de esta última identidad y del Teorema de unicidad de la transformada de Fourier, se deduce que la transformada de Radón también presenta unicidad en cuanto a la función que la define.

Corolario 2.7 (unicidad de la transformada de Radón). *Sean f, g de clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Si $\mathcal{R}f = \mathcal{R}g$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $h = f - g$ (que también es de Schwartz por ser este un espacio vectorial). Tomando $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}h(\vec{n})(r) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(r\vec{n} + w) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(r\vec{n} + w) dw - \int_{\mathbb{R}^2} g(r\vec{n} + w) dw \\ &= \mathcal{R}f(\vec{n})(r) - \mathcal{R}g(\vec{n})(r) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que su transformada de Fourier también debe ser nula, y como por el resultado anterior $\mathcal{F}(\mathcal{R}h(\vec{n}))(s) = \hat{h}(s\vec{n})$ el Teorema de unicidad de la transformada de Fourier nos dice entonces que $h = 0$ y $f = g$. \square

2.3. Transformada dual de Radón

Sea $a \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera del espacio. El conjunto de todos los planos que pasan por este punto viene dado por

$$\Pi(a) = \left\{ \pi_{\vec{n}, \vec{n} \cdot a} \in \Pi \mid \vec{n} \in \mathbb{S}^2 \right\},$$

donde Π es el conjunto de todos los planos del espacio. Cada uno de los planos de $\Pi(a)$ viene definido por su vector normal, luego en el fondo se tiene que $\Pi(a) \cong \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ (ya que no nos importa si el plano está orientado o no).

Definición 2.8. Dada una función $F \in C(\mathbb{S}^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, su **transformada dual de Radón** es la función $\mathcal{R}^*F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\mathcal{R}^*F(x) = \int_{\mathbb{S}^2} F(\vec{n}, x \cdot \vec{n}) d\sigma(\vec{n}),$$

donde $\sigma(\vec{n})$ es el elemento de área.

De forma quizá más visual, si entendemos F como una función que toma planos como entrada (que es lo que realmente hace), la transformada dual de Radón se puede escribir como

$$\mathcal{R}^*F(x) = \int_{\Pi(x)} F(\pi_{\vec{n}, \vec{n} \cdot x}),$$

que es la integral de una función sobre todos los planos que pasan por un punto.

2.3.1. Inversión de la transformada de Radón

Nos desviamos un momento para hacer una observación. En el mundo real, los seres humanos somos capaces de hacernos una idea de la forma que tienen los objetos si se nos presenta suficiente información visual sobre ellos, aunque nunca los hayamos visto. El color, la textura, el tamaño, la posición, similitudes con objetos que sí conocemos, etc. son todos factores que nos ayudan a reconocer objetos que no conocemos directamente.

Por ejemplo, cuando visitamos una ciudad que no conocemos pero con un monumento emblemático, somos capaces de reconocerlo inmediatamente aunque sea la primera vez que vamos a ese sitio. Esto es así porque, aunque no lo hayamos visto nunca, tenemos una idea de su forma y de su tamaño por fotos que hemos visto de él, por la descripción que nos han hecho de él, etc.

La *fotogrametría* es una técnica real y muy utilizada que permite obtener un modelo tridimensional de un objeto a partir de una serie de fotos del mismo. Se utiliza para obtener modelos foto-realistas de objetos sin necesidad de modelarlos a mano. El software preparado para realizar fotogrametrías es capaz de entender las distancias entre puntos clave del objeto a partir de las fotos, y así reconstruir el modelo.

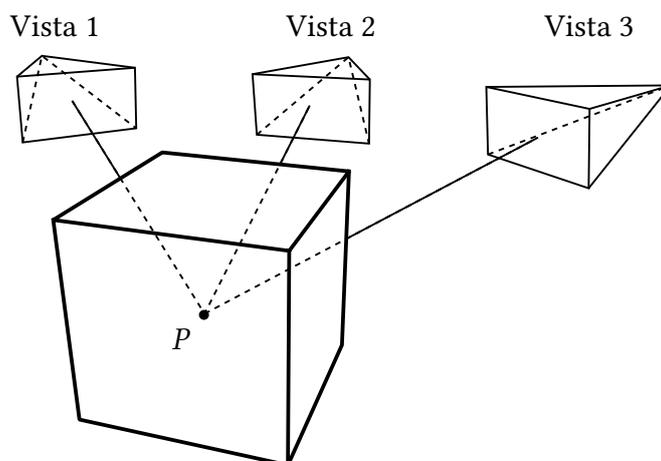


Figura 2: Diagrama de una fotogrametría. El cubo en el centro que representa el objeto 3D escaneado, mientras que tres cámaras apuntan hacia ella desde diferentes ángulos para capturar imágenes detalladas desde distintas perspectivas.

En definitiva, vemos que intuitivamente la idea de recuperar información sobre un objeto a partir de “imágenes” del mismo es algo que se puede hacer. En este sentido, la transformada dual de Radón es una transformada que permite reconstruir una función F a partir de sus proyecciones sobre los planos que pasan por un punto x . Si esta función F es además la transformada de Radón estándar de una función f de Schwartz, entonces podemos recuperar dicha función completamente.

Teorema 2.9. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R} f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Demostración. Fijamos $\vec{n} \in \mathbb{S}^2$ cualquiera. Como $\mathcal{R}f(\vec{n})$ es una función de Schwartz (Teorema 2.5), podemos aplicarle la fórmula de inversión para transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\vec{n})(r) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}f(\vec{n}))(s) e^{2\pi i r s} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i r s} ds \end{aligned} \quad (\text{Teorema 2.6}).$$

Usando de nuevo que $\mathcal{R}f \in C(\mathbb{S}^2, S(\mathbb{R}))$, la definición de transformada dual de Radón nos dice que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{S}^2} \mathcal{R}f(\vec{n})(x \cdot \vec{n}) d\sigma(\vec{n}) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}). \end{aligned}$$

Esta última integral se puede separar en dos:

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \int_{-\infty}^0 \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}) + \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^{\infty} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}),$$

y al hacerle un cambio de variable a la primera (y notando que en este contexto

$$\int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot (s\vec{n})} d\sigma(\vec{n}) = \int_{\mathbb{S}^2} \hat{f}(s(-\vec{n})) e^{2\pi i x \cdot (s(-\vec{n}))} d\sigma(\vec{n})$$

dado que estamos integrando sobre toda la esfera unidad), obtenemos

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^{\infty} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}).$$

El paso natural ahora es deshacer el cambio a coordenadas polares que presenta esta integral. Sin embargo, para ello es necesario que aparezca en ella un s^2 que nos permita hacerlo. Dado que este no está, lo hacemos aparecer nosotros mismos:

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^{\infty} \frac{\hat{f}(s\vec{n})}{s^2} e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} s^2 ds d\sigma(\vec{n}).$$

Llegados a este punto, solo queda deshacer el cambio:

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

□

Nótese que el factor 2 que aparece multiplicando la integral anterior es consecuencia del hecho de que estamos integrando dos veces sobre cada plano. En efecto, si nos restringimos únicamente a una semiesfera, entonces nunca ocurre que $\pi_{\vec{n},r} = \pi_{-\vec{n},r}$, pues al menos uno de los dos no lo estamos teniendo en cuenta. Como indicábamos al principio del capítulo, esto no afecta a los resultados obtenidos, solo a la forma de expresarlos.

Corolario 2.10. Si $f \in S(\mathbb{R}^3)$, entonces $\mathcal{R}^* \mathcal{R} f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Además, para todo multi-índice α se tiene que

$$\partial_x^\alpha (\mathcal{R}^* \mathcal{R} f)(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \partial_x^\alpha (e^{2\pi i x \cdot \xi}) d\xi.$$

Demostración. Basta con comprobar que estamos en condiciones de aplicar el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas. Por el resultado anterior, sabemos que

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R} f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

1. Consideremos $g_x(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi}$. Veamos si es integrable esta función:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |g(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi = \int_{|\xi| \leq 1} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi.$$

- a) Como $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ (Proposición 1.2), vemos directamente que

$$\int_{|\xi| \leq 1} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi \leq \int_{|\xi| \leq 1} \frac{\|f\|_{L^1}}{|\xi|^2} d\xi = \|f\|_{L^1} \int_{|\xi| \leq 1} \frac{1}{|\xi|^2} d\xi < \infty,$$

(ver Lema A.10 en la página 49 para la demostración de que la última integral es finita).

- b) Como \hat{f} es de Schwartz, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| > 1} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|^2} d\xi \leq \int_{|\xi| > 1} \frac{C_2}{|\xi|^2 \cdot |\xi|^2} d\xi = C_2 \int_{|\xi| > 1} \frac{1}{|\xi|^4} d\xi < \infty.$$

Así, la integral es convergente y por tanto g_x es integrable.

2. Llamando ahora $g(x, \xi) = g_x(\xi)$, está claro que g es C^∞ con respecto a la primera variable. Además,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_j}(x, \xi) \right| = \left| (2\pi i \xi_j) \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} \right| = \left| (2\pi i \xi_j) \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \right|,$$

que es también integrable por un argumento análogo al anterior al ser \hat{f} de Schwartz y esta clase cerrada para productos por polinomios. Como la función que acota a la parcial no depende de x (y no solo de x_j), esto es cierto para todas las x_j .

Habiendo comprobado las hipótesis, deducimos que $\mathcal{R}^* \mathcal{R} f$ es diferenciable en todas sus variables. Dado que f es de Schwartz, el producto $(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ sigue siendo integrable para cualquier α multi-índice, por lo que podemos volver a aplicarle el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas a cualquiera de sus parciales aplicando un argumento análogo para la comprobación de sus hipótesis. En conclusión, $\mathcal{R}^* \mathcal{R} f$ es de clase C^∞ .

La fórmula se deduce directamente de la aplicación del teorema. □

Cuando generalicemos estos resultados a dimensiones superiores veremos que las funciones de la forma $\mathcal{R}^* \mathcal{R} f$ (con f de Schwartz) en realidad forman una clase más pequeña que la de las C^∞ , pero por ahora nos es suficiente este resultado, que es un corolario de los dos anteriores.

Fórmula de inversión de Radón. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$\Delta(\mathcal{R}^* \mathcal{R} f) = -8\pi^2 f,$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ denota al operador laplaciano.

Demostración. Utilizando los dos últimos resultados, tenemos que

$$\Delta \mathcal{R}^* \mathcal{R} f(x) = \Delta \left(2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right) \quad (\text{Teorema 2.9})$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \Delta(e^{2\pi i x \cdot \xi}) d\xi \quad (\text{Corolario 2.10})$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} (-4\pi^2 |\xi|^2) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

$$= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

$$= -8\pi^2 f(x) \quad (\text{Fórmula de Inversión}).$$

□

2.4. Generalización a dimensiones superiores

Los primeros resultados del apartado anterior se pueden generalizar a dimensión $d \in \mathbb{N}$ arbitraria realizando procedimientos análogos a los que hemos visto, pues en ningún momento hemos hecho uso de propiedades particulares de \mathbb{R}^3 . Un *hiperplano* en \mathbb{R}^d puede ser expresado como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^d$ tales que $x \cdot \vec{n} = r$ para algún par $(\vec{n}, r) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ (de nuevo teniendo en cuenta que $\pi_{\vec{n}, r} = \pi_{-\vec{n}, -r}$). Así, dada una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ su **integral sobre un hiperplano** $\pi_{\vec{n}, r}$ se puede definir como

$$\int_{\pi_{\vec{n}, r}} f = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(r\vec{n} + u) du,$$

donde como en el caso tridimensional $u \in \mathbb{R}^{d-1}$ es una combinación lineal de vectores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d-1}$ unitarios y ortogonales entre sí y a \vec{n} (y de nuevo la elección de estos vectores no afecta a la integral). Además, también se verifica la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\pi_{\vec{n}, r}} f \right) dr = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

La imagen de una función de Schwartz por la transformada de Radón en d dimensiones está en $C(\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, que es el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ que para todo $\vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ fijo devuelven funciones de Schwartz. Se verifica también la igualdad

$$\mathcal{F}_R(\mathcal{R}f(\vec{n}))(s) = \hat{f}(s\vec{n}).$$

Si dos funciones $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tienen la misma transformada de Radón, entonces $f = g$. Por último, la transformada dual de Radón de una función $F \in C(\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ está dada por

$$\mathcal{R}^*F(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(\vec{n}, x \cdot \vec{n}) d\sigma(\vec{n}),$$

donde $\sigma(\vec{n})$ es el elemento de área de la esfera unitaria. Este es el último resultado que podemos generalizar a partir de la demostración de su resultado análogo tridimensional.

2.4.1. La clase \mathcal{A} de funciones suaves transformadas

Veamos la generalización de la fórmula para $\mathcal{R}^*\mathcal{R}f$ si f es de Schwartz.

Teorema 2.11. *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces*

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Demostración. Como en el caso tridimensional, fijado $\vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ cualquiera, $\mathcal{R}f(\vec{n})$ es una función de Schwartz y podemos aplicarle la fórmula de inversión para transformadas de Fourier, la definición de la transformada dual, y por último la igualdad con la transformada de Fourier para llegar a que

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}).$$

Esta última integral se puede separar en dos y tras realizar un cambio de variable (de nuevo como en el caso tridimensional) en la primera de ellas, llegamos a que

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \hat{f}(s\vec{n}) e^{2\pi i x \cdot s\vec{n}} ds d\sigma(\vec{n}).$$

Llegados a este punto, solo queda deshacer el cambio (multiplicando y dividiendo previamente por s^{d-1}):

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

□

Ahora bien, ¿dónde van a parar las funciones de Schwartz bajo las dos transformadas de Radón? En el caso tridimensional, hemos visto que a C^∞ , así que cabe esperar que en el caso general pase algo similar. Y en efecto, este es el caso, pero podemos afinar un poco más.

Definición 2.12. Llamamos **clase de funciones \mathcal{A}** al conjunto dado por

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f = \mathcal{F}^{-1}g, \text{ con } g(x)(1 + |x|)^n \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{S}$ la Fórmula de Inversión nos dice que $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$, y como \hat{f} también es de Schwartz, deducimos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Veamos que, además, \mathcal{A} es un subespacio de C^∞ .

Proposición 2.13. *La clase \mathcal{A} es un subespacio de C^∞ .*

Demostración. Por definición, si $f \in \mathcal{A}$, entonces existe g tal que

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Como g es (más que) integrable y claramente la derivada ∂_x^n del integrando existe y está acotada por

$$C \cdot (1 + |\xi|)^n |g(\xi)| \quad \text{con } C > 0$$

que también es integrable por la definición de \mathcal{A} y no depende de x , podemos aplicar el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas para obtener la primera derivada de f . Repitiendo el proceso, podemos obtener todas las que queramos (pues g sigue siendo integrable independientemente del grado del polinomio por el que se multiplique). En conclusión, $f \in C^\infty$. \square

Teorema 2.14. *Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{R}^* \mathcal{R}f \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Ya sabemos que

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R}f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} \right) (x),$$

así que es natural considerar la función $g(\xi) = \hat{f}(\xi)/|\xi|^{d-1}$ y ver que es integrable multiplicada por polinomios. En efecto:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)| (1 + |\xi|)^n \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| \frac{(1 + |\xi|)^n}{|\xi|^{d-1}} \, d\xi \\
 &= \int_{|\xi| \leq 1} |\hat{f}(\xi)| \frac{(1 + |\xi|)^n}{|\xi|^{d-1}} \, d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\hat{f}(\xi)| \frac{(1 + |\xi|)^n}{|\xi|^{d-1}} \, d\xi \\
 &\stackrel{*}{\leq} \int_{|\xi| \leq 1} \frac{C_n}{|\xi|^{d-1}} \, d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{C_{n+2}}{(1 + |\xi|)^2 |\xi|^{d-1}} \, d\xi \\
 &\stackrel{**}{\leq} \int_{|\xi| \leq 1} \frac{C_n}{|\xi|^{d-1}} \, d\xi + \int_{|\xi| > 1} \frac{K}{|\xi|^{d+1}} \, d\xi \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

(en * hemos utilizado que \hat{f} decrece rápido y en ** que $(1 + |\xi|)^2 \geq |\xi|^2$). □

2.4.2. El operador de Laplace fraccionario

Vamos a realizar ahora un pequeño desvío que nos será útil dentro de no mucho. En el apartado anterior hemos utilizado el operador de Laplace para recuperar una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ a partir de sus transformadas de Radón (la estándar y la dual, en ese orden).

El operador Δ es lineal y lleva funciones C^k en funciones C^{k-2} . Dado que estamos trabajando con funciones de Schwartz, nuestras funciones son C^∞ y sus derivadas de cualquier orden también son de Schwartz, y por tanto se les puede aplicar la fórmula de inversión para transformadas de Fourier. Esto nos lleva a preguntarnos cómo interactúa el operador de Laplace con esta fórmula de inversión

De forma directa, vemos que

$$\begin{aligned}
 \Delta_x f(x) &= \Delta_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi \right) \\
 &\stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \Delta_x (e^{2\pi i x \cdot \xi}) \, d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) (2\pi i |\xi|)^2 e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi |\xi|)^2 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi
 \end{aligned}$$

(en la igualdad marcada hemos aplicado el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas). Si aplicásemos $-\Delta_x$, entonces obtenemos la igualdad

$$-\Delta_x f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi |\xi|)^2 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

La función $-\Delta f$ también es una función de Schwartz, pues es una combinación lineal de funciones de Schwartz Corolario 1.13. En particular, es una función C^∞ , por lo que podemos volver a aplicarle el laplaciano si queremos. Es fácil ver entonces que

$$\begin{aligned} (-\Delta_x)^2 f(x) &= -\Delta_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^2 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^2 \hat{f}(\xi) \Delta_x (e^{2\pi i x \cdot \xi}) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{2 \cdot 2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

En general, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(-\Delta_x)^n f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{2n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Esta forma de reescribir el laplaciano de una función de Schwartz motiva la siguiente definición.

Definición 2.15. Dado $a > 0$ cualquiera y $f \in \mathcal{A}$, definimos el **operador de Laplace fraccionario** (o simplemente laplaciano fraccionario) de la forma

$$(-\Delta)^a f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{2a} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

donde $\mathcal{F}^{-1}g = f$.

Ya hemos visto que si $a \in \mathbb{N}$ la función resultante es de Schwartz. En general, esta función es de clase C^∞ (basta con aplicar el Lema de Derivación de Integrales Paramétricas), pero en general no tiene decrecimiento rápido si a no es un entero.

En el caso particular de $a = (d - 1)/2$, tenemos que

$$(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi|\xi|)^{d-1} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Corolario 2.16 (fórmula de inversión de Radón generalizada). Si $f \in \mathcal{S}$, entonces

$$(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} \mathcal{R}^* \mathcal{R} f = \frac{(2\pi)^d}{\pi} f.$$

Demostración. Sabemos que

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R} f(x) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left(2 \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} \right) (x),$$

por lo que aplicando la definición de laplaciano fraccionario, tenemos que

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} \mathcal{R}^* \mathcal{R} f(x) &= 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (2\pi|\xi|)^{d-1} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= 2^d \pi^{d-1} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= 2^d \pi^{d-1} f(x).\end{aligned}$$

□

Resultados previos

Durante este apéndice trabajaremos en el espacio de medida dado por $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mu)$, donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ es la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue, y μ es la propia medida de Lebesgue.

A.1. Integración Lebesgue

Definición A.1. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es **integrable** si

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx < \infty,$$

donde la integral es la de Lebesgue.

La construcción de esta integral queda fuera del alcance de este trabajo, pero implica la aproximación de funciones no negativas mediante funciones simples, la descomposición de funciones en parte positiva y parte negativa, y la descomposición de funciones complejas en parte real e imaginaria [4, pp. 49-53]. Cuando se omita mencionarlo, la integral que utilizemos será la de Lebesgue.

Definición A.2. Definimos el **espacio de funciones integrables** como las clases de equivalencia de funciones $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definidas en casi todo punto e integrables bajo la relación

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^d$$

y lo denotamos por $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Observación. Dado que $L^1(\mathbb{R}^d)$ es una clase de equivalencia, técnicamente es un abuso de notación escribir $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ya que f no es una función, sino una clase de equivalencia de funciones. Utilizamos aún así esta notación para simbolizar que f es un representante de su clase de equivalencia, cosa que rara vez lleva a confusiones [4, p. 54].

Proposición A.3. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la función

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx$$

define una norma en $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Ver [4, p. 54]. □

Definición A.4. Decimos que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$ converge a $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ en la **norma L^1** si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

Teorema A.5. El espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^1}$ es de Banach.

Demostración. Ver [2, p. 30]. □

Vamos a presentar ahora algunos de los resultados más importantes de este tipo de funciones, que son los que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo.

Teorema de la Convergencia Dominada. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que:

1. El límite $\lim_n f_n(x)$ existe en casi todo punto.
2. Existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ en casi todo punto y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f(x) = \lim_n f_n(x)$ es una función $L^1(\mathbb{R}^d)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \, dx.$$

Demostración. Ver [4, pp. 54-55]. □

Vamos a ver un resultado en el que utilizamos este teorema.

Lema A.6. *La función $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$ no es integrable en $L^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Primero, notemos que una función es integrable si y sólo si su valor absoluto es también integrable (se deduce directamente de la definición). Vamos a proceder con la prueba por reducción al absurdo.

Supongamos que $f(x) = |\text{sinc}(x)|$ es integrable en \mathbb{R}^+ . Consideramos los intervalos

$$I_k = [k\pi, (k+1)\pi], \quad J_k = \bigcup_{j=0}^k I_j = [0, (k+1)\pi],$$

y la sucesión de funciones con término general $f_n(x) = f(x)\chi_{J_n}(x)$.

Cada una de las funciones de la sucesión es continua sobre un soporte compacto, por lo que deben ser todas integrables en \mathbb{R}^+ . Además, está claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ puntualmente y siempre se verifica que $f_n \leq f$.

Si $x \in I_k$ entonces $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ y por tanto

$$\frac{|\text{sen}(x)|}{(k+1)\pi} \leq \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| = f(x),$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) \, dx &= \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \, dx \\ &\geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\text{sen}(x)| \, dx \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

y por el Teorema de la Convergencia Dominada, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \int_{\mathbb{R}^+} f$. Pero esto es imposible, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2}{(k+1)\pi} = \infty.$$

Así pues, f no puede ser integrable en \mathbb{R}^+ y por tanto tampoco en \mathbb{R} , luego tampoco lo es $\text{sinc}(x)$ (por lo mencionado al principio de la demostración). \square

Volvemos ahora a los otros resultados de convergencia.

Teorema de Beppo-Levi. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)| \, dx < \infty,$$

entonces $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ también es $L^1(\mathbb{R}^d)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \, dx.$$

Demostración. Ver [4, p. 55]. □

Lema de Derivación de Integrales Paramétricas. Sea $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_t(x) = f(x, t)$ es integrable para cada $t \in [a, b]$. Sea $F(t) = \int_X f(x, t) \, d\mu(x)$.

1. Si existe $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$|f(x, t)| \leq |g(x)| \quad \text{para todo } (x, t) \in X \times [a, b],$$

y

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0) \quad \text{para cada } x \in X,$$

entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$. En particular, si $f_x(t)$ es continua, F también.

2. Si existe $\partial f / \partial t$ y hay cierta $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq |g(x)| \quad \text{para todo } (x, t) \in X \times [a, b],$$

entonces F es diferenciable y

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Demostración. Ver [4, p. 56]. □

Observación. Aunque el resultado anterior esté formulado en términos de un intervalo $[a, b]$, la realidad es que si la función está definida en un intervalo abierto (o el propio \mathbb{R}), el resultado sigue siendo válido, pues basta con tomar un intervalo cerrado cerca del punto en el que se quiere evaluar la función (la diferenciabilidad es una propiedad local, al fin y al cabo).

El siguiente teorema que vamos a enunciar es de gran utilidad a la hora de realizar cálculos con integrales. Primero enunciamos su versión general, tal y como está en la bibliografía. Téngase en cuenta que el conjunto $L^+(X)$ es el conjunto de funciones medibles positivas en X .

Teorema de Fubini-Tonelli. Sean (X, \mathcal{M}, μ) y (Y, \mathcal{N}, ν) espacios de medida σ -finitos.

1. (Tonelli) Si $f \in L^+(X \times Y)$, entonces las funciones

$$g(x) = \int_Y f_x(y) \, d\nu \quad \text{y} \quad h(y) = \int_X f_x(y) \, d\mu$$

están en $L^+(X)$ y $L^+(Y)$ respectivamente y

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \nu) &= \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu \, d\mu \\ &= \int_Y \int_X f(x, y) \, d\mu \, d\nu. \end{aligned} \tag{A.1}$$

2. (Fubini) Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ en casi todo $x \in X$, $f_y \in L^1(\mu)$ en casi todo $y \in Y$, las funciones

$$g(x) = \int_Y f_x(y) \, d\nu \quad \text{y} \quad h(y) = \int_X f_y(x) \, d\mu$$

definidas en casi todo punto están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente, y (A.1) es cierta.

Demostración. Ver [4, p. 67]. □

“Los teoremas de Fubini y Tonelli se suelen usar de forma conjunta. Normalmente, uno desea revertir el orden de integración de una integral doble $\int f \, d\mu \, d\nu$. Primero hay que verificar que $\int |f| \, d(\mu \times \nu) < \infty$ aplicando el teorema de Tonelli para evaluar esta integral como una integral iterada, y luego se aplica el teorema de Fubini para concluir que $\int f \, d\mu \, d\nu = \int f \, d\nu \, d\mu$ ” ([4, p. 68]).

Vamos, por último, a mencionar un resultado de cambio de variable al integrar que utilizamos durante el trabajo. Recordemos que $GL_n(\mathbb{R})$ denota al grupo de matrices invertibles de orden n con coeficientes en \mathbb{R} .

Teorema de Cambio de Variable Lineal. Sea $T \in GL_n(\mathbb{R})$. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible Lebesgue, entonces $f \circ T$ también lo es. Si además $f \in L^1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^d} (f \circ T)(x) \, dx.$$

Demostración. Ver [4, p. 73]. □

Definición A.7. Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, una aplicación $\phi \in C^1(\Omega)$ se dice que es un **difeomorfismo** si es inyectiva y sus parciales son todas invertibles en Ω .

Teorema del Cambio de Variable. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto y $\phi \in C^1(\Omega)$ un difeomorfismo. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible Lebesgue, entonces $f \circ \phi$ también lo es. Si además $f \in L^1$, o es no negativa, entonces

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) \, dx = \int_{\Omega} (f \circ \phi)(y) |\det J(\phi)| \, dy.$$

Ejemplo A.8 (coordenadas esféricas). Si f es una función que verifica las condiciones del teorema anterior, entonces la igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f(r\vec{n}) r^{d-1} \, dr \, d\sigma(\vec{n}) \\ &= \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(x(\theta)) r^{d-1} (\text{sen } \theta_1)^{d-2} \cdots (\text{sen } \theta_{d-2}) \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

es cierta (ver [5, p. 591]), donde

$$\begin{aligned} x_1(\theta) &= r \cos \theta_1, \\ x_2(\theta) &= r \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3(\theta) &= r \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \cos \theta_3, \\ &\vdots \\ x_{d-1}(\theta) &= r \text{sen } \theta_1 \cdots \text{sen } \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, \\ x_d(\theta) &= r \text{sen } \theta_1 \cdots \text{sen } \theta_{d-2} \text{sen } \theta_{d-1}. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior es uno de los cambios de variable clásicos que se pueden realizar en \mathbb{R}^d . Este nos será de gran utilidad, como pone de manifiesto la siguiente proposición (a la que recurriremos a menudo durante el texto).

Lema A.9. La integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |x|)^n} \, dx$$

converge si y sólo si $n > d$.

Demostración. Primero, debemos fijarnos que el integrando es siempre positivo, así que estamos en las condiciones del Teorema del Cambio de Variable. Podemos entonces reescribir la integral utilizando coordenadas polares:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |x|)^n} \, dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{(1 + r)^n} r^{d-1} \, d\sigma(\vec{n}) \, dr = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r)^n} r^{d-1} \, dr.$$

$\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$ es la medida de la esfera, y es una constante positiva, así que no interviene en la finitud de la integral y la podemos ignorar. Además, de nuevo como el integrando es no negativo, podemos separar la integral en dos partes (ver [4, p. 51]):

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+r)^n} r^{d-1} dr = \int_0^1 \frac{1}{(1+r)^n} r^{d-1} dr + \int_1^\infty \frac{1}{(1+r)^n} r^{d-1} dr.$$

Vamos a probar la finitud de cada integral por separado. Para la segunda, las acotaciones

$$r \leq 1+r \leq 2r$$

son ciertas, y nos permiten afirmar con rigor que

$$\frac{1}{2^n} \int_1^\infty r^{d-1-n} dr \leq \int_1^\infty \frac{1}{(1+r)^n} r^{d-1} dr \leq \int_1^\infty r^{d-1-n} dr$$

Si $n \geq d+1$, la integral de la derecha es convergente y por tanto también lo es la del centro. Por el contrario, si $n < d+1$, la de la izquierda es divergente y por tanto también la del centro.

La primera integral siempre es convergente, pues

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+r)^n} r^{d-1} dr \leq \int_0^1 r^{d-1} dr = \frac{1}{d} [r^d]_0^1 = \frac{1}{d},$$

luego su convergencia no depende de n y la original converge si y sólo si $n > d$. □

Lema A.10. *La integral*

$$\int_{|\xi| \leq 1} \frac{1}{|\xi|^n} d\xi$$

es convergente si y solo si $n < d$.

Demostración. Haciendo un cambio a coordenadas polares vemos que

$$\int_{|\xi| \leq 1} \frac{1}{|\xi|^n} d\xi = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{r^n} r^{d-1} d\sigma(\vec{n}) dr = \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{d-n-1} dr.$$

Si $d-n=0$ entonces

$$\int_0^1 r^{d-n-1} dr = \int_0^1 r^{-1} dr = [\log(r)]_0^1 = \infty,$$

luego la integral diverge. Si $d-n \neq 0$ entonces

$$\int_0^1 r^{d-n-1} dr = \frac{1}{d-n} [r^{d-n}]_0^1,$$

que es finita si y solo si $d-n > 0$, es decir, $n < d$. □

A.2. Espacios L^p

Que utilicemos la notación $L^1(\mathbb{R}^d)$ para referirnos a las funciones integrables en \mathbb{R}^d se debe a que este espacio es una particularización del espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$, que definimos a continuación.

Definición A.11. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio $L^p(\mathbb{R}^d)$ como el conjunto de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Observación. La función anterior permitimos que tome valor ∞ , que coincide con el hecho de que la función no pertenezca al espacio correspondiente.

Como hemos hecho en el caso del espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$, consideramos dos funciones de este espacio como equivalentes si coinciden en casi todo punto.

A.3. Funciones con soporte compacto

Definición A.12. Dada una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ continua, definimos su **soporte** (y lo denotamos por $\text{sop } f$) al conjunto cerrado más pequeño tal que f es nula fuera de él.

Si además es un compacto, decimos que f tiene **soporte compacto**, y denotamos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de todas las funciones con esta característica.

Si además para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \varepsilon\}$ es compacto, entonces decimos que f **se desvanece en el infinito**, y denotamos por $C_0(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de todas las funciones con esta propiedad.

Es inmediato deducir que $C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$. Además, si exigimos que las funciones sean de clase C^∞ en lugar de simplemente continuas, las definiciones anteriores siguen siendo válidas pero denotamos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ a los conjuntos de funciones de clase C^∞ con soporte compacto y que se desvanecen en el infinito, respectivamente.

Lema A.13. El espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ (para cada $1 \leq p < \infty$) y en $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. (Véase [4, p. 245]). □

Gráficas interactivas

Al principio del Capítulo 1 hemos explicado una forma visual de entender el integrando de la transformada de Fourier. En este capítulo vamos a ver una forma de hacer esto mismo de forma interactiva, de manera que podamos jugar con los parámetros de la función y ver cómo afectan a su transformada.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.widgets import Slider, Button
4
5
6 # Función a visualizar.
7 def f(t):
8     return np.sin(-2*np.pi*t)
9     # return np.exp(-t*t)
10
11 # Curva generada por la función.
12 def rollup(t, freq):
13     return [f(t) * np.cos(-2 * freq * np.pi * t), \
14             f(t) * np.sin(-2 * freq * np.pi * t)]
15
16 def compute_mass_center(data):
17     return [np.mean(data[0]), np.mean(data[1])]
18
19 # Parámetros iniciales.
20 a = -2
21 b = 2
22 t = np.linspace(a, b, 300)
23 y = rollup(t, 1)
24 center = compute_mass_center(y)
25
26 fig, ax = plt.subplots()
27 ax.set(aspect = 1)
28 ax.set_xlim([-1.5, 1.5])
29 ax.set_ylim([-1.5, 1.5])
30 line, = ax.plot(y[0], y[1], lw=2)
31 point = ax.scatter(center[0], center[1], c='r', marker='o')
32 ax.grid()

```

```
33 ax.set_xlabel('Eje real')
34 ax.set_ylabel('Eje imaginario')
35
36 # Hacemos un espacio para el slider.
37 fig.subplots_adjust(bottom=0.25)
38
39 # Creamos el slider para la frecuencia.
40 axfreq = fig.add_axes([0.25, 0.1, 0.65, 0.03])
41 freq_slider = Slider(
42     ax=axfreq,
43     label='Frecuencia [Hz]',
44     valmin=0.1,
45     valmax=10,
46     valinit=1)
47
48 # Función que se llama cuando se mueve el slider.
49 def update(val):
50     t = np.linspace(a, b, 300 + int(100 * freq_slider.val))
51     y = rollup(t, freq_slider.val)
52     center = compute_mass_center(y)
53
54     line.set_xdata(y[0])
55     line.set_ydata(y[1])
56     point.set_offsets([center[0], center[1]])
57     fig.canvas.draw_idle()
58
59 freq_slider.on_changed(update)
60
61 plt.show()
```

Bibliografía

- [1] Swanhild Bernstein e Isaac Z. Pesenson. “Crystallographic and Geodesic Radon Transforms on $SO(3)$: Motivation, Generalization, Discretization”. Ver. 2. En: (2012). DOI: 10.48550/ARXIV.1210.2652. URL: <https://arxiv.org/abs/1210.2652> (visitado 14-05-2023).
- [2] Bernardo Cascales Salinas y col. *Análisis funcional*. Murcia: Electolibris, 2012. ISBN: 978-84-940688-2-9.
- [3] Euclides y David E. Joyce. *Euclid’s Elements*. 1997. URL: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html> (visitado 20-04-2023).
- [4] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics. New York: Wiley, 1999. 386 págs. ISBN: 978-0-471-31716-6.
- [5] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer, 2014. 638 págs. ISBN: 978-1-4939-1193-6.
- [6] G. Nolet. “Seismic Wave Propagation and Seismic Tomography”. En: *Seismic Tomography*. Ed. por Guust Nolet. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, págs. 1-23. ISBN: 978-90-277-2583-7 978-94-009-3899-1. DOI: 10.1007/978-94-009-3899-1_1. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-3899-1_1 (visitado 18-05-2023).
- [7] Grant Sanderson. *But what is the Fourier Transform? A visual introduction*. YouTube. 26 de ene. de 2018. URL: <https://youtu.be/spUNpyF58BY> (visitado 28-04-2023).
- [8] David V Stark y col. “SDSS-IV MaNGA: Characterizing Non Axisymmetric Motions in Galaxy Velocity Fields Using the Radon Transform”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 480.2 (21 de oct. de 2018), págs. 2217-2235. ISSN: 0035-8711, 1365-2966. DOI: 10.1093/mnras/sty1991. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/480/2/2217/5061639> (visitado 14-05-2023).

- [9] Elias M. Stein y Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis 1. Princeton: Princeton University Press, 2003. 311 págs. ISBN: 978-0-691-11384-5.