UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

Funciones holomorfas y productos infinitos

Ginés Gomariz Motellón

Curso 2023-2024

Declaración de originalidad

Ginés Gomariz Motellón, autor del Trabajo de Fin de Grado “Funciones holomorfas y productos infinitos”, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 29 de mayo de 2024

Fdo.: Ginés Gomariz Motellón

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Deseo expresar mi más profundo a agradecimiento a Gustavo Garrigós, por su inestimable ayuda y apoyo durante la realización de este trabajo.

También quiero agradecer por el apoyo incondicional y confianza que me han transmitido a mi familia, en especial a mis padres Ginés e Irene, mi hermana María Jesús, mi abuela Encarnación y mis tías Ana, María Jesús y Loli; a mi pareja Úrsula; a mis amigos, en especial Ismael, Juan de Dios, Juan David, Samuel, Miguel y Mario por la compañía en estos años de carrera; a quienes le dedico este trabajo. Sin vosotros, nada de esto hubiera sido posible.

Índice general

Abstract

The concept of **infinite product** arises parallel to infinite series, but replacing sums with products, fostering the development of an entirely new theory. They are a relevant pillar in **Complex Analysis**, highlighting the *Weierstrass Factorization Theorem* 2.1.9, which allows to decompose a holomorphic function as an infinite product from its zeros. Additionally, it is a powerful tool to study the Euler Gamma function (3.3.7), enabling its complex extension to the negative real part.

In **Chapter 1**, we will study the basic notions of **infinite products of complex numbers**, offering an initial definition of convergence; and we will strengthen this definition with the introduction of *proper convergence* given by 1.1.3. After that, we will illustrate these concepts with many examples and propose a necessary condition to ensure convergence; see 1.1.7. The main result will be Proposition 1.1.11, which provides a sufficient condition, $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$, for the proper convergence of the infinite product $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ in $\mathbb{C}$; this will lead us to define the concept of *absolute convergence* of an infinite product, see Definition 1.1.14.

Based on infinite products of complex numbers, we will move on to the study of **infinite products of functions**, offering a definition of uniform convergence, see Definition 1.2.17. With this in mind, we will study the uniform convergence of the product of functions $\prod_{n\geq 1}(1+g_n(z))$ in subsets of $\mathbb{C}$; and finally, we will extrapolate the result to the case of **infinite products of holomorphic functions** $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in open sets of $\mathbb{C}$.

Theorem 1.2.21 addresses this last issue, stating that if g_n are holomorphic in Ω and $\sum_{n\geq 1} g_n$ converges absolutely and uniformly on compact subsets of Ω, then $\prod_{n\geq 1}(1+g_n)$ also converges, defining a function $g \in \mathscr{H}(\Omega)$, whose zeros have the property

$$\mathscr{Z}_g(\Omega) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{Z}_{1+g_n}(\Omega).$$

In **Chapter 2** we address Weierstrass's classical results. On the one hand, find a function $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ whose zeros are given by a fixed sequence $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On the other hand, given a function $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, find a canonical factorization as an infinite product, such that each factor contains a zero of the function f.

The first question is introduced in Section 2.1. Notice an immediate case when $\mathscr{Z}_f(\Omega) = \{a_1,\ldots,a_n\}$ with multiplicities m_j respectively, as it is enough to take the polynomial given by these zeros and their respective multiplicities

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{m_j}.$$

However, this expression does not extend obviously when $n=\infty$, and it is necessary to introduce suitable factors to ensure the convergence of the infinite product.

We start by defining the **elementary factors**, 2.1.2. These factors are of the form

$$E_p(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots\frac{z^p}{p}},$$

and satisfy that $E_p(z/a) = 0$ if and only if $z = a$. The first important theorem, Theorem 2.1.6, tells us that given a fixed sequence $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (with $\lim_n a_n = \infty$), if we choose p_n large enough, the infinite products

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge absolutely and uniformly on compact subsets of $\mathbb{C}$, and define a holomorphic function with

$$\mathscr{Z}_f(\mathbb{C}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

This theorem solves Weierstrass's zero problem, which is the first question posed earlier.

The *Weierstrass Factorization Theorem*, 2.1.9, finally addresses the second question, showing that any function f with zeros $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ repeated according to multiplicity can be expressed in the canonical form as

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right), \qquad g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

To conclude, we will offer an interesting consequence of these results, the *Pringsheim Interpolation Theorem*, 2.1.10, which states that given two fixed sequences $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, there exists a function $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ such that

$$f(a_n) = b_n.$$

As an application, we will deduce the expansion of the sine function as a product of its zeros,

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

The proof we will provide for this formula is based on *Liouville's Theorem*, A.1.6, and is extracted from [10]. From this expansion, we can derive a couple of consequences: on the one hand, the identity that solves the so-called *Basel Problem*,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

and on the other hand, the *Wallis formula*,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

In **Chapter 3**, we will analyze one of the most important functions in Analysis, the **Euler Gamma function**.

We will start by defining a holomorphic function whose zeros are the negative integers, given by

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

This function plays an auxiliary role to get the Gamma function. From it, we will get the value of the **Euler-Mascheroni constant**

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right).$$

Next, we will formally define the Gamma function as an infinite product given by (3.3.7), that is,

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,\ldots\}. \tag{0.0.1}$$

This definition will allow us to prove that $\Gamma(1)=1, \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ for all $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, and that $\Gamma\in\mathscr{M}(\mathbb{C})$, with poles at the negative integers and zero; see 3.3.3, establishing the concept of extension of the factorial operator, 3.3.6.

From the definition of the Gamma function; see 3.3.2, we can prove the *Euler reflection formula*, 3.3.7,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

This result, along with Definition 3.3.6, will allow us to deduce the factorial $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

We conclude the study of the Gamma function by deducing the well-known *Legendre duplication formula*,

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

All these identities and properties will be derived fairly simply from the infinite product formula for $\Gamma(z)$ in (0.0.1).

In Section 3.4, we address the equivalence of the previous definition with the well-known integral formula, which we define for $\Re(z)>0$, as

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

In order to obtain this identity, we will start proving the *Bohr-Mollerup Theorem*, 3.4.9, which states that any function that generalizes the factorial and is logarithmically convex on $\mathbb{R}^+$ is unique and is given by the expression

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{(x+n)(x+(n-1))\ldots(x+1)x}.$$

Finally, in Section 3.4.2, it is demonstrated that both $\Gamma(z)$ and $\widetilde{\Gamma}(z)$ verify the conditions of Bohr-Mollerup Theorem; allowing us to prove the equality between them if $\Re(z)>0$. This equality enables a “holomorphic extension” for the integral definition based on the infinite product expansion of the Gamma function.

We conclude by offering the appendix, divided into two sections dedicated to auxiliary results. The first section, A.1, focuses on traditional definitions and results of complex variable, as well as convergence results. On the other hand, the second section, A.2, focuses on results of integration in complex variable.

Resumen

El concepto de **producto infinito** surge de manera paralela a las series infinitas, pero cambiando sumas por productos, y favoreciendo el desarrollo de toda una nueva teoría. Son un pilar relevante en el **Análisis Complejo**, destacando el *Teorema de Factorización de Weierstrass* 2.1.9, que permite descomponer una función holomorfa como producto infinito a partir de los ceros de la misma. Así mismo, es una potente herramienta para el estudio de la función Gamma de Euler (3.3.7), habilitando su extensión compleja a la parte real negativa.

En el **capítulo 1**, estudiaremos las nociones básicas sobre **productos infinitos de números complejos**, ofreciendo una primera definición de convergencia; así como fortaleceremos esa definición con la introducción de la *convergencia propia* dada por 1.1.3. Tras ello, ilustraremos estos conceptos con numerosos ejemplos y propondremos una condición necesaria para garantizar la convergencia; ver 1.1.7. El resultado principal será la Proposición 1.1.11, que da una condición suficiente, $\sum_{n\geq 1}|a_n|<\infty$, para la convergencia propia del producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ en $\mathbb{C}$; esto nos llevará a definir el concepto de *convergencia absoluta* de un producto infinito, ver Definición 1.1.14.

Con base en los productos infinitos de números complejos, daremos un salto al estudio de los **productos infinitos de funciones**, ofreciendo una definición de convergencia uniforme, ver Definición 1.2.17. Con objeto en la misma, estudiaremos la convergencia uniforme del producto de funciones $\prod_{n\geq 1}(1+g_n(z))$ en subconjuntos de $\mathbb{C}$; para finalmente extrapolar el resultado al caso del **producto de funciones holomorfas** $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en abiertos de $\mathbb{C}$.

El Teorema 1.2.21 responde esta última cuestión, afirmando que si g_n son holomorfas en Ω y $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de Ω, entonces también lo hace $\prod_{n\geq 1}(1+g_n)$, que además define una función $g\in\mathscr{H}(\Omega)$, cuyos ceros tienen la propiedad

$$\mathscr{Z}_g(\Omega)=\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{Z}_{1+g_n}(\Omega).$$

En el **capítulo 2** abordamos los resultados clásicos de Weierstrass. Por un lado, encontrar una función $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$, cuyos ceros vienen dados por una sucesión prefijada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por otro lado, dada una función $f\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$, encontrar una factorización canónica como producto infinito, de modo que cada factor contenga un cero de la función f.

Se introduce la primera cuestión en la Sección 2.1. Notar un caso inmediato cuando $\mathscr{Z}_f(\Omega)=\{a_1,\dots,a_n\}$ con multiplicidades m_j respectivamente, pues basta tomar el polinomio dado por esos ceros y sus multiplicidades respectivas

$$f(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{m_j}.$$

Esta expresión, sin embargo, no se extiende de manera obvia cuando $n = \infty$, y es necesario introducir factores adecuados que garanticen la convergencia del producto infinito.

Comenzamos definiendo los **factores elementales**, 2.1.2. Estos factores son de la forma

$$E_p(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots\frac{z^p}{p}},$$

y cumplen que $E_p(z/a) = 0$ si y solo si $z = a$. El primer teorema importante, Teorema 2.1.6, nos dice que dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fija (con $\lim_n a_n = \infty$), si escogemos p_n suficientemente grande, los productos infinitos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

convergen absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, y definen una función holomorfa con

$$\mathscr{Z}_f(\mathbb{C}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Este teorema resuelve el problema de los ceros de Weierstrass, que es la primera cuestión planteada anteriormente.

El *Teorema de Factorización de Weierstrass*, 2.1.9, acaba respondiendo a la segunda cuestión, mostrando que toda función f con ceros $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ repetidos según multiplicidad, se puede expresar en forma canónica de la forma

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right), \qquad g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

Para concluir, ofreceremos como consecuencia interesante de estos resultados, el *Teorema de Interpolacion de Pringsheim*, 2.1.10, que afirma que dadas dos sucesiones fijas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(a_n) = b_n.$$

Como aplicación, deduciremos la expansión del seno como producto de sus ceros,

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

La demostración que daremos de esta fórmula se basa en el *Teorema de Liouville*, A.1.6, y ha sido extraída de [10]. A partir de esta expansión podemos demostrar un par de consecuencias derivadas del mismo: por un lado, la identidad que resuelve el llamado *Problema de Basilea*,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

y por otro lado, la *fórmula de Wallis*,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

En el **capítulo 3**, analizaremos una de las funciones más relevantes del Análisis, la función **Gamma de Euler**.

Iniciaremos definiendo una función holomorfa cuyos ceros son los enteros negativos, dada por

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}.$$

Esta función juega un papel auxiliar para obtener la función Gamma. A partir de ella, obtendremos el valor de la **constante de Euler-Mascheroni**

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right).$$

Acto seguido, definiremos formalmente la función Gamma como producto infinito dado por (3.3.7), es decir,

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,\ldots\}. \tag{0.0.2}$$

Esta definición permitirá probar que $\Gamma(1)=1, \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, y que $\Gamma\in\mathscr{M}(\mathbb{C})$, con polos en los enteros negativos y el cero; ver 3.3.3, estableciendo el concepto de extensión del operador factorial, 3.3.6.

A partir de la definición de la función Gamma; ver 3.3.2, se puede probar la *fórmula de reflexión de Euler*, 3.3.7,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Este resultado, junto a la Definición 3.3.6, permitirá deducir el factorial $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Terminamos el estudio de la función Gamma deduciendo la conocida como *fórmula de Duplicación de Legendre*,

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Todas estas identidades y propiedades se obtendrán de forma relativamente sencilla a partir de la fórmula del producto infinito de $\Gamma(z)$ en (0.0.2).

En la sección 3.4 abordamos la equivalencia de la definición anterior con la conocida fórmula integral, que definimos para $\Re(z)>0$, como

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Para obtener esta identidad comenzaremos probando el *Teorema de Bohr-Mollerup*, 3.4.9, el cual afirma que toda función que generaliza el factorial y es logarítmicamente convexa en $\mathbb{R}^+$, es única y viene dada por la expresión

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x\cdot n!}{(x+n)(x+(n-1))\ldots(x+1)x}.$$

Finalmente, en la sección 3.4.2, se demuestra que tanto $\Gamma(z)$ como $\widetilde{\Gamma}(z)$ verifican las condiciones del Teorema de Bohr-Mollerup; permitiendo probar la igualdad entre ambas si $\Re(z)>0$.

Esta igualdad habilita una “extensión holomorfa” para la definición integral basada en la expansión en producto de la función Gamma.

Concluimos ofreciendo el apéndice, dividido en dos secciones destinadas a resultados auxiliares. La primera sección, A.1, se centra en definiciones y resultados tradicionales de variable compleja, así como resultados de convergencia. Por otro lado, la segunda sección, A.2, se centra en resultados de integración en variable compleja.

1 Conceptos previos

En este primer capítulo, presentaremos las bases principales del trabajo, centrándonos en el estudio de los productos infinitos de números complejos y de funciones, ofreciendo condiciones para la convergencia de los mismos.

Se han utilizado como referencias principales para este capítulo los textos [9, Chapter 5] sección 3.1, [7, Chapter 7] sección 5, [8, Chapter 15] Infinite Products, 1.2. Productos Infinitos, [11, capítulo 7], sección 7.2 y [6, Chapter 2].

1.1. Productos infinitos de números complejos

Definición 1.1.1 Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Diremos que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

es **convergente** si existe, y es finito, el límite de los productos parciales; es decir, si existe

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n := l \in \mathbb{C}. \tag{1.1.1}$$

En tal caso, diremos que l es el límite del producto. En caso contrario, diremos que el producto **no converge a ningún límite** o que es **divergente**.

Observación 1.1.2 Bajo esta definición, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0} = 0$, entonces el producto vale 0 y es trivialmente convergente con independencia del comportamiento de los otros términos u_n de la sucesión. Esto no siempre resulta conveniente, y nos obliga a crear una definición algo más fuerte de convergencia.

Definición 1.1.3 Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ **converge propiamente** o **de manera propia** al número complejo $l \in \mathbb{C}$ si se cumple (1.1.1) y:

(i) O bien $l \neq 0$.

(ii) O bien $l = 0$ y existe $N_0 \in \mathbb{N}$ y $\ell_0 \neq 0$ tal que

$$\prod_{n=N_0}^{N} u_n \xrightarrow{N\to\infty} \ell_0.$$

En particular, el conjunto de ceros de la sucesión $\mathscr{Z}(u_n) := \{n \in \mathbb{N} : u_n = 0\}$ es a lo sumo finito.

A partir de las previas definiciones, se siguen las siguientes afirmaciones:

1. La convergencia propia implica la convergencia del producto a $l \in \mathbb{C}$. El recíproco no es cierto en general, como muestra el Ejemplo 1.1.4 más abajo. De hecho, si el límite del producto es cero, no implica que haya convergencia propia.
2. Si $u_n \neq 0$ para todo n natural y $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge a l de manera propia, entonces $l \neq 0$.
3. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente a $l \neq 0$ si y solo si $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ es convergente.

Esta última afirmación se deduce fácilmente tomando límites y aplicando que el inverso del producto es el producto del inverso, es decir, como $l \neq 0$:

$$l = \lim_N \prod_{n=1}^{N} u_n \Longleftrightarrow \lim_N \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim_N \prod_{n=1}^{N} u_n} = \frac{1}{l}.$$

Ejemplo 1.1.4 Consideramos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ dada por $u_n = \frac{n}{n+1}$. Siguiendo nuestra notación, desearíamos ver si converge el producto dado por la definición anterior:

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{N}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} = 0.$$

Luego, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge a 0, pero no de manera propia, porque:

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=N_0}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=N_0}^{N} \frac{n}{n+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_0}{N_0+1}\frac{N_0+1}{N_0+2}\cdots\frac{N}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_0}{N+1} = 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 1.1.5 Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ dada por $u_n = \frac{n^2}{n^2-1}$ para $n \neq 1$, y $u_1 = 1$. Siguiendo la notación de convergencia:

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n^2}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=2}^{N} \frac{n}{n-1} \prod_{n=2}^{N} \frac{n}{n+1} = \lim_{N\to\infty} N \frac{2}{N+1} = 2.$$

En este caso, $l = 2$, por lo tanto, $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente de manera propia.

Ejemplo 1.1.6 Si tomamos la sucesión $u_n = \frac{n+1}{n}$, entonces el producto infinito diverge a ∞, puesto que

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{N+1}{N} = \lim_{N\to\infty} N+1 = \infty.$$

Para garantizar la convergencia del producto a partir de la Definición 1.1.3, los términos del producto infinito u_n deben converger a 1 necesariamente. Veamos la prueba.

Lema 1.1.7 *Si* $\prod_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathbb{C}$, *con convergencia propia, entonces existe* $\lim_n u_n = 1$.

Demostración. Sea $P_N = \prod_{n=1}^{N} u_n$. Distinguimos dos casos:

1. Si $l \neq 0$, por hipótesis, $\lim_N P_N = \lim_N \prod_{n=1}^{N} u_n = l$. Consideramos el cociente $\dfrac{P_N}{P_{N-1}} = u_N$, que está bien definido porque ningún factor se anula. Entonces:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P_N}{P_{N-1}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} u_N = 1.$$

2. Si $l = 0$, por la condición de convergencia propia, existe N_0 tal que $\prod_{n \geq N_0} u_n$ no se anula. Aplicando el apartado anterior a la sucesión $\hat{u}_n := u_{N_0+n}$, es inmediato que

$$\lim_n u_n = \lim_n \hat{u}_n = 1.$$

□

Observación 1.1.8 La convergencia propia es estrictamente necesaria en este lema.

Contraejemplo 1.1.9 *Sea $u_n = \frac{1}{n}$. Claramente,*

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

pero $\lim_n u_n = 0$, lo que prueba la necesidad de emplear la convergencia propia en 1.1.7.

Ahora, necesitamos estudiar qué condiciones deben cumplirse para la convergencia propia del producto infinito $\prod_{n \geq 1} u_n$. En el caso de las series infinitas complejas, la convergencia depende del comportamiento de la sucesión u_n y su aproximación a 0. Análogamente, cada factor del producto infinito debe ser suficientemente cercano a 1, lo que implica que u_n debe converger rápidamente a 1.

Previo a la demostración, necesitaremos el siguiente lema, en el cual, $\mathrm{Log}(z)$ denota el logaritmo principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ver Definición A.1.3).

Lema 1.1.10 *Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq \frac{1}{2}$. Entonces*

$$\frac{|z|}{2} \leq |\mathrm{Log}(1+z)| \leq \frac{3|z|}{2}. \tag{1.1.2}$$

Demostración. Expresando en serie de Taylor la función logaritmo,

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} z^m}{m}. \tag{1.1.3}$$

Ahora bien, para $|z| \leq \frac{1}{2}$:

$$\left| 1 - \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z} \right| = \left| \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \dots \right| \leq \frac{1}{2}(|z| + |z|^2 + \dots) = \frac{1}{2} \frac{|z|}{1-|z|} \leq \frac{1}{2},$$

y multiplicando por $|z|$ en ambos lados, obtenemos la desigualdad

$$|z - \mathrm{Log}(1+z)| \leq \frac{|z|}{2}.$$

Finalmente, de esta última expresión deducimos que $\dfrac{|z|}{2} \leq |\mathrm{Log}(1+z)| \leq \dfrac{3|z|}{2}$, probando el lema. □

A partir de ahora, reescribiremos los términos del producto como $u_n := 1 + a_n$, con $a_n \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.1.11 *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge **propiamente**. En particular, el producto converge a 0 si y solo si uno de sus factores se anula.*

Demostración. Comenzamos con la primera afirmación. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. Por ser absolutamente convergente, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$, entonces $|a_n|<\frac{1}{2}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $n_0=1$, pues en caso de que $n_0>1$, los términos previos de la sucesión son finitos. Como la inversa compleja de la exponencial es el logaritmo, $1+z=e^{\operatorname{Log}(1+z)}$ si $|z|<1$.

Desarrollando ahora los productos parciales gracias a la igualdad anterior,

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)=\prod_{n=1}^{N}e^{\operatorname{Log}(1+a_n)}=e^{\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}(1+a_n)}=e^{b_N}, \tag{1.1.4}$$

donde $b_N:=\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Log}(1+a_n)$. Cada término de la serie es de la forma $\operatorname{Log}(1+a_n)$, con $|a_n|<\frac{1}{2}$, por lo tanto, aplicando el Lema 1.1.10 a los términos de b_N,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|\operatorname{Log}(1+a_n)|\leq\lim_{N\to\infty}\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}|a_n|<\infty,$$

por lo tanto, la serie compleja converge en módulo y, consecuentemente, la serie original b_N. De esta manera, existe $b\in\mathbb{C}$ tal que $b_N\longrightarrow b$. La continuidad de la función exponencial junto a la convergencia de b_N nos permite ver en (1.1.4) que

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)=e^{b_N}\xrightarrow{N\to\infty}e^{b},$$

lo cual prueba que el producto infinito converge a e^b, siendo este valor no nulo; en particular la convergencia del producto infinito es propia. □

Observación 1.1.12 El recíproco de la anterior proposición no es cierto en general.

Contraejemplo 1.1.13 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $\{\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\dots\}$, es decir:*

$$a_n=\begin{cases}\frac{2}{n+3} & \text{si } n \text{ es impar}\\ \frac{-2}{n+2} & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

Claramente, no es absolutamente convergente, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Sin embargo, el producto infinito con términos $1+a_n$ converge de forma propia, pues por un lado

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{2N}(1+a_n)&=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(N+1)^2}\right)=\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{N+2}{2(N+1)}\longrightarrow\frac{1}{2}\end{aligned}$$

como se comprueba fácilmente por inducción, y de forma análoga existe el límite de

$$\prod_{n=1}^{2N+1}(1+a_n) = \left(1+\frac{1}{N+2}\right)\cdot\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Esto nos da la convergencia propia del producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \frac{1}{2}$.

Este contraejemplo nos motiva a definir una condición más fuerte de convergencia para un producto infinito.

Definición 1.1.14 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **converge absolutamente** si se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty. \tag{1.1.5}$$

En particular, por la Proposición 1.1.11, si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente, también converge de forma propia.

Proposición 1.1.15 *El producto* $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ *converge absolutamente si y solo si existe* n_0 *tal que* $|a_n| < 1$ *para todo* $n \geq n_0$ *y la serie* $\sum_{n\geq n_0}\operatorname{Log}(1+a_n)$ *converge absolutamente.*

Demostración. Bastará ver que si converge absolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, entonces converge absolutamente la serie $\sum_{n\geq n_0}\operatorname{Log}(1+a_n)$ y viceversa. Veamos cada implicación:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si converge $\sum_{n\geq 1}|a_n|$, entonces $a_n \longrightarrow 0$, luego existe un cierto $m\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{1}{2}$ si $n \geq m$. Aplicando el Lema 1.1.10 tenemos:

$$\sum_{n\geq m}|\operatorname{Log}(1+a_n)| \leq \frac{3}{2}\sum_{n\geq m}|a_n| < \infty.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si converge $\sum_{n\geq n_0}|\operatorname{Log}(1+a_n)|$, entonces el término general $\operatorname{Log}(1+a_n) \to 0$, de donde sigue que

$$1+a_n = e^{\operatorname{Log}(1+a_n)} \to 1,$$

y por tanto $a_n \longrightarrow 0$; luego existe un cierto $m \geq n_0$ tal que $|a_n| < \frac{1}{2}$ si $n \geq m$. Aplicando el Lema 1.1.10,

$$\sum_{n\geq m}|a_n| \leq 2\sum_{n\geq m}|\operatorname{Log}(1+a_n)| < \infty.$$

□

Corolario 1.1.16 *Si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge absolutamente.*
2. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$.
3. *Existe* n_0 *tal que* $|a_n| < 1$ *para* $n \geq n_0$ *y* $\sum_{n\geq n_0}|\operatorname{Log}(1+a_n)| < \infty$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Definición 1.1.14 y la Proposición 1.1.15. □

1.2. Producto infinito de funciones

Estudiado el caso para sucesiones numéricas, consideramos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. En este caso, definimos su producto infinito como $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$. Nuevamente, necesitamos estudiar qué sucede con este producto.

Definición 1.2.17 Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones definidas sobre un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. Diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es **puntualmente convergente** a una función f si para cada $z \in S$ el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge propiamente a $f(z)$. Si la convergencia anterior es uniforme diremos que $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ es **uniformemente convergente** a $f(z)$ en el conjunto S.

Observación 1.2.18 En el contexto de los productos infinitos de funciones, siempre supondremos que la convergencia de los productos es propia, de modo que los ceros de la función límite $f(z)$ únicamente provengan de ceros de los factores $f_n(z)$ que la conforman, descartando posibles escenarios problemáticos.

Ejemplo 1.2.19 Sea $f_n : D_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(z) = 1 + z^{2^n}$. Para calcular el producto parcial hasta el N-ésimo término obtenemos, multiplicando por $(1 - z^2)$,

$$\begin{aligned}
\lim_N (1-z^2)\prod_{n=1}^{N}(1+z^{2^n}) &= \lim_N (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)\dots(1+z^{2^N}) \\
&= \lim_N (1-z^4)(1+z^4)\dots(1+z^{2^N}) \\
&= \lim_N (1-z^{2^{N+1}}) = 1, \quad \text{si } |z|<1.
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos convergencia puntual (propia) en $\{|z| < 1\}$, siendo

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z^2}.$$

El siguiente resultado da un criterio que garantiza la convergencia absoluta y uniforme de los productos infinitos de funciones.

Lema 1.2.20 *Sea $S \subset \mathbb{C}$ y sea $g_n : S \longrightarrow \mathbb{C}$ una familia de funciones tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ converge uniformemente para todo $z \in S$. Entonces*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$$

converge absoluta y uniformemente para todo $z \in S$.

Demostración. La convergencia absoluta para cada $z \in S$ fijo es obvia por la Definición 1.1.14. Resta probar que la convergencia es uniforme. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en las condiciones del enunciado. Entonces dado $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N_0}^{\infty} |g_n(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in S$. En particular, llamando $N_1 = N_0(\frac{1}{2})$, tenemos $|g_n(z)| < \frac{1}{2}$ para todo $n \ge N_1$ y todo $z \in S$, y podemos definir sin problema el logaritmo principal $\mathrm{Log}\,(1+g_n(z))$.

Sea $G(z) := \sum_{n=N_1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+g_n(z))$, y veamos que converge absoluta y uniformemente para todo $z \in S$; en efecto, si $N \geq N_0(\varepsilon)$ entonces por el Lema 1.1.10,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\operatorname{Log}(1+g_n(z))| \leq \frac{3}{2}\sum_{n=N}^{\infty} |g_n(z)| < \frac{3}{2}\varepsilon, \quad \forall\, z \in S.$$

Tomando exponenciales y usando el Lema A.1.8, esto implica convergencia uniforme en

$$e^{G(z)} = \lim_{M\to\infty} e^{\sum_{n=N_1}^{M} \operatorname{Log}(1+g_n(z))} = \lim_{M\to\infty} \prod_{n=N_1}^{M} e^{\operatorname{Log}(1+g_n(z))} = \lim_{M\to\infty} \prod_{n=N_1}^{M} (1+g_n(z)),$$

y por tanto se tiene

$$e^{G(z)} = \prod_{n=N_1}^{\infty} (1+g_n(z)),$$

donde la convergencia es uniforme en S. Finalmente, como $\prod_{n=1}^{N_1-1}(1+g_n(z))$ es finito, concluimos que

$$f(z) := e^{G(z)} \prod_{n=1}^{N_1-1} (1+g_n(z)) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$$

converge absoluta y uniformemente para todo $z \in S$. □

1.2.1. Producto infinito de funciones holomorfas

El siguiente resultado ofrece un criterio para la convergencia absoluta y uniforme de un producto infinito de funciones holomorfas.

Teorema 1.2.21 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de Ω. Entonces*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$$

converge absoluta y uniformemente sobre compactos de Ω. Además, f es holomorfa en Ω y si a es un cero de f, entonces es un cero de una cantidad finita de funciones $1+g_n(z)$ y su multiplicidad es la suma de las multiplicidades de estas, es decir,

$$m(a,f) = \sum_{n=1}^{\infty} m(a, 1+g_n).$$

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata del Lema 1.2.20 aplicado sobre compactos de Ω. La holomorfía de f se sigue del Teorema A.1.9 del apéndice. Para la segunda parte, si a es un cero de f, tomamos $r > 0$ tal que $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$, y por el Lema 1.2.20, el producto converge uniformemente en $\overline{D}_r(a)$ y, además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{N-1}(1+g_n(z)),$$

donde

$$e^{G(z)} = \prod_{n=N}^{\infty}(1+g_n(z)).$$

Además, $e^{G(z)}$ no se anula nunca y

$$\mathrm{m}(a,f) = \sum_{n=1}^{N-1} \mathrm{m}(a, 1+g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(a, 1+g_n).$$

$\square$

Observación 1.2.22 Este resultado, junto al M-test de Weierstrass A.1.7, permite probar que el producto infinito del Ejemplo 1.2.19 es uniformemente convergente sobre compactos del disco unidad, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^n} < \infty, \quad r \in (0,1).$$

Corolario 1.2.23 *En las condiciones del anterior teorema, si para todo $z \in \Omega$ se tiene $g_n(z) \neq -1$, entonces*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n'(z)}{1+g_n(z)}$$

con convergencia uniforme sobre compactos de Ω.

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ compacto y tomamos $f_n(z) := 1 + g_n(z)$. Sea

$$F_N(z) := \prod_{n=1}^{N} f_n(z).$$

Por el Teorema 1.2.21, $F_N \longrightarrow f$ absoluta y uniformemente. Por el Teorema A.1.9, deducimos que la sucesión de derivadas converge uniformemente a la derivada de la sucesión, es decir, $F_N' \longrightarrow f'$ en K. Como $|F_N|$ está uniformemente acotada inferiormente en K por una constante no nula, nos permite concluir que $\frac{F_N'}{F_N} \longrightarrow \frac{f'}{f}$ uniformemente en K. Como esto vale para todo compacto arbitrario K en Ω, el resultado se cumple para todo $z \in \Omega$.

En la expresión de F_N, tomamos derivadas logarítmicas, de manera que

$$\frac{F_N'}{F_N} = \frac{\sum_{n=1}^{N} f_n' \left(\prod_{j \neq n} f_j\right)}{\prod_{n=1}^{N} f_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'}{f_n}.$$

Por lo tanto, tomando límites:

$$\frac{f'}{f} = \lim_{N\to\infty} \frac{F_N'}{F_N} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'}{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n'}{1+g_n},$$

probando el resultado. $\square$

2 Factorización de funciones holomorfas

Este capítulo está centrado en la factorización de funciones holomorfas en forma de producto infinito basado en los ceros de las mismas.

Entre los principales resultados de este capítulo, destacan el Teorema de Factorización de Weierstrass, 2.1.9, el teorema de interpolación de Pringsheim, 2.1.10, y la expansión del seno como producto infinito, (2.2.7).

Se ha utilizado como principales referencias para este capítulo los textos [7, Chapter 7] sección 5, [8, Chapter 15] The Weierstrass Factorization Theorem, [10, Chapter 6] sección 6.3 y [4, The Solutions] The Basel Problem - Euler's Solution.

2.1. Ceros y factorización de funciones

Un problema clásico en el ámbito del análisis complejo radica en determinar la existencia de una función holomorfa cuyos ceros, con sus respectivas multiplicidades, estén en un conjunto prefijado.

Según el Principio de Identidad A.1.11, los ceros de una función holomorfa no pueden tener puntos de acumulación. Por lo tanto, considerando un conjunto abierto Ω, una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sin puntos de acumulación en Ω y una sucesión de enteros $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, buscamos una función f que satisfaga $\mathscr{Z}_f(\Omega) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathrm{m}(a_n, f) = m_n$.

Es evidente que si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finita, entonces nos encontramos ante un caso trivial respecto a la cuestión de partida. Si $\{a_1,\dots,a_r\}$ son los ceros y $\{m_1,\dots m_r\}$ sus multiplicidades asociadas, entonces bastaría tomar

$$p(z) = c(z-a_1)^{m_1}\dots(z-a_r)^{m_r},$$

que es holomorfa en $\mathbb{C}$ y cumple las propiedades exigidas.

En el caso infinito, la cuestión necesariamente se complica y no puede resolverse de manera directa. Para abordar este problema, recurriremos a las definiciones y resultados de productos infinitos presentados en el capítulo 1. Nuestro objetivo es demostrar el Teorema de Factorización de Weierstrass. Antes de ello, enunciamos y probamos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1 *Sea $h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}_h(\mathbb{C}) = \emptyset$. Entonces existe una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $h(z) = e^{f(z)}$.*

Demostración. En primer lugar, dada una función $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, existe $G \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $G'(z) = g(z)$, pues si $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, basta considerar la serie

$$G(z) := c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad c_0 \in \mathbb{C} \implies G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = g(z).$$

Por otro lado, si suponemos que existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $h(z) = e^{f(z)}$ y tomamos derivadas logarítmicas, deducimos que

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = f'(z),$$

y como h no se anula nunca, entonces $\dfrac{h'(z)}{h(z)} \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$; de manera que tenemos la expresión que debería de tener nuestra función buscada f.

Juntando ambas propiedades, existirá una función $G \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $G'(z) = \dfrac{h'(z)}{h(z)}$. Sea

$$F(z) := \frac{e^{G(z)}}{h(z)}.$$

Claramente, $F \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, ya que es un cociente de funciones holomorfas con denominador $h(z)$ no nulo para todo $z \in \mathbb{C}$. Por otro lado,

$$F'(z) = \frac{\left(e^{G(z)}\right)' h(z) - e^{G(z)} h'(z)}{h(z)^2} = \frac{e^{G(z)} G'(z) h(z) - e^{G(z)} h'(z)}{h(z)^2},$$

y como $G'(z) = \dfrac{h'(z)}{h(z)}$, se sigue que $e^{G(z)} G'(z) h(z) - e^{G(z)} h'(z) = 0$, luego $F'(z) = 0$, lo que significa que $F(z) = c \in \mathbb{C}$. Finalmente,

$$c = \frac{e^{G(z)}}{h(z)} \implies h(z) = \frac{1}{c} e^{G(z)} \implies h(z) = e^{f(z)},$$

donde $f(z) = e^{G(z) - \mathrm{Log}(c)}$, probando el resultado. □

2.1.1. Factores elementales

En este apartado, definiremos una familia de funciones que son fundamentales para la prueba del Teorema de Factorización de Weierstrass. En lo sucesivo, trabajaremos sobre $\mathbb{C}$, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.1.2 Dado $p \in \mathbb{N}$, definiremos el ***p*-ésimo factor elemental** como:

(i) $E_0(z) = 1 - z$.

(ii) $E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$, si $p \geq 1$.

Observación 2.1.3 Si $a \in \mathbb{C}$, el único cero de $E_p(\frac{z}{a})$ es $z = a$ con multiplicidad 1.

A partir de 2.1.2 y la Observación 2.1.3, tenemos lo necesario para construir funciones holomorfas con ceros de cierta multiplicidad.

Lema 2.1.4 *Si* $|z| \leq 1$ *y* $p \geq 0$, *entonces* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Demostración. El caso $p = 0$ es inmediato, por lo tanto, suponemos que $p \geq 1$. Sea $E_p(z)$ el p-ésimo factor elemental. Por ser producto de funciones analíticas, es analítico, luego existe su desarrollo de Taylor en el origen, digamos

$$E_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

siendo $a_0 := E_p(0) = 1$. Entonces, derivando la serie del factor:

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Por otro lado, derivando la expresión de 2.1.2,

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= -\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) + (1-z)(1+z+\ldots+z^{p-1})\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right). \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones y empleando la unicidad del desarrollo de Taylor:

1. $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$:

   Esto se observa obteniendo el desarrollo de la exponencial $\exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$ y multiplicando por $-z^p$, ya que el desarrollo de la exponencial es de la forma $\sum_{k\geq 0} b_k z^k$.
2. Si $k \geq p+1$ entonces $a_k \leq 0$:

   Es evidente a partir del desarrollo en serie de la función exponencial anterior, dado que sus términos son todos positivos. Al multiplicar por $-z^p$, obtenemos términos negativos.

Juntando ambas afirmaciones, obtenemos que

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \implies \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1,$$

luego para $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\ &= |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \\ \text{(usando } |z| \leq 1) \quad &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \\ \text{(usando } \textstyle\sum_{k\geq p+1} |a_k| = 1) \quad &= |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

□

Definición 2.1.5 Diremos que una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **admisible** si:

(i) $\lim_n |a_n| = \infty$.

(ii) $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

(iii) cada término de la sucesión aparece un número finito de veces en la misma.

Teorema 2.1.6 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión admisible de números complejos y sea $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros que satisface:*

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty, \quad \forall r > 0. \tag{2.1.1}$$

Entonces el producto infinito

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. En particular, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con

$$\mathscr{Z}_f(\mathbb{C}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

con el convenio de que si un cierto a_k aparece m_k veces en la sucesión, entonces f tiene un cero en a_k de multiplicidad m_k. Finalmente, si seleccionamos $p_n = n-1$ entonces se satisface (2.1.1).

Demostración. Supongamos en primer lugar que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty, \quad \forall r > 0.$$

Fijado $r > 0$, por la divergencia en módulo de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existirá un cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geq r$ para todo $n \geq N$. Aplicando el Lema 2.1.4 se sigue que

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

para todo $|z| \leq r$ y todo $n \geq N$ (de modo que $|z/a_n| \leq r/|a_n| \leq 1$). Por lo tanto,

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty, \quad \forall z \in \overline{D}_r(0),$$

de modo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$$

converge uniforme y absolutamente sobre el compacto $\overline{D}_r(0)$ por el Criterio M de Weierstrass A.1.7. Como nuestro r era arbitrario, podemos aplicar el Teorema 1.2.21 y concluir que

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. En particular, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, siendo sus ceros los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por 2.1.3.

Para garantizar la existencia de una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, notamos que dado cualquier $r > 0$, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > 2r$ para todo $n \geq N$. Entonces $\frac{r}{|a_n|} < \frac{1}{2}$ siempre que $n \geq N$, luego basta tomar $p_n = n-1$ para todo n, de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n < \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^n + \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty,$$

probando el último apartado. □

Observación 2.1.7 Si $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $p_n \geq n-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue cumpliendo el teorema anterior acotando dicha sucesión por $n-1$.

Usando la notación $\mathscr{M}(\mathbb{C})$ para el conjunto de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, ver Definición A.1.1, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.8 *Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$, entonces existen $g, h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tales que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$, con polos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ repetidos según su orden, y con un polo en el origen de orden $k \geq 0$. Aplicando el Teorema 2.1.6, la función

$$h(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

es convergente en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Sea ahora

$$g(z) := f(z)h(z).$$

Claramente, los polos de f tienen el mismo orden que la multiplicidad de los ceros de h, de manera que g se extiende de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$. Luego $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, con $g, h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, como queríamos probar. □

2.1.2. Teorema de Factorización de Weierstrass

Supongamos ahora que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función de la que conocemos sus ceros y sus respectivas multiplicidades. En este contexto, surge la pregunta de si podemos expresar esta función con un desarrollo “canónico” en producto infinito que factorice sus ceros.

El Teorema de Factorización de Weierstrass proporciona la respuesta a este interrogante. Además, nos ofrece una expresión que relaciona esta función con cualquier otra que comparta los mismos ceros y multiplicidades asociadas.

Teorema 2.1.9 ***(Teorema de Factorización de Weierstrass):*** *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, no idénticamente nula, y sea $\mathscr{Z}_f(\mathbb{C})\setminus\{0\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto de los ceros no nulos de f, repetidos según su multiplicidad. Si f tiene un cero en $z = 0$ de multiplicidad $m \geq 0$, entonces existe una función $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión entera $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right). \tag{2.1.2}$$

Demostración. Por el Teorema 2.1.6, existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros tales que el producto infinito

$$h(z) := z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

define una función $h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y, además, f y h tienen los mismos ceros con las mismas multiplicidades. Sea ahora la función

$$Q(Z) := \frac{f(z)}{h(z)}.$$

Claramente, esta función es holomorfa en $\mathbb{C}$, puesto que al coincidir las multiplicidades de los ceros de f y h, tiene singularidades evitables en todos los puntos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Además, como $Q(z)$ no se anula en $\mathbb{C}$, existe una función g holomorfa tal que

$$Q(z) = e^{g(z)} \Longleftrightarrow f(z) = h(z)e^{g(z)}$$

por la Proposición 2.1.1, probando el resultado. □

Una consecuencia interesante del teorema de Weierstrass es un clásico problema de interpolación, es decir, construir una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que en un conjunto predeterminado de puntos, tome unos determinados valores.

Corolario 2.1.10 ***(Teorema de interpolación de Pringsheim)*** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que no repite términos ($a_0 = 0$ en caso de existir) y sin puntos de acumulación, y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria; entonces existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(a_n) = w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.*

Demostración. Por el Teorema de Weierstrass 2.1.6, existe $G \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}_G(\mathbb{C}) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $G'(a_n) \neq 0$ (considerando los a_n como ceros simples). Con esta función, construimos la sucesión de funciones $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$F_n(z) = \begin{cases} \frac{w_n}{G'(a_n)} \cdot \frac{G(z)}{z-a_n} & \text{si } z \neq a_n \\ w_n & \text{si } z = a_n \end{cases}.$$

Claramente, $F_n(z) \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\{a_n\})$, y como $\lim_{z\to a_n} \frac{G(z)}{z-a_n} = G'(a_n)$, entonces $F_n(z) \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. Además, es inmediato que

$$F_n(a_k) = \begin{cases} w_n & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}.$$

Si encontramos una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(z) = F_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \tag{2.1.3}$$

converja uniformemente sobre compactos, probamos el resultado. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, entonces existe $R > 0$ tal que $K \subset D_R(0)$. Por otro lado, que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión sin puntos de acumulación implica que $\lim_n |a_n| = \infty$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geq 2R$ para todo $n \geq n_0$; y por lo tanto,

$$|z-a_n| = |a_n - z| \geq |a_n| - |z| \geq 2R - |z| \geq R, \quad \forall n \geq n_0, z \in K.$$

Finalmente, para $n \geq n_0$,

$$\left| F_n(z) \left(\frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right| \leq \frac{|w_n|}{|G'(a_n)|} \cdot \frac{|G(z)|}{|z-a_n|} \cdot \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n} \leq \frac{|w_n|}{|G'(a_n)|} \cdot \frac{\sup\{|G(z)| : z \in K\}}{R} \cdot \frac{1}{2^{p_n}}.$$

Tomando

$$p_n = n + \log_2 \left(\frac{|w_n|}{|G'(a_n)|} \right),$$

nos queda en la última desigualdad que

$$\frac{|w_n|}{|G'(a_n)|} \cdot \frac{\sup\{|G(z)| : z \in K\}}{R} \cdot \frac{1}{2^{p_n}} \leq \frac{\sup\{|G(z)| : z \in K\}}{2^n R},$$

y por la compacidad de K, $\sup\{|G(z)| : z \in K\} < \infty$. Aplicando el M-test de Weierstrass A.1.7, la serie (2.1.3) converge absoluta y uniformemente sobre K. Como K era un compacto arbitrario, $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y cumple las condiciones del enunciado. □

Aunque se sale del ámbito de este trabajo, no queremos concluir sin mencionar una generalización del Teorema de Weierstrass para abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Definición 2.1.11 Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos es **admisible** en Ω si:

(i) $a_n \in \Omega$, para todo $n \in \Omega$.

(ii) para cada compacto $K \subset \Omega$, el cardinal de $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in K\}$ es finito.

A continuación enunciamos el resultado sin demostración.

Teorema 2.1.12 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión admisible en Ω y $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de enteros. Entonces existe una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ cuyos únicos ceros son a_n con multiplicidad m_n asociada. Además, f es única salvo producto por funciones de la forma $e^{g(z)}$, donde $g \in \mathscr{H}(\Omega)$.*

Demostración. La prueba puede consultarse en [7, Chapter 7] teorema 5.15. □

2.2. Factorización del seno

En este apartado obtendremos la factorización del seno como producto infinito. Este resultado se puede probar de diversas maneras, no obstante, realizaremos una prueba que emplea solo herramientas elementales de análisis complejo, entre ellas, el teorema de Liouville. Esta prueba se ha extraído de [10, Chapter 6]. Finalmente, ofrecemos unas consecuencias inmediatas del producto infinito del seno.

2.2.1. Candidatos a desarrollo

Sea ahora la función seno definida por

$$g(z) := \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.2.4}$$

Claramente, su dominio son todos los números complejos, y su conjunto de ceros (todos ellos simples) es $\mathscr{Z}_g(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$. Nos gustaría "factorizar" $g(z)$ en términos de sus ceros, es decir, expresar

$$g(z) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z),$$

donde cada función $f_n(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y se anula únicamente en el punto $z = n$. Una idea intuitiva que nos lleva a un posible desarrollo en forma de producto es tomar $f_n(z) = z - n$. De esta manera, tenemos una familia de funciones holomorfas que se anula en n, luego

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} (z-n)$$

sería un posible candidato. No obstante, nos topamos con un problema de definición, y es que ese producto no es convergente (de forma propia) en ningún $z \in \mathbb{C}$, ya que el término general no tiende a 1 y por tanto no se cumple el Lema 1.1.7.

En consecuencia, podemos pensar en solventar este problema escogiendo una familia de funciones $f_n(z)$ más adecuada y cuyo producto coincida con la función $g(z)$. En este sentido, definimos nuestro segundo candidato escogiendo la familia de funciones

$$f_n(z) = 1 - \frac{z}{n} \text{ si } n \neq 0,\, f_0(z) = z.$$

Claramente, estas funciones se anulan en n, sin embargo, no estamos en las condiciones adecuadas del Teorema 1.2.21, ya que para $z \neq 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{z}{|n|} = \infty.$$

No obstante, esto se soluciona fácilmente agrupando los enteros positivos y negativos, y tomando como nuevo candidato el producto infinito

$$P(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2} < \infty$, dicho producto converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ por el Teorema 1.2.21. Claramente, la función $g(z)$ y el producto $P(z)$ coinciden en $\mathbb{Z}$; y faltaría ver que, de hecho, coinciden en los demás valores $z \in \mathbb{C}$.

2.2.2. Factorización del seno mediante el teorema de Liouville

Para realizar esta prueba empleando el teorema de Liouville, mostraremos que el cociente de las funciones $g(z)$ y $P(z)$ es acotado por un polinomio en $\mathbb{C}$ y, como consecuencia, obtendremos que $g(z)/P(z)$ debe ser constante.

En primer lugar, tomamos $P(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$. Para este producto, tenemos:

1. $P(z)$ es uniformemente convergente sobre compactos de $\mathbb{C}$ por la Proposición 1.2.21.
2. $P(z+1) = -P(z)$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
P(z+1) &= (z+1)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(z+1)^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}(z+1)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{(z+1)^2}{n^2}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}(z+1)\prod_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\left(1-\frac{(z+1)}{n}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}(z+1)\prod_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{(n-z-1)}{n} \\
&= \lim_{N\to\infty}-z(z+1)\prod_{\substack{n=-N\\ n\neq 0,1}}^{N}\frac{(n-z-1)}{n-1}\frac{n-1}{n}.
\end{aligned}
$$

Tomando ahora $c_n = \prod_{\substack{n=-N\\ n\neq 0,1}}^{N}\frac{n-1}{n}$, notamos que:

$$
\lim_{N}\prod_{\substack{n=-N\\ n\neq 0,1}}^{N}\frac{n-1}{n} = \lim_{N}\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{-1}\cdots\frac{-N-1}{-N} = \lim_{N}\frac{N+1}{N} = 1.
$$

Por lo tanto realizamos el cambio de variable $m = n-1$, y tomando límites:

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}-z(z+1)\prod_{\substack{m=-N-1\\ m\neq 0,-1}}^{N}\frac{(m-z)}{m}\frac{m}{m+1} &= \lim_{N\to\infty}-z(z+1)\prod_{\substack{m=-N\\ m\neq 0,-1}}^{N}\left(1-\frac{z}{m}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}-z\prod_{\substack{m=-N\\ m\neq 0}}^{N}\left(1-\frac{z}{m}\right) = -z\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right),
\end{aligned}
$$

siendo esta última expresión $-P(z)$. □

Conociendo dichas propiedades de $P(z)$, definimos la función: $h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por:

$$
h(z) := \frac{P(z)}{g(z)} = \frac{z}{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \tag{2.2.5}
$$

siendo $g(z)$ la función seno definida en (2.2.4). Esta función es un cociente de funciones holomorfas en todo $\mathbb{C}$. Por otro lado, $h(z)$ tiene singularidades en $\mathscr{Z}_g(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, pero son evitables porque $P(z)$ tiene los mismos ceros con misma multiplicidad que $g(z)$, luego $h(z)$ se puede extender de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

Adicionalmente, $g(z)$ cumple que $g(z+1) = -g(z)$. Por lo tanto, como $P(z+1) = -P(z)$, deducimos que h es 1-periódica, es decir,

$$
h(z) = h(z+1), \quad z\in\mathbb{C}.
$$

A continuación queremos probar que

$$
|h(z)| \leq A + B|z|. \tag{2.2.6}
$$

Por la periodicidad de la función h basta hacerlo en la banda $S = \{z \in \mathbb{C} \colon |\Re(z)| \leq 1/2\}$. En efecto, si se cumple (2.2.6) en la banda S, y tomamos $z \in \mathbb{C}$, existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que $z \in m + S$, y por tanto

$$|h(z)| = |h(z-m)| \leq A + B|z-m| \leq A + B(\tfrac{1}{2} + |\Im(z)|) \leq A + \tfrac{B}{2} + B|z|,$$

lo que implica que (2.2.6) es cierto en todo $z \in \mathbb{C}$ con una nueva constante $A' = A + B/2$.

Probemos por tanto (2.2.6) cuando $z \in S$. Para ello demostraremos que:

1. $|g(z)| \geq c\,|z|$, si $z \in K := [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] + i[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$.
2. $|g(z)| \geq Ce^{\pi|y|}$, con $y = \Im(z)$ si $z \in S \setminus K$.
3. $|P(z)| \leq D|z|e^{\pi|y|}$, con $y = \Im(z)$, si $z \in S$.

La primera afirmación es consecuencia de que $\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}$ es una función continua que no se anula en el compacto K, y por lo tanto, tiene un mínimo, luego existe $c > 0$ tal que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi z}\right| \geq c \iff \left|\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}\right| \geq c|z|.$$

Para la siguiente afirmación, tomamos x e y las partes real e imaginaria de z respectivamente. Aplicando el Lema A.1.5,

$$|\operatorname{sen}(\pi z)|^2 = \operatorname{sen}^2(\pi x) + \operatorname{senh}^2(\pi y) \geq \operatorname{senh}^2(\pi y) \iff |\operatorname{sen}(\pi z)| \geq \operatorname{senh}(\pi|y|).$$

Tomando $u := \pi|y| > \frac{\pi}{2}$, consideramos el cociente

$$Q(u) := \frac{\operatorname{senh}(u)}{e^u} = \frac{1 - e^{-2u}}{2}.$$

Esta función es continua, estrictamente creciente y positiva en $[\frac{\pi}{2}, \infty)$, luego alcanza un mínimo, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\operatorname{senh}(u) \geq Ce^u, \quad u > \frac{\pi}{2} \implies \operatorname{senh}(\pi|y|) \geq Ce^{\pi|y|}, \quad |y| > \frac{1}{2}.$$

Para la tercera afirmación, tomando logaritmos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{P(z)}{z}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{z^2}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|^2}{n^2}\right) \\
{\scriptstyle (\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n-1})} \quad &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \ln\left(1 + \frac{|z|^2}{t^2}\right) dt \\
&= \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|^2}{t^2}\right) dt =: I(z).
\end{aligned}$$

Posteriormente, tomamos el cambio de variable $u = \frac{t}{|z|}$ e integramos por partes:

$$\begin{aligned}
I(z) &= |z| \int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du \\
&= |z| \left(\left[u \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u \frac{1}{1 + \frac{1}{u^2}} \frac{-2}{u^3} du\right) \quad (*) \\
&= |z| \int_0^{\infty} \frac{2}{u^2 + 1} du = |z|\pi.
\end{aligned}$$

Notar que en $(*)$, $\left[u\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right]_0^\infty = 0$, ya que

$$\lim_{u\to 0} u\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{u\to\infty} u\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) = 0.$$

Luego, $\ln\left|\frac{P(z)}{z}\right| \leq \pi|z|$, y por lo tanto, $|P(z)| \leq |z|e^{\pi|z|} \leq |z|e^{\pi}e^{\pi|y|}$. Finalmente, como $\frac{-1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}$, entonces:

1. Si $z\in K$, entonces $|y| \leq \frac{1}{2}$, y con las previas afirmaciones,

$$|h(z)| = \left|\frac{P(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{e^{\pi}|z|e^{\pi|y|}}{c|z|} = \frac{e^{\pi}e^{\pi|y|}}{c} \leq \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{c},$$

lo que implica que el cociente $h(z)$ es acotado por una cierta constante $C' := e^{\frac{3\pi}{2}}c^{-1}$ en K.

2. Si $z\in S\setminus K$, entonces $|y| > \frac{1}{2}$, luego por las previas afirmaciones,

$$|h(z)| = \left|\frac{P(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{e^{\pi}|z|e^{\pi|y|}}{Ce^{\pi|y|}} = C''|z| \quad (C'' = \frac{e^{\pi}}{C}).$$

De esta manera, tenemos que $|h(z)| \leq C' + C''|z|$, cuando $z\in S$, y por las observaciones anteriores se cumple (2.2.6) para todo $z\in\mathbb{C}$. A continuación, aplicamos el teorema de Liouville, en la versión dada en el Teorema A.1.6 para polinomios de grado 1, y obtenemos como consecuencia que

$$h(z) = az+b, \quad \text{con } a,b\in\mathbb{C}.$$

Como h era 1-periódica,

$$h(0) = h(1) \Longleftrightarrow b = a+b \Longleftrightarrow a = 0 \Longleftrightarrow h(z) = b,$$

es decir, h es constante, de donde obtenemos que

$$P(z) = bg(z).$$

Para obtener dicha constante, basta con dividir por z, es decir,

$$\frac{g(z)}{z} = \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}, \quad \frac{P(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Si observamos, $\frac{g(z)}{z}$ se extiende holomorfamente al origen al ser cociente de funciones holomorfas, luego

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = 1,$$

y en el caso del cociente del producto infinito, deducimos que $\lim_{z\to 0}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = 1$, y como coinciden los límites, necesariamente $b = 1$, y llegamos finalmente a la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{2.2.7}$$

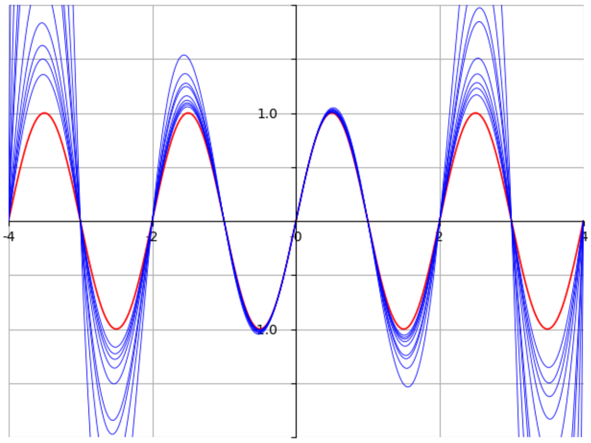

Figura 2.1: Aproximaciones de los productos parciales (azul) de (2.2.7) a $\operatorname{sen}(\pi z)$ (rojo).

2.2.3. Aplicaciones del producto del seno

Una interesante aplicación de este producto infinito es el cálculo de la conocida serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Este problema se conoce como el **problema de Basilea**. El resultado a primera vista podría parecer sorprendente, pues aparece un número trascendente al cuadrado en el resultado, teniendo en cuenta que estamos trabajando con una serie de números racionales. Esto nos dice que la suma infinita de racionales no es racional necesariamente.

Leonard Euler fue el que dio una primera demostración, empleando el producto infinito del seno. Pese a ello, la demostración dada por Euler se consideraba "poco rigurosa" al no demostrar por qué coincidía el seno con ese producto infinito, pese a estar en lo cierto. Por este motivo, esta prueba no se tuvo en cuenta, hasta que se probó la igualdad del producto del seno.

Veamos esta demostración:

Demostración. Consideramos la serie de Taylor del seno:

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots. \tag{2.2.8}$$

Notar que en $(*)$ hemos dividido por z. Por otro lado, como los ceros del seno son de la forma $n\pi$, de la sección anterior obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Esta es la parte que Euler no probó con rigor, siendo en nuestro caso consecuencia del cambio $z = \pi u : u \in \mathbb{C}$ y la igualdad (2.2.7). Agrupando formalmente los términos de z^2 del producto,

$$\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1 - z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} + \mathcal{O}(z^4).$$

Igualando ahora con la serie de Taylor (2.2.8) y empleando la unicidad del desarrollo en serie, observamos que el término del cuadrado del desarrollo de Taylor es $\frac{-z^2}{3!}$, luego

$$z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{z^2}{6} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Otra consecuencia inmediata es la **fórmula de Wallis**. Esta fórmula establece otra igualdad proveniente de la función seno. En este caso, gracias al producto infinito del seno se demuestra que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m+1)\cdot(2m-1)}\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n-1)},$$

lo cual, nuevamente, resulta llamativo si tenemos en cuenta que hemos obtenido un número trascendente mediante un producto de elementos racionales, sirviendo de contraejemplo para probar que los racionales no son cerrados para productos infinitos. Para probar este resultado, utilizamos el desarrollo del producto infinito del seno

$$\operatorname{sen}(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

y evaluando en $z = \frac{\pi}{2}$, tenemos la igualdad

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

Finalmente, observamos que $1-\frac{1}{4n^2} = \frac{4n^2-1}{4n^2} = \frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{2n\cdot 2n}$, y despejando esta última igualdad, obtenemos el resultado buscado, es decir,

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

3 La función Gamma

Este capítulo está centrado en el estudio de la función Gamma, explorando sus propiedades y expresiones derivadas de la misma.

Entre los principales resultados del capítulo, destacan el cálculo de la constante de Euler-Mascheroni, (3.2.6), la función Gamma como expansión en producto infinito, la fórmula de duplicación de Legendre, (3.3.11), y el Teorema de Bohr-Mollerup, 3.4.9.

Se ha utilizado como principales referencias para este capítulo los textos [1, Chapter 5] sección 2.4, [2, Chapter 2] y [7, Chapter 7] sección 7.

3.1. Función con ceros en los naturales

Como bien sabemos, la función $\operatorname{sen}(\pi z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$, cuyas raíces son precisamente los números enteros. Es más, gracias a su factorización como producto infinito de sus ceros, es la más sencilla con esta propiedad; y cualquier otra que tenga esas mismas raíces será de la forma $h(z) = \operatorname{sen}(\pi z)e^{g(z)}$, con $g(z) \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ por el Teorema 2.1.9.

En esta sección abordamos el problema de construir una función $G \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ cuyos ceros sean únicamente, bien los enteros positivos, o los enteros negativos. En primer lugar, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)$$

no sería un candidato válido, pues no cumple la condición de convergencia absoluta de la Definición 1.1.14; de hecho, dicho producto ni siquiera converge propiamente en $z = 1$ por el Ejemplo 1.1.4.

Restringiéndonos al caso de los ceros negativos, y en vista de la definición de los factores de Weierstrass, ver Teorema 2.1.6, podemos considerar la expansión

$$G(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_1(-\tfrac{z}{n}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, \tag{3.1.1}$$

y como se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{n^2} < \infty,$$

entonces, por el Teorema 2.1.6, podemos garantizar la convergencia de (3.1.1) de forma absoluta y uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$. Con un simple cambio de variable, podemos definir $G(-z)$ como otra función dada por un producto infinito, siendo en este caso sus raíces los enteros positivos. De hecho, basta observar cómo se definen ambas funciones para darnos cuenta de que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} = zG(z)G(-z). \tag{3.1.2}$$

Por otro lado, la definición de $G(z)$ nos lleva a estudiar otras propiedades. Una de las más sencillas es que los ceros de $G(z)$ coinciden con los ceros de $G(z-1)$ a excepción del origen, que solo anula a esta última función; en efecto, como $\mathscr{Z}_G(\mathbb{C}) = \{-1,-2,\ldots\}$, entonces

$$G(z-1) = 0 \Longleftrightarrow (z-1) \in \{-1,-2,-3,\ldots\} \Longleftrightarrow z \in \{0,-1,-2,\ldots\}.$$

3.2. La constante de Euler-Mascheroni

Por lo visto en la Sección 3.1, los ceros de $zG(z)$ coinciden con los ceros de $G(z-1)$, luego empleando el Teorema de Factorización de Weierstrass 2.1.9,

$$G(z-1) = zG(z)e^{\gamma(z)},$$

donde $\gamma(z)$ es una función entera. Nuestro objetivo ahora consiste en determinar la expresión que tiene $\gamma(z)$. En primer lugar, tomamos derivadas logarítmicas en ambos lados de la igualdad y obtenemos:

1. Por definición de G en (3.1.1),

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right).$$

2. En el otro lado de la igualdad tenemos

$$\frac{\left(zG(z)e^{\gamma(z)}\right)'}{zG(z)e^{\gamma(z)}} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right).$$

Igualando ambos términos llegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right). \tag{3.2.3}$$

Con la intención de agrupar en la igualdad, realizamos el cambio en el sumatorio de la izquierda $m = n-1$, de manera que el sumatorio comienza en $m = 0$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} - \frac{1}{m+1}\right)\\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+m} - \frac{1}{m}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right).\end{aligned}$$

Si observamos $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1$ porque es una serie telescópica infinita, luego aplicando esto en la ecuación (3.2.3),

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \gamma'(z) = 0,$$

lo que se significa que $\gamma(z)$ es una función constante, digamos $\gamma(z) := \gamma$. Por lo tanto,

$$G(z-1) = zG(z)e^{\gamma}. \tag{3.2.4}$$

Para determinar el valor de γ, evaluando en $z = 1$ tenemos $1 = G(0) = e^{\gamma}G(1)$, luego

$$e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}. \tag{3.2.5}$$

De hecho, podemos expresar el n-ésimo producto parcial como

$$G_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+k}{k}\right) e^{-\frac{1}{k}} = (n+1)e^{-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})},$$

y consecuentemente obtenemos, tomando logaritmos, que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right). \tag{3.2.6}$$

Este límite define la famosa **constante de Euler-Mascheroni**, cuyo valor aproximado es $0,57722$.

Observación 3.2.1 En (3.2.6), se puede cambiar $\ln(n+1)$ por $\ln(n)$; en efecto, esto es consecuencia de que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0.$$

3.3. Estudio de la función Γ

En esta sección estudiaremos la función Gamma de Euler dada por su expansión en producto infinito. Para ello, probaremos las condiciones que caracterizan a la misma, así como algunos resultados derivados.

3.3.1. Definición formal y generalización del factorial

En primer lugar, sea $H(z) := G(z)e^{\gamma z}$. Trivialmente, tenemos que

$$H(z-1) = G(z-1)e^{\gamma(z-1)} = G(z-1)e^{-\gamma}e^{\gamma z} = zG(z)e^{\gamma z} = zH(z).$$

Como $H(z-1) = zH(z)$, estamos cerca de una propiedad que nos permitirá generalizar el concepto de factorial. A partir de ella, definimos la función que da nombre a esta sección.

Definición 3.3.2 La **función Gamma** $\Gamma(z)$ es la función de variable compleja dada por

$$\Gamma(z) := \frac{1}{zH(z)} = \frac{1}{zG(z)e^{\gamma z}},$$

al menos en los puntos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ donde el denominador no se anula. Su representación explícita viene dada por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}. \tag{3.3.7}$$

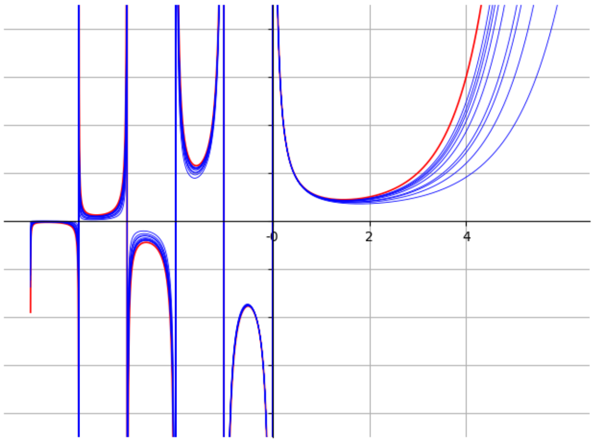

Figura 3.1: Aproximación de los productos parciales de (3.3.7) a la función $\Gamma(z)$ (rojo).

Lema 3.3.3 *La función $\Gamma(z)$ dada en la Definición 3.3.2 es una función que cumple:*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ *y tiene polos simples en* $\{0,-1,-2,\dots\}$.

Demostración. En primer lugar,

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{(z-1)H(z-1)} = \frac{1}{(z-1)zH(z)} = \frac{\Gamma(z)}{z-1},$$

de donde deducimos inmediatamente que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{3.3.8}$$

Para la segunda afirmación, tenemos

$$\Gamma(1) = \frac{1}{H(1)} = \frac{1}{G(1)e^{\gamma}} = 1$$

por (3.2.5). La última condición es consecuencia de que (3.1.1) es convergente en $\mathbb{C}$ y de que

$$\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z}G(z)},$$

siendo sus polos los ceros de $ze^{\gamma z}G(z)$, todos ellos simples. □

Observación 3.3.4 Es inmediato que $\Gamma(z)$ no tiene ceros a partir de esta última expresión.

Corolario 3.3.5 *Para* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$Res(\Gamma,-n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Demostración. Gracias a la ecuación funcional (3.3.8), podemos obtener el residuo de cada polo simple de $\Gamma(z)$. Si $n \geq 0$,

$$\Gamma(z+n+1) = z(z+1)\dots(z+n)\Gamma(z).$$

De esta manera, deducimos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\Gamma,-n) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}\\ &= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \forall n\geq 0.\end{aligned}$$

□

Gracias al Lema 3.3.3, obtenemos los valores:

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\cdot 1, \quad \dots, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Esto equivale a que la función $\Gamma(z)$ puede considerarse como una generalización del operador factorial. Introducimos este concepto en la siguiente definición.

Definición 3.3.6 Dado $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$, definiremos el "factorial" de z como

$$z! := \Gamma(z+1).$$

Gracias a que $zG(z)G(-z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}$, ver (3.1.2) , podemos deducir lo siguiente:

Proposición 3.3.7 *Sea $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, entonces*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

*Esta expresión se conoce como **fórmula de reflexión de Euler**.*

Demostración. Dado $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{1}{zG(z)e^{\gamma z}(1-z)G(1-z)e^{\gamma(1-z)}} = \frac{1}{zG(z)e^{\gamma}(1-z)G(1-z)}\\ \text{(por (3.2.4))} &= \frac{1}{(1-z)G(z-1)G(1-z)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(1-z))},\end{aligned}$$

y por la identidad del seno de la suma,

$$\operatorname{sen}(\pi(1-z)) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi z) - \operatorname{sen}(\pi z)\cos(\pi) = \operatorname{sen}(\pi z),$$

concluyendo la prueba. □

Gracias a la Proposición 3.3.7, como $\Gamma(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}^+$, si evaluamos en $z = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \Longleftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

de tal manera que la Definición 3.3.6 junto al valor $\Gamma(\frac{1}{2})$ deduce la famosa expresión del "factorial" de $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

de hecho, podemos calcular el factorial de $n-\frac{1}{2}$ fácilmente, ya que por la definición anterior,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}.$$

3.3.2. La Fórmula de Duplicación de Legendre

Una vez caracterizada la generalización del factorial, sean los términos de la expansión del producto infinito (3.3.7):

$$\Gamma_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Por el Corolario 1.2.23, la derivada logarítmica

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n'(z)}{\Gamma_n(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$$

converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}\setminus\{0,1,2,\ldots\}$; y derivando nuevamente esta expresión, llegamos a

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \tag{3.3.9}$$

Por otro lado, aplicando la expresión anterior a $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(z+n+\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right)\\ &= 4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+m)^2} = 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).\end{aligned}$$

Integrando esta última igualdad,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = a + 2\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}.$$

Integrando nuevamente respecto de z, y usando en cada bola $D_\varepsilon(z)$ una determinación adecuada del logaritmo, tenemos que

$$\mathrm{Log}\,(\Gamma(z)) + \mathrm{Log}\left(\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\right) = az + b + \mathrm{Log}\,(\Gamma(2z)),$$

lo cual, tomando exponenciales, implica que

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = e^{az+b}\Gamma(2z), \tag{3.3.10}$$

donde las constantes a y b son desconocidas. Como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, evaluando la expresión (3.3.10) en $z=1$ y $z=\frac{1}{2}$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{a+b}\\ \sqrt{\pi} = e^{\frac{a}{2}+b}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} a+b = \frac{1}{2}\ln(\frac{\pi}{4})\\ \frac{1}{2}a+b = \frac{1}{2}\ln(\pi)\end{array}\right\},$$

de donde finalmente obtenemos los valores $a = -2\ln(2)$ y $b = \frac{1}{2}\ln(\pi) + \ln(2)$. Con las constantes obtenidas, despejando en (3.3.10), obtenemos finalmente:

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{3.3.11}$$

Esta última expresión es conocida como la **fórmula de duplicación de Legendre**.

3.4. Teorema de Bohr-Mollerup y sus consecuencias

Aunque hemos definido la función Gamma como una expansión en producto infinito, como parece natural por la temática de este trabajo, existen varias caracterizaciones que son habituales en la literatura, siendo quizá la más popular la definición como integral

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{3.4.12}$$

Para probar que ambas definiciones coinciden, demostraremos primero un teorema de unicidad debido a Bohr-Mollerup.

3.4.1. Teorema de Bohr-Mollerup

El teorema de Bohr-Mollerup establece una condición para la función generalizadora del factorial en $\mathbb{R}^+$ que permite garantizar su unicidad.

Definición 3.4.8 Sea $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}$ y sea $f : \mathscr{U} \longrightarrow (0, +\infty)$. Diremos que f es **logarítmicamente convexa** si $\ln(f(x))$ es una función convexa.

Teorema 3.4.9 ***(Bohr-Mollerup)****: Sea* $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *una función continua tal que:*

(i) $f(1) = 1$.

(ii) $f(x+1) = xf(x)$ *si* $x > 0$.

(iii) $f(x)$ *es logarítmicamente convexa.*

Entonces

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{(x+n)(x+(n-1))\ldots(x+1)x}, \quad \forall x > 0.$$

Demostración. Sea $S(x_1, x_2)$ la pendiente del segmento $(x_1, \ln(f(x_1))), (x_2, \ln(f(x_2)))$. Como $f(x)$ es logarítmicamente convexa,

$$S(n-1, n) \leq S(n, n+x) \leq S(n, n+1), \quad \forall x \in (0, 1]. \tag{3.4.13}$$

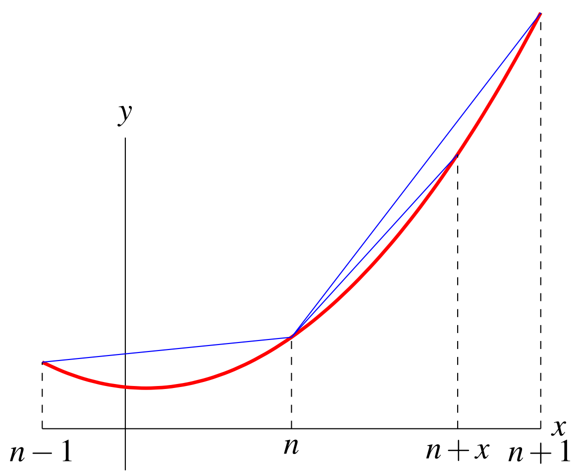

Figura 3.2: Gráfica de una función convexa que ilustra la desigualdad (3.4.13).

Ahora bien, por la definición de la pendiente,

$$S(x_1,x_2) = \frac{\ln(f(x_2)) - \ln(f(x_1))}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\ln\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right) = \ln\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}},$$

luego, tomando exponenciales,

$$S(x_1,x_2) \leq S(y_1,y_2) \iff \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \leq \left(\frac{f(y_2)}{f(y_1)}\right)^{\frac{1}{y_2-y_1}}.$$

Sustituyendo en (3.4.13),

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} \leq \left(\frac{f(n+x)}{f(n)}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \quad \iff \quad n-1 \leq \left(\frac{f(n+x)}{f(n)}\right)^{\frac{1}{x}} \leq n,$$

usando en la equivalencia que $f(n+1) = nf(n)$. Elevando a x y multiplicando todo por $f(n) = (n-1)!$,

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x(n-1)!. \tag{3.4.14}$$

La segunda condición de f nos lleva a la ecuación funcional

$$f(n+x) = (n-1+x)f(n-1+x) = \ldots = (n-1+x)\ldots xf(x);$$

luego despejando para $f(x)$ la anterior ecuación y evaluando en (3.4.14),

$$(n-1)^x(n-1)! \leq (n-1+x)\ldots xf(x) \leq n^x(n-1)!.$$

Dividiendo por $(n-1+x)\ldots x$,

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(n-1+x)\ldots x} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{(n-1+x)\ldots x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La anterior igualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de tal manera que

$$\frac{n^x \cdot n!}{(n+x)\ldots x} \leq f(x) \leq \frac{n^x \cdot n!}{(n+x)\ldots x} \cdot \left(\frac{x+n}{n}\right),$$

y como $\lim_n \frac{x+n}{n} = 1$, aplicamos el criterio del sándwich y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{(x+n)\ldots x} = f(x), \quad \forall x \in (0,1]. \tag{3.4.15}$$

Probando el resultado si $0 < x \leq 1$.

Para $x > 1$, supongamos que $x \in (m, m+1]$ con $m \in \mathbb{N}$. Entonces $x - m \in (0,1]$, y evaluando en (3.4.15),

$$f(x-m) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x-m}n!}{(x-m)(x-m+1)\ldots(x-m+n)},$$

y empleando la condición de generalización del factorial,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x-2)\dots(x-m)\cdot f(x-m) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-m)n^{x-m}n!}{(x-m)(x-m+1)\dots(x-1)x(x+1)\dots(x+n-m)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n-m)n^m}\cdot\frac{(x+n-m+1)\dots(x+n)}{(x+n-m+1)\dots(x+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\cdot\frac{x+n-m+1}{n}\dots\frac{x+n}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)},
\end{aligned}$$

probando la existencia del límite del enunciado para todo $x>0$. □

3.4.2. Unicidad de la función Γ

En general, la definición más usual de la función Gamma viene dada por (3.4.12), pero esta tiene un inconveniente, y es que solo está definida si $\Re(z)>0$. Por otro lado, (3.3.7) está definida para todo $\mathbb{C}$ salvo los enteros negativos y el origen.

Nuestro objetivo es claro: probar que, sobre $\Re(z)>0$, (3.3.7) y (3.4.12) son equivalentes empleando el Teorema 3.4.9. De esta manera, podemos extender la expresión integral de la función Gamma de Euler si $\Re(z)\leq 0$, salvo los enteros negativos y el 0.

Afirmamos que (3.3.7) cumple las condiciones del teorema de Bohr-Mollerup; en efecto, consideramos la restricción $\Gamma:(0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ dada por

$$\Gamma(x)=\frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}.$$

Como bien hemos visto:

1. $\Gamma(1)=1$ trivialmente por el Lema 3.3.3.
2. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ por el Lema 3.3.3.
3. $\ln(\Gamma(x))$ es convexo; basta observar que por (3.3.9),

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln(\Gamma(x)))=\frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}>0,$$

lo que garantiza la convexidad.

Por otro lado, sea $\widetilde{\Gamma}$ dada por (3.4.12) restringida a $\mathbb{R}^+$, es decir,

$$\widetilde{\Gamma}(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0.$$

En primer lugar, $\widetilde{\Gamma}(z)$ es una función que “generaliza” el factorial, ya que:

1. $\widetilde{\Gamma}(1)=1$ trivialmente, ya que

$$\widetilde{\Gamma}(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1,$$

2. $\widetilde{\Gamma}(x+1) = x\widetilde{\Gamma}(x)$, basta observar que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt \\
{\scriptstyle (u\,=\,t^x;\,dv\,=\,e^{-t}dt\,)} &= \left[t^x\left(-e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1}\left(-e^{-t}\right)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\,dt \\
&= x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \\
&= x\widetilde{\Gamma}(x).
\end{aligned}
$$

Notar que $[-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$, ya que

$$\lim_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^x e^{-t} = 0.$$

Solo restaría probar que $\widetilde{\Gamma}(z)$ es logarítmicamente convexa, y estamos en las condiciones del Teorema de Bohr-Mollerup 3.4.9. Para ello, tomando derivadas de segundo orden en $\ln\left(\widetilde{\Gamma}(z)\right)$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln\left(\widetilde{\Gamma}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\ln\left(\widetilde{\Gamma}(x)\right)\right) = \frac{d}{dx}\frac{\widetilde{\Gamma}'(x)}{\widetilde{\Gamma}(x)} = \frac{\widetilde{\Gamma}''(x)\widetilde{\Gamma}(x) - \left(\widetilde{\Gamma}'(x)\right)^2}{\widetilde{\Gamma}(x)^2}.$$

Esta expresión es no-negativa si y solo si se cumple

$$\left(\widetilde{\Gamma}'(x)\right)^2 \leq \widetilde{\Gamma}''(x)\widetilde{\Gamma}(x), \quad x > 0. \tag{3.4.16}$$

A continuación, el siguiente lema nos permite afirmar que $\widetilde{\Gamma}^{(n)}(x)$ se puede obtener intercambiando los órdenes de derivada e integral.

Lema 3.4.10 *Sea $\Omega = \{z : \Re(z) > 0\}$, entonces $\widetilde{\Gamma}(z) \in \mathscr{H}(\Omega)$ y*

$$\frac{d^n}{dz^n}\widetilde{\Gamma}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dz^n}(t^{z-1}e^{-t})\,dt = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)(t^{z-1}e^{-t})\,dt. \tag{3.4.17}$$

Si damos por hecho el Lema 3.4.10 (después veremos su demostración), vemos que (3.4.16) es consecuencia directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz; en efecto,

$$
\begin{aligned}
\left(\widetilde{\Gamma}'(x)\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t}\,dt\right)^2 &\leq \left(\int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t}\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt\right) \\
&= \widetilde{\Gamma}''(x)\widetilde{\Gamma}(x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.4.9,

$$\Gamma(x) = \widetilde{\Gamma}(x), \quad x > 0.$$

Finalmente, podemos hacer una extensión para $z \in \mathbb{C}$ tales que $\Re(z) > 0$ por el Principio de Identidad A.1.12, ya que ambas coinciden en $\mathbb{R}^+$, luego

$$\Gamma(z) = \widetilde{\Gamma}(z), \quad \Re(z) > 0,$$

probando el resultado principal de esta sección.

Demostración del Lema 3.4.10: Tenemos que comprobar que se cumplen las condiciones del Lema A.2.16 de derivación de integrales paramétricas.

Basta demostrar el resultado para z en los dominios

$$\Omega(a,b) := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \Re(z) < b\}, \quad 0 < a < b < \infty,$$

y después hacer $a \to 0$ y $b \to \infty$, generalizando a Ω.

Por un lado, la función $f(z,t) := t^{z-1}e^{-t}$ es continua si $(z,t) \in \Omega \times (0,+\infty)$, y cumple que $z \mapsto f(z,t)$ es holomorfa en Ω para cada $t > 0$ fijo.

Por otro lado, si $z \in \Omega(a,b)$ entonces

$$\begin{aligned} |f(z,t)| &= |t^{z-1}|\, e^{-t} = |e^{(z-1)\operatorname{Log}(t)}| e^{-t} \\ &= e^{(\Re(z)-1)\ln(t)} e^{-t} = t^{\Re(z)-1} e^{-t} \\ &\leq t^{b-1}\, e^{-t}\, \chi_{[1,+\infty)}(t) + t^{a-1}\, e^{-t}\, \chi_{(0,1)}(t) =: g(t), \end{aligned}$$

y basta ver que la función $g(t) \in L^1(0,+\infty)$. En primer lugar,

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \int_0^1 t^{a-1} e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t^{b-1} e^{-t}\, dt,$$

por lo tanto:

1. Si $t \in (0,1)$, entonces

$$\int_0^1 t^{a-1} e^{-t}\, dt \leq \int_0^1 t^{a-1}\, dt = \left[\frac{t^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a} < \infty.$$

2. Si $t \in [1,+\infty)$, entonces

$$t^{b-1} e^{-t} = \frac{t^{b+1} e^{-t}}{t^2}.$$

Observamos que $t^{b+1}e^{-t}$ es acotada si $t \geq 1$, pues es continua y, para todo $b > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} t^{b+1} e^{-t} = 0,$$

luego existe $C > 0$ tal que $C = \max\{t^{b+1}e^{-t} : t \geq 1\}$, de donde deducimos que

$$\frac{t^{b+1}e^{-t}}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}, \quad \forall t \geq 1, b > 0;$$

y por lo tanto,

$$\int_1^{+\infty} \frac{C}{t^2}\, dt = \left[\frac{-C}{t}\right]_1^{+\infty} = C < \infty.$$

Juntando ambas afirmaciones, deducimos que $g \in L^1(0,+\infty)$, probando el resultado. □

A Resultados auxiliares

Este apéndice está dedicado a complementar algunos resultados clásicos del análisis complejo, así como otros resultados y herramientas que pueden resultar de utilidad.

A.1. Resultados tradicionales

A lo largo de todo el trabajo se utilizará notación estándar de variable compleja. En particular, $\mathscr{H}(\Omega)$ denotará el conjunto de las funciones holomorfas $f(z)$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Cuando $f(a) = 0$ diremos que a es un cero de f, y denotamos su multiplicidad como

$$m(a, f) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \colon\ f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

El conjunto de los ceros de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se denotará por

$$\mathscr{Z}_f(\Omega) = \{a \in \Omega \colon\ f(a) = 0\}.$$

Sabiendo que los ceros de f son a lo sumo un conjunto numerable, a veces escribiremos este conjunto como una sucesión

$$\mathscr{Z}_f(\Omega) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

si bien en este caso se entenderá que en los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cada cero de f se repite tantas veces como su multiplicidad.

Definición A.1.1 Diremos que una función es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si f es holomorfa en Ω salvo, quizás, en un conjunto $M \subset \Omega$ aislado de singularidades, en las cuales f tiene un polo. Lo denotaremos como $f \in \mathscr{M}(\Omega)$.

Definición A.1.2 Sea I un intervalo conexo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Diremos que f es convexa en I si para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, se verifica

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Definición A.1.3 Definimos la función **logaritmo principal** $\text{Log}\,(\cdot) : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\text{Log}\,(z) = \ln|z| + i\text{Arg}_{(-\pi,\pi)}(z),$$

donde $\text{Arg}_{(-\pi,\pi)}(z)$ denota el argumento de z en $(-\pi, \pi)$.

Definición A.1.4 En $\mathbb{C}$, definimos la función seno como la aplicación $\operatorname{sen}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\operatorname{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Análogamente, definimos la función coseno $\cos(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

A partir de la definición del seno y el coseno, obtenemos el siguiente resultado.

Lema A.1.5 *Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = x + iy$, entonces*

$$|\operatorname{sen}(z)|^2 = \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ en su forma estándar $z = x + iy$. Aplicando el desarrollo seno de la suma,

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x + iy) = \cos(x)\operatorname{sen}(iy) + \operatorname{sen}(x)\cos(iy).$$

Ahora, analizando cada sumando por separado, tenemos:

$$1) \quad \cos(x)\operatorname{sen}(iy) = \cos(x)\frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \cos(x)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\cos(x)\operatorname{senh}(y).$$

$$2) \quad \operatorname{sen}(x)\cos(iy) = \operatorname{sen}(x)\frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \operatorname{sen}(x)\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \operatorname{sen}(x)\cosh(y).$$

Agrupando ambos términos y tomando módulos obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(x)|^2 &= (\cos(x)\operatorname{senh}(y))^2 + (\operatorname{sen}(x)\cosh(y))^2 \\
&= \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y) + \operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(x) \\
&= \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y) + \operatorname{sen}^2(x)(1 + \operatorname{senh}^2(y)) \\
&= \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)(\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)) \\
&= \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y).
\end{aligned}$$

□

Teorema A.1.6 ***(Teorema de Liouville)***. *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y acotada, esto es, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es una función constante.*

Más aún, si $|f(z)| \leq C + D|z|^N$, con $C, D > 0$, entonces f es a lo sumo un polinomio de grado N.

Demostración. La prueba del teorema de Liouville se puede consultar en [9, pág 50]. La segunda afirmación la probaremos empleando el desarrollo de Taylor de la función f en el origen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Empleando la Fórmula de Cauchy A.2.15 para las derivadas, obtenemos, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi,$$

de donde se sigue la desigualdad de Cauchy:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \frac{1}{2\pi} \left|\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \left|\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\right| |d\xi|.$$

Tomando ahora $|f(\xi)| \leq \sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(0)\right| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{\sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|}{R^{n+1}} |d\xi| \\ &\leq \frac{n! \sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|d\xi|}{R^{n+1}} = \boxed{\frac{n! \sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|}{R^n}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, estamos suponiendo que $|f(z)| \leq C + D|z|^N$, con $C, D > 0$, por lo que si lo aplicamos al supremo tenemos que $\sup_{|\xi|=R} |f(\xi)| \leq C + D|\xi_0|^N = C + DR^N$, siendo ξ_0 un valor que alcanza ese supremo de $f(z)$ en $\{|\xi| = R\}$. Tomando entonces $n > N$:

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n! \sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|}{R^n} \leq \frac{n!(C + DR^N)}{R^n}, \qquad \forall R > 0,$$

de manera que, si tomamos límites en el último término, se obtiene $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{n!(C+DR^N)}{R^n} = 0$. Por lo tanto $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq 0$, que implica que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n > N$.

Sustituyendo en el desarrollo de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Que es un polinomio de grado a lo sumo N, lo cual concluye el resultado. □

El siguiente resultado ha sido extraído de [7].

Teorema A.1.7 ***(M-Test de Weierstrass):*** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones de X a $\mathbb{C}$ tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente.*

Demostración. Sea $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Entonces para $N > M$,

$$|F_N(x) - F_M(x)| = \left|\sum_{n=M+1}^{N} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} M_n$$

para todo $x \in X$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente, $\{F_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, luego existe $\xi_x \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{N} F_N(x) = \xi_x.$$

Sea $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $F(x) := \xi_x$, entonces

$$|F(x) - F_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Por la convergencia de la última serie, si $\varepsilon > 0$, existe un entero N_0 tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$ para todo $N \geq N_0$, lo que nos permite deducir que

$$|F(x) - F_N(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in X$ siempre que $N \geq N_0$, lo cual prueba el resultado. $\square$

Lema A.1.8 *Sea X un conjunto y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X a $\mathbb{C}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente para todo $x \in X$. Si existe $a \in \mathbb{R}$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\Re(f_n(x)) \leq a$ para todo $x \in X$ y $n \geq n_1$, entonces $e^{f_n} \longrightarrow e^f$ uniformemente para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$, entonces $|e^z - 1| < \varepsilon\, e^{-a}$. Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para todo $x \in X$ y $n \geq n_0$. Entonces,

$$\varepsilon\, e^{-a} > \left| e^{f_n(x)-f(x)} - 1 \right| = \left| \frac{e^{f_n(x)}}{e^{f(x)}} - 1 \right|, \quad \forall x \in X, n \geq n_0;$$

y por lo tanto, deducimos que para todo $x \in X$ y $n \geq n_0$,

$$\left| e^{f_n(x)} - e^{f(x)} \right| < \varepsilon\, e^{-a} \left| e^{f(x)} \right| = \varepsilon\, e^{-a}\, e^{\Re(f(x))} \leq \varepsilon,$$

donde en el último paso hemos usado que $\Re(f(x)) = \lim_{n\to\infty} \Re(f_n(x)) \leq a$. $\square$

Teorema A.1.9 *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si f_n converge uniformemente a una función f sobre compactos de Ω, entonces f es holomorfa en Ω. Además, la sucesión de derivadas f_n' converge uniformemente a f' sobre compactos de Ω.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en [9, Chapter 2] teoremas 5.2 y 5.3. $\square$

Los siguientes tres resultados han sido extraídos de [11, capítulo 4], sección 4.1.

Teorema A.1.10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $a \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$. Son equivalentes:*

1. *$f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$.*
2. *Existe $V_a \subset \Omega$ entorno de a tal que $f|_{V_a}$ es idénticamente nula.*
3. *f es idénticamente nula en Ω.*

Demostración. Es inmediato que 3. $\implies$ 2. $\implies$ 1.

$\boxed{1. \implies 3.}$ Si $f^{(n)}(a) = 0$ para todo n, entonces

$$G := \{z \in \Omega \,:\, f^{(n)}(z) = 0, \forall n \geq 0\}$$

no es vacío. Veamos que, de hecho, $G = \Omega$.

Como las derivadas sucesivas $f^{(n)}$ son continuas, cada

$$G_n := \{z \in \Omega \,:\, f^{(n)}(z) = 0\}$$

es cerrado en Ω, y por lo tanto, $G = \bigcap_{n\geq 0} G_n$ también lo es.

Por otra parte, si $z_0 \in G$, el desarrollo en serie de f es idénticamente nulo alrededor de z_0, luego existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset \Omega$ y $f|_{D_r(z_0)}$ es idénticamente nula, luego $D_r(z_0) \subset G$, luego G es abierto. Como Ω es conexo y G es abierto y cerrado a la vez, entonces $G = \Omega$. $\square$

Corolario A.1.11 ***(Principio de identidad 1)***: *Si f es una función holomorfa no idénticamente nula en un abierto conexo Ω, entonces todos los ceros de f son aislados y $\Omega \cap \mathscr{Z}_f(\Omega)' = \emptyset$. Consecutivamente, $\mathscr{Z}_f(\Omega)$ es numerable y $\mathscr{Z}_f(\Omega)' \subset \partial\Omega$.*

Demostración. Sea $a \in \mathscr{Z}_f(\Omega)$. Entonces por el Teorema A.1.10, existe $n \geq 1$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si $m := \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$, en un cierto disco $D_r(a)$, la función f admite un desarrollo en potencias

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-a)^n = (z-a)^m g(z),$$

donde $g(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-a)^{n-m}$ es continua en $D_r(a)$ y verifica $g(a) = a_m \neq 0$. Entonces existe $0 < \delta < r$ tal que $g(z) \neq 0$ si $|z-a| < \delta$, luego $D_\delta(a) \cap \mathscr{Z}_f(\Omega) = \{a\}$, lo que significa que a es un punto aislado de $\mathscr{Z}_f(\Omega)$.

Si existe $a \in \Omega \cap \mathscr{Z}_f(\Omega)'$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{Z}_f(\Omega)$ que converge hacia a, con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(a) = \text{lím}_n f(a_n) = 0$, entonces a no sería aislado en $\mathscr{Z}_f(\Omega)$. Finalmente, $\mathscr{Z}_f(\Omega)$ es numerable a lo sumo, y como $\mathscr{Z}_f(\Omega)' \subset \overline{\Omega}$, y $\mathscr{Z}_f(\Omega) \cap \Omega = \emptyset$, entonces $\mathscr{Z}_f(\Omega)' \subset \partial\Omega$. □

Corolario A.1.12 ***(Principio de Identidad 2)***: *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $M \subset \Omega$ tal que $\Omega \cap M' \neq \emptyset$. Si $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $f(z) = g(z)$ para todo $z \in M$, entonces $f = g$.*

Demostración. Basta definir $h(z) := f(z) - g(z)$, que cumple $\emptyset \neq \Omega \cap M' \subset \Omega \cap \mathscr{Z}_h(\Omega)'$ y aplicar A.1.11. □

A.2. Resultados de integración

Teorema A.2.13 ***(Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)***: *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f_n \longrightarrow f$ para casi todo punto. Si existe una función g medible e integrable tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \text{lím}_n \int f_n d\mu = \int \text{lím}_n f_n d\mu.$$

Demostración. Se puede consultar la prueba en [3, Chapter 5], teorema 5.6. □

Lema A.2.14 ***(Lema de integración paramétrica 1)***: *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y sean γ un arco y $f : \Omega \times \gamma* \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Sea*

$$F(z) := \int_\gamma f(z,\xi)\, d\xi, \quad z \in \Omega.$$

Supongamos que:

1. *Para todo $\xi_0 \in \gamma*$, $g(z) := f(z,\xi_0)$ es holomorfa en Ω.*
2. *$\frac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)$ es continua en $\Omega \times \gamma*$.*

   Entonces $F \in \mathscr{H}(\Omega)$, siendo

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\int_\gamma f(z,\xi)\, d\xi = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)\, d\xi.$$

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $D = D_r(z_0) \subset \Omega$. Nuestro objetivo es probar que existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} f(z_0, \xi)\, d\xi.$$

En primera instancia,

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \int_\gamma \frac{f(z_0+h,\xi) - f(z_0,\xi)}{h}\, d\xi, \tag{A.2.1}$$

por lo que si conseguimos intercambiar límite e integral, lo tenemos probado. Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_r(0)$ tal que $\lim_n h_n = 0$. Aplicando la regla de Barrow,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(z_0+h_n,\xi) - f(z_0,\xi)}{h_n} \right| &= \left| \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \frac{\partial}{\partial z} f(z_0+h,\xi)\, dh \right| \\
&\le \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(z_0+h,\xi) \right| |dh| \\
&\le \max_{\xi \in \gamma*} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial z} f(z,\xi) \right| : z \in D \right\} \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} |dh|.
\end{aligned}$$

Por la compacidad de $\gamma*$, $\max_{\xi\in\gamma*} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial z} f(z,\xi) \right| : z \in D \right\} =: M < \infty$, de manera que

$$\max_{\xi \in \gamma*} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial z} f(z,\xi) \right| : z \in D \right\} \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} |dh| \le M \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} |dh| = M < \infty,$$

y aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada A.2.13 en (A.2.1),

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_0+h_n) - F(z_0)}{h_n} &= \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_0+h_n,\xi) - f(z_0,\xi)}{h_n}\, d\xi \\
&= \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} f(z_0,\xi)\, d\xi,
\end{aligned}$$

probando el resultado. □

Teorema A.2.15 *(**Fórmula de Cauchy para discos**). Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, con Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Consideramos $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tales que $\overline{D}_R(z_0) \subset \Omega$. Entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad \forall z \in D_R(z_0).$$

Más aún, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces existe $f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, en las condiciones anteriores,

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \qquad \forall z \in D_R(z_0).$$

Demostración. La primera parte puede consultarse en [7, pág. 70]. Para la segunda parte, sea $\gamma* = \partial D_R(z_0)$ y sea $g : \Omega \times \gamma* \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z,\xi) := \frac{f(\xi)}{\xi - z}.$$

Claramente, tenemos:

1. $g(z,\xi)$ es continua en $\Omega \times \gamma*$, por ser cociente de funciones continuas y ser $\xi - z \neq 0$ para todo $z \in D_R(z_0)$ y $\xi \in \gamma*$.
2. Para todo ξ_0, $g(z,\xi_0)$ es holomorfa por ser cociente de funciones holomorfas y el previo argumento.
3. $\frac{\partial g}{\partial z}(z,\xi) = \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}$ es continua en $\Omega \times \gamma*$ por los argumentos anteriores. De hecho, fijado ξ,
$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} g(z,\xi) = n! \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}$$
es continua y holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$, generalizando a las derivadas parciales de g de cualquier orden.

Por inducción, si $n = 1$, entonces por el Lema A.2.14,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad \forall z \in D_R(z_0).$$

Suponiendo cierto el argumento para n, entonces para $n+1$, sabemos que

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad \forall z \in D_R(z_0),$$

y como $\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$ cumple las condiciones del Lema A.2.14, podemos aplicar el mismo y concluir que

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{(n+1) f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi, \quad \forall z \in D_R(z_0),$$

es decir,

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi, \quad \forall z \in D_R(z_0).$$

□

Lema A.2.16 ***(Lema de integración paramétrica 2)****: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{C}$ continua y sea*

$$F(z) := \int_0^{+\infty} f(z,t)\, dt, \quad z \in \Omega.$$

Supongamos que:

1. *Para todo $t_0 > 0$, $\widetilde{f}(z) := f(z,t_0) \in \mathscr{H}(\Omega)$.*
2. *$|f(z,t)| \leq g(t)$ para todo $z \in \Omega$, con $g \in L^1(0,+\infty)$.*

Entonces $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ y

$$F^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t)\, dt, \quad z \in \Omega.$$

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{D}_{2r}(z_0) \subset \Omega$. En primer lugar, gracias a la segunda condición y la desigualdad de Cauchy, para cada $t > 0$ fijo se tiene

$$\max_{z \in \overline{D}_r(z_0)} \left| \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t) \right| \leq \frac{2 \cdot n!}{r^n} \max_{z \in \overline{D}_{2r}(z_0)} |f(z,t)| \leq \frac{2 \cdot n!}{r^n} g(t). \tag{A.2.2}$$

Por otro lado, veamos para $n = 1$ que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(z_0, t)\, dt.$$

Escribimos el cociente incremental como

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0, t)}{h}\, dt. \tag{A.2.3}$$

Si conseguimos intercambiar límite e integral, lo tenemos probado, luego sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_r(0)$ tal que $\lim_n h_n = 0$. Aplicando la regla de Barrow,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_0 + h_n, t) - f(z_0, t)}{h_n} \right| &= \left| \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \frac{\partial}{\partial z} f(z_0 + h, t)\, dh \right| \\ &\leq \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(z_0 + h, t) \right| |dh| \\ \text{(A.2.2 para n=1)} &\leq \frac{1}{|h_n|} \int_0^{h_n} \frac{2}{r} g(t)\, |dh| = 2r^{-1} g(t). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada A.2.13 en (A.2.3),

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{F(z_0 + h_n) - F(z_0)}{h_n} &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \to \infty} \frac{f(z_0 + h_n, t) - f(z_0, t)}{h_n}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(z_0, t)\, dt, \end{aligned}$$

probando el resultado para $n = 1$. Para $n \geq 2$, es consecuencia inmediata de aplicar el caso $n = 1$ a $g_n(z) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} f(z, t)$ junto a (A.2.2). $\square$

Bibliografía

[1] L.V. AHLFORS, *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3rd Edition. McGraw-Hill, 1979.

[2] E.ARTIN, *The Gamma Function*. Selected Topics in Mathematics, Athena Series, 1964.

[3] R.G. BARTLE, *The Elements of integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library Edition, 1995.

[4] B. BOLLOBÁS, *The Art of Mathematics – Take Two: Tea Time in Cambridge*. Cambridge University Press, 2022.

[5] B. CASCALES, *Productos infinitos*, (https://webs.um.es/beca/docencia.html), 2011.

[6] E.Y.M. CHIANG, *Classical analysis*, (https://www.math.hkust.edu.hk/machiang/391N), 2009.

[7] J.B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, 2nd Edition. Springer-Verlag, 1978.

[8] W. RUDIN, *Real and Complex analysis*, 3rd Edition. McGraw-Hill, 1970.

[9] E.M. STEIN & R.SHAKARCHI, *Complex analysis*. Princeton University Press, 2003.

[10] D.C. ULLRICH, *Complex Made Simple*, Volume 97. American mathematical society, 2000.

[11] G. VERA, *Lecciones de Análisis Complejo*, (https://webs.um.es/gvb/AC/LecAC(2013).pdf), 2011.