



Facultad
de Matemáticas
UMU

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICA AVANZADA



El teorema de Beurling-Landau en el espacio de Paley-Wiener

José Avilés Pérez

Facultad de Matemáticas

Universidad de Murcia

Trabajo Fin de Máster

Tutor: Gustavo Garrigós Aniorte

Murcia, septiembre de 2026



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Declaración de originalidad

José Avilés Pérez, autor del Trabajo de Fin de Máster *El teorema de Beurling-Landau en el espacio de Paley-Wiener*, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Anierte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, el 6 de septiembre de 2026

Fdo.: José Avilés Pérez ¹

¹En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento al profesor Garrigós, por su inestimable ayuda, confianza y paciencia durante la realización de este trabajo.

También quiero agradecer a mi familia y amigos el apoyo recibido durante los pasados cinco años de mi etapa universitaria. Gracias a él, he podido llegar hasta este momento.

Índice general

Resumen	III
1. Espacios de funciones holomorfas	1
1.1. El espacio de Paley-Wiener	2
1.1.1. La transformada de Fourier	2
1.1.2. Definición del espacio de Paley-Wiener	5
1.1.3. Una base para el espacio de Paley-Wiener	9
1.1.4. El teorema de muestreo	13
1.2. El teorema de Paley-Wiener	15
1.2.1. Funciones holomorfas de tipo exponencial	16
1.2.2. El teorema de Paley-Wiener en $L^2(\mathbb{R})$	16
1.3. Espacios de Bernstein	20
2. Problemas clásicos de muestreo en el espacio de Paley-Wiener	25
2.1. Conjuntos uniformemente discretos	26
2.2. El problema de unicidad	28
2.2.1. Conjuntos de unicidad	28
2.2.2. El problema de unicidad en el espacio de Paley-Wiener: sistemas completos	29
2.3. El problema de muestreo estable	32
2.3.1. Conjuntos de muestreo estable	32
2.3.2. El problema de muestreo estable en el espacio de Paley-Wiener: frames	38
2.4. El problema de interpolación	44
2.4.1. Conjuntos de interpolación	44
2.4.2. El problema de interpolación en el espacio de Paley-Wiener: sucesiones de Riesz	45

3. Teoremas de densidad de Beurling-Landau	47
3.1. Densidad uniforme	47
3.2. Enunciado de los teoremas de Beurling	53
3.3. Primera implicación de la prueba	55
3.4. Demostración recíproca	62
3.4.1. Primer paso: la fórmula de Jensen	62
3.4.2. Segundo paso: límite débil de conjuntos	68
3.5. Tercer paso: compacidad	77
3.5.1. El teorema de Montel	77
3.5.2. Cuarto paso: el espacio de Paley-Wiener	81
3.5.3. Argumento final	83
Referencias	85

Introducción

El **principal objetivo** de este trabajo es probar el teorema de Beurling-Landau al que hace alusión su propio título. Concretamente, hablamos del teorema que permite caracterizar los *conjuntos de muestreo estable* sobre los espacios de Paley-Wiener PW_σ , en términos de una determinada noción de densidad $D^\pm(\Lambda)$ desarrollada por el mismo Beurling (ver Teorema 0.1).

La **inspiración** que motivó este estudio fue mi Trabajo Fin de Grado del pasado año [1], en el cual se trabajó el teorema clásico de Paley y Wiener que caracteriza y fundamenta los espacios PW_σ que estudiaremos en este trabajo.

Estos espacios se definen como

$$PW_\sigma = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{sop}(\hat{f}) \subseteq \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right] \right\}.$$

Es decir, consisten de aquellas funciones (o señales) en $L^2(\mathbb{R})$ cuyo espectro de frecuencias está limitado a una banda simétrica de longitud σ . Este tipo de funciones, también llamadas *de banda limitada* en algunas ramas de ingeniería, juega un papel importante en muchas aplicaciones, especialmente en Teoría de la Señal y en Telecomunicaciones, donde es habitual trabajar con bandas precisas de frecuencia, bien para facilitar la transmisión, o bien porque solo estas son audibles para el receptor (por ejemplo, para el oído humano, que solo percibe frecuencias inferiores a 20.000 Hz).

Los *teoremas de muestreo* estudian cuándo es posible describir estas funciones $f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, solo a partir de su valor en un conjunto pequeño de muestras

$$\{f(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda},$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto discreto adecuado. Cuando esto es posible, basta transmitir la muestra discreta $\{f(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ para recuperar de forma única la señal completa. En las aplicaciones, además, se requiere *estabilidad* en el proceso, de modo que pequeños errores de muestreo impliquen pequeños errores en la reconstrucción. Esta propiedad, denominada *muestreo estable*, y denotada por $\Lambda \in SS(PW_\sigma)$, se cuantifica matemáticamente con la desigualdad

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2, \quad \forall f \in PW_\sigma, \quad (0.0.1)$$

para una cierta constante $C > 0$.

A lo largo del trabajo encontraremos condiciones necesarias y suficientes en Λ que garantizan la propiedad (0.0.1). El teorema clásico de Shannon dice que podemos tomar $\Lambda = \frac{1}{\sigma}\mathbb{Z}$. La contribución de Beurling es dar una caracterización esencial para este problema, a partir de una noción adecuada de densidad para conjuntos discretos, denotada $D^\pm(\Lambda)$, que describimos más adelante (ver Definición 3.1).

Teorema 0.1. (Caracterización de Beurling-Landau para los S.S. de PW_σ) Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces se tiene:

- a) Si $D^-(\Lambda) > \sigma$, entonces Λ es un SS(PW_σ).
- b) Si $D^-(\Lambda) < \sigma$, entonces Λ no es un SS(PW_σ).

Beurling prueba este teorema en un curso en Princeton en 1959-60 (con una formulación algo diferente, en términos de espacios de Bernstein B_σ , que enunciamos más adelante; ver Teorema 3.11). Landau da una demostración independiente de la condición suficiente (b) en un artículo en Acta Math en 1967 (y también en un contexto más general en $\mathbb{R}^n$; ver [8]).

Nuestra finalidad última, es, por tanto, dar una demostración autocontenida del teorema arriba enunciado, utilizando para ello la referencia de Olevskii y Ulanovskii [10], que evita algunos de los aspectos más técnicos de las pruebas originales de Beurling y Landau.

Para lograrlo, es necesario desarrollar múltiples nociones del Análisis Armónico, la Teoría de Muestreo, el Análisis Funcional, el Análisis Complejo y varias otras ramas del Análisis. Por esta razón, cada uno de los tres capítulos que componen este trabajo está dedicado a desarrollar una base teórica en torno a los tres conceptos descritos en el teorema de Beurling-Landau: los espacios de Paley-Wiener, los conjuntos de muestreo estable y las densidades de Beurling.

Antes de comenzar a describir las características principales de cada capítulo, cabe resaltar algunos aspectos de nuestra **principal referencia**, el libro de Olevskii y Ulanovskii *Functions with Disconnected Spectrum* [10]. Este manual está basado a su vez en 150 referencias distintas, lo cual lo convierte en una de las principales guías para estudiar la Teoría de Muestreo en el espacio de Paley-Wiener, y dedica sus cinco primeros capítulos a desarrollar gran parte de la teoría que expondremos a lo largo del trabajo, llegando a demostrar el Teorema de Beurling-Landau en sus capítulos 3 y 5.

Sin embargo, a pesar de su claridad expositiva y su tratamiento completo del tema, el hecho de tomar [10] como principal referencia ha condicionado enormemente este trabajo. En primer lugar, el teorema de Beurling-Landau que probamos se apoya en la estructura geométrica de la recta real. Esto hace que todos los conceptos desarrollados en el trabajo se definan sobre $\mathbb{R}$, y no sobre dimensiones superiores, aún cuando sea posible hacerlo.

En segundo lugar, como bien indica el título del libro [10], su centro de interés son los espacios de funciones con espectro desconexo. El nuestro, en cambio, son los espacios de espectro conexo, puesto que dicha conexión es necesaria para que el teorema de Beurling-Landau funcione. A pesar de que [10] comience desarrollando el tema para espacios de espectro conexo, al tener el foco puesto en la extensión de la teoría a espectros desconexos—la cual desarrolla a partir del capítulo 5—, los resultados que nos interesan adquieren un carácter más introductorio y escueto. Es por ello que muchos se enuncian sin demostración, como ejercicios, razón por la cual en este trabajo pueden encontrarse muchas pruebas de *elaboración propia*. Además, muchos de los objetos relevantes para nosotros, como las densidades de Beurling, los límites débiles de conjuntos o el espacio de Paley-Wiener, han tenido que desarrollarse con mayor profundidad de

cara a la demostración del teorema de Beurling-Landau. Es por ello que la mayor parte de los *ejemplos* encontrados en este trabajo también son de elaboración propia, con el fin de clarificar los conceptos presentados.

Por último, el libro [10] concede gran importancia a la relación entre los problemas de la Teoría de Muestreo y sus equivalentes en el contexto del Análisis Funcional, puesto que les será necesario para tratar el caso disconexo. Nosotros reduciremos, en cierta medida, este enfoque, desgranando sus resultados en distintas partes entre los tres capítulos, en vez de presentarlo todo como una teoría conjunta como ocurre en [10, Capítulo 1].

Esta pluralidad de conceptos y enfoques presentes en [10] invita a dejar a un lado, momentáneamente, la prueba del teorema de Beurling-Landau para adentrarnos en otros problemas similares. Es por ello que, a pesar de cumplirse al final del Capítulo 3 el objetivo de este trabajo, se establece como **propósito secundario** del trabajo presentar una primera aproximación a algunos conceptos y resultados cercanos a nuestro teorema en cuestión. Así, a lo largo del trabajo, podrán leerse algunos apuntes históricos e introducciones a temas adyacentes como los espacios de Paley-Wiener generalizados (sección 1.3), el problema de interpolación (sección 2.4) u otros teoremas de tipo Beurling-Landau (sección 3.2).

Dicho esto, pasamos a detallar los aspectos más reseñables de cada capítulo.

El **capítulo 1** está dedicado a introducir y desgranar nuestro espacio de trabajo, el espacio de Paley-Wiener.

Para poder dar su definición, se introduce, en primer lugar, el operador **transformada de Fourier** (sección 1.1.1), una herramienta básica del Análisis Armónico que ya trabajamos en [1] y en el curso de Máster. Se comienza dando su definición para funciones de $L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y extendiendo, por densidad, el operador a $\hat{f}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, donde es isométrico y biyectivo:

- Teorema de Plancherel: $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$.
- Identidad de Parseval: $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
- Fórmula de inversión: $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ c.t.p } x \in \mathbb{R}$.

Se termina la sección definiendo el **espectro** de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ o $f \in L^1(\mathbb{R})$ como

$$\text{spec}(f) := \text{sop}(\hat{f}),$$

donde el soporte se toma de forma *esencial* (Definición 1.8).

Seguidamente, en la sección 1.1.2, se define el espacio de Paley-Wiener con espectro compacto $S \subset \mathbb{R}$ como

$$PW_S := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{spec}(f) \subseteq S\};$$

motivando esta definición en el contexto de la ingeniería de señales [6].

Aunque definido de forma general, gran parte del trabajo se centra en los espacios con espectro simétrico y conexo. Denotamos por PW_σ el espacio con espectro $S = [-\sigma/2, \sigma/2]$ ($\sigma > 0$).

En primer lugar, la transformada de Fourier nos muestra que cada PW_σ es isométricamente isomorfo a $L^2(S)$, lo cual permite trasladar propiedades entre ambos espacios y otorga mayor relevancia al estudio del espacio de Paley-Wiener. Una consecuencia directa de este hecho es que PW_σ es un espacio de Hilbert separable (Corolario 1.17) y es invariante por traslaciones (Proposición 1.18).

Puesto que PW_σ es un espacio de Hilbert separable, en la siguiente sección (1.1.3) nos centramos en construir una base ortonormal para él. Definimos, en general, una **base ortonormal** para un espacio de Hilbert separable H como un sistema $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que cumple $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ para $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, $\|e_n\| = 1$ para todo n y permite un *desarrollo de Fourier* para cada $f \in H$:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

En los corolarios 1.25 y 1.27 demostramos, respectivamente, que:

- El sistema $E_\sigma(\mathbb{Z}) := \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} t} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base ortonormal para $L^2([-\sigma/2, \sigma/2])$.
- El sistema $\{\sqrt{\sigma} \text{sinc}(\sigma x + n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para PW_σ .

Esto nos lleva a introducir el **Teorema de muestreo de Shannon 1.30**, el cual permite reconstruir toda función $f \in PW_\sigma \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ mediante

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \text{sinc}(\sigma x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

esta última convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$ y uniforme sobre todo $\mathbb{R}$. Además se tiene la identidad

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\sigma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right|^2, \quad \forall f \in PW_\sigma.$$

Es a partir de este punto, que comenzamos a abusar de notación y escribir en todo el resto del trabajo PW_σ para el espacio $PW_\sigma \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, ya que toda función de PW_σ posee un representante continuo en su clase de equivalencia en $L^2(\mathbb{R})$ (Proposición 1.28).

La sección 1.2 está dedicada a enunciar y probar el **teorema de Paley-Wiener 1.35**, el cual dice que para toda $M > 0$ y $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f := F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple

$$F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C}) \iff \text{spec}(f) \subseteq \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right],$$

donde

$$\text{Exp}_M(\mathbb{C}) := \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \exists A > 0 / |F(z)| \leq A e^{\pi M |z|} \forall z \in \mathbb{C}\}.$$

Este teorema es crucial porque permite establecer, para cada función $f \in PW_\sigma$, una función analítica equivalente F en

$$\mathbf{PW}_\sigma = \left\{ F \in \text{Exp}_\sigma(\mathbb{C}) : F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

que cumple $F|_{\mathbb{R}} = f$.

El capítulo termina con la sección 1.3, en la cual se define el **espacio de Bernstein** para cada $\sigma > 0$ como

$$\mathbf{B}_\sigma = \left\{ F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \exists C = C(F) > 0 / |F(x+iy)| \leq Ce^{\pi\sigma|y|} \forall x+iy \in \mathbb{C} \right\},$$

donde comprobamos que $F|_{\mathbb{R}} = f \in L^\infty(\mathbb{R})$ y puede tomarse $C(F) = \|f\|_\infty$ en cada caso.

Al igual que con el espacio de Paley-Wiener, utilizamos la notación B_σ para referirnos a las restricciones a la recta real

$$B_\sigma = \left\{ f = F|_{\mathbb{R}} : F \in \mathbf{B}_\sigma \right\}.$$

Para este nuevo espacio, demostramos a través del teorema de Paley-Wiener que se tiene $PW_\sigma = B_\sigma \cap L^2(\mathbb{R})$. Esta inclusión resulta clave en el Capítulo 3, donde se utiliza el espacio de Bernstein para la prueba del teorema de Beurling-Landau.

El **capítulo 2** se centra en presentar los tres problemas más importantes de la teoría clásica de muestreo, la cual nace en los años 30 a partir del teorema de muestreo 1.30.

Se empieza estudiando los **conjuntos uniformemente discretos** (sección 2.1), conjuntos $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ con *constante de separación* $\delta(\Lambda)$ positiva:

$$\delta(\Lambda) := \inf_{\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*} |\lambda - \lambda^*| > 0.$$

Estos conjuntos son numerables y, a diferencia de los conjuntos meramente discretos, carecen de puntos de acumulación. Además, el número de puntos de Λ en cada intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ de longitud finita L está acotado por $\lfloor L/\delta(\Lambda) \rfloor + 1$ (Proposición 2.5), lo cual resulta clave en la prueba del teorema de Beurling-Landau.

La sección 2.2 está dedicada al estudio del **problema de unicidad**, el cual pretende determinar si cada función f en un espacio funcional está totalmente determinada por sus muestras $f|_\Lambda$.

Diremos que un conjunto Λ es un **conjunto de unicidad** para un espacio vectorial X de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ —abreviaremos diciendo que Λ es un $US(X)$ —, si las condiciones $f \in X$ y $f|_\Lambda = 0$ implican $f = 0$.

Comenzamos demostrando que, si Λ es un $US(X)$, entonces cualquier $\Lambda \subseteq \Lambda'$ lo sigue siendo (sobremuestreo). Lo mismo aplica a traslaciones de Λ si el espacio X es invariante ante ellas (Proposición 2.7), como es el caso del espacio de Paley-Wiener.

Terminamos la sección mostrando la equivalencia entre el problema de unicidad en PW_S y el **problema de completitud** en $L^2(S)$ (Teorema 2.15). Este último problema consiste en encontrar un sistema completo para $L^2(S)$, es decir, un sistema $\{u_\lambda\} \in L^2(S)$ que cumpla $\overline{\text{span}(u)} = L^2(S)$.

La sección 2.3 define, al fin, el segundo de los conceptos clave en el teorema de Beurling-Landau: el **problema de muestreo estable**.

Aunque en el texto completo puede encontrarse una definición más general, decimos que un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un **conjunto de muestreo estable** para PW_σ (abreviamos diciendo que Λ es un $SS(PW_\sigma)$) si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad \forall f \in PW_\sigma.$$

En la Proposición 2.24 demostramos que la desigualdad superior siempre se cumple si Λ es uniformemente discreto. Además, si Λ es un $SS(PW_\sigma)$, también es un $US(PW_\sigma)$.

Estas mismas dos propiedades aplican también a B_σ , para el cual un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un $SS(B_\sigma)$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|_\infty \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| \leq B\|f\|_\infty, \quad \forall f \in B_\sigma.$$

A continuación, se desarrolla un ejemplo en el espacio B_1 (Proposición 2.27) para mostrar que un conjunto de unicidad no tiene por qué ser de muestreo estable.

De forma análoga a la sección anterior, en esta se muestra la equivalencia entre el problema de muestreo estable en PW_σ y el problema de encontrar un frame para $L^2([-\sigma/2, \sigma/2])$ (Teorema 2.31).

Un sistema $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un **frame** en el espacio de Hilbert H si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, u_\lambda \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Terminamos la sección utilizando técnicas de Análisis Funcional para mostrar un teorema de reconstrucción (Teorema 2.37) de elementos del espacio de Hilbert H utilizando el frame u :

$$x = SS^{-1}x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle S^{-1}x, u_\lambda \rangle_H u_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, S^{-1}u_\lambda \rangle_H u_\lambda, \quad \forall x \in H,$$

donde $S : H \mapsto H$ es el llamado **operador de frame**, definido en 2.34, y el sistema $v = \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ definido por

$$v_\lambda := S^{-1}u_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

es un nuevo frame, conocido como el **frame dual canónico** de u .

La última sección del capítulo introduce el último de los problemas clásicos de muestreo: el **problema de interpolación**. Dado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, definimos:

- $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un **conjunto de interpolación** para PW_S (abreviado $IS(PW_S)$) si para toda $f \in l^2(\Lambda)$ existe una función $F \in PW_S$ tal que $F|_\Lambda = f$.
- Análogamente, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ será un conjunto de interpolación para B_σ (abreviado $IS(B_\sigma)$) si para toda $f \in l^\infty(\Lambda)$ existe una función $F \in B_\sigma$ tal que $F|_\Lambda = f$.

A lo largo de la sección mostramos una serie de propiedades para esta clase de conjuntos análogas a las mostradas antes para los conjuntos de unicidad y de muestreo estable. También enunciamos, en este caso, una equivalencia entre el problema de interpolación en PW_S y su problema dual, el problema de encontrar una **sucesión de Riesz** para el espacio $L^2(S)$ (Teorema 2.48). No obstante, no entraremos aquí en más detalles de esta sección, ya que el problema de interpolación se introduce en este trabajo con carácter divulgativo, siendo innecesario para probar el teorema de Beurling-Landau.

Por último, el **capítulo 3** introduce los principales conceptos desarrollados por Arne Beurling en sus investigaciones de los años 1959-1960.

Comenzamos definiendo la densidad uniforme en la sección 3.1. Para cada conjunto Λ uniformemente discreto, se define su **densidad uniforme inferior** como

$$D^-(\Lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}.$$

Definimos también su **densidad uniforme superior** como

$$D^+(\Lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}.$$

Cuando se verifica $D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda)$, decimos que el conjunto Λ está **distribuido regularmente** y tiene como *densidad uniforme*

$$D(\Lambda) := D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda).$$

Estos límites siempre existen (Proposición 3.4) y cumplen una serie de buenas propiedades heredadas de sus análogos para cardinales (Proposición 3.5), como, por ejemplo, la invariancia por traslaciones.

Conocidos todos los elementos que conforman el teorema de Beurling-Landau 0.1, este se enuncia formalmente en la sección 3.2, junto a otros teoremas similares aplicables a conjuntos de interpolación o el espacio de Bernstein B_σ .

En las páginas que restan de trabajo, se desarrolla finalmente la prueba para el teorema de Beurling-Landau.

En primer lugar, la sección 3.3 ofrece una demostración para el segundo punto del teorema, es decir, prueba que $D^-(\Lambda) \geq \sigma$ si Λ es un $SS(PW_\sigma)$. La demostración presentada se debe a Nitzan y Olevisii [9] y se basa en la equivalencia del problema de muestreo estable con el problema del frame en $L^2([- \sigma/2, \sigma/2])$.

Finalmente, la sección 3.4 busca probar el primer punto del teorema. La demostración, en este caso, se divide en cuatro pasos que culminan en la última página del trabajo.

El primer paso consiste en probar el Teorema 3.19, el cual dice que

$$D^-(\Lambda) > \sigma \implies \Lambda \text{ es un } US(B_\sigma).$$

La demostración de este teorema precisa de un resultado ampliamente conocido del Análisis Complejo: la **fórmula de Jensen** (Teorema 3.20). Este teorema dice lo siguiente: sea $\Omega = D_R(0)$ el disco abierto de radio R y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función tal que $f(0) \neq 0$. Tomamos $0 < r < R$ y sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ los ceros de f en $\overline{D}_r(0)$, repetidos según su multiplicidad. Suponemos adicionalmente que dichos ceros están en el interior del disco, en $D_r(0)$. Entonces

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}.$$

La subsección dedicada a este primer paso culmina demostrando esta fórmula de Jensen—a partir de otros resultados de Análisis Complejo como la fórmula de Cauchy para el disco (Lema 3.25) o la propiedad del valor medio (Proposición 3.26)—, así como el teorema asociado al primer paso.

El segundo paso de la prueba consiste en desarrollar un concepto de límite para las sucesiones de conjuntos. Se comienza definiendo que $A \subseteq \mathbb{R}$ es una ε -**perturbación** de $B \subseteq \mathbb{R}$ si existe una biyección $f: A \rightarrow B$ tal que

$$|f(a) - a| < \varepsilon, \quad \forall a \in A.$$

A partir de esta idea, y dada una sucesión $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos uniformemente discretos en $\mathbb{R}$ que cumplen

$$\delta(\Lambda_n) > d > 0,$$

decimos que Λ es **límite débil** de la sucesión si para todo $\varepsilon > 0$ y todo intervalo abierto $I = (a, b)$, tal que $a, b \notin \Lambda$, el conjunto $\Lambda \cap I$ es una ε -perturbación de $\Lambda_n \cap I$ para casi todo n (es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, excepto una cantidad finita). O, equivalentemente, si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \cap I$ es una ε -perturbación de $\Lambda_n \cap I$ para todo $n > N$.

En concreto, estamos interesados en la siguiente definición: sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Denotaremos por $W(\Lambda)$ al conjunto de límites débiles de traslaciones de Λ . Es decir,

$$\Lambda^* \in W(\Lambda)$$

si existe una sucesión $(\Lambda - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de traslaciones de Λ que converge débilmente a Λ^* .

Hay en esta subsección dos propiedades claves de estos límites débiles para la demostración del teorema de Beurling-Landau. La primera es el Corolario 3.35, el cual establece la existencia de una subsucesión convergente para toda sucesión de traslaciones de un conjunto uniformemente discreto Λ .

La segunda es la Proposición 3.36, que prueba para cada conjunto uniformemente discreto Λ y cada conjunto límite $\Lambda^* \in W(\Lambda)$ las desigualdades

$$D^-(\Lambda) \leq D^-(\Lambda^*) \quad \text{y} \quad D^+(\Lambda^*) \leq D^+(\Lambda).$$

Una vez probadas estas proposiciones, se continúa con el tercer paso de la prueba, el cual consiste en demostrar que para todo conjunto uniformemente discreto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ se cumple:

$$\text{Si } \forall \Lambda^* \in W(\Lambda) \quad \Lambda^* \text{ es un } US(B_\sigma) \implies \Lambda \text{ es un } SS(B_\sigma).$$

Este resultado se aborda empleando el **Teorema de Montel 3.38**, otro resultado clásico del Análisis Complejo.

El cuarto y último paso de la demostración es aquel que relaciona por fin los espacios de Paley-Wiener y Bernstein a través del teorema de Paley-Wiener 1.35. El último resultado que se prueba antes de la demostración final del teorema de Beurling-Landau es el Teorema 3.41, el cual establece para cada $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ uniformemente discreto la implicación

$$\Lambda \text{ es un } SS(B_{\sigma+\varepsilon}) \implies \Lambda \text{ es un } SS(PW_\sigma).$$

El trabajo concluye con la prueba final del primer punto del Teorema de Beurling-Landau, la cual queda breve y concisa tras haber desarrollado cada uno de los cuatro pasos anteriores con profundidad.

Espacios de funciones holomorfas

Este capítulo se dedica íntegramente al estudio de los espacios de Paley-Wiener.

La historia de este espacio funcional comienza en el año 1934, cuando el matemático estadounidense Norbert Wiener publica, por invitación de la American Mathematical Society, el libro *Fourier Transforms in the Complex Domain* [11]. En él, Wiener recopila sus múltiples investigaciones desarrolladas durante su estancia en el M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) junto al joven matemático inglés Raymond E. A. C. Paley, trágicamente fallecido poco antes de la publicación.

El libro, según describe Wiener en su prefacio, se enfoca en la aplicación de la transformada de Fourier al Análisis Complejo. Tanto es así que en su primer capítulo introduce y demuestra los posteriormente conocidos como *Teoremas de Paley-Wiener*, los cuales permiten caracterizar y dar sentido al espacio de Paley-Wiener.

En cuanto al desarrollo del capítulo, como punto de partida, formalizaremos el operador transformada de Fourier y la noción de *espectro* dentro del marco del Análisis Armónico. A partir de estas definiciones, estableceremos la profunda conexión geométrica existente entre los espacios de Paley-Wiener y los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$. Esta relación nos permitirá construir bases ortonormales y enunciar el Teorema de Muestreo de Shannon, un resultado que motivará la teoría que desarrollaremos en los próximos capítulos. Posteriormente, revisaremos los teoremas homónimos de Paley-Wiener, los cuales caracterizan estas clases funcionales a través del crecimiento de sus extensiones analíticas en el plano complejo $\mathbb{C}$. Esta perspectiva analítica motivará, finalmente, la introducción de una familia más amplia, pero de naturaleza análoga: el espacio de Bernstein, cuyo rol será determinante en el Capítulo 3.

1.1. El espacio de Paley-Wiener

1.1.1. La transformada de Fourier

Uno de los principales objetos de estudio en el Análisis Armónico, y que Paley y Wiener utilizaron para definir su espacio, es la transformada de Fourier¹. En el presente trabajo, estudiaremos su versión en la recta real, ya que, aunque la mayor parte de los resultados de este capítulo también son ciertos en el caso general $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, la Teoría de Muestreo y densidades de los siguientes capítulos utiliza la geometría de $\mathbb{R}$.

Definición 1.1 Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ una función integrable. Se define su **transformada de Fourier** como

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.2

- a) Sea $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, con $a > 0$, la *función indicadora* en el intervalo $[-a, a]$. Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y se tiene

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[\frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right]_{-a}^a = \frac{e^{-2\pi i a \xi} - e^{2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi}, \quad \forall \xi \neq 0, \quad \text{y} \quad \hat{f}(0) = 2a.$$

Esta expresión puede ser simplificada si se tiene en cuenta la definición en el plano complejo de las funciones *seno*

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y *seno cardinal normalizado*, cuya extensión continua a todo $\mathbb{C}$ es

$$\text{sinc}(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{sinc}(0) := 1.$$

De esta forma, nos queda

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi} = 2a \cdot \frac{\sin(2\pi a \xi)}{2\pi a \xi} = 2a \text{sinc}(2a\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

- b) Consideremos la función $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$, conocida como *función gaussiana*. Este caso es particular porque su transformada coincide con ella misma, es decir,

$$\hat{\phi}(\xi) = \phi(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$

(ya demostrado en el TFG [1, Corolario 2.1.9]).

¹Los resultados de esta sección forman parte del curso de Máster Análisis Matemático Aplicado I, y los consideraremos conocidos. Las demostraciones, junto con un desarrollo completo del tema, pueden encontrarse en el libro de Gerald Folland [6, Cap. 7]. También pueden consultarse algunas propiedades básicas en el TFG [1].

De la propia definición integral (Definición 1.1) puede comprobarse directamente lo siguiente.

Proposición 1.3 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier $\hat{f}$ es una función acotada y uniformemente continua que satisface la desigualdad $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Por lo tanto, la transformada de Fourier define un operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ lineal y continuo.

Aunque la transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ no pertenece necesariamente a $L^1(\mathbb{R})$ —basta ver el Ejemplo 1.2 (a)—, el Teorema de Plancherel garantiza que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y que conserva la norma, es decir, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Puesto que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio denso en $L^2(\mathbb{R})$ [12, Teorema 3.14], el teorema de extensión de operadores lineales continuos [7, Teorema 2.7-11] permite prolongar de forma única la transformada a todo el espacio.

Teorema 1.4. ([6, Sección 7.2])

Existe un único operador lineal y continuo $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tal que

- $\mathcal{F}(f) = \hat{f}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
- $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{Teorema de Plancherel}).$

Por lo tanto, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, basta tomar una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que tienda a f con la norma $\|\cdot\|_2$ y definir su transformada como el límite en dicho espacio:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f) := L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n^a.$$

^aCon esta notación indicamos que el límite se entiende en el sentido de la métrica de $L^2(\mathbb{R})$. Es decir, $\hat{f}$ es la función de $L^2(\mathbb{R})$ que satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 = 0$.

Observación 1.5 A diferencia de lo que ocurría en $L^1(\mathbb{R})$, donde la transformada de Fourier es siempre continua y las imágenes $\hat{f}(\xi)$ quedan bien definidas en todo punto, la transformada en $L^2(\mathbb{R})$ está definida salvo conjuntos de medida nula.

La segunda condición en el Teorema 1.4 garantiza que la extensión de la transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$ es una isometría. De hecho, se puede demostrar que el operador $\mathcal{F}$ es suprayectivo, lo que lo convierte en un *isomorfismo isométrico* (operador unitario) sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 1.6. ([6, Sección 7.2]) La transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es un operador unitario. En particular, satisface las siguientes propiedades:

- Conserva el producto interno (**Identidad de Parseval**):

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.1.1)$$

- Su operador inverso $\mathcal{F}^{-1}$ se puede expresar en términos de la propia transformada mediante la **fórmula de inversión**

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x), \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

En caso de que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, la fórmula de inversión adquiere la forma

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.3)$$

Ejemplo 1.7 Consideremos la función $f(x) = 2a \operatorname{sinc}(2ax)$, con $a > 0$. Puesto que se tiene $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier no se calcula mediante la integral de Lebesgue, sino como el límite en norma $\|\cdot\|_2$ expuesto en el Teorema 1.4.

No obstante, sabemos por el Ejemplo 1.2 que $\hat{\chi}_{[-a,a]} = f$. Por lo tanto, utilizando la fórmula de inversión (1.1.2), llegamos a

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-\xi) = \chi_{[-a,a]}(-\xi) = \chi_{[-a,a]}(\xi), \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Nota. Por simplicidad, en lo sucesivo omitiremos el operador $\mathcal{F}$ y denotaremos como $\hat{f}$ a la transformada de cualquier función, ya esté en $L^1(\mathbb{R})$, en $L^2(\mathbb{R})$ o en ambos.

A continuación, introducimos el espectro, otro concepto asociado a la transformada de Fourier que nos permitirá definir finalmente el espacio de Paley-Wiener.

Como trabajamos en los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$, cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones que coinciden en casi todo punto (c.t.p.), la noción clásica de soporte topológico no está bien definida. Por ello, debemos utilizar el concepto de *soporte esencial*.

Definición 1.8 Dada una función medible $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos su **soporte** (o soporte esencial) como el conjunto cerrado

$$\operatorname{sop}(f) := \mathbb{R} \setminus U,$$

donde U es la unión de todos los conjuntos abiertos $V \subseteq \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in V$.

El soporte esencial es, por tanto, el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual la función se anula en casi todo punto. Además, si la función admite un representante continuo $\tilde{f}$, su soporte coincide exactamente con la clausura topológica usual de $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{f}(x) \neq 0\}$.

Definición 1.9 – [10, Cap. 2] Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ o $f \in L^2(\mathbb{R})$, definimos su **espectro** como el soporte esencial de su transformada de Fourier:

$$\text{spec}(f) := \text{sop}(\hat{f}).$$

Ejemplo 1.10 Veamos dos casos con comportamientos espectrales opuestos, basándonos en las funciones calculadas en los Ejemplos 1.2 y 1.7:

- a) La función $f(x) = 2a \text{sinc}(2ax)$, con $a > 0$, tiene espectro compacto ya que

$$\text{spec}(f) = \text{sop}(\chi_{[-a,a]}) = [-a, a].$$

- b) Consideremos recíprocamente la función indicadora $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$. Su transformada de Fourier es $\hat{g}(\xi) = 2a \text{sinc}(2a\xi)$. Esta función continua se anula únicamente en los puntos aislados $\xi = k/2a$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Al no existir ningún intervalo abierto donde $\hat{g}$ sea nula, el conjunto U de la definición de soporte esencial es vacío. En consecuencia,

$$\text{spec}(\chi_{[-a,a]}) = \text{sop}(\hat{g}) = \mathbb{R}.$$

Las funciones cuyo espectro está contenido en un compacto, como hemos visto que ocurre con el seno cardinal, poseen propiedades analíticas muy particulares, hecho que formalizaremos al definir los espacios de Paley-Wiener.

1.1.2. Definición del espacio de Paley-Wiener

De acuerdo con Folland [6, Cap. 7], en el ámbito de la ingeniería suelen tomarse funciones del espacio $L^2(\mathbb{R})$ para modelizar señales como ondas electromagnéticas o sonoras. Esto se debe a que la integral cuadrática representa la energía de la señal, la cual suele suponerse finita. Asimismo, entendiendo la transformada de Fourier como el paso del dominio temporal al dominio de frecuencias, es habitual asumir que las señales físicas tienen un espectro acotado, es decir, que su rango de frecuencias está limitado por el canal de transmisión. Este interés práctico motivó el estudio profundo de estas clases funcionales a lo largo del siglo XX².

Definición 1.11 – [10, Cap. 2] Sea S un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Definimos el **espacio de Paley-Wiener con espectro en S** como

$$PW_S := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{spec}(f) \subseteq S\}.$$

²Esta sección, pese a estar inspirada en algunos resultados y definiciones enunciados en el libro de Oleviskii y Ulanovskii [10, Cap.2], es, en gran parte, de elaboración propia. Surge con la necesidad de agrupar las demostraciones de algunas propiedades utilizadas más adelante en el trabajo.

Observación 1.12 Observemos el siguiente cálculo para una función real $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\overline{\hat{f}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (-\xi)x} dx = \hat{f}(-\xi), \quad (1.1.4)$$

extensible, en casi todo punto, al espacio $L^2(\mathbb{R})$ por la conmutación entre la conjugación y el límite en su norma.

En las aplicaciones prácticas, las señales físicas medidas en el dominio temporal toman valores reales. En ese caso, a partir de la ecuación (1.1.4), se deduce que el espectro S de una señal real debe ser un conjunto simétrico respecto al origen (es decir, $S = -S$). Por este motivo, gran parte del estudio posterior se centra en los espacios con espectros simétricos. En el caso de suponer, además, el espectro conexo, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.13 Para cada $\sigma > 0$, denotaremos por PW_σ al espacio de Paley-Wiener que toma $S = [-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]$. Es decir,

$$PW_\sigma := PW_{[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]}$$

Nota. A lo largo de todo el trabajo, salvo que se indique lo contrario, S siempre denotará a un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

En muchas ocasiones resulta más útil trabajar directamente en el dominio de las frecuencias. Observemos que, por definición, si $f \in PW_S$, entonces su transformada $\hat{f}$ pertenece al espacio de funciones cuadrado-integrables con soporte en S . Este espacio puede definirse globalmente como

$$L^2(S) := \{g \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}(g) \subseteq S\}.$$

Puesto que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en $L^2(\mathbb{R})$ (Proposición 1.6), se tiene también una biyección isométrica entre $L^2(S)$ y PW_S .

Ejemplo 1.14 Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}(PW_S) = L^2(S)$, la forma más directa de construir funciones que pertenezcan a un espacio de Paley-Wiener es tomar una función cualquiera $g \in L^2(S)$ y calcular su transformada de Fourier inversa. Por construcción, la función resultante tendrá su espectro contenido en S y, por tanto, pertenecerá a PW_S .

- Eso es exactamente lo que hicimos en el Ejemplo 1.2. De él, se deduce que la transformada inversa de $\chi_{[-1/2, 1/2]}$ es el seno cardinal. Por tanto, corroboramos lo visto en el Ejemplo 1.10: $\text{sinc} \in PW_{[-1/2, 1/2]}$.
- Consideremos ahora la función $h(\xi) = e^{-\xi} \chi_{[0, 1]}(\xi) \in L^2([0, 1])$. Su transformada de Fourier inversa puede calcularse integrando directamente:

$$\mathcal{F}^{-1}(h)(x) = \int_0^1 e^{-\xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_0^1 e^{(2\pi i x - 1)\xi} d\xi = \left[\frac{e^{(2\pi i x - 1)\xi}}{2\pi i x - 1} \right]_0^1 = \frac{e^{2\pi i x - 1} - 1}{2\pi i x - 1}.$$

Concluimos que la función $f(x) = \frac{e^{2\pi i x - 1} - 1}{2\pi i x - 1}$ se encuentra en el espacio $PW_{[0, 1]}$.

La correspondencia entre PW_S y $L^2(S)$ es sumamente importante, ya que permite trasladar las propiedades geométricas y topológicas conocidas de $L^2(S)$ directamente al espacio de Paley-Wiener. Recíprocamente, este hecho aumenta el interés sobre el estudio de PW_S , ya que permite probar propiedades de $L^2(S)$ en un espacio en muchos aspectos distinto.

En primer lugar, vamos a comprobar que esta familia de funciones posee una estructura topológica robusta frente al paso al límite. Para ello, recurrimos a un resultado general sobre los espacios L^p .

Proposición 1.15 Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y $p > 0$. Entonces $L^p(S)$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^p(\mathbb{R})$.

Demostración (elaboración propia).

Para probar que es un subespacio vectorial, tomamos $f_1, f_2 \in L^p(S)$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ no nulos. Sea $f := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Como $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial [5, Teorema 6.5], sabemos que $f \in L^p(\mathbb{R})$. Solo resta comprobar que $\text{sop}(f) \subseteq S$.

El conjunto $V := \mathbb{R} \setminus (\text{sop}(f_1) \cup \text{sop}(f_2))$ es abierto por ser complementario de una unión de cerrados. En dicho abierto, tanto f_1 como f_2 se anulan en casi todo punto, por lo que f también se anula en casi todo punto de V . Esto implica que $V \subseteq \mathbb{R} \setminus \text{sop}(f)$, o de forma equivalente, $\text{sop}(f) \subseteq \text{sop}(f_1) \cup \text{sop}(f_2)$. Al estar ambos soportes contenidos en S , concluimos que $\text{sop}(f) \subseteq S$, por lo que $f \in L^p(S)$.

Para demostrar ahora que $L^p(S)$ es cerrado, tomamos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(S)$ tal que $f_n \rightarrow f$, cuando $n \rightarrow \infty$, en la norma de $L^p(\mathbb{R})$. Debemos probar que $\text{sop}(f) \subseteq S$.

Para cada término de la sucesión se tiene

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_S |f_n(x) - f(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R} \setminus S} |f_n(x) - f(x)|^p dx. \quad (1.1.5)$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\text{sop}(f_n) \subseteq S$, las funciones f_n se anulan en casi todos los puntos de $\mathbb{R} \setminus S$. Así, el segundo sumando se reduce a $\int_{\mathbb{R} \setminus S} |f(x)|^p dx$. Como ambos términos del lado derecho de (1.1.5) son no negativos, deducimos que:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R} \setminus S} |f(x)|^p dx \leq \|f_n - f\|_p^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En consecuencia, la integral es nula, lo que implica que $f(x) = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R} \setminus S$. Aquí interviene la hipótesis de que S sea cerrado: al ser $\mathbb{R} \setminus S$ un conjunto abierto donde f se anula c.t.p., este debe estar contenido en el complementario del soporte esencial. Por tanto, $\mathbb{R} \setminus S \subseteq \mathbb{R} \setminus \text{sop}(f)$, lo que equivale a $\text{sop}(f) \subseteq S$.

□

Observación 1.16 La Proposición 1.15 deja de ser cierta, en general, si no se toma el conjunto S cerrado. Como contraejemplo, sea $p > 0$ y tomemos el abierto $S = (-1, 1)$, junto a la sucesión de funciones $f_n = \chi_{[-1+1/n, 1-1/n]}$.

El soporte esencial de cada función es el intervalo cerrado $\text{sop}(f_n) = [-1 + 1/n, 1 - 1/n] \subset (-1, 1)$, por lo que $f_n \in L^p(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esta sucesión converge con la norma de $L^p(\mathbb{R})$ a la función $f = \chi_{(-1,1)}$. Dado que el soporte esencial es siempre un conjunto cerrado, el soporte del límite es la clausura del intervalo, $\text{sop}(f) = [-1, 1] \not\subseteq (-1, 1)$. Por tanto, $f \notin L^p(S)$ y el subespacio no es cerrado.

Dado que los espacios $L^p(\mathbb{R})$ son completos [7, Teorema 2.2-7], el subespacio $L^p(S)$ también es un espacio de Banach si S es cerrado. En particular, para $p = 2$, $L^2(S)$ hereda la estructura de espacio de Hilbert. Aplicando el isomorfismo de la transformada de Fourier a $L^2(S)$, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado para el espacio de Paley-Wiener.

Corolario 1.17 *El espacio de Paley-Wiener PW_S , con $S \subseteq \mathbb{R}$ compacto, es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(\mathbb{R})$. Además, es un espacio de Hilbert.*

La última afirmación del Corolario 1.17 se deduce de que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar usual y de la identidad de Parseval (1.1.1):

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_S \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2.$$

De esta forma, PW_S es también un espacio de Hilbert al heredar este mismo producto escalar —razón principal por la cual hemos tomado, desde un principio, S cerrado—. Además, sabemos que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio separable (basta tomar las funciones escalonadas con nodos y valores racionales) y, dado que todo subespacio de un espacio métrico separable hereda esta propiedad, PW_S también lo es. Esta separabilidad es la que nos garantiza que el espacio admitirá una base ortonormal numerable, un aspecto clave para descomponer sus señales en partes elementales y que abordaremos en la Subsección 1.1.3.

Pero antes, veamos una consecuencia inmediata del Corolario 1.17.

Proposición 1.18 *Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f \in PW_S$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la función trasladada $f_a(x) := f(x - a)$ pertenece también a PW_S .*

Demostración (elaboración propia).

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y consideramos su traslación $f_a(x) := f(x - a)$, la transformada de Fourier clásica se calcula mediante un simple cambio de variable ($y = x - a$):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_a(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi (y + a)} dy \\ &= e^{-2\pi i a \xi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = e^{-2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Dado que $e^{-2\pi i a \xi}$ es una función continua que no se anula en ningún punto, la multiplicación por este factor no altera el conjunto donde la función se anula. Por tanto, el soporte esencial coincide: $\text{sop}(\widehat{f}_a) = \text{sop}(\widehat{f}) \subseteq S$.

Para extender este resultado a cualquier función arbitraria $f \in PW_S$, tomamos una sucesión de funciones $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_n \rightarrow f$, cuando $n \rightarrow \infty$, en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Por la continuidad de la transformada de Fourier (Teorema de Plancherel) y de los operadores de traslación en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene $\hat{f}_{n,a} \rightarrow \hat{f}_a$, cuando $n \rightarrow \infty$. Y, puesto que el espacio de Paley-Wiener es cerrado por el Corolario 1.17, concluimos que $\text{sop}(\hat{f}_a) \subseteq S$ y, por tanto, $f_a \in PW_S$.

□

Por lo tanto, el espacio de Paley-Wiener es invariante por traslaciones. Sin embargo, esto no ocurre para dilataciones, ya que si se define para $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $R > 0$ la función $f_R(x) := f(Rx)$, aplicando el cambio de variable $y = x/R$ se tiene

$$\hat{f}_R(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(Rx) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{R} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi / R} dy = \frac{1}{R} \hat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

Proposición 1.19 Sean $\sigma > 0$, $f \in PW_\sigma$ y $R > 0$. Entonces, la función dilatada $f_R(x) := f(Rx)$ pertenece al espacio $PW_{R\sigma}$.

1.1.3. Una base para el espacio de Paley-Wiener

Introducimos el concepto de base ortonormal siguiendo como referencia el libro de Young [15, Cap. 1]. En este apartado, todos los espacios H considerados serán infinito-dimensionales y separables.

En el contexto general de los espacios de Banach, el concepto de base más habitual es el de *base de Schauder*.

Definición 1.20 Una sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en un espacio de Banach B es una **base de Schauder** si para cada $f \in B$ existe una única sucesión de escalares $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n,$$

donde la convergencia de la serie se entiende respecto a la norma de B .

Sin embargo, en los espacios de Banach generales, calcular los coeficientes c_n puede ser una tarea complicada, ya que no siempre existe una fórmula constructiva directa para hallarlos. Aquí es donde los espacios de Hilbert, dotados de su producto escalar, marcan la diferencia, si exigimos que los elementos de nuestra base sean perpendiculares entre sí.

Definición 1.21 Una sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en un espacio de Hilbert H es un **sistema ortonormal** si $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ para $n \neq m$, y $\|e_n\| = 1$ para todo n .

Si, además, la sucesión es una base de Schauder, decimos que es una **base ortonormal** de H .

La gran ventaja que presentan las bases ortonormales frente a las de Schauder generales es la inmediatez para recuperar cualquier función. Si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal, cualquier $f \in H$ tiene una *serie de Fourier*, es decir, puede representarse de forma única como

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

donde los escalares $c_n = \langle f, e_n \rangle$ se denominan *coeficientes de Fourier* de f .

Además, la ortonormalidad nos proporciona la célebre *Identidad de Parseval*, que relaciona isométricamente la norma de la función con la norma de sus coeficientes en el espacio de sucesiones ℓ^2 :

$$\|f\|_H^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2, \quad (1.1.6)$$

y puede generalizarse a la identidad

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}, \quad \forall f, g \in H.$$

Todo sistema ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, aunque no sea una base, cumple la llamada **desigualdad de Bessel**:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|_H^2, \quad \forall f \in H. \quad (1.1.7)$$

En cuanto a la posibilidad de uso de las bases, a diferencia de las bases de Schauder, que no tienen por qué existir generalmente para un espacio de Banach, es conocido que todo espacio de Hilbert separable posee una base ortonormal. Esto se consigue partiendo de un conjunto numerable denso del espacio y aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt.

Confirmamos de esta forma la existencia de bases ortonormales para los espacios de Paley-Wiener, ya que son separables.

Corolario 1.22 *Todo espacio de Paley-Wiener PW_S , con $S \subseteq \mathbb{R}$ compacto, posee una base ortonormal.*

El siguiente paso es dar una construcción explícita. Para ello, vamos a trabajar sobre el espacio $L^2(S)$. Una vez construida una base ortonormal sobre este espacio, solo queda aplicar la transformada de Fourier para trasladarla a PW_S , puesto que ambos espacios son isométricamente isomorfos. Vamos a comenzar con el caso más sencillo y estudiado: el toro.

Definición 1.23 Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$. Denotaremos al **sistema exponencial** asociado a Λ por

$$E(\Lambda) := \{e^{-2\pi i \lambda t} : \lambda \in \Lambda\}.$$

Proposición 1.24 *El sistema de exponenciales*

$$E(\mathbb{Z}) := \{e^{-2\pi i n t} : n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.1.8)$$

constituye una base ortonormal para el espacio $L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Su prueba, a partir del teorema de Weierstrass de aproximación por polinomios trigonométricos, puede encontrarse en [15, Cap. 1]. Este es un resultado clásico bien conocido. Su estudio configuró el inicio del análisis de Fourier y el desarrollo de una función $f \in L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en su serie armónica

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n t},$$

donde

$$\hat{f}(n) := \langle f, e^{-2\pi i n(\cdot)} \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{2\pi i n t} dt,$$

supuso el origen de la definición de serie de Fourier.

Un reescalamiento del sistema de exponenciales (1.1.8) permite establecer el resultado análogo para cualquier intervalo simétrico de la forma $[-\sigma/2, \sigma/2]$.

Corolario 1.25 *El sistema de exponenciales normalizado*

$$E_\sigma(\mathbb{Z}) := \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} t} : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (1.1.9)$$

constituye una base ortonormal para el espacio $L^2\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$.

Observación 1.26 El resultado sigue siendo cierto para cualquier intervalo cerrado $I = [a, b]$ de longitud σ . Si $f \in L^2(I)$, observemos que su desplazada al intervalo simétrico $[-\sigma/2, \sigma/2]$ puede desarrollarse, por el Corolario 1.25, en la serie de Fourier

$$f\left(t - a - \frac{\sigma}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} t},$$

de forma que queda

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} (t + a + \frac{\sigma}{2})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} (a + \frac{\sigma}{2})} e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma} t},$$

donde los coeficientes k_n son únicos y absorben el desplazamiento —dependen de a —. Por lo tanto, el sistema (1.1.9) constituye directamente una base ortonormal para $L^2(I)$ y los coeficientes de Fourier correspondientes se obtienen integrando f sobre el intervalo $[a, b]$, sin necesidad de trasladar la función.

Demostración del Corolario 1.25 (elaboración propia).

Para demostrar la completitud del sistema en $L^2\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ a partir del resultado conocido en el toro base $L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, empleamos un cambio de variable lineal.

Definimos la aplicación biyectiva $\phi : \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dada por:

$$\phi(x) = \frac{x}{\sigma}.$$

Esta función induce un operador unitario (isomorfismo isométrico) $U : L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow L^2\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ definido por $(Uf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}f(\phi(x))$. Al tratarse de un operador lineal continuo que preserva la norma, traslada las propiedades de completitud y bases del espacio origen al espacio destino.

Aplicando este operador a los elementos de la base conocida $e_n(t) = e^{-2\pi i n t}$, obtenemos:

$$(Ue_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{-2\pi i n \frac{x}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{-2\pi i \frac{n}{\sigma}x}.$$

Dado que por hipótesis el sistema $\{e^{-2\pi i n t} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal en $L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, su imagen bajo el isomorfismo U heredará dichas propiedades en $L^2\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$.

□

Finalmente, basta aplicar la transformada de Fourier inversa al sistema (1.1.9) para encontrar la base del espacio $PW_{[a,b]}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{\frac{2\pi i n t}{\sigma}}\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_a^b e^{2\pi i t x} e^{\frac{2\pi i n t}{\sigma}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left[\frac{e^{2\pi i t(x+n/\sigma)}}{2\pi i(x+n/\sigma)} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{\sigma}(x+n/\sigma)} \left[e^{2\pi i b(x+n/\sigma)} - e^{2\pi i a(x+n/\sigma)} \right]. \end{aligned}$$

Esta expresión adquiere una forma más sencilla en caso de tratarse del espacio simétrico.

Corolario 1.27 Una base ortonormal de PW_σ viene dada por

$$\{\sqrt{\sigma} \operatorname{sinc}(x\sigma + n) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalmente, quedaría por ver qué ocurre cuando el espectro de las funciones no es un conjunto conexo. Aunque el Corolario 1.22 nos confirma la existencia de una base ortonormal para el espacio PW_S , con S compacto y disconexo, no resulta sencillo encontrar dicha base. Además, esta deja de cumplir muchas de las propiedades que tanto facilitan el estudio del caso conexo. Por ejemplo, se sabe que, en general, $L^2(S)$ no tiene por qué tener una base formada por exponenciales. Tampoco tiene por qué cumplir el teorema de muestreo que veremos a continuación, en el cual los coeficientes de Fourier facilitan la reconstrucción de la función al coincidir con los valores de esta en un conjunto discreto de puntos. Es por ello que descartamos abordar tal caso

en este trabajo³, si bien en el Capítulo 2 introduciremos algunos objetos del Análisis Funcional utilizados para su estudio; a partir de ahora, la mayoría de resultados enunciados supondrán el conjunto S conexo.

1.1.4. El teorema de muestreo

Históricamente formulado en el contexto de la teoría de la comunicación por Harry Nyquist (1928) y formalizado matemáticamente por Vladimir Kotelnikov (1933) y Claude Shannon (1949) —con precedentes previos en los trabajos de E. T. Whittaker—, el teorema de muestreo establece la relación fundamental entre una señal continua y su representación discreta. Precisemos el uso de dicha señal continua.

Proposición 1.28 *Toda función $f \in PW_S$, con $S \subseteq \mathbb{R}$ compacto, posee un único representante continuo en su clase de equivalencia en $L^2(\mathbb{R})$. Además, dicho representante es acotado y uniformemente continuo.*

Observación 1.29 Este enunciado no es cierto, en general, en $L^2(\mathbb{R})$ —basta considerar funciones con saltos como $\chi_{[0,1]}$ —. Es por ello que el espacio de Paley-Wiener adquiere gran importancia: es isométrico a $L^2(S)$, pero al mismo tiempo se diferencian en muchas de las características de sus funciones.

Nota. A partir de ahora, en todo el resto del trabajo, cada vez que hablemos del espacio de Paley-Wiener, estaremos realmente refiriéndonos al espacio funcional $PW_S \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Abusando de la notación, lo llamaremos también PW_S .

Demostración de la Proposición 1.28 (elaboración propia).

Observemos que, dada la compacidad del conjunto S , se tiene $L^2(S) \subseteq L^1(S)$. De esta forma, si $f \in PW_S$, entonces $\hat{f} \in L^1(S) \cap L^2(S)$. La Proposición 1.3 concluye que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ es una función uniformemente continua y acotada. Además, dicha función pertenece a la misma clase de equivalencia de f porque la transformada es biyectiva en $L^2(\mathbb{R})$, lo cual concluye la prueba.

□

Una vez garantizada la existencia y unicidad del representante continuo para cada elemento de PW_S , podemos evaluar sus funciones en puntos concretos y enunciar así el teorema de muestreo.

³Puede consultarse más sobre el espacio de Paley-Wiener con espectro disconexo en [10] o sobre la teoría de series de Fourier no armónicas en [15].

Teorema 1.30. (Teorema de muestreo de Whittaker-Kotelnikov-Shannon) Toda señal $f \in PW_\sigma$ puede reconstruirse mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \text{sinc}(\sigma x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.1.10)$$

con convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$ y también uniforme sobre todo $\mathbb{R}$. Más aún,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{\sigma} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \right|^2, \quad \text{para toda } f \in PW_\sigma. \quad (1.1.11)$$

Demostración (consultada en [6, Cap. 7] y trabajada en el curso de máster).

Gracias al Corolario 1.27, toda función $f \in PW_\sigma$ se puede desarrollar en serie respecto a su base ortonormal. Trasladando el producto interior mediante la identidad de Parseval de la transformada de Fourier 1.1.1, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \sqrt{\sigma} \text{sinc}(x\sigma - n) \rangle_2 \sqrt{\sigma} \text{sinc}(x\sigma - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle \hat{f}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{\frac{2\pi i n(\cdot)}{\sigma}} \right\rangle_2 \sqrt{\sigma} \text{sinc}(x\sigma - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle \hat{f}, e^{\frac{2\pi i n(\cdot)}{\sigma}} \right\rangle_2 \text{sinc}(x\sigma - n). \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Los coeficientes de Fourier de la expresión (1.1.12) se calculan como

$$\left\langle \hat{f}, e^{\frac{2\pi i n(\cdot)}{\sigma}} \right\rangle_2 = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi (\frac{n}{\sigma})} d\xi = f\left(\frac{n}{\sigma}\right),$$

en virtud de la fórmula de inversión 1.1.3. Esto demuestra la fórmula de reconstrucción (1.1.10) con convergencia en la norma $\|\cdot\|_2$, mientras que la identidad de Parseval (1.1.6) establece directamente la relación de energía (1.1.11).

Para ver que dicha convergencia es además uniforme, consideremos el error cometido por las sumas parciales, $R_N(x) = f(x) - f_N(x)$, donde

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N f\left(\frac{n}{\sigma}\right) \text{sinc}(\sigma x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $R_N \in PW_\sigma$ porque este es un espacio vectorial, su transformada $\widehat{R_N}$ tiene soporte en $[-\sigma/2, \sigma/2]$, lo que permite escribir mediante la fórmula de inversión:

$$R_N(x) = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \widehat{R_N}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto escalar de $L^2(\mathbb{R})$ y la isometría de Plancherel, obtenemos la acotación puntual:

$$|R_N(x)| \leq \left(\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} |\widehat{R_N}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} 1 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|R_N\|_2 \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma} \|f - f_N\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado que esta cota es independiente de x y sabemos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0$, el error máximo sobre $\mathbb{R}$ tiende a cero, concluyendo que la serie converge a f de forma uniforme.

□

Observación 1.31 Veamos qué ocurre en caso de un intervalo general $[a, b]$ de longitud $\sigma = b - a$, pues no hace falta volver a desarrollar la prueba a partir de la base de $PW_{[a,b]}$. Llamemos al punto medio $c = \frac{a+b}{2}$. En ese caso, $[a, b] = [c - \frac{\sigma}{2}, c + \frac{\sigma}{2}]$. Dada una función $f \in PW_{[a,b]}$, definimos

$$g(x) = f(x)e^{-2\pi icx},$$

para la cual se tiene

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi icx} e^{-2\pi i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i(\xi+c)x} dx = \hat{f}(\xi + c).$$

Puesto que $\hat{f}$ tiene su soporte en $[a, b]$, $\hat{g}$ lo tiene en $[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]$. Por lo tanto, $g \in PW_{\sigma}$ y, de acuerdo al Teorema 1.30, podemos desarrollarla como

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g\left(\frac{n}{\sigma}\right) \text{sinc}(\sigma x - n).$$

Sustituyendo la definición de g , se obtiene

$$f(x)e^{-2\pi icx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sigma}\right) e^{-2\pi ic\frac{n}{\sigma}} \text{sinc}(\sigma x - n).$$

Por lo que finalmente, el desarrollo de $f \in PW_{[a,b]}$ respecto a nuestra base ortonormal queda de la forma

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{\sigma}\right) e^{2\pi ic(x - \frac{n}{\sigma})} \text{sinc}(\sigma x - n).$$

Como puede observarse, los puntos de muestreo no cambian, siguen siendo $\frac{1}{\sigma}\mathbb{Z}$. Sin embargo, las funciones utilizadas para reconstruir f ya no son simplemente nuestro sistema ortonormal, sino que se introduce una modulación afectada por el centro c del intervalo $[a, b]$.

Nota. A partir de ahora, siempre que hablemos de espectro conexo, nos referiremos al intervalo simétrico, es decir, trabajaremos solo con PW_{σ} . Como ilustra esta observación, los resultados demostrados sobre estos espacios pueden trasladarse a $PW_{[a,b]}$ sin dificultad tomando traslaciones o modulaciones.

1.2. El teorema de Paley-Wiener

En el libro publicado por Wiener [11] se exponen diversos resultados que conectan el Análisis de Fourier con el Análisis Complejo. Entre los más destacados se encuentran aquellos que vinculan el crecimiento de una función holomorfa en el plano complejo con el soporte de su transformada

de Fourier. A continuación, presentaremos formalmente uno de estos célebres teoremas, el cual permite caracterizar los espacios de Paley-Wiener desde una perspectiva analítica.

Antes de enunciarlo, es preciso introducir la clase de funciones sobre la que operaremos.

1.2.1. Funciones holomorfas de tipo exponencial

Observación 1.32 A menudo, utilizaremos el término de **función entera** para referirnos a funciones holomorfas en todo el plano complejo, $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Definición 1.33 Decimos que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es una función **holomorfa de tipo exponencial** si existen unas constantes $A, M > 0$ tales que

$$|F(z)| \leq Ae^{\pi M|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.2.1)$$

Si se cumple 1.2.1, diremos que F tiene tipo exponencial M , denotado por $F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.34

- La función $F(z) = \sin(2\pi Mz)$ es de tipo exponencial $2M$ porque

$$\begin{aligned} |\sin(2\pi Mz)| &= \frac{|e^{2\pi Mzi} - e^{-2\pi Mzi}|}{|2i|} \leq \frac{|e^{2\pi Mzi}| + |e^{-2\pi Mzi}|}{2} \\ &= \frac{e^{2\pi M \operatorname{Re}(zi)} + e^{-2\pi M \operatorname{Re}(zi)}}{2} \leq e^{2\pi M |\operatorname{Im}(z)|} \leq e^{2\pi M |z|}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esta función no pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ por su oscilación constante.

- En cambio, la función $F(z) = \operatorname{sinc}(2Mz)$, siendo también de tipo exponencial $2M$ —puesto que el numerador ya lo cumple y el denominador es una función lineal—, pertenece a $L^2(\mathbb{R})$.
- Por último, la función gaussiana $\Phi(z) = e^{-\pi z^2}$ no es de tipo exponencial, ya que su crecimiento a lo largo del eje imaginario no puede ser acotado por una exponencial de la forma (1.2.1).

1.2.2. El teorema de Paley-Wiener en $L^2(\mathbb{R})$

Ya estamos en condiciones de enunciar el teorema.

Teorema 1.35. (Teorema de Paley-Wiener en $L^2(\mathbb{R})$) Sean $M > 0$ y $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f := F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C}) \iff \text{spec}(f) \subseteq \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$$

Además, en ese caso, $F(z)$ es de la forma

$$F(z) := \int_{-M/2}^{M/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.2.2)$$

La demostración de este teorema articuló mi Trabajo Final de Grado del pasado año [1]. Sin embargo, en él se evitó definir la transformada de Fourier para funciones de $L^2(\mathbb{R})$ por razones de extensión y, por lo tanto, se probó solamente la versión del teorema de Paley-Wiener para funciones de $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 1.36. (Teorema de Paley-Wiener en $L^1(\mathbb{R})$) Sean $M > 0$ y $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f := F|_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C}) \iff \text{spec}(f) \subseteq \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$$

Además, en ese caso, $F(z)$ es de la forma

$$F(z) := \int_{-M/2}^{M/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Una demostración del Teorema 1.35 puede conseguirse adaptando las ideas de mi TFG [1] al espacio $L^2(\mathbb{R})$. También puede consultarse la prueba directa del resultado en el propio texto de Wiener [11, Cap. 1] o en libros más depurados como el de Young [15, Cap. 2]. Sin embargo, en este trabajo, vamos a dar una prueba del Teorema 1.35 a partir del Teorema 1.36, suponiendo este último cierto, como bien quedó demostrado en el TFG [1].

Como sucedía en el caso de $L^1(\mathbb{R})$, la implicación hacia la izquierda en el Teorema 1.35 es la más sencilla. Esta parte puede ser demostrada de forma independiente al Teorema 1.36.

Lema 1.37 Sean $M > 0$ y $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ tal que $\text{spec}(f) \subseteq [-M/2, M/2]$. Entonces f puede extenderse en el plano complejo a una función entera $F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C})$.

Demostración (elaboración propia).

Definimos la extensión compleja $F(z)$ para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mediante la integral de la transformada de Fourier inversa:

$$F(z) := \int_{-M/2}^{M/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi.$$

Una aplicación del teorema de Morera análoga a la realizada en [1, Teorema 3.1.4] permite probar que F está bien definida y es una función entera.

Resta demostrar que F es de tipo exponencial M . Para cualquier $z = x + iy \in \mathbb{C}$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \int_{-M/2}^{M/2} |\hat{f}(\xi)| |e^{2\pi i(x+iy)\xi}| d\xi \\ &\leq \left(\int_{-M/2}^{M/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-M/2}^{M/2} |e^{2\pi i x \xi} e^{-2\pi y \xi}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde el primer factor coincide con $\|f\|_2$ por la isometría de Plancherel. En cuanto al segundo factor, teniendo en cuenta que $|e^{2\pi i x \xi}| = 1$ y que

$$|e^{-2\pi y \xi}|^2 = e^{-4\pi y \xi} \leq e^{4\pi |y| |\xi|} \leq e^{4\pi |y| \frac{M}{2}} = e^{2\pi M |y|}, \quad \forall |\xi| < \frac{M}{2}, y \in \mathbb{R},$$

nos queda

$$|F(z)| \leq \|f\|_2 \left(\int_{-M/2}^{M/2} e^{2\pi M |y|} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \sqrt{M} e^{\pi M |y|}$$

Finalmente, tomando $A = \|f\|_2 \sqrt{M}$, se verifica la cota

$$|F(z)| \leq A e^{\pi M |z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

lo que demuestra que F es de tipo exponencial M , concluyendo la prueba. □

Observación 1.38 Si $f \in PW_M$, esta demostración prueba que la extensión F dada por la ecuación (1.2.2) cumple una condición más restrictiva que ser de tipo exponencial M . Ha concluido que el crecimiento está acotado uniformemente sobre cada recta horizontal:

$$|F(z)| \leq A e^{\pi M |y|}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

La prueba hacia la derecha del Teorema 1.35 es más complicada y requiere técnicas más potentes del Análisis Complejo. Como ya hemos adelantado, vamos a mostrar una prueba aprovechando la veracidad del caso $L^1(\mathbb{R})$.

Demostración del Teorema 1.35 (elaboración propia).

Puesto que el Lema 1.37 ya prueba la implicación hacia la izquierda, solo resta demostrar el recíproco.

Sea $F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C})$ tal que su restricción al eje real $f = F|_{\mathbb{R}}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Para poder aplicar el Teorema 1.36, necesitamos construir una sucesión de funciones que pertenezcan a $L^1(\mathbb{R})$. Para ello, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, la función truncada mediante un seno cardinal:

$$F_n(z) := F(z) \text{sinc} \left(\frac{z}{n} \right) = F(z) \frac{\sin(\pi z/n)}{\pi z/n}.$$

Veamos cómo cumplen estas funciones las hipótesis del Teorema 1.36. En primer lugar, en el eje real, $f_n(x) = f(x) \text{sinc}(x/n)$. Dado que $f \in L^2(\mathbb{R})$ por hipótesis y que la función $\text{sinc}(x/n) \in L^2(\mathbb{R})$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales (también llamada desigualdad de Hölder) garantiza que el producto $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.

Por otro lado, tenemos la hipótesis $F \in \text{Exp}_M(\mathbb{C})$ y sabemos que $\text{sinc} \in \text{Exp}_1(\mathbb{C})$, por el Ejemplo 1.34, por lo que

$$|F_n(z)| = |F(z) \text{sinc}(z/n)| \leq e^{\pi M|z|} e^{\pi |z|/n} \leq e^{\pi |z|(M + \frac{1}{n})}$$

y las funciones F_n son de tipo exponencial $M_n = M + \frac{1}{n}$, respectivamente.

Aplicando el Teorema 1.36 a cada F_n , concluimos que el soporte de su transformada de Fourier está contenido en el intervalo correspondiente a su tipo exponencial:

$$\text{spec}(f_n) \subseteq \left[-\frac{M_n}{2}, \frac{M_n}{2} \right] = \left[-\frac{M}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{M}{2} + \frac{1}{2n} \right].$$

Finalmente, debemos deshacer el truncamiento tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$. Observemos que en el eje real, $\text{sinc}(x/n) \rightarrow 1$ puntualmente, por lo que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ c.t.p. Como $|\text{sinc}(x/n)| \leq 1$, la diferencia

$$|f_n(x) - f(x)|^2 = |\text{sinc}(x/n) - 1|^2 |f(x)|^2 \leq 4|f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}).$$

El Teorema de la Convergencia Dominada asegura entonces que $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$ tiende a cero, es decir, $f_n \rightarrow f$, cuando $n \rightarrow \infty$, en la norma de $L^2(\mathbb{R})$.

Dado que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en $L^2(\mathbb{R})$, se sigue que $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Como cada $\hat{f}_n$ se anula c.t.p. fuera de $[-\frac{M}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{M}{2} + \frac{1}{2n}]$, su límite en norma $\hat{f}$ debe anularse c.t.p. fuera de la intersección de todos estos intervalos decrecientes, la cual es exactamente $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$.

Por lo tanto, $\text{spec}(f) \subseteq [-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]$, concluyendo la demostración. □

Gracias al Teorema 1.35, podemos caracterizar las funciones f del espacio de Paley-Wiener PW_{σ} a partir del crecimiento de sus extensiones analíticas F en el plano complejo. Esto abre la puerta a la aplicación de técnicas del Análisis Complejo para su estudio, algo que será fundamental al final del 3.

Teorema 1.39. (Caracterización del espacio de Paley-Wiener) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $\sigma > 0$. Entonces son equivalentes

1. $f \in PW_\sigma$
2. $f = F|_{\mathbb{R}}$ para alguna $F \in Exp_\sigma$ con $F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$.

Además, en ese caso se cumple

$$F(z) = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nota. En esta caracterización, como ya comentamos anteriormente, se están suponiendo continuas las funciones de PW_σ . A veces, abusando de la notación, identificaremos PW_σ con el espacio de sus extensiones holomorfas

$$\mathbf{PW}_\sigma = \left\{ F \in Exp_\sigma(\mathbb{C}) : F|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad (1.2.3)$$

dotado con la correspondiente norma $\|F\|_{\mathbf{PW}_\sigma} = \|F|_{\mathbb{R}}\|_2$.

1.3. Espacios de Bernstein

Para terminar el capítulo, vamos a hablar de un espacio más general que el de Paley-Wiener, ya que será en él donde probemos gran parte de los resultados del Capítulo 3. En esta sección, dejamos de un lado el TFG [1] y retomamos nuestra principal referencia [10].

Los espacios de Bernstein —cuyo nombre hace homenaje al matemático ruso Sergei Natanovich Bernstein—, surgen en un contexto independiente a los espacios de Paley-Wiener: la teoría de aproximación de funciones enteras por polinomios trigonométricos. Y, sin embargo, su estudio acaba uniéndose de forma natural gracias al teorema de Paley-Wiener.

Definición 1.40 El **espacio de Bernstein** de parámetro $\sigma > 0$, $\mathbf{B}_\sigma$, está compuesto por las funciones $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que

$$|F(x + iy)| \leq C e^{\pi \sigma |y|}, \quad \forall x + iy \in \mathbb{C}, \quad (1.3.1)$$

para alguna constante $C = C(F) > 0$.

Observación 1.41 Si tomamos $y = 0$ en la ecuación (1.3.1), obtenemos la acotación $|F(x)| \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de forma que las funciones del espacio de Bernstein son funciones acotadas en la recta real.

De hecho, podemos conseguir una expresión para el espacio de Bernstein que muestra su analogía con la caracterización (1.2.3) de los espacios de Paley-Wiener.

Teorema 1.42. (Caracterización del espacio de Bernstein) Sea $\sigma > 0$. Entonces

$$\mathbf{B}_\sigma = \left\{ F \in \text{Exp}_\sigma(\mathbb{C}) : F|_{\mathbb{R}} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}. \quad (1.3.2)$$

Dotamos este espacio con la norma $\|F\|_{\mathbf{B}_\sigma} := \|F|_{\mathbb{R}}\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)|$.

Demostración.

La inclusión “ $\subseteq$ ” es obvia. Recíprocamente, para probar que toda función acotada y de tipo exponencial σ cumple la ecuación (1.3.1), debe recurrirse a los llamados **Principios de Phragmén-Lindelöf**, los cuales extienden el *principio del módulo máximo* para funciones holomorfas a regiones no acotadas de $\mathbb{C}$. Una demostración de este hecho puede encontrarse en el TFG [1, Proposición 3.1.20]. En dicho resultado, se demuestra, además, que la constante en la ecuación (1.3.1) puede tomarse $C(F) = \|F|_{\mathbb{R}}\|_\infty$.

□

Nota. Ocasionalmente, abusando de la notación, identificaremos $\mathbf{B}_\sigma$ con el espacio de sus restricciones a $\mathbb{R}$ dado por

$$B_\sigma = \left\{ f = F|_{\mathbb{R}} : F \in \mathbf{B}_\sigma \right\}, \quad (1.3.3)$$

dotado con la norma $\|f\|_{B_\sigma} = \|f\|_\infty$.

Regresando al espacio de Paley-Wiener, de acuerdo con la Observación 1.38, sabemos que las funciones de $\mathbf{PW}_\sigma$ cumplen la condición (1.3.1). Por lo tanto, se obtiene la inclusión del espacio de Paley-Wiener en el espacio de Bernstein. De hecho, podemos establecer una relación más clara, gracias a la caracterización del Teorema 1.39.

Proposición 1.43 Sea $\sigma > 0$. Entonces $\mathbf{PW}_\sigma \subseteq B_\sigma$. De hecho,

$$\mathbf{PW}_\sigma = B_\sigma \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 1.44 El anterior Ejemplo 1.34 nos permite diferenciar entre ambos espacios, puesto que en él se comprueba que $f(x) = \sin(\pi\sigma x) \in B_\sigma \setminus L^2(\mathbb{R})$. Otro ejemplo sencillo que cumple la misma propiedad serían las funciones constantes

$$F(z) := C, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

las cuales son trivialmente de tipo exponencial M , para todo $M > 0$, pero no cuadrado-integrables sobre la recta real.

Para concluir la sección, destacamos algunas características interesantes de los espacios de Bernstein que, aunque no usaremos en los capítulos posteriores, guardan estrecha relación con el tema desarrollado hasta ahora.

En primer lugar, podemos decir que el Teorema de Paley-Wiener también se cumple para estos espacios.

Teorema 1.45. ([10, Cap. 2]) Sea $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f = F|_{\mathbb{R}} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces se cumple

$$F \in \mathbf{B}_\sigma \iff \text{spec}(f) \subseteq \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right].$$

Para poder demostrar tal resultado, es preciso definir la transformada de Fourier en el espacio $L^\infty(\mathbb{R})$, para lo cual es necesario introducir la *Teoría de distribuciones*. Con el fin de no alargar en exceso este trabajo y centrarnos en el espacio de Paley-Wiener, no lo haremos —aunque puede consultarse el desarrollo en [10, Cap. 2]⁴. En vista del teorema anterior, puede identificarse B_σ con el espacio

$$\left\{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \text{spec } f \subset \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right]\right\}.$$

Más generalmente, tomando como inspiración el espacio de Paley-Wiener y el Teorema 1.45, puede definirse también el espacio de Bernstein para conjuntos compactos generales.

Definición 1.46 Sea S un conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Se define entonces el espacio de Bernstein asociado a S como

$$B_S := \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \text{spec}(f) \subseteq S\}.$$

De igual manera, tomando como inspiración las caracterizaciones (1.2.3) y (1.3.2), pueden definirse una serie de espacios más generales para los cuales el teorema de Paley-Wiener sigue siendo cierto —aunque es preciso definir la transformada de Fourier de los espacios $L^p(\mathbb{R})$ usando teoría de interpolación de operadores si $1 \leq p \leq 2$, o teoría de distribuciones si $p > 2$.

Definición 1.47 Se define el espacio de Paley-Wiener de norma $1 \leq p < \infty$ y parámetro $\sigma > 0$ como

$$\mathbf{PW}_{\sigma,p} := \left\{F \in \text{Exp}_{\sigma/2}(\mathbb{C}) : F|_{\mathbb{R}} \in L^p(\mathbb{R})\right\}$$

o de forma equivalente

$$PW_{\sigma,p} := \left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : \text{spec}(f) \subseteq \left[-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\right]\right\}.$$

Un desarrollo completo de esta teoría generalizada puede consultarse en obras más avanzadas como [4].

⁴Una demostración de la implicación más difícil “ $\Rightarrow$ ”, en el caso especial en que $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ puede consultarse en el TFG [1, Corolario 3.1.23].

Establecidas estas bases, damos por concluido el análisis estructural de los espacios de Paley-Wiener y Bernstein. En el siguiente capítulo abordaremos el problema del muestreo y la reconstrucción de señales, desarrollando los marcos teóricos y las herramientas del análisis armónico necesarias para su estudio general.

Problemas clásicos de muestreo en el espacio de Paley-Wiener

En este capítulo vamos a presentar varios problemas clásicos de muestreo siguiendo como referencia los cuatro primeros capítulos del libro de Olevskii y Ulanovskii [10]. Para cada uno de estos problemas, estudiaremos su resolución en el espacio de Paley-Wiener, mostrando su equivalencia con varios problemas del Análisis Funcional. Con tal fin, desarrollaremos algunos objetos matemáticos que generalizan el concepto de base ortonormal para poder trabajar con una mayor cantidad de sistemas exponenciales. Finalmente, la traslación de los problemas de muestreo al espacio $L^2(S)$ nos permitirá establecer algunos ejemplos y resultados de interés.

Es importante remarcar que a lo largo del capítulo, para que el muestreo tenga sentido, hablaremos de funciones continuas al suponer $f \in PW_S$.

El Teorema de Paley-Wiener (Teorema 1.35) sentó desde su aparición la intuición de que una señal cuyo espectro esté acotado queda completamente descrita por sus valores en un conjunto discreto de puntos. Esto se debe a que la distribución de sus ceros influye directamente en su comportamiento analítico.

La confirmación de esta suposición llegó con el Teorema de Shannon (Teorema 1.30), el cual permite reconstruir una función $f \in PW_\sigma$, donde $\sigma > 0$, a partir de su valor en $\Lambda = \frac{1}{\sigma}\mathbb{Z}$. Este resultado fundamental, a pesar de la dificultad de su implementación exacta en la práctica debido a sus hipótesis ideales (como el soporte temporal infinito), estableció el puente entre la interpolación analítica y el procesamiento de señales, siendo el punto de partida de la Teoría de Muestreo moderna, la cual busca generalizar esta reconstrucción a conjuntos mucho más irregulares. El desarrollo histórico completo de esta materia hasta el año 2000, junto a muchas de sus aplicaciones a la ingeniería, puede encontrarse en el artículo de Unser [14].

Para enmarcar matemáticamente nuestro centro de interés, recordamos que, en el procesamiento de señales, el *muestreo* consiste en la restricción de una señal a un conjunto Λ ,

$$f \mapsto f|_\Lambda, \tag{2.0.1}$$

donde Λ es un conjunto dado (normalmente, discreto), contenido en el dominio de definición de las señales. Respecto a este proceso, surgen varios problemas de interés matemático, como los problemas de unicidad, muestreo e interpolación, los cuales presentaremos en este capítulo.

2.1. Conjuntos uniformemente discretos

En la mayoría de problemas relativos al muestreo, suelen imponerse condiciones sobre el conjunto Λ con el fin de evitar aglomeraciones de puntos que comprometan la continuidad del operador de muestreo 2.0.1. Una de ellas es la separación uniforme entre puntos¹.

Definición 2.1 Diremos que un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es **uniformemente discreto** (u.d.) si

$$\delta(\Lambda) := \inf_{\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*} |\lambda - \lambda^*| > 0.$$

A la constante $\delta(\Lambda)$ la llamaremos *constante de separación* de Λ [10, Cap. 2].

Observación 2.2 El nombre viene justificado por el intercambio de cuantificadores en su caracterización topológica. Mientras que un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es discreto si

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists r > 0 \quad \text{tal que} \quad (\lambda - r, \lambda + r) \cap \Lambda = \{\lambda\},$$

la condición de ser uniformemente discreto exige que exista un radio común para todo el conjunto:

$$\exists r > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (\lambda - r, \lambda + r) \cap \Lambda = \{\lambda\}.$$

En nuestro caso, la constante de separación nos permite tomar precisamente $r = \frac{\delta(\Lambda)}{2}$.

Por lo tanto, todo conjunto uniformemente discreto es, naturalmente, discreto en el sentido topológico. Esto garantiza su numerabilidad, al ser esta una propiedad fundamental de cualquier conjunto discreto en la recta real.

Proposición 2.3 *Todo conjunto discreto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es numerable.*

La demostración de esta propiedad es directa: al estar cada punto $\lambda \in \Lambda$ aislado, podemos asignarle un pequeño intervalo a su alrededor de manera que todos estos intervalos sean mutuamente disjuntos. Como cada uno de estos intervalos contiene al menos un número racional, y el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, se deduce que Λ es, a lo sumo, numerable.

Veamos algunos ejemplos para clarificar la diferencia entre ambos tipos de conjuntos.

¹El desarrollo presentado a continuación es de elaboración propia y ha sido realizado con el fin de aclarar el concepto y algunos resultados ampliamente asumidos y conocidos de los conjuntos uniformemente discretos.

Ejemplo 2.4

- a) Comenzamos con los conjuntos de puntos espaciados periódicamente: $\Lambda = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$, para dos constantes $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$. Mientras b solo indica el centro del conjunto, a controla la separación espacial: $\delta(\Lambda) = a > 0$, que es constante en este caso.
- b) Consideramos los enteros aleatoriamente perturbados $\Lambda = \{n + \delta_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde los desplazamientos están acotados por $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\delta_n| \leq L < \frac{1}{2}$ —de forma que el entero más cercano a $n + \delta_n$ sea siempre n —. En este caso, la constante de separación cumple $\delta(\Lambda) \geq 1 - 2L > 0$, y la distancia entre dos puntos consecutivos está uniformemente acotada

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 1 + \delta_{n+1} - \delta_n \leq 1 + 2L. \quad (2.1.1)$$

- c) Tomamos $\Lambda = \{\pm n^2 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. El conjunto es u.d. porque $\delta(\Lambda) = 1 > 0$ —la distancia mínima se alcanza entre 0 y ± 1 —. Sin embargo, a diferencia de los conjuntos anteriores, en este la distancia entre dos puntos consecutivos es cada vez mayor cuando nos alejamos $|n| \rightarrow \infty$.

A continuación, dos ejemplos de conjuntos discretos, pero no uniformemente discretos.

- d) El conjunto $\Lambda = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ es discreto, pero no uniformemente, ya que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

- e) El conjunto $\Lambda = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ también es discreto, pero no uniformemente, ya que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

A diferencia del ejemplo anterior, donde los puntos se acumulaban hacia el 0, aquí no dejan de avanzar hacia el infinito. Sin embargo, en ninguno de los casos hay una separación uniforme entre los puntos.

Para finalizar, presentamos algunas propiedades inmediatas para los conjuntos uniformemente discretos, pero que en general son falsas para conjuntos meramente discretos.

Proposición 2.5 Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto con constante de separación $\delta = \delta(\Lambda) > 0$. Entonces, Λ satisface las siguientes propiedades:

1. **Topología:** Λ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y carece de puntos de acumulación.
2. **Finitud local:** La cantidad de puntos de Λ contenidos en un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ de longitud L es finita, y está acotada superiormente por $\lfloor L/\delta \rfloor + 1$.^a
3. **Ordenación:** Como consecuencia de su numerabilidad y de la finitud local, si Λ es infinito, sus elementos pueden ordenarse, bien como una sucesión doble

estrictamente creciente $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ y $\lambda_n \rightarrow \pm\infty$ cuando $n \rightarrow \pm\infty$, o bien como una truncación de esta $\{\lambda_n\}_{n \geq n_0}$ o $\{\lambda_n\}_{n \leq n_0}$, para un cierto n_0 .

^aEn efecto, si I contiene N puntos de Λ , debe cumplirse que $(N-1)\delta \leq |I| = L$. Despejando tenemos $N \leq L/\delta + 1$, y el resultado sigue tomando la parte entera en la expresión de la derecha.

El apartado (d) del Ejemplo 2.4 explica por qué las dos primeras propiedades fallan, en general, para conjuntos discretos. En cuanto a la tercera, si se le añade un punto al mismo ejemplo, es decir, $\Lambda = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, este nuevo conjunto discreto no puede ordenarse porque no hay un sucesor claro para -1 .

2.2. El problema de unicidad

2.2.1. Conjuntos de unicidad

El fin último del problema de muestreo es la reconstrucción de una función f a partir de sus muestras $f|_{\Lambda}$. En su proceso de resolución surgen, de forma jerárquica, tres cuestiones: primero se estudia si el conjunto de datos $f|_{\Lambda}$ determina unívocamente a la función (unicidad), luego se buscan métodos de recuperación (reconstrucción) y, finalmente, se intenta probar que el proceso resiste a los errores (estabilidad).

Es por ello que, en primer lugar, vamos a estudiar el problema de unicidad, ya que si dos señales distintas pueden producir exactamente el mismo conjunto de datos discretos, cualquier intento de reconstrucción universal estará abocado al fracaso. Para ello, se toma la siguiente definición.

Definición 2.6 – [10, Cap. 2] Un conjunto Λ es un **conjunto de unicidad** (abreviado U.S., del inglés *Uniqueness Set*) para un espacio vectorial X de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, si las condiciones $f \in X$ y $f|_{\Lambda} = 0$ implican $f = 0$. De forma equivalente, si la aplicación de muestreo definida sobre el espacio X y considerando la restricción a Λ es inyectiva. Lo abreviaremos diciendo que Λ es un $US(X)$.

A partir de esta definición abstracta, podemos deducir de forma inmediata algunas propiedades generales sobre cómo se comportan estos conjuntos ante ciertas transformaciones.

Proposición 2.7 Sea X un espacio de funciones y Λ un $US(X)$.

1. **Monotonía:** Si $\Lambda \subseteq \Lambda'$, entonces Λ' también es $US(X)$. Es decir, añadir más muestras (sobremuestrear) preserva la unicidad.

2. Invarianza: Si el espacio X es invariante ante traslaciones espaciales, entonces el conjunto trasladado $\Lambda + c = \{\lambda + c : \lambda \in \Lambda\}$ es un $US(X)$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Lo mismo aplica para dilataciones si X es invariante bajo ellas.

Veamos un par de ejemplos clásicos de conjuntos de unicidad para asentar el concepto.

Ejemplo 2.8

- Sea $X = \mathcal{P}_N$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que N definidos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. El *Teorema del Factor* garantiza que cualquier conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{K}$ con $N + 1$ puntos o más es un U.S. para $\mathcal{P}_N$. Cualquier subconjunto de exactamente $N + 1$ puntos será un U.S. minimal.
- Si X está compuesto por funciones holomorfas definidas sobre un conjunto Ω abierto y conexo, y el conjunto $\Lambda \subseteq \Omega$ contiene algún punto de acumulación en Ω , el clásico *Principio de Prolongación Analítica* concluye que Λ es U.S. para X .

2.2.2. El problema de unicidad en el espacio de Paley-Wiener: sistemas completos

Centremos ahora nuestra atención en el espacio de Paley-Wiener. Comenzamos estableciendo dos propiedades básicas.

Gracias al teorema de Paley-Wiener 1.35, sabemos que toda función en PW_σ es entera para todo $\sigma > 0$. Por lo tanto, del segundo caso del Ejemplo 2.8 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.9 Si $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ contiene algún punto de acumulación, Λ es un $US(PW_\sigma)$.

Por otro lado, también sabemos, por la Proposición 1.18, que el espacio de Paley-Wiener PW_S , con $S \subseteq \mathbb{R}$ un compacto cualquiera, es invariante por traslaciones, por lo que de la Proposición 2.7 se deduce lo siguiente.

Corolario 2.10 Sea Λ un $US(PW_S)$ y $c > 0$. Entonces el conjunto trasladado $\Lambda + c = \{\lambda + c : \lambda \in \Lambda\}$ también es un $US(PW_S)$.

No podemos decir, sin embargo, lo mismo para dilataciones del espacio, ya que PW_S no es invariante ante ellas (Proposición 1.19).

Por último, hablemos de la otra propiedad mencionada en Proposición 2.7. Sabemos que el conjunto Λ sigue siendo un $US(PW_S)$ si sobremuestreamos. Sin embargo, esto no ocurre en el caso contrario, el submuestreo. El siguiente ejemplo muestra cómo quitar un solo punto puede arruinar la unicidad.

Ejemplo 2.11

- Del teorema de muestreo 1.30 se deduce que $\mathbb{Z}$ es un $US(PW_1)$.
- Sin embargo, si eliminamos un único punto $n \in \mathbb{Z}$ del conjunto, el mismo teorema nos dice que $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ no es un $US(PW_1)$, puesto que la función $f(x) = \text{sinc}(x - n)$ se anularía en todos los puntos de $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$, sin ser f idénticamente nula.

Observación 2.12 El verdadero poder de estudiar el problema de unicidad en PW_S reside en su dualidad, que nos permite traducir el problema geométrico de los ceros de una función a un problema algebraico riguroso. Para ello, utilizaremos nuevamente la transformada de Fourier, ya que si $f \in PW_S$, la fórmula de inversión (1.1.3) nos dice que:

$$f(\lambda) = \int_S \hat{f}(t) e^{2\pi i \lambda t} dt, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, decir que una señal se anula en el conjunto Λ equivale a afirmar que la integral anterior es cero para todo $\lambda \in \Lambda$. Teniendo en cuenta que esta integral es precisamente el producto escalar $\langle \hat{f}, e^{-2\pi i \lambda(\cdot)} \rangle$, esto significa que la función $\hat{f}$ es ortogonal a la familia de exponenciales complejas $\{e^{-2\pi i \lambda t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ en el espacio $L^2(S)$.

Construimos ahora, de manera general en el marco del Análisis Funcional, el objeto matemático que responde a dicha propiedad.

Definición 2.13 Sea H un espacio de Hilbert y $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de elementos de H . Se dice que el sistema u es **completo** en H si la clausura del subespacio generado por u es H . Es decir, si $\overline{\text{span}(u)} = H$.

Nota. Recordemos que el subespacio generado, denotado por $\text{span}(u)$ (o $\text{span}\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$), es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos del sistema u . Es decir:

$$\text{span}(u) = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{\lambda_k} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \Lambda \right\}.$$

Este conjunto forma un subespacio vectorial de H , pero no necesariamente cerrado; por ello se toma su cerradura $\overline{\text{span}(u)}$ al definir la completitud.

Demostremos que la definición de sistema completo puede caracterizarse en términos del producto escalar.

Proposición 2.14 Sea H un espacio de Hilbert y $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de elementos de H . Entonces u es completo en H si y solo si $u^\perp = \{0\}$, es decir, si

$$x \in H \quad y \quad \langle x, u_\lambda \rangle = 0 \quad \forall u_\lambda \in u \quad \implies \quad x = 0.$$

Demostración (consultada en [7, Sec. 3.8 y 3.9]).

Abreviamos por $M = \text{span}(u)$ al subespacio lineal generado por el sistema u .

Supongamos primero que el sistema u es completo en H ($\overline{M} = H$) y sea $x \in H$ un elemento tal que es ortogonal a todo elemento del sistema:

$$\langle x, u_\lambda \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Por la linealidad del producto escalar, x es ortogonal a cualquier combinación lineal finita de elementos de u , lo que implica que $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M$. Por la continuidad del producto escalar, si la igualdad se cumple en M , también se cumple en $\overline{M} = H$, de modo que x es ortogonal a todo el espacio H . En particular, tomando $y = x$, se tiene $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$, de donde se concluye que $x = 0$.

Supongamos ahora que la condición $\langle x, u_\lambda \rangle = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ implica necesariamente que $x = 0$. Queremos demostrar que $\overline{M} = H$. Por el teorema de descomposición ortogonal en espacios de Hilbert, el espacio H se puede expresar como la suma directa ortogonal del subespacio cerrado y su complemento:

$$H = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp.$$

Por lo tanto, cualquier elemento de H se descompone de forma única como suma de un elemento en $\overline{M}$ y otro en su complemento ortogonal $\overline{M}^\perp$. Si tomamos un vector $x \in \overline{M}^\perp$, por definición es ortogonal a todo elemento de $\overline{M}$, y en consecuencia es ortogonal a todos los generadores $u_\lambda \in u$:

$$\langle x, u_\lambda \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Por nuestra hipótesis, esto implica que $x = 0$. Así pues, el complemento ortogonal es trivial, $\overline{M}^\perp = \{0\}$, lo que nos lleva a que:

$$H = \overline{M} \oplus \{0\} = \overline{M}.$$

Por lo tanto, M es denso en H y el sistema u es completo. □

En consecuencia, de la Observación 2.12 se deduce la equivalencia entre el problema de unicidad en PW_S y el problema de completitud en $L^2(S)$ —el problema de completitud en un espacio de Hilbert consiste en encontrar un sistema completo para el espacio.

Teorema 2.15. (Equivalencia de Unicidad y Completitud) *Un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de unicidad para el espacio PW_S si, y solo si, el sistema de exponenciales*

$$E(\Lambda) := \{e^{-2\pi i \lambda t} : \lambda \in \Lambda\}$$

es completo en el espacio $L^2(S)$.

De esta forma, el problema original de saber si las muestras contienen toda la información de la señal, se transforma en el problema funcional de estudiar si la familia $E(\Lambda)$ genera un subespacio denso en $L^2(S)$.

Por un lado, la estructura de PW_S nos proporciona resultados para el problema de completitud en $L^2(S)$. Gracias al Corolario 2.9, por ejemplo, sabemos que $E(\Lambda)$ es completo en $L^2(S)$ si Λ contiene puntos de acumulación. Por otro lado, también podemos trasladar resultados del problema de completitud al de unicidad en PW_S , como los siguientes, cuya prueba se encuentra en [15, Cap. 3].

Proposición 2.16 *El sistema $E(\mathbb{Z}^+)^a$ es completo en $L^2(I)$ para todo intervalo $I \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ contenido propiamente.*

^aRecordar que $\mathbb{Z}^+ := \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$

Observación 2.17 Este resultado ejemplifica que el muestreo depende en mayor medida de la distribución de los puntos de Λ que de su cantidad. En este caso, hemos tomado la mitad de puntos que en el Teorema de muestreo 1.30, reduciendo $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}^+$. Y, sin embargo, el conjunto donde es posible muestrear $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ no se ha reducido a la mitad.

Sin embargo, también nos encontramos con lo siguiente.

Proposición 2.18 *Dado un intervalo $I \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ contenido propiamente, es posible encontrar una función $f \in L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ tal que ninguna serie que cumpla*

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} c_n e^{2\pi i n t}, \quad \text{p.c.t. } t \in I,$$

cumple a su vez $(c_n)_{n \geq 0} \in l^2$.

Es decir, que aunque un sistema pueda ser completo en un espacio de funciones, esto no garantiza que la reconstrucción de las funciones a partir de dicho sistema pueda realizarse de manera estable, lo cual nos lleva al problema de muestreo estable que abordamos en la siguiente sección.

2.3. El problema de muestreo estable

2.3.1. Conjuntos de muestreo estable

Aún no contamos con las herramientas suficientes para abordar de forma constructiva la reconstrucción de funciones a partir de sus muestras. Por ello, nos centraremos primero en el requisito

previo fundamental: la *estabilidad*. Puesto que en cualquier aplicación práctica vamos a lidiar con errores y ruido, es necesario introducir una métrica para cuantificarlos.

Para que el proceso de muestreo sea estable, exigimos que la energía o magnitud de la función y la de su sucesión de muestras se controlen mutuamente. Naturalmente, la elección del espacio donde habitan las muestras debe ser acorde a la naturaleza y a la norma del espacio de funciones X con el que estemos trabajando (por ejemplo, espacios de sucesiones de cuadrado sumable $\ell^2(\Lambda)$ cuando X es un espacio de Hilbert como PW_S , o espacios de sucesiones acotadas $\ell^\infty(\Lambda)$ cuando X se evalúa bajo la norma del supremo, como en los espacios de Bernstein).

Definición 2.19 Definimos los espacios de funciones sobre Λ como:

- Para $1 \leq p < \infty$:

$$\ell^p(\Lambda) := \left\{ \xi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C} : \|\xi\|_{\ell^p} := \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |\xi(\lambda)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

- Para $p = \infty$:

$$\ell^\infty(\Lambda) := \left\{ \xi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C} : \|\xi\|_{\ell^\infty} := \sup_{\lambda \in \Lambda} |\xi(\lambda)| < \infty \right\}.$$

Formalizamos esta idea mediante la siguiente definición general inspirada en [10, Cap. 2].

Definición 2.20 Un conjunto Λ es un **conjunto de muestreo estable** (abreviado S.S., por el inglés *Sampling Set*) para un espacio de funciones X (dotado de su correspondiente norma $\|\cdot\|_X$) si existen constantes $A, B > 0$ tales que para toda $f \in X$ se cumple una relación de equivalencia de normas de la forma:

$$A\|f\|_X \leq \|f|_\Lambda\|_{s(\Lambda)} \leq B\|f\|_X, \quad (2.3.1)$$

donde $\|\cdot\|_{s(\Lambda)}$ denota la norma del espacio de sucesiones adecuado sobre Λ . Lo abreviaremos diciendo que Λ es un $SS(X)$.

Particularizando al caso más habitual de los espacios de Hilbert de señales, digamos $X = PW_\sigma$, escogemos como espacio de sucesiones $\ell^2(\Lambda)$, y la definición anterior se traduce en: $\Lambda \in SS(PW_\sigma)$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad \forall f \in PW_\sigma. \quad (2.3.2)$$

Particularizando al caso de los espacios de Bernstein, donde el espacio de funciones $X = B_\sigma$ se evalúa bajo la norma del supremo, escogemos como espacio de sucesiones de las muestras $\ell^\infty(\Lambda)$, y la definición anterior se traduce en: $\Lambda \in SS(B_\sigma)$ si existen constantes $A, B > 0$ tales

que

$$A\|f\|_\infty \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| \leq B\|f\|_\infty, \quad \forall f \in B_\sigma. \quad (2.3.3)$$

Ejemplo 2.21

- El conjunto $\frac{1}{\sigma}\mathbb{Z}$ es un $SS(PW_\sigma)$ para todo $\sigma > 0$ gracias a la identidad (1.1.11) deducida en el Teorema de Shannon 1.30. En este caso, las constantes en (2.3.2) se pueden tomar $A = B = \sigma$.
- Tomemos ahora el conjunto $\Lambda = \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Este conjunto es redundante, en el sentido de que la base construida para PW_1 en 1.27 pierde la ortogonalidad, y por tanto la propiedad de base, si se amplía el sistema utilizando Λ como conjunto de índices. Sin embargo, Λ continúa siendo un $SS(PW_1)$: basta observar que la cota inferior se hereda directamente del subconjunto $\mathbb{Z}$, mientras que la cota superior se obtiene sumando las desigualdades asociadas a $\mathbb{Z}$ y a la red desplazada $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (puesto que ambas son $SS(PW_1)$ y la norma de la función se preserva por traslaciones).

Observación 2.22 Las dos desigualdades en (2.3.2) desempeñan papeles distintos:

- La desigualdad superior establece la continuidad del operador de muestreo ($f \mapsto f|_\Lambda$). Garantiza que si $f \in X$, sus muestras pertenecen al espacio de muestras $s(\Lambda)$ adecuado y su energía discreta no se descontrola.
- La desigualdad inferior es la que garantiza verdaderamente la estabilidad. Nos asegura que si dos funciones $f, \tilde{f} \in X$ tienen muestras muy parecidas, entonces las propias funciones son casi idénticas. En la práctica, esto significa que el error en la señal reconstruida queda acotado por la energía del ruido de las muestras. En efecto, si evaluamos la diferencia entre f y $\tilde{f}$, por la linealidad del espacio y la desigualdad inferior obtenemos:

$$\|f - \tilde{f}\|_X \leq \frac{1}{A} \|f|_\Lambda - \tilde{f}|_\Lambda\|_{s(\Lambda)}.$$

Por tanto, si las mediciones sufren una perturbación $\varepsilon_\lambda = f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)$, el impacto en la función original queda controlado bajo el factor $1/A$.

Observación 2.23 Si $X = B_\sigma$, la desigualdad superior en la ecuación 2.3.3 se satisface trivialmente para todo conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ con constante $B = 1$ ya que

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

De esta forma, el operador de muestreo siempre es trivialmente continuo en el espacio de Bernstein, propiedad que no es exclusiva de dicho espacio.

Proposición 2.24 Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces la desigualdad superior en (2.3.2) es cierta para $X = PW_S$,

es decir, existe una constante $B = B(S) > 0$ tal que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad \forall f \in PW_S.$$

Corolario 2.25 *El conjunto uniformemente discreto Λ es un SS(PW_S) si y solo si existe una constante $A > 0$ tal que*

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2, \quad \forall f \in PW_S.$$

Demostración de la Proposición 2.24 (consultada en [10, Proposición 2.7]).

Tomemos un $\sigma > 0$ suficientemente pequeño para que cumpla al mismo tiempo $S \subseteq [-1/(4\sigma), 1/(4\sigma)]$ y $\delta(\Lambda) \geq 2\sigma$. Definimos la función

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \cdot \chi_{[-\sigma, \sigma]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

para la cual sabemos que se tiene

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{\sin(2\pi\sigma\xi)}{\pi\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Puesto que hemos tomado $\delta(\Lambda) \geq 2\sigma$, el sistema de traslaciones $\{h(x - \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, lo cual se sigue conservando si aplicamos la transformada de Fourier. Así que el sistema $\{e^{2\pi i \lambda \xi} \hat{h}(\xi) : \lambda \in \Lambda\}$ también es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Ahora utilizamos que la función $\sin(x)/x$ es par, positiva y decreciente en el intervalo $[0, \pi/2]$ para mostrar que

$$\inf_{\xi \in S} \hat{h}(\xi) \geq \hat{h}\left(\frac{1}{4\sigma}\right) = \sqrt{2\sigma} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\pi},$$

Así que, si $f \in PW_S$, tomando $C := \frac{2\sqrt{2\sigma}}{\pi}$, se tiene

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 \geq C \|\hat{f}/\hat{h}\|_2^2.$$

Para finalizar, se utiliza la desigualdad de Bessel para sistemas ortonormales (1.1.7):

$$\|f\|_2^2 \geq C \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle \hat{f}/\hat{h}, \widehat{h(\cdot - \lambda)} \rangle|^2 = C \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle \hat{f}, e^{2\pi i \lambda (\cdot)} \rangle|^2 = C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2,$$

concluyendo la desigualdad superior de (2.3.2) con la constante $B = \frac{1}{C}$.

□

A continuación, una afirmación inmediata y esperable del muestreo estable, puesto que $\|f\|_X = 0$ implica $f = 0$.

Proposición 2.26 *Si Λ es un $SS(X)$, también es un $US(X)$.*

No obstante, ambos problemas son diferentes. Por ejemplo, si Λ contiene puntos de acumulación, sabemos que es un $US(PW_\sigma)$ por el Corolario 2.9. Y, sin embargo, puede que no sea $SS(PW_\sigma)$ porque falle la desigualdad superior —si los puntos se acumulan, pueden hacer que la serie de sus muestras no sea sumable porque los términos sean muy parecidos entre sí.

En el caso de ser Λ un conjunto uniformemente discreto, también siguen siendo problemas diferentes. La desigualdad inferior de 2.3.1 puede ser falsa. Para encontrar un ejemplo de ello, vamos a recurrir al espacio de Bernstein.

Proposición 2.27 *Tomamos $X = B_1$ y consideramos el conjunto de puntos $\Lambda = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}\}$. Entonces Λ es un U.S., pero no un S.S., para B_1 .*

Para demostrar que es U.S., probaremos primero el siguiente lema.

Lema 2.28 *Si $f \in B_1$ se anula en $\mathbb{Z}$, entonces $f(x) = C \sin \pi x$, para alguna constante $C \in \mathbb{C}$.*

Demostración (elaboración propia).

La prueba consiste en aplicar el Teorema de Liouville a la función

$$g(z) := \frac{f(z)}{\sin \pi z}$$

Las hipótesis del teorema consisten en comprobar que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y que existe una constante $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$ para todo punto $z \in \mathbb{C}$. De ellas se concluye que g es una función constante, lo cual finalizaría la prueba del lema.

Comencemos comprobando la holomorfía de g . Como $f \in B_1$, es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, al igual que la función $\sin(z)$, el único problema está en los ceros del denominador.

Sin embargo, los ceros del denominador están en $\mathbb{Z}$, que son también ceros del numerador. Por lo tanto, por L'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{f(z)}{\sin \pi z} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{f'(z)}{\pi \cos \pi z} = \frac{f'(n)}{\pi (-1)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Como el límite existe y es finito, g tiene una singularidad evitable en cada número entero y, por lo tanto, puede redefinirse en ellos de forma que $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Ahora buscamos acotar la función g uniformemente en todo el plano complejo. Primero, acotamos el sin inferiormente:

$$\begin{aligned} |\sin(\pi z)| &= \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \\ &\geq \frac{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||}{2} = \frac{|e^{\pi(-\operatorname{Im}(z))} - e^{\pi \operatorname{Im}(z)}|}{2} = \frac{|e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} - e^{-\pi|\operatorname{Im}(z)|}|}{2} \\ &= \frac{e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} - e^{-\pi|\operatorname{Im}(z)|}}{2} \end{aligned}$$

Con esta acotación, podemos concluir

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{\|f\|_{\infty} e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|}}{|\sin(\pi z)|} \leq \frac{2\|f\|_{\infty} e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|}}{e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} - e^{-\pi|\operatorname{Im}(z)|}} \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{1 - e^{-2\pi|\operatorname{Im}(z)|}} \\ &\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{1 - e^{-2\pi}}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| \geq 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, aún nos queda acotarla en la banda $|\operatorname{Im}(z)| < 1$. Para ello, vamos a considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el rectángulo formado por las rectas $\operatorname{Im}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = -1$, $\operatorname{Re}(z) = n + \frac{1}{2}$ y $\operatorname{Re}(z) = -n - \frac{1}{2}$. En ese caso, puesto que la función g es holomorfa, el *Principio del Módulo Máximo* nos dice que el máximo de g sobre el rectángulo se alcanza en su frontera.

Los bordes horizontales ya sabemos que están acotados por la constante $\frac{2\|f\|_{\infty}}{1 - e^{-2\pi}}$. Mientras que para los verticales, tenemos las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned} \left| \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \pi iy\right) \right| &= \left| \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\pi iy) + \sin(\pi iy) \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &= |\cos(\pi iy)| = |\cosh(\pi y)| \geq 1 \end{aligned}$$

Siendo la acotación análoga para el caso $\operatorname{Re}(z) = -\pi n - \frac{\pi}{2}$

Así que en las franjas verticales de los rectángulos se tiene

$$|g(z)| \leq |f(z)| \leq \|f\|_{\infty} e^{\pi|\operatorname{Im}(z)|} \leq \|f\|_{\infty} e^{\pi}$$

porque $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$ en ellas. De forma que la función g queda acotada en todo el rectángulo R_n por

$$\max \left\{ \|f\|_{\infty} e^{\pi}, \frac{2\|f\|_{\infty}}{1 - e^{-2\pi}} \right\}$$

Como esta cota no depende de n , sirve para toda la franja $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$. Pero, como además, dicha cota es mayor que la conseguida fuera de la franja, vale así para todo el plano complejo. De forma que g está uniformemente acotada en todo $\mathbb{C}$, lo cual termina la prueba. □

Demostración la Proposición 2.27 (elaboración propia).

Comencemos demostrando que Λ es un $US(B_1)$. Si tomamos una función $f \in B_1$ que se anula en Λ , dicha función deberá ser de la forma $f(x) = C \sin(\pi x)$ gracias al Lema 2.28. Como, además, se anula en un punto donde el seno no se anula, $z = \frac{\pi}{2}$, concluimos que $C = 0$ y la función queda $f = 0$.

Veamos ahora que Λ no es un $SS(B_1)$. Para ello, vamos a encontrar para cada $K > 0$ una función f_K tal que $\|f\|_\infty > K$, pero $\sup_{\lambda \in \Lambda} |f_K(\lambda)| \leq 1$.

Fijamos $K > 0$ y definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$, la función

$$g_j(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^j \frac{1}{n-x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \dots, j\}$$

que en el resto de enteros se define para que se mantenga continua y holomorfa

$$g_j(m) = (-1)^{m+1}, \quad \forall m \in \{1, \dots, j\}.$$

Esta función cumple

$$g(1/2) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^j \frac{1}{n-1/2}.$$

Puesto que la serie armónica diverge, es posible tomar un $J \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $|g_J(1/2)| > K$. Por otro lado, para tal J fijo, se tiene $|g_J(x)| \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, ya que el seno es una función acotada y cada sumando del sumatorio finito (J términos) tiende a 0. De forma que es posible elegir un $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $f(x) := g_J(x-N)$ cumpla $|f(1/2)| \leq 1$ y $\|f\|_\infty \geq K$ —puesto que $|f(1/2+N)| > K$.

Finalmente, puesto que $|g_J(n)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y, entonces $|f(\lambda)| \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{Z} \cup \{1/2\}$, solo queda ver que $f \in B_1$. Pero esto se cumple por definición, ya que la hemos extendido a los enteros para que sea holomorfa y $\|f\|_\infty < \infty$ ya que tiende a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$.

□

2.3.2. El problema de muestreo estable en el espacio de Paley-Wiener: frames

Al igual que ocurría con el problema de unicidad en PW_S , el problema de muestreo estable también tiene su equivalente en $L^2(S)$. Para ello, vamos a definir otro objeto del Análisis Funcional que generaliza el concepto de base ortonormal, pero sin ser tan amplio como los sistemas completos.

Definición 2.29 Sea H un espacio de Hilbert y $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de elementos de H . Se dice que el sistema u es un **frame** (o marco) en H si existen constantes $A, B > 0$

tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, u_\lambda \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in H. \quad (2.3.4)$$

Las constantes óptimas para la desigualdad anterior se llaman *cotas del frame*.

Observación 2.30 Notar que los marcos son sistemas completos por la desigualdad inferior de 2.3.4. Además, toda base ortonormal es un frame gracias a la identidad de Parseval (1.1.6). Por lo tanto, los frames son un concepto intermedio entre las bases ortonormales y los sistemas completos.

A continuación, el teorema que justifica el interés de nuestro estudio por los frames.

Teorema 2.31. (Equivalencia de Estabilidad y Frame) *Un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de muestreo estable para el espacio PW_S si, y solo si, el sistema de exponenciales*

$$E(\Lambda) := \{e^{-2\pi i \lambda t} : \lambda \in \Lambda\}$$

es un frame en el espacio $L^2(S)$.

Demostración (elaboración propia).

Recordemos que Λ es un SS(PW_S) si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad \forall f \in PW_S.$$

Por otro lado, la definición de frame nos dice que $E(\Lambda)$ lo es si existen dos constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|g\|_2^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle g, e^{2\pi i \lambda (\cdot)} \rangle|^2 \leq B\|g\|_2^2, \quad \forall g \in L^2(S).$$

Tomando $g = \hat{f}$, vemos que cada término en estas expresiones coincide. La igualdad entre los términos centrales se deduce de $f(\lambda) = \langle \hat{f}, e^{-2\pi i \lambda (\cdot)} \rangle$, por la fórmula de inversión (1.1.3), mientras que para los términos extremos se tiene $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

□

De esta forma, al igual que el problema de unicidad en PW_S era equivalente al problema de completitud en $L^2(S)$ gracias al uso de la transformada de Fourier, en este caso, el problema de muestreo estable en PW_S es equivalente al problema de frame en $L^2(S)$ —el problema de frame en un espacio de Hilbert consiste en encontrar un frame para dicho espacio.

Para terminar nuestro estudio general del problema de muestreo, vamos a abordar el problema de reconstrucción, el cual dejamos a un lado al principio de la sección para centrarnos en delimitar los conjuntos que permiten una reconstrucción estable, los conjuntos S.S. Sin embargo,

gracias a la equivalencia entre el problema de muestreo estable y el problema de frame, podemos dar una primera respuesta a la cuestión de la reconstrucción. Lo haremos en el espacio $L^2(S)$, lo cual es equivalente a hacerlo en PW_S gracias a la identidad de Parseval (1.1.1).

Para abordar el problema de reconstrucción en $L^2(S)$, comprobaremos que los frames, a pesar de ser un objeto menos estricto que una base ortonormal, también permiten un desarrollo de Fourier para todas las funciones del espacio.

Nota. En lo que resta de sección, desarrollaremos nuestro problema en el marco del Análisis Funcional y siguiendo en todo momento como referencia [10, Cap. 1]. Fruto de ello son las siguientes definiciones.

Definición 2.32 – [10, Cap. 1] Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame en el espacio de Hilbert H .

Se define el **operador de análisis** $\mathcal{F} : H \mapsto \ell^2(\Lambda)$ asociado al frame u como

$$\mathcal{F}x := (\langle x, u_\lambda \rangle_H)_{\lambda \in \Lambda}, \quad \forall x \in H.$$

Por otro lado, se define el **operador de síntesis** $\mathcal{F}^* : \ell^2(\Lambda) \mapsto H$ asociado al frame u como

$$\mathcal{F}^*c := \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda u_\lambda, \quad \forall c = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \ell^2(\Lambda).$$

Observación 2.33 La desigualdad superior de la definición de frame (2.3.4) nos dice que el operador de análisis $\mathcal{F}$ es lineal y acotado con $\|\mathcal{F}\| \leq \sqrt{B}$. Por lo tanto, tiene un operador adjunto. Veamos que dicho adjunto es exactamente el operador de síntesis, lo cual justifica su notación $\mathcal{F}^*$. Para ello, basta comprobar que

$$\langle \mathcal{F}x, c \rangle_{\ell^2(\Lambda)} = \langle x, \mathcal{F}^*c \rangle_H, \quad \forall x \in H, \forall c = \{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \ell^2(\Lambda).$$

Utilizando la definición de ambos operadores, con un simple cálculo para $x \in H, c \in \ell^2(\Lambda)$ fijos se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}x, c \rangle_{\ell^2(\Lambda)} &= \langle \langle x, u_\lambda \rangle_H, c \rangle_{\ell^2(\Lambda)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, u_\lambda \rangle_H \cdot \overline{c_\lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, c_\lambda u_\lambda \rangle_H \\ &= \left\langle x, \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda u_\lambda \right\rangle_H = \langle x, \mathcal{F}^*c \rangle_H, \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. Por las propiedades de operadores adjuntos, se obtiene que el operador de síntesis también es acotado con norma $\|\mathcal{F}^*\| = \|\mathcal{F}\| \leq \sqrt{B}$.

Definición 2.34 – [10, Cap. 1] Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame en el espacio de Hilbert H .

Se define el **operador de frame** $S : H \mapsto H$ asociado al frame u como

$$Sx := \mathcal{F}^* \mathcal{F} x = \mathcal{F}^* (\langle x, u_\lambda \rangle_H) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, u_\lambda \rangle_H u_\lambda, \quad \forall x \in H. \quad (2.3.5)$$

Observación 2.35 El operador de frame es acotado porque $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ lo son:

$$\|Sx\|_H = \|\mathcal{F}^* \mathcal{F} x\|_H \leq \|\mathcal{F}^*\| \|\mathcal{F}\| \|x\|_H \leq B \|x\|_H, \quad \forall x \in H.$$

Cuando el sistema u es una base ortonormal de H , el operador S es la propia identidad $S = I$, ya que la expresión (2.3.5) coincide plenamente con el desarrollo de Fourier de cada elemento de H . Incluso cuando u no es una base ortonormal, puede demostrarse que el operador de frame es invertible.

Proposición 2.36 Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame en el espacio de Hilbert H . Entonces el operador de frame definido por (2.3.5) es invertible.

Demostración (consultada en [10, Cap. 1]).

Observemos, en primer lugar, que la definición de frame para u (2.3.4) puede escribirse en términos del producto escalar de H y del operador de frame S como

$$A \langle x, x \rangle_H \leq \langle Sx, x \rangle_H \leq B \langle x, x \rangle_H, \quad \forall x \in H. \quad (2.3.6)$$

De esta expresión, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puede deducirse también

$$A \|x\|_H^2 \leq \langle Sx, x \rangle_H \leq \|Sx\|_H \cdot \|x\|_H, \quad \forall x \in H,$$

lo cual nos deja la siguiente acotación inferior para la norma de S :

$$A \|x\|_H \leq \|Sx\|_H, \quad \forall x \in H \setminus \{0\}. \quad (2.3.7)$$

Entonces, la inyectividad de S se deduce rápidamente: si se supone $Sx = 0$, entonces de (2.3.7) se deduce que $x = 0$.

En cuanto a la suprayectividad, por la definición del propio operador, $S = \mathcal{F}^* \mathcal{F}$ es autoadjunto, por lo que el espacio de Hilbert puede descomponerse como

$$H = \ker(S) \oplus \overline{\text{Im}(S)},$$

donde $\ker(S) = \{0\}$ por la inyectividad ya probada. Por lo tanto, para probar la suprayectividad de S , basta comprobar que $\text{Im}(S)$ es un conjunto cerrado en H .

Para ello, tomemos una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Im}(S)$ que converja a un elemento $y \in H$ y veamos que $y \in \text{Im}(S)$. Como cada $y_n \in \text{Im}(S)$, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$

tal que $Sx_n = y_n$. Aplicando la desigualdad (2.3.7) a la diferencia de elementos de la sucesión se tiene

$$A\|x_n - x_m\|_H \leq \|S(x_n - x_m)\|_H = \|y_n - y_m\|_H, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Esta desigualdad implica que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, ya que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lo es (por ser convergente). Al ser H un espacio de Hilbert, esto concluye que $x_n \rightarrow x$ para algún $x \in H$. Y como el operador de frame es continuo (Observación 2.35), $Sx = y$, con lo cual $y \in \text{Im}(S)$ y el conjunto $\text{Im}(S)$ es cerrado en H .

□

Gracias a la invertibilidad del operador de frame, si su inverso tiene una expresión sencilla, podemos llegar a la reconstrucción de los elementos de H a partir del frame u .

Teorema 2.37. (Reconstrucción de elementos con frames) *Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame en el espacio de Hilbert H . Entonces todo vector puede reconstruirse a partir del frame como*

$$x = SS^{-1}x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle S^{-1}x, u_\lambda \rangle_H u_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x, S^{-1}u_\lambda \rangle_H u_\lambda, \quad \forall x \in H. \quad (2.3.8)$$

Observación 2.38 La última igualdad en la ecuación (2.3.8) es posible porque el operador S^{-1} es autoadjunto, lo cual sigue de que el operador S también lo es.

De esta forma, la reconstrucción de vectores a partir de un frame se consigue de manera similar a como se conseguía usando bases ortonormales. El cambio reside en los coeficientes de Fourier, donde ahora el producto escalar se realiza respecto a un nuevo sistema $\{S^{-1}u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Por suerte, este sistema posee buenas propiedades.

Proposición 2.39. (El frame dual canónico) *Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame en el espacio de Hilbert H con cotas de frame A y B . Entonces, el sistema de vectores $v = \{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ definido por*

$$v_\lambda := S^{-1}u_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

*es también un frame en H , al cual denominamos **frame dual canónico** de u . Sus cotas de frame vienen dadas por B^{-1} y A^{-1} .*

De acuerdo con [10, Cap. 1], esto se deduce de la expresión

$$\langle Sx, x \rangle_H = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle x, u_\lambda \rangle_H|^2, \quad \forall x \in H,$$

y de las desigualdades

$$\frac{1}{B}\|x\|_H^2 \leq \langle S^{-1}x, x \rangle_H \leq \frac{1}{A}\|x\|_H^2, \quad \forall x \in H,$$

las cuales, a su vez, pueden obtenerse a partir de la propiedad de frame de $\{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y aplicando resultados de la teoría de operadores positivos.

Observación 2.40 La descomposición de un elemento $x \in H$ en una serie

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda u_\lambda \quad (2.3.9)$$

no es única, en general, si u es un frame. Sin embargo, la expresión (2.3.8) tiene una ventaja sobre cualquier otra descomposición: minimiza la norma l^2 de los coeficientes.

En efecto, si $x \in H$ puede descomponerse como en la ecuación (2.3.9), entonces

$$\langle x, S^{-1}x \rangle_H = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \langle u_\lambda, S^{-1}x \rangle_H \leq \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2} \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u_\lambda, S^{-1}x \rangle_H|^2}.$$

Mientras que para su descomposición de la forma (2.3.8) se tiene

$$\langle x, S^{-1}x \rangle_H = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle S^{-1}x, u_\lambda \rangle_H \langle u_\lambda, S^{-1}x \rangle_H = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle S^{-1}x, u_\lambda \rangle_H|^2.$$

Uniando ambos resultados, se concluye

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle S^{-1}x, u_\lambda \rangle_H|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2.$$

Para terminar la sección, demostramos una sencilla propiedad de los frames duales que usaremos en el Capítulo 3.

Proposición 2.41 Sea $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un frame del espacio de Hilbert H y $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ su frame dual. Entonces

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u_\lambda, v_{\tilde{\lambda}} \rangle_H|^2 \leq 1, \quad \forall \tilde{\lambda} \in \Lambda.$$

Demostración (elaboración propia).

Fijamos $\tilde{\lambda} \in \Lambda$. Según acabamos de comprobar, se tiene

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u_\lambda, v_{\tilde{\lambda}} \rangle_H|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u_\lambda, S^{-1}u_{\tilde{\lambda}} \rangle_H|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2$$

para cualquier descomposición

$$u_{\tilde{\lambda}} = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda u_\lambda.$$

Basta tomar $c_\lambda = 1$ si $\lambda = \tilde{\lambda}$ y $c_\lambda = 0$ en otro caso para concluir el resultado.

□

2.4. El problema de interpolación

2.4.1. Conjuntos de interpolación

Vamos a terminar el capítulo presentando otro de los problemas clásicos del muestreo: el de interpolación, que cambia el foco de la inyectividad a la suprayectividad en el operador de muestreo. No obstante, no nos extenderemos demasiado, puesto que será el problema de muestreo estable el que acapare nuestra atención en el Capítulo 3.

Definición 2.42 – [10, Cap. 4] Un conjunto Λ es un **conjunto de interpolación** (abreviado I.S., del inglés *Interpolation Set*) para un espacio de funciones X y un espacio de sucesiones adecuado de llegada $s(\Lambda)$ si para todo elemento $f \in s(\Lambda)$ existe algún $F \in X$ tal que $F|_{\Lambda} = f$. Es decir, si el operador de muestreo partiendo de X y llegando a $s(\Lambda)$ es suprayectivo. Lo abreviaremos diciendo que Λ es un $IS(X)$.

Como ocurría con el problema de muestreo estable, los espacios de llegada $s(\Lambda)$ considerados para Paley-Wiener y Bernstein son los espacios de sucesiones $l^2(\Lambda)$ y $l^\infty(\Lambda)$.

- De esta forma, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un $IS(PW_S)$ si para toda $f \in l^2(\Lambda)$ existe una función $F \in PW_S$ tal que $F|_{\Lambda} = f$.
- Análogamente, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ será un $IS(B_\sigma)$, con $\sigma > 0$, si para toda $f \in l^\infty(\Lambda)$ existe una función $F \in B_\sigma$ tal que $F|_{\Lambda} = f$.

A partir de la definición general de conjunto de interpolación, pueden deducirse algunas propiedades inmediatas semejantes a las probadas para los conjuntos de unicidad en la Proposición 2.7.

Proposición 2.43 Sea X un espacio de funciones y Λ un I.S. para X .

1. **Monotonía:** Si $\Lambda' \subseteq \Lambda$, entonces Λ' también es un I.S. para X . Es decir, reducir el número de puntos a interpolar preserva la capacidad de interpolación.
2. **Invarianza:** Si el espacio X es invariante ante traslaciones espaciales, entonces el conjunto $\Lambda + c = \{\lambda + c : \lambda \in \Lambda\}$ es un conjunto de interpolación para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Lo mismo aplica para dilataciones si X es invariante bajo ellas.

Veamos un par de ejemplos clásicos de conjuntos de interpolación para comprender el concepto.

Ejemplo 2.44

- Sea $X = \mathcal{P}_N$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que N definidos sobre $\mathbb{R}$, el clásico resultado de la *Interpolación de Lagrange* nos asegura que cualquier conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ de exactamente $N + 1$ puntos distintos es un I.S. para $\mathcal{P}_N$.

Notemos el contraste con el Ejemplo 2.8. Para tener unicidad en $\mathcal{P}_N$ necesitábamos $N + 1$ puntos o más, mientras que para tener interpolación necesitamos $N + 1$ puntos o menos. El equilibrio exacto se da en los subconjuntos de $N + 1$ puntos.

- Sea $X = C(\mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones continuas sobre la recta real, y $s(\Lambda)$ el conjunto de todas las posibles sucesiones definidas sobre Λ , sin ninguna restricción. Entonces, cualquier conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ que sea cerrado y discreto (sin puntos de acumulación en $\mathbb{R}$, como por ejemplo $\Lambda = \mathbb{Z}$) es un conjunto de interpolación para X —basta unir los puntos con una función lineal a trozos.

2.4.2. El problema de interpolación en el espacio de Paley-Wiener: sucesiones de Riesz

Centremos nuevamente nuestra atención en el espacio de Paley-Wiener. En primer lugar, gracias a que el espacio de Paley-Wiener PW_S es invariante por traslaciones (Proposición 1.18), de la Proposición 2.43 se deduce directamente lo siguiente.

Corolario 2.45 *Sea Λ un IS(PW_S) y $c \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto trasladado $\Lambda + c = \{\lambda + c : \lambda \in \Lambda\}$ también es un IS(PW_S).*

En general, no podemos decir, sin embargo, lo mismo para dilataciones del espacio, ya que PW_S no es invariante ante ellas (Proposición 1.19).

Hablemos también de la propiedad de monotonía mencionada en la Proposición 2.43. Sabemos que un conjunto Λ sigue siendo un I.S. para PW_S si reducimos su número de puntos. Sin embargo, esto no ocurre, en general, en el caso contrario, ya que sobremuestrear puede hacer que el sistema sea demasiado restrictivo y ya no se puedan interpolar sucesiones arbitrarias.

Ejemplo 2.46

- Del teorema de muestreo 1.30 se deduce que $\mathbb{Z}$ es un IS(PW_1).
- Por el contrario, si añadimos algún punto a $\mathbb{Z}$, como por ejemplo, $\Lambda = \mathbb{Z} \cup \{1/2\}$, el nuevo conjunto Λ deja de ser de interpolación para PW_1 , puesto que el valor de $f \in PW_1$ en $\mathbb{Z}$ determina completamente a la función.

De forma similar a como ha ocurrido en el problema de unicidad y el problema de muestreo estable, el problema de interpolación en el espacio de Paley-Wiener también puede trasladarse a $L^2(S)$ usando la transformada de Fourier. Sin entrar en detalles de la demostración, ya que no es nuestro centro de interés, podemos comentar lo siguiente.

Definición 2.47 – [10, Cap. 1] Sea H un espacio de Hilbert y $u = \{u_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de elementos de H . Se dice que u es una **sucesión de Riesz** en H si existen constantes

$A, B > 0$ tales que para cualquier sucesión de coeficientes finitos $c = (c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ se cumple

$$A \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2 \leq \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda u_\lambda \right\|_H^2 \leq B \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2.$$

Teorema 2.48. (Equivalencia de Interpolación y Sucesión de Riesz) *Un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de interpolación para el espacio PW_S si, y solo si, el sistema de exponenciales*

$$E(\Lambda) := \{e^{-2\pi i \lambda t} : \lambda \in \Lambda\}$$

es una sucesión de Riesz en el espacio $L^2(S)$.

Para finalizar el capítulo, es interesante señalar la dualidad entre los problemas de muestreo estable e interpolación. Mientras que la definición de *frame* consiste en la acotación superior e inferior del operador de análisis, la definición de *sucesión de Riesz* supone lo análogo para el operador de síntesis.

Cuando ambas propiedades se cumplen a la vez, se habla de *bases* de Riesz, un objeto más restrictivo que los frames, pero que sigue siendo más laxo que las bases ortonormales. Un ejemplo de base de Riesz es el dado por el teorema de muestreo 1.30, ya que, $\mathbb{Z}$ es a la vez un S.S. y un I.S. para PW_1 .

No nos adentraremos más en este tema puesto que, en el próximo capítulo, nos centraremos en caracterizar los conjuntos S.S. del espacio PW_σ a partir de una cierta medida de densidad.

Teoremas de densidad de Beurling-Landau

En este último capítulo vamos a caracterizar los problemas de muestreo mediante una cierta medida de densidad global de los conjuntos de muestreo Λ . En concreto, daremos una demostración completa de la caracterización de los conjuntos de muestreo estable en el espacio de Paley-Wiener. El desarrollo íntegro del capítulo está basado en el esquema de trabajo proporcionado por la obra de Olevskii y Ulanovskii [10, Cap. 3], por lo que obviaremos las referencias en definiciones y resultados salvo que provengan de otra fuente.

Con el fin de enunciar los anticipados teoremas, veamos, en primer lugar, a qué tipo de densidad nos estamos refiriendo.

3.1. Densidad uniforme

El concepto de densidad uniforme fue introducido por el matemático sueco Arne Beurling a principios de la década de 1960, a través de sus conferencias y materiales de investigación sobre análisis armónico en el *Institute for Advanced Study* de Princeton (recogidos posteriormente en sus obras completas [2]). La idea fundamental de Beurling, basada en la buena distribución de los puntos en $\mathbb{Z}$, consistió en trasladar el estudio local de los conjuntos discretos hacia una medida global asintótica, capaz de capturar la geometría a gran escala de los puntos sin perder de vista las fluctuaciones locales. Esta noción, como veremos, resultó ser clave para entender la frontera entre los conjuntos de muestreo estable y de interpolación.

Definición 3.1 Sea Λ un conjunto uniformemente discreto. Definimos su **densidad uniforme inferior** como

$$D^-(\Lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}.$$

Definimos también su **densidad uniforme superior** como

$$D^+(\Lambda) := \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}.$$

Cuando se verifique que $D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda)$, diremos que el conjunto Λ está **distribuido regularmente** y tiene como *densidad uniforme*

$$D(\Lambda) := D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda).$$

Observación 3.2 La densidad uniforme constituye una medida de la distribución global de los puntos del conjunto Λ . La densidad inferior detecta aquellas zonas “más pobres” en cantidad de puntos, al contrario que la densidad superior, que identifica las regiones de mayor concentración de los mismos. Los conjuntos distribuidos regularmente son aquellos que presentan una densidad global homogénea en toda la recta real.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar el concepto.

Ejemplo 3.3

a) El conjunto de los enteros: $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Sea $l > 0$. Entonces, para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, se tienen las acotaciones

$$l - 1 \leq \#(\mathbb{Z} \cap (a, a + l)) \leq l + 1,$$

de forma que

$$1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l-1}{l} \right) \leq D^-(\Lambda) \leq D^+(\Lambda) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l+1}{l} \right) = 1.$$

Por lo tanto, como cabría esperar, $\mathbb{Z}$ está regularmente distribuido y tiene densidad uniforme $D(\mathbb{Z}) = 1$. Es el ejemplo base sobre el que se construye la idea de densidad uniforme, por lo que veamos en los siguientes ejemplos qué le sucede cuando lo manipulamos.

b) Una contracción o dilatación de los enteros: $\Lambda = d\mathbb{Z}$ (donde $d > 0$).

Como para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y $l > 0$ se cumple que $\#(d\mathbb{Z} \cap (a, a + l)) = \#(\mathbb{Z} \cap (\frac{a}{d}, \frac{a}{d} + \frac{l}{d}))$, empleando las acotaciones del ejemplo anterior obtenemos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{l} \right) \leq D^-(\Lambda) \leq D^+(\Lambda) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{l} \right).$$

Así pues, $d\mathbb{Z}$ está regularmente distribuido con densidad uniforme $D(d\mathbb{Z}) = \frac{1}{d}$. Cuanto mayor sea d (es decir, cuanto más se dilate el conjunto), menor será su densidad y mayor su dispersión.

c) Densidades distintas: definimos $\Lambda := a\mathbb{N} \cup (-b\mathbb{N})$ (donde $a, b > 0$).

Dado que en la semirrecta positiva la densidad es de $\frac{1}{a}$, mientras que en la negativa es de $\frac{1}{b}$, se deduce que las densidades del conjunto Λ son $D^-(\Lambda) = \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$ y $D^+(\Lambda) = \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}$. Si $a \neq b$, ambas densidades no coinciden.

- d) Los enteros con perturbación acotada: sea $\Lambda := \{n + \delta_n : n \in \mathbb{Z}, |\delta_n| \leq L\}$ para algún $0 < L < \frac{1}{2}$, de forma que los puntos no colisionen entre sí ni cambien de orden. Entonces, para todo $l > 0, a \in \mathbb{R}$, se tienen las acotaciones

$$l - 3 \leq \#(\Lambda \cap (a, a + l)) \leq l + 3,$$

de las cuales se concluye, al igual que en el ejemplo (a), que Λ está regularmente distribuido y $D(\Lambda) = 1$.

Para concluir, veamos dos ejemplos de densidad nula.

- e) Supongamos que existe un $a \in \mathbb{R}$ para el cual $(a, \infty) \cap \Lambda = \emptyset$ o $(-\infty, a) \cap \Lambda = \emptyset$. En ese caso, por definición, $D^-(\Lambda) = 0$. Esto ocurre por ejemplo si $\Lambda = \mathbb{N}$.
- f) Un ejemplo de dispersión cada vez mayor: $\Lambda := \{n^2 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Intuitivamente, $D^+(\Lambda) = 0$ porque el denominador en la definición crece cuadráticamente respecto al numerador (puede hacerse la operación para comprobarlo). Por lo tanto, $D(\Lambda) = 0$.

Pasamos ahora a comprobar algunas propiedades básicas de nuestra definición de densidad uniforme. En primer lugar, confirmamos que están bien definidas.

Proposición 3.4 *Sea Λ un conjunto uniformemente discreto. Entonces los límites que definen $D^-(\Lambda)$ y $D^+(\Lambda)$ siempre existen.*

Demostración (elaboración propia).

Usaremos la notación $n_{\Lambda}^-(l) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}$ y $n_{\Lambda}^+(l) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}$ para abreviar. Para probar la existencia de $D^-(\Lambda)$, debemos comprobar que el límite $\lim_{l \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^-(l)$ está bien definido. Para ello, puesto que el límite inferior siempre es menor que el superior, bastará comprobar la desigualdad opuesta. Pero vamos a demostrar algo más fuerte:

$$n_{\Lambda}^-(l) \leq \liminf_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^-(L), \quad \forall l > 0. \quad (3.1.1)$$

En primer lugar, fijamos $l > 0, n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, subdividiendo un intervalo más grande en trozos de igual longitud, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a + nl))}{nl} &\geq \frac{1}{nl} [\#(\Lambda \cap (a, a + l)) + \#(\Lambda \cap (a + l, a + 2l)) + \cdots + \#(\Lambda \cap (a + (n-1)l, a + nl))] \\ &\geq \frac{nl}{nl} n_{\Lambda}^-(l) = n_{\Lambda}^-(l), \end{aligned}$$

donde ambos lados de la desigualdad son finitos gracias a que el conjunto Λ es uniformemente discreto.

Como dicha cota inferior funciona para todo $a \in \mathbb{R}$, tenemos finalmente

$$n_{\Lambda}^-(nl) \geq n_{\Lambda}^-(l), \quad \forall l > 0, n \in \mathbb{N}.$$

A partir de esta desigualdad, vamos a deducir el resultado inicial (3.1.1).

Fijamos $l > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ y tomamos $L \geq n_0 l$. Entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ ($N \geq n_0$) tal que $N \leq L/l < N+1$. De estas desigualdades se deduce

$$\begin{aligned} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+L))}{L} &\geq \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+lN))}{L} \geq \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+lN))}{l(N+1)} \\ &= \frac{N}{N+1} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+lN))}{lN} \geq \frac{N}{N+1} n_{\Lambda}^{-}(lN) \\ &\geq \frac{N}{N+1} n_{\Lambda}^{-}(l). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $a \in \mathbb{R}$, tomando ínfimo se consigue

$$n_{\Lambda}^{-}(L) \geq \frac{N}{N+1} n_{\Lambda}^{-}(l) \geq \frac{n_0}{n_0+1} n_{\Lambda}^{-}(l).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \liminf_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{-}(L) &\geq \frac{n_0}{n_0+1} n_{\Lambda}^{-}(l), \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \\ \liminf_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{-}(L) &\geq \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n_0+1} n_{\Lambda}^{-}(l) = n_{\Lambda}^{-}(l), \end{aligned}$$

para cada $l > 0$. De esta forma queda probada la desigualdad (3.1.1). Finalmente, tomando límite superior en la parte izquierda de dicha desigualdad, se concluye el resultado del enunciado.

En cuanto a la existencia de $D^+(\Lambda)$, la prueba sería análoga, pero con un factor $1/l$ que ensucia la prueba un poco más. Para comprobar ese otro caso, puede desarrollarse la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+nl))}{nl} &\leq \frac{1}{nl} \left(\#(\Lambda \cap (a, a+l)) + \#(\Lambda \cap (a+l, a+2l)) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \#(\Lambda \cap (a+(n-1)l, a+nl)) + n-1 \right) \\ &\leq \frac{nl}{nl} n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} = n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l}, \end{aligned}$$

que, al cumplirse para todo $a \in \mathbb{R}$, nos lleva a afirmar

$$n_{\Lambda}^{+}(nl) \leq n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l}, \quad \forall l > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Fijamos $l > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ y tomamos nuevamente $L \geq n_0 l$ y $N \geq n_0$ tal que $N \leq L/l \leq N+1$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+L))}{L} &\leq \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l(N+1)))}{L} \leq \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l(N+1)))}{lN} \\ &= \frac{N+1}{N} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l(N+1)))}{l(N+1)} \leq \frac{N+1}{N} n_{\Lambda}^{+}(l(N+1)) \\ &\leq \frac{N+1}{N} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $a \in \mathbb{R}$, tomando supremo se consigue

$$n_{\Lambda}^{+}(L) \leq \frac{N+1}{N} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right) \leq \frac{n_0+1}{n_0} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{+}(L) &\leq \frac{n_0+1}{n_0} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right), \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \\ \limsup_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{+}(L) &\leq \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{n_0+1}{n_0} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right) = n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l}, \end{aligned}$$

para cada $l > 0$. Y, tomando el límite en la parte derecha de la desigualdad

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{+}(L) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \left(n_{\Lambda}^{+}(l) + \frac{1}{l} \right) = \liminf_{l \rightarrow \infty} n_{\Lambda}^{+}(l),$$

se concluye la existencia de $D^{+}(\Lambda)$.

□

Una vez sabemos que está bien definida, podemos estudiar, inspirándonos en los Ejemplos 3.3, cómo se comporta ante transformaciones básicas.

Proposición 3.5 Sean Λ, Λ_1 y Λ_2 conjuntos uniformemente discretos. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Monotonía:** Si $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, entonces sus densidades guardan el siguiente orden:

$$D^{-}(\Lambda_1) \leq D^{-}(\Lambda_2) \quad \text{y} \quad D^{+}(\Lambda_1) \leq D^{+}(\Lambda_2).$$

2. **Subaditividad finita:** Si $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, la densidad superior satisface la acotación

$$D^{+}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \leq D^{+}(\Lambda_1) + D^{+}(\Lambda_2).$$

3. **Invariancia por traslación:** Para cualquier número real $x \in \mathbb{R}$

$$D^{-}(\Lambda + x) = D^{-}(\Lambda) \quad \text{y} \quad D^{+}(\Lambda + x) = D^{+}(\Lambda).$$

4. **Propiedad de escala:** Para cualquier $c > 0$

$$D^{-}(c\Lambda) = \frac{1}{c} D^{-}(\Lambda) \quad \text{y} \quad D^{+}(c\Lambda) = \frac{1}{c} D^{+}(\Lambda).$$

Demostración (elaboración propia).

Deducimos estas propiedades a partir de las análogas para la medida de cardinalidad.

1. Como $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, para cualquier $l > 0, a \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad de cardinales $\#(\Lambda_1 \cap (a, a+l)) \leq \#(\Lambda_2 \cap (a, a+l))$, de lo cual se deduce la monotonía de las densidades.
2. Para la unión de dos conjuntos, el cardinal satisface $\#((\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \cap (a, a+l)) \leq \#(\Lambda_1 \cap (a, a+l)) + \#(\Lambda_2 \cap (a, a+l))$. De aquí se deduce la subaditividad finita.
3. Contar los puntos de $\Lambda + x$ que caen en el intervalo $(a, a+l)$ es equivalente a contar los puntos de Λ que caen en el intervalo trasladado $(a-x, a-x+l)$. Al tomar el ínfimo o supremo sobre $a \in \mathbb{R}$, el parámetro de traslación x recorre toda la recta real de la misma manera, por lo que los límites coinciden exactamente con los de Λ .
4. Finalmente, de la igualdad $\#(c\Lambda \cap (a, a+l)) = \#(\Lambda \cap (\frac{a}{c}, \frac{a}{c} + \frac{l}{c}))$ se deduce la última propiedad.

□

Comprobamos, para concluir la sección, una propiedad que nos será de utilidad más adelante en la prueba del teorema de Beurling.

Proposición 3.6 *Sea Λ un conjunto uniformemente discreto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon \geq 0$ tal que*

$$\#(\Lambda \cap (-t, t)) \geq 2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t - C_\varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Demostración (elaboración propia).

Si $D^-(\Lambda) = 0$ o $\varepsilon \geq 1$, el resultado es trivialmente cierto tomando $C_\varepsilon = 0$, ya que el número de puntos es siempre no negativo ($|\Lambda \cap (-t, t)| \geq 0$). Por tanto, supondremos que $D^-(\Lambda) > 0$ y que $\varepsilon \in (0, 1)$.

Por la definición de la densidad uniforme inferior, $D^-(\Lambda) = \lim_{l \rightarrow \infty} n_\Lambda^-(l)$, donde hemos denotado

$$n_\Lambda^-(l) := \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+l))}{l}.$$

Por la definición de límite, dado $\varepsilon > 0$, existe un $L_\varepsilon > 0$ tal que para todo $l > L_\varepsilon$ se cumple que

$$n_\Lambda^-(l) \geq D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon).$$

Para demostrar la desigualdad del enunciado para cualquier $t > 0$, analizamos dos casos según el tamaño de t .

- *Caso 1: $t > L_\varepsilon/2$ (es decir, $2t > L_\varepsilon$).*

Tomamos $l = 2t > L_\varepsilon$. Evaluando la definición del ínfimo para el punto $a = -t$, obtenemos

$$\frac{\#(\Lambda \cap (-t, t))}{2t} \geq \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (a, a+2t))}{2t} = n_\Lambda^-(2t) \geq D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon).$$

Multiplicando ambos miembros por $2t$, llegamos directamente a

$$\#(\Lambda \cap (-t, t)) \geq 2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t.$$

Dado que $2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t - \#(\Lambda \cap (-t, t)) \leq 0$, cualquier constante $C_\varepsilon \geq 0$ satisface la acotación del enunciado.

- *Caso 2: $t \leq L_\varepsilon/2$ (es decir, $2t \leq L_\varepsilon$).*

En este caso, t está acotado superiormente por una cantidad fija. Dado que $D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon) > 0$ y $t \leq L_\varepsilon/2$, tenemos la acotación trivial

$$2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t \leq 2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)\frac{L_\varepsilon}{2}.$$

Si definimos nuestra constante como

$$C_\varepsilon := D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)L_\varepsilon,$$

entonces se cumple de inmediato que $2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t - C_\varepsilon \leq 0$.

Por otra parte, siempre se tiene $\#(\Lambda \cap (-t, t)) \geq 0$. Por lo tanto, uniendo ambas ideas, se tiene que

$$\#(\Lambda \cap (-t, t)) \geq 0 \geq 2D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)t - C_\varepsilon,$$

lo cual concluye la desigualdad del enunciado para este caso.

Unificando ambos casos, tomando $C_\varepsilon = D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon)L_\varepsilon$ (o 0 si $D^-(\Lambda) = 0$), la desigualdad del enunciado se cumple para todo $t > 0$.

□

3.2. Enunciado de los teoremas de Beurling

Una vez introducida la noción de densidad de Beurling para estudiar los problemas de muestreo, procedemos a enunciar las caracterizaciones fundamentales que él y H. Landau obtuvieron para el espacio de Paley-Wiener.

Teorema 3.7. (Caracterización de Beurling-Landau para los S.S. de PW_σ) Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Se cumple:

- Si $D^-(\Lambda) > \sigma$, entonces Λ es un SS(PW_σ).
- Si $D^-(\Lambda) < \sigma$, entonces Λ no es un SS(PW_σ).

De forma dual, se obtiene el resultado homólogo para los conjuntos de interpolación empleando las desigualdades contrarias.

Teorema 3.8. (Caracterización de Beurling-Landau para los I.S. de PW_σ) Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Se cumple:

- Si $D^+(\Lambda) < \sigma$, entonces Λ es un IS(PW_σ).
- Si $D^+(\Lambda) > \sigma$, entonces Λ no es un IS(PW_σ).

Observación 3.9 En el caso de que la densidad uniforme esté regularmente distribuida con $D(\Lambda) = D^+(\Lambda) = D^-(\Lambda) \neq \sigma$, el conjunto Λ resuelve a lo sumo uno de los dos problemas: o bien es un SS(PW_σ), o bien es un IS(PW_σ), pero nunca ambos simultáneamente.

Observación 3.10 Las caracterizaciones enunciadas en los teoremas 3.7 y 3.8 son esenciales, es decir, resuelven el problema salvo en el caso extremo en que $D^-(\Lambda)$ o $D^+(\Lambda)$ es igual a σ . En esos casos, resulta imposible caracterizar absolutamente los conjuntos de muestreo estable e interpolación para PW_σ . Por ejemplo:

- Los enteros $\mathbb{Z}$ tienen densidad uniforme $D(\mathbb{Z}) = 1$ (ejemplo 3.3) y son tanto IS(PW_σ) como SS(PW_σ) por el teorema de muestreo (ejemplos 2.21 y 2.46).
- Sin embargo, si añadimos un punto, $D(\mathbb{Z} \cup \{1/2\}) = 1$ sin ser un IS(PW_σ) (ejemplo 2.46).
- Mientras que si quitamos un punto, $D(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = 1$ sin ser un SS(PW_σ), porque falla la unicidad, es decir, no es un US(PW_σ) (ejemplo 2.11).

Para abordar las demostraciones de estos resultados, Beurling estudió primero los problemas equivalentes en el espacio de Bernstein (B_σ), donde logró caracterizaciones absolutas (no esenciales), siendo Landau quien, posteriormente, trasladó dichos resultados al espacio de Paley-Wiener. Concretamente, Beurling demostró los siguientes teoremas.

Teorema 3.11. (Caracterización de Beurling para los S.S. de B_σ) Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Se cumple:

$$D^-(\Lambda) > \sigma \iff \Lambda \text{ es un SS}(B_\sigma).$$

Teorema 3.12. (Caracterización de Beurling para los I.S. de B_σ) Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Se cumple:

$$D^+(\Lambda) < \sigma \iff \Lambda \text{ es un IS}(B_\sigma).$$

Estos teoremas muestran que las nociones de densidad uniforme introducidas por Beurling, $D^\pm(\Lambda)$, son las correctas para resolver este problema, y justifican su uso también en otros contextos.

En lo que respecta al problema de unicidad, se tiene el siguiente corolario derivado de los teoremas 3.7 y 3.11.

Corolario 3.13 *Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces, si $D^-(\Lambda) > \sigma$, se concluye que Λ es tanto un $US(PW_\sigma)$ como un $US(B_\sigma)$.*

Más allá de este resultado, Beurling probó que no es posible caracterizar el problema de unicidad en estos espacios a partir de la densidad uniforme. Para tal fin, desarrolló posteriormente, junto con el matemático francés Paul Malliavin, una nueva medida de densidad de carácter más fino: la *densidad de Beurling-Malliavin*. Los resultados referentes a este tema pueden consultarse en [3].

Por nuestra parte, para finalizar el trabajo, vamos a dar, en lo que resta de capítulo, una demostración del Teorema 3.7. Lo haremos siguiendo nuestro libro de referencia [10, Cap. 3], el cual se basa a su vez en el trabajo original de Beurling [2]. Sin embargo, para evitar entrar en teoría de distribuciones —como hemos adelantado, es necesaria para construir una transformada de Fourier en el espacio de Bernstein— y en el concepto de *Balayage* introducido también por Beurling para su prueba del Teorema 3.11, adaptaremos las ideas y nos centraremos solo en aquellos resultados que podamos probar sin utilizar estos objetos.

3.3. Primera implicación de la prueba

En esta sección, vamos a demostrar el segundo punto del Teorema 3.7.

Teorema 3.14 *Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces*

$$\Lambda \text{ es un } SS(PW_\sigma) \implies D^-(\Lambda) \geq \sigma.$$

La prueba dada por Beurling y Landau para este resultado parte del Teorema 3.11 y del concepto de *balayage*. Sin embargo, con el fin de simplificar el enfoque técnico, daremos una demostración alternativa desarrollada por S. Nitzan y Olevskii en [9] y consultada en [10, Cap. 5]. La base de esta prueba reside en la equivalencia entre el problema de muestreo estable en PW_σ y el problema de frame en $L^2([-\sigma/2, \sigma/2])$ (Teorema 2.31).

Comenzamos la prueba demostrando tres lemas.

Lema 3.15 *Los sistemas $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son frames duales en el espacio PW_σ si y solo si los sistemas transformados $\hat{u} = \{\hat{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\hat{v} = \{\hat{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son frames duales en el espacio $L^2([-\sigma/2, \sigma/2])$.*

Demostración (elaboración propia).

Demostraremos que $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son frames duales suponiendo que u y v lo son. La prueba del recíproco es análoga.

Que la transformada de Fourier conserve frames se deduce del teorema de Plancherel y la identidad de Parseval (1.1.1). Puesto que u es un frame:

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, f \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2,$$

$\hat{u}$ también lo es, ya que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, f \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \hat{u}_n, \hat{f} \rangle|^2, \quad \forall f \in PW_{\sigma}.$$

La dualidad de $\hat{u}$ y $\hat{v}$ sigue de forma similar. Dada la propia dualidad de u y v :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, v_n \rangle u_n, \quad \forall f \in PW_{\sigma},$$

y la linealidad de la transformada de Fourier, se concluye con la identidad de Parseval que

$$\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, v_n \rangle \hat{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{f}, \hat{v}_n \rangle \hat{u}_n, \quad \forall f \in PW_{\sigma}.$$

□

Lema 3.16 Sean $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ frames duales en el espacio PW_{σ} . Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overline{v_n(x)} = \sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración (elaboración propia).

Utilizamos la fórmula de inversión para las funciones de PW_{σ} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overline{v_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{u}_n, e^{-2\pi i x(\cdot)} \rangle \langle e^{-2\pi i x(\cdot)}, \hat{v}_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \langle e^{-2\pi i x(\cdot)}, \hat{v}_n \rangle \hat{u}_n, e^{-2\pi i x(\cdot)} \rangle.$$

Como ya sabemos que los sistemas $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son frames duales (lema 3.15), la expresión final puede simplificarse hasta llegar al resultado del enunciado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overline{v_n(x)} = \langle e^{-2\pi i x(\cdot)}, e^{-2\pi i x(\cdot)} \rangle_{L^2([- \sigma/2, \sigma/2])} = \sigma.$$

□

El último lema que necesitamos se desmarca del concepto de frame. Para entender su significado, notemos que si $\Lambda \subset \mathbb{R}$ tiene $\delta(\Lambda) > 0$ y $h(x) = \text{sinc}(x)$, entonces esperamos que la cola de la serie $\sum_{\lambda \in \Lambda} |h(\lambda)|^2$ verifique

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda: |\lambda| \geq R} |h(\lambda)|^2 = 0.$$

El siguiente lema garantiza este hecho de modo **uniforme** sobre todos los conjuntos trasladados $x + \Lambda$ con $x \in \mathbb{R}$.

Lema 3.17 Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto y tomemos $h(x) = \sigma \text{sinc}(\sigma x)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\lambda \in \Lambda, |x - \lambda| > R} |h(x - \lambda)|^2 = 0.$$

Demostración (elaboración propia).

Comenzamos acotando el decaimiento de la función h :

$$|h(x)| = \frac{|\sin(\pi \sigma x)|}{|\pi x|} \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde C es una constante positiva —esto se consigue por el decaimiento de h fuera del intervalo $[-1, 1]$ y la continuidad de h en este compacto ($h(0) = \sigma$)—. De esta forma, su cuadrado cumple la acotación

$$|h(x - \lambda)|^2 \leq \frac{C^2}{(1 + |x - \lambda|)^2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, $R > 0$ fijos, se tiene la acotación

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda, |x - \lambda| > R} |h(x - \lambda)|^2 &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda, |x - \lambda| > R} \frac{C^2}{(1 + |x - \lambda|)^2} \\ &\leq \sum_{k=\lfloor R \rfloor}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda, |x - \lambda| \in [k, k+1)} \frac{C^2}{(1 + |x - \lambda|)^2} \right) \\ &\leq \sum_{k=\lfloor R \rfloor}^{\infty} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda, |x - \lambda| \in [k, k+1)} \frac{C^2}{(1 + k)^2} \right) \end{aligned}$$

Esta suma puede a su vez acotarse uniformemente en Λ gracias a la propiedad de finitud local para conjuntos uniformemente discretos. En concreto, la segunda propiedad de la Proposición 2.5 permite acotar la cantidad de puntos en cada intervalo de longitud uno:

$$\#\{\lambda \in \Lambda : |\lambda - x| \in [k, k+1)\} \leq \frac{2}{\delta(\Lambda)} + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Aplicando esto a cada intervalo del sumatorio, concluimos

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, |x-\lambda| > R} |h(x-\lambda)|^2 \leq \sum_{k=[R]}^{\infty} \frac{C^2}{(1+k)^2} \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, R > 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\lambda \in \Lambda, |x-\lambda| > R} |h(x-\lambda)|^2 \leq \sum_{k=[R]}^{\infty} \frac{C^2}{(1+k)^2} \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right), \quad \forall R > 0.$$

Tomando límite en R , se concluye el resultado

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{\lambda \in \Lambda, |x-\lambda| > R} |h(x-\lambda)|^2 \leq \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k=[R]}^{\infty} \frac{C^2}{(1+k)^2} = 0,$$

porque esta última serie es convergente.

□

Ya tenemos todos los resultados necesarios para desarrollar la prueba del Teorema de Landau.

Demostración Teorema 3.14.

Por hipótesis, Λ es un $SS(PW_{\sigma})$. Esto es equivalente, de acuerdo con la Teorema 2.31, a que $E(\Lambda)$ sea un frame en $L^2([-\sigma/2, \sigma/2])$. Denotaremos a su frame dual por $\{V_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$. Volviendo al espacio de Paley-Wiener,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi i \lambda \xi})(x) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} e^{-2\pi i \lambda \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} e^{2\pi i \xi(-\lambda+x)} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\sigma/2, \sigma/2]})(x-\lambda) = h(x-\lambda), \end{aligned}$$

donde $h(x) = \sigma \text{sinc}(x\sigma)$ es la función del Lema 3.17. Entonces, de acuerdo con el Lema 3.15, $\{h(x-\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un frame en PW_{σ} , cuyo frame dual es $v = \{v_{\lambda} := \mathcal{F}^{-1}(V_{\lambda}) : \lambda \in \Lambda\}$.

Este frame dual presenta tres propiedades que usaremos a continuación:

- a) Existe una constante $C_1 > 0$ tal que $\|v_{\lambda}\|_2 \leq C_1$, $\forall \lambda \in \Lambda$. La prueba de esta propiedad es la siguiente cadena:

$$\|v_{\lambda}\|_2 = \|\hat{v}_{\lambda}\|_2 = \|V_{\lambda}\|_2 = \|S^{-1}(e^{-2\pi i \lambda (\cdot)})\|_2 \leq 1/A \|e^{-2\pi i \lambda (\cdot)}\|_2 \leq \sqrt{\sigma}/A,$$

donde S es el operador de frame asociado al frame $E(\Lambda)$.

- b) Existe una constante $C_2 > 0$ tal que $\sum_{\lambda \in \Lambda} |v_{\lambda}(x)|^2 < C_2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esta propiedad sigue del hecho de que $\{V_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ sea un frame:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |v_{\lambda}(x)|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle V_{\lambda}, e^{-2\pi i x (\cdot)} \rangle|^2 \leq 1/A \|e^{-2\pi i x (\cdot)}\|_2^2 \leq \sigma/A.$$

- c) El producto escalar está uniformemente acotado:

$$|\langle h(x-\lambda), v_{\lambda}(x) \rangle_{PW_{\sigma}}| \leq 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Esta propiedad sigue de la Proposición 2.41.

Una vez preparados los preliminares, comencemos con el argumento de la prueba. Para empezar, fijamos $\varepsilon > 0$. El Lema 3.17 demuestra la existencia de un $R = R(\varepsilon) > 0$ lo suficientemente grande para que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, |x-\lambda| > R} |h(x-\lambda)|^2 < \varepsilon^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.1)$$

Como, además, según vimos en el Ejemplo 1.34, $h \in L^2(\mathbb{R})$, podemos suponer que tal R cumple al mismo tiempo

$$\int_{|x| > R} |h(x)|^2 dx < \varepsilon^2. \quad (3.3.2)$$

Fijemos ahora un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ cuya longitud cumpla $|I| > 2R$. A partir de él, construimos dos nuevos intervalos:

- Uno más grande, $I^+ := I + [-R, R]$. Notar que $I \subset I^+$.
- Y otro más pequeño, $I^- \subseteq I$, el cual cumple $I^- + [-R, R] = I$. Notar que I^- es, en efecto, un intervalo de medida positiva, ya que $|I| > 2R$.

Sabemos entonces, gracias al Lema 3.16, que

$$\sigma = \sum_{\lambda \in \Lambda} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} = A_1(x) + A_2(x) + A_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(x) &:= \sum_{\lambda \in \Lambda \cap I^-} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)}, & A_2(x) &:= \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)}, \\ A_3(x) &:= \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus I^+)} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)}. \end{aligned}$$

Buscamos, por lo tanto, acotar cada uno de estos sumandos con el fin de obtener $D^-(\Lambda) \geq \sigma$. La expresión de la densidad aparecerá asociada al término $\frac{1}{|I|} \int_I A_1(x) dx$, vía $\#(\Lambda \cap I^-)/|I|$, como veremos en la prueba.

Comenzamos con $A_1(x)$. Para cada $\lambda \in \Lambda \cap I^-$ fijo se cumple

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| &= \left| \int_I h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus I} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \\ &\geq \left| \int_I h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| - \left| \int_{\mathbb{R} \setminus I} h(x-\lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \end{aligned}$$

Como todo $x \in \mathbb{R} \setminus I$ cumple la desigualdad $|x - \lambda| > R$ (ya que hemos tomado $\lambda \in I^-$), podemos seguir desarrollando el término:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_I h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus I} h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \\
 &\leq |\langle h(x - \lambda), v_\lambda(x) \rangle_{L^2}| + \left| \int_{|x - \lambda| > R} h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \\
 \text{(Propiedad (c) del frame } v) \quad &\leq 1 + \left| \int_{|x - \lambda| > R} h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \\
 \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq 1 + \sqrt{\int_{|y| > R} |h(y)|^2 dy} \sqrt{\int_{|x - \lambda| > R} |v_\lambda(x)|^2 dx} \\
 \text{(Acotación (3.3.2))} \quad &\leq 1 + \varepsilon \|v_\lambda\|_2 \\
 \text{(Propiedad (a) del frame } v) \quad &\leq 1 + C_1 \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Como hemos conseguido desarrollar esta acotación para todo $\lambda \in \Lambda \cap I^-$, concluimos

$$\left| \int_I A_1(x) dx \right| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap I^-} \left| \int_I h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)} dx \right| \leq (1 + C_1 \varepsilon) \#(\Lambda \cap I^-), \quad (3.3.3)$$

para alguna constante $C_1 > 0$.

Vamos ahora con el término $A_2(x)$. Su desarrollo es algo más breve:

$$\begin{aligned}
 \int_I |A_2(x)| dx &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} \int_I |h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)}| dx \\
 &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} \int_{\mathbb{R}} |h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)}| dx \\
 \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |h(x - \lambda)|^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |v_\lambda(x)|^2 dx} \\
 &= \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} \|h\|_2 \|v_\lambda\|_2 \\
 \text{(Propiedad (a) del frame } v) \quad &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)} k,
 \end{aligned}$$

para alguna constante $k > 0$. Para concluir este término, basta contar el número de puntos en el sumatorio de A_2 . Puesto que el Λ es uniformemente discreto y el conjunto $I^+ \setminus I^-$ tiene medida $|I^+ \setminus I^-| = 4R$, la propiedad de finitud local 2.5 nos dice que

$$\int_I |A_2(x)| dx \leq k \#(\Lambda \cap (I^+ \setminus I^-)) \leq k \left(1 + \frac{4R}{\delta(\Lambda)}\right) \leq KR, \quad (3.3.4)$$

para alguna constante $K > 0$, suponiendo que hayamos empezado tomando R lo suficientemente grande. Notar que esta estimación es independiente de I , con $|I| > 2R$.

En cuanto al término $A_3(x)$, si fijamos $\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus I^+)$, entonces cada punto $x \in I$ cumple $|\lambda - x| > R$, lo cual nos deja

$$\begin{aligned}
|A_3(x)| &\leq \sum_{\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus (I^+))} |h(x - \lambda) \overline{v_\lambda(x)}| \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus (I^+))} |h(x - \lambda)|^2} \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus (I^+))} |v_\lambda(x)|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda, |\lambda - x| > R} |h(x - \lambda)|^2} \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda \cap (\mathbb{R} \setminus (I^+))} |v_\lambda(x)|^2} \\
\text{(ecuación (3.3.1))} \quad &\leq \varepsilon \sqrt{\sum_{\lambda \in \Lambda} |v_\lambda(x)|^2} \\
\text{(Propiedad (b) del frame } v) \quad &\leq C_2 \varepsilon,
\end{aligned}$$

para alguna constante $C_2 > 0$ uniforme en todo $x \in \mathbb{R}$.

Integrando este término se concluye

$$\int_I |A_3(x)| dx \leq C_2 \varepsilon |I|. \quad (3.3.5)$$

Para finalizar la prueba, debemos unir las conclusiones obtenidas en (3.3.3), (3.3.4) y (3.3.5). Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|I| \sigma &= \left| \int_I (A_1(x) + A_2(x) + A_3(x)) dx \right| \\
&\leq \left| \int_I A_1(x) dx \right| + \left| \int_I A_2(x) dx \right| + \left| \int_I A_3(x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_I A_1(x) dx \right| + \int_I |A_2(x)| dx + \int_I |A_3(x)| dx \\
&\leq (1 + C_1 \varepsilon) \#(\Lambda \cap I^-) + KR + C_2 \varepsilon |I|
\end{aligned}$$

Despejando el primer término se consigue

$$|I| \sigma - KR - C_2 \varepsilon |I| \leq (1 + C_1 \varepsilon) \#(\Lambda \cap I^-).$$

Y dividiendo entre la longitud del intervalo I :

$$\sigma - \frac{KR}{|I|} - C_2 \varepsilon \leq (1 + C_1 \varepsilon) \frac{\#(\Lambda \cap I^-)}{|I|}.$$

Como, además, $I^- \subset I$, podemos relajar la desigualdad un poco:

$$\sigma - \frac{KR}{|I|} - C_2 \varepsilon \leq (1 + C_1 \varepsilon) \frac{\#(\Lambda \cap I)}{|I|}.$$

Para terminar, observemos el orden en el que hemos fijado los parámetros. Primero tomamos ε , después $R(\varepsilon)$ y después los intervalos $|I| > 2R$. Podemos concluir que, para cada intervalo de longitud $|I| = r > 2R$, se tiene

$$\sigma - \frac{KR}{r} - C_2\varepsilon \leq (1 + C_1\varepsilon) \frac{\#(\Lambda \cap I)}{r}.$$

Como esta desigualdad es cierta para todos los intervalos de longitud r , podemos tomar el ínfimo:

$$\sigma - \frac{KR}{r} - C_2\varepsilon \leq (1 + C_1\varepsilon) \inf_{|I|=r} \frac{\#(\Lambda \cap I)}{r},$$

lo cual, tomando límite $r \rightarrow \infty$ se transforma en

$$\sigma - C_2\varepsilon = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\sigma - \frac{KR}{r} - C_2\varepsilon \right) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left((1 + C_1\varepsilon) \inf_{|I|=r} \frac{\#(\Lambda \cap I)}{r} \right) = (1 + C_1\varepsilon) D^-(\Lambda).$$

Finalmente, como esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$, concluimos el resultado del enunciado:

$$\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma - C_2\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((1 + C_1\varepsilon) D^-(\Lambda)) = D^-(\Lambda).$$

□

3.4. Demostración recíproca

En las páginas restantes, daremos una demostración para el resultado recíproco.

Teorema 3.18 *Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces*

$$D^-(\Lambda) > \sigma \implies \Lambda \text{ es un } SS(PW_\sigma).$$

En este caso, sí usaremos algunas de las ideas y conceptos desarrollados por Beurling. Contamos, además, con la suerte de poder evitar definir el Balayage y la teoría de distribuciones, centrando la atención en resultados de Análisis Complejo y límites de conjuntos.

La prueba queda dividida en varios pasos, cada uno de los cuales supone un resultado relevante en sí mismo y utiliza una herramienta diferente. Es por ello que dividimos estos pasos en distintas secciones.

3.4.1. Primer paso: la fórmula de Jensen

El primer resultado que demostraremos para la prueba del Teorema 3.18 es el siguiente.

Teorema 3.19 Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces

$$D^-(\Lambda) > \sigma \implies \Lambda \text{ es un US}(B_\sigma).$$

O de forma equivalente: si existe $f \in B_\sigma$ tal que $f \neq 0$, pero $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$, entonces $D^-(\Lambda) \leq \sigma$.

Para probar el Teorema 3.19, vamos a utilizar un resultado de Análisis Complejo conocido como la Fórmula de Jensen.

En general, los ceros de una función holomorfa pueden distribuirse de forma arbitraria. Sin embargo, dicho comportamiento puede limitarse suponiendo mayores hipótesis sobre la función. Dichos resultados se consiguen aplicando la fórmula de Jensen, la cual relaciona los ceros de la función con su valor promedio.

Teorema 3.20. (Fórmula de Jensen) Sea $\Omega = D_R(0)$ el disco abierto de radio R y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función tal que $f(0) \neq 0$. Tomamos $0 < r < R$ y sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ los ceros de f en $\overline{D}_r(0)$, repetidos según su multiplicidad. Suponemos adicionalmente que dichos ceros están en el interior del disco, en $D_r(0)$. Entonces

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}$$

Observación 3.21 Sabemos que $\overline{D}_r(0)$ es compacto y está contenido en un abierto (el disco $D_R(0)$) donde la función es holomorfa. Por el principio de prolongación analítica, y puesto que la función f se ha supuesto no idénticamente nula, $\mathcal{Z}_f$ no puede tener puntos de acumulación en dicho compacto. Esto confirma que el conjunto de ceros de f en $\overline{D}_r(0)$ es finito, justificando la notación $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$.

En cuanto a la fórmula, el lado izquierdo está bien definido porque 0 no forma parte del conjunto de ceros de la función ($f(0) \neq 0$). Por otra parte, la integral del lado derecho es definida porque hemos supuesto que no había ceros de f en $\partial D_r(0)$.

Para poder probar el Teorema 3.20, vamos a recordar antes algunos resultados básicos de Análisis Complejo. Sus enunciados, así como sus pruebas, pueden consultarse en [12].

Proposición 3.22. ([12, Cap. 13]) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Son equivalentes:

- a) El conjunto Ω es simplemente conexo.
- b) La integral $\int_\Gamma f = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y todo camino cerrado $\Gamma \subseteq \Omega$.
- c) $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \exists F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$ (existencia de primitiva holomorfa).

d) $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$ (existencia de logaritmo holomorfo).

Proposición 3.23. ([12, Cap. 13]) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no tiene ceros en Ω , entonces $\log |f|$ es armónica en Ω .

Demostración.

Puesto que Ω es abierto, basta ver que $\log |f|$ es armónica en todo disco abierto contenido en Ω . Sea, por lo tanto, $D \subseteq \Omega$ un disco abierto. Como D es simplemente conexo y, por hipótesis, f no se anula en él, la Proposición 3.22 nos asegura la existencia de un logaritmo holomorfo para f en D . Llamaremos g a dicha función logaritmo. Como $|f| = |e^g| = e^{\operatorname{Re}(g)}$, entonces $\log |f| = \operatorname{Re}(g)$ es armónica en D , puesto que es la parte real de una función holomorfa (g) en D .

□

Otro célebre resultado de Análisis Complejo que precisaremos para la prueba del Teorema 3.20 es la Propiedad del Valor Medio.

Lema 3.24. ([12, Cap. 11]) Sea $\Omega = D_r(z_0)$ el disco abierto de radio r y centro z_0 . Si $u \in \operatorname{Har}(\Omega)$, entonces u es la parte real de una función holomorfa en Ω . Es decir, existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = u + iv$.

Lema 3.25. (Fórmula de Cauchy para el disco [12, Cap. 10]) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Delta = D_R(z_0)$ un disco tal que $\overline{\Delta} \subseteq \Omega$. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in \Delta.$$

Proposición 3.26. (Propiedad del Valor Medio [12, Cap. 11]) Si u es una función armónica en el disco abierto $D_{R+\varepsilon}(z_0)$, el valor de u en el centro del disco coincide con su valor promedio sobre la frontera de cualquier disco menor:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración.

Como u es armónica en $D_{R+\varepsilon}(z_0)$, el Lema 3.24 dice u es, en dicho dominio, la parte real de una función $f \in \mathcal{H}(D_{R+\varepsilon}(z_0))$. Como $\overline{D}_R(z_0) \subseteq D_{R+\varepsilon}(z_0)$, el Lema 3.25 nos da la igualdad

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

tras haber hecho el cambio de variable

$$\xi = z_0 + Re^{i\theta}, \quad d\xi = Rie^{i\theta} d\theta$$

Finalmente, podemos concluir

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \operatorname{Re}(f(z_0)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z_0 + Re^{i\theta})) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

□

Ya tenemos todas la herramientas necesarias para probar la fórmula de Jensen.

Demostración del Teorema 3.20 (consultada en [10, Cap. 3]).

Recordemos que partimos de una función $f \in \mathcal{H}(D_R(0))$ que cumple $f(0) \neq 0$ y cuyo conjunto de ceros en $\overline{D}_r(0)$, repetidos según multiplicidad e interiores al disco, denotamos por $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$.

Comenzamos la prueba definiendo la siguiente función

$$g := f(z) \prod_{n=1}^N \frac{r^2 - \overline{\alpha_n} z}{r(\alpha_n - z)},$$

la cual es holomorfa en el disco $D_R(0)$ porque f lo es y los ceros del denominador coinciden con ceros en el numerador. Por esta misma razón, g no se anula en $\overline{D}_r(0)$. Y, debido a la finitud del conjunto de ceros de f en $D_R(0)$, podemos encontrar un disco más grande $D_{r+\varepsilon}(0)$ donde g es holomorfa y no se anula.

La Proposición 3.23 nos dice, entonces, que $\log |g|$ es una función armónica en $D_{r+\varepsilon}(0)$. La propiedad del valor medio (Proposición 3.26) concluye así la igualdad

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.4.1)$$

Solo queda sustituir en ambos lados la definición de g . Para el lado izquierdo

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r^2}{r|\alpha_n|} = |f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|},$$

mientras que $|g(z)| = |f(z)|$ para todo $z \in \partial D_r(0)$, pues si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, se tiene

$$\left| \frac{r^2 - \overline{\alpha_n} z}{r(\alpha_n - z)} \right| = \left| \frac{r - \overline{\alpha_n} e^{i\theta}}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| = \left| \frac{re^{-i\theta} - \overline{\alpha_n}}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| = \left| \frac{\overline{\alpha_n} - re^{-i\theta}}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| = \left| \frac{\overline{\alpha_n - re^{-i\theta}}}{\alpha_n - re^{i\theta}} \right| = 1, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

De esta forma, sustituyendo estos valores, la ecuación 3.4.1 queda

$$\log \left(|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

o como habíamos escrito la fórmula,

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}.$$

□

Observación 3.27 La fórmula de Jensen establece una relación entre los ceros de la función en un disco y su valor en el centro y la frontera del disco. Puede escribirse de varias maneras. Así, vamos a partir de la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \sum_{n=1}^N \log \frac{r}{|\alpha_n|}. \quad (3.4.2)$$

y a desarrollar un poco el lado derecho.

Cada sumando puede escribirse como una integral de la siguiente forma:

$$\log \frac{r}{|\alpha_n|} = \log r - \log |\alpha_n| = \log x \Big|_{|\alpha_n|}^r = \int_{|\alpha_n|}^r \frac{dx}{x}.$$

Así que el lado derecho de la ecuación 3.4.2 quedaría como

$$\sum_{n=1}^N \log \frac{r}{|\alpha_n|} = \sum_{n=1}^N \int_{|\alpha_n|}^r \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^N \int_0^r \frac{1}{x} \mathcal{X}_{(|\alpha_n|, r)}(x) dx = \int_0^r \sum_{n=1}^N \frac{1}{x} \mathcal{X}_{(|\alpha_n|, r)}(x) dx = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx,$$

donde $n(x)$ representa la cantidad de ceros de la función f en $D_x(0)$. Resulta finalmente la ecuación

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx. \quad (3.4.3)$$

Ahora que hemos llegado hasta la ecuación de Jensen que necesitábamos, vamos a probar el Teorema 3.19, el primer paso de nuestra prueba.

Demostración del Teorema 3.19.

Como $B_\sigma = \text{Exp}_\sigma(\mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, podemos suponer, dividiendo entre una constante, que $\|f\|_\infty = 1$.

Vamos a suponer también que $0 \notin \Lambda$. Si no fuera el caso, cambiamos el conjunto $\tilde{\Lambda} := \Lambda - a$, con $a \notin \Lambda$. El resultado del teorema seguirá siendo válido, pues $D^-(\Lambda) = D^-(\tilde{\Lambda})$ (Proposición Proposición 3.5).

Hechas estas suposiciones, comenzamos acotando la función. Puesto que $f \in B_\sigma$, es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función entera en $\mathbf{B}_\sigma$, que denotamos también por f . En particular, por (1.3.1) tenemos

$$|f(x+iy)| \leq \|f\|_\infty e^{\sigma\pi|y|} = e^{\sigma\pi|y|}, \quad \forall x+iy \in \mathbb{C}.$$

En forma logarítmica quedaría como

$$\log |f(x+iy)| \leq \sigma\pi|y|, \quad \forall x+iy \in \mathbb{C}, f(x+iy) \neq 0.$$

Ahora trabajaremos en coordenadas polares, de forma que

$$\log |f(Re^{i\theta})| \leq \sigma\pi R |\sin(\theta)|, \quad \forall R > 0, \theta \in [0, 2\pi], f(Re^{i\theta}) \neq 0. \quad (3.4.4)$$

Tomo una sucesión de radios positivos $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $R_n \rightarrow \infty$ y f no se anula en ningún $\partial D_{R_n}(0)$. Dicha sucesión debe ser posible porque la función f tiene una cantidad finita de ceros en cada disco compacto. Entonces, para cada R_n , como la parte derecha en la ecuación (3.4.4) es positiva, la desigualdad puede mantenerse de forma integral. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R_n e^{i\theta})| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma\pi R_n |\sin(\theta)| d\theta \\ &= \frac{\sigma R_n}{2} \int_0^{2\pi} |\sin(\theta)| d\theta = \sigma R_n \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\ &= 2\sigma R_n. \end{aligned}$$

Como nuestra función f es holomorfa en el plano y $f(0) \neq 0$, podemos aplicarle el Teorema 3.20 (fórmula de Jensen). Utilizando, concretamente, la ecuación (3.4.3), donde $n(t)$ representa la cantidad de ceros de la función en $D_t(0)$, nos quedaría

$$\begin{aligned} 2\sigma R_n &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R_n e^{i\theta})| d\theta \\ \text{(ecuación 3.4.3)} &= \log |f(0)| + \int_0^{R_n} \frac{n(t)}{t} dt \\ (n(t) \geq 0) &\geq \log |f(0)| + \int_1^{R_n} \frac{n(t)}{t} dt \\ (f(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \Lambda) &\geq \log |f(0)| + \int_1^{R_n} \frac{\#(\Lambda \cap (-t, t))}{t} dt. \end{aligned}$$

Para terminar, hacemos uso de la Proposición 3.6. Fijamos $\varepsilon > 0$. Entonces encontramos una constante C_ε que nos va a dar la desigualdad

$$\begin{aligned} 2\sigma R_n &\geq \int_1^{R_n} \left(2D^-(\Lambda)(1-\varepsilon) - \frac{C_\varepsilon}{t} \right) dt + \log |f(0)| \\ &= 2D^-(\Lambda)(1-\varepsilon)(R_n - 1) - C_\varepsilon \log(R_n) + \log |f(0)| \end{aligned}$$

Despejando σ , se tiene la acotación

$$\sigma \geq D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon) \frac{R_n - 1}{R_n} - C_\varepsilon \frac{\log(R_n)}{R_n} + \frac{\log|f(0)|}{R_n}, \quad \forall R_n, \varepsilon > 0.$$

De esta forma, tomando $R_n \rightarrow \infty$, nos queda

$$\sigma \geq D^-(\Lambda)(1 - \varepsilon), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Y haciendo ahora $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos el resultado deseado

$$\sigma \geq D^-(\Lambda).$$

□

3.4.2. Segundo paso: límite débil de conjuntos

Otro concepto que cobra una notable relevancia en la prueba de Beurling es el de límite débil de una sucesión de conjuntos, especialmente, de una sucesión de traslaciones del mismo conjunto. Desarrollamos en esta sección las principales propiedades que necesitaremos de este concepto.

Definición 3.28 Dados dos conjuntos finitos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, diremos que A es una ε -perturbación de B (o viceversa) si existe una biyección $f : A \rightarrow B$ tal que

$$|f(a) - a| < \varepsilon, \quad \forall a \in A.$$

Definición 3.29 Dada una sucesión $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos uniformemente discretos en $\mathbb{R}$ que cumplen

$$\delta(\Lambda_n) > d > 0, \tag{3.4.5}$$

decimos que Λ es **límite débil** de la sucesión si para todo $\varepsilon > 0$ y todo intervalo abierto $I = (a, b)$, tal que $a, b \notin \Lambda$, el conjunto $\Lambda \cap I$ es una ε -perturbación de $\Lambda_n \cap I$ para casi todo n (es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, excepto una cantidad finita). O, equivalentemente, si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \cap I$ es una ε -perturbación de $\Lambda_n \cap I$ para todo $n > N$. Denotaremos esta convergencia débil por

$$\Lambda_n \rightharpoonup \Lambda.$$

Observación 3.30 Supongamos que $\Lambda_n \rightharpoonup \Lambda$. Entonces, para cada punto $\lambda \in \Lambda$ existe una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n \in \Lambda_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$.

Basta tomar un intervalo $I = (a, b)$ tal que $\lambda \in I$ y $a, b \notin \Lambda$, y considerar un $0 < \varepsilon < \delta(\Lambda)/2$. Entonces existe un natural N a partir del cual $\Lambda_n \cap I$ es una ε -perturbación de $\Lambda \cap I$. Como esta perturbación es una biyección, existe un elemento $\lambda_n \in \Lambda_n \cap I$ para cada $n \geq N$ de forma

que $|\lambda - \lambda_n| < \varepsilon$. Basta elegir tales λ_n como elementos de la sucesión, y definirla de forma arbitraria para $n < N$, siempre y cuando cumpla $\lambda_n \in \Lambda_n$.

Ejemplo 3.31

- El caso más sencillo es $\Lambda = (1 + \frac{1}{n})\mathbb{Z}$, que converge débilmente a $\mathbb{Z}$. En este caso, se explica por qué se toma $I = (a, b)$, con $a, b \notin \Lambda$ en la definición, puesto que si tomáramos en nuestro ejemplo el intervalo $I = (1, 2)$, habría un punto en cada $I \cap \Lambda_n$, pero ninguno en $I \cap \mathbb{Z}$. Por lo tanto, tener en cuenta estos intervalos podría arruinar la idea de límite que quiere construirse, en nuestro ejemplo pasaríamos de tener a $\mathbb{Z}$ como límite a tener $\Lambda = \emptyset$.
- Los conjuntos $\Lambda_n = \mathbb{Z} - \{n\}$ tienden a $\Lambda = \mathbb{Z}$ débilmente, puesto que coinciden plenamente en la ventana de observación I cuando el punto vacío $\{n\}$ está lo suficientemente alejado. Obtenemos el mismo resultado si, en vez de quitar un punto, añadimos uno, como en $\Lambda_n = \mathbb{Z} \cup \{n + \frac{1}{2}\}$. En ambos casos, reluce el carácter local de nuestra definición; no importa lo que ocurra en el infinito. Globalmente, en ninguno de los dos casos se obtiene una copia parecida de $\mathbb{Z}$, ya sea porque haya un punto más o uno menos; pero sí localmente.
- Ahora consideramos un ejemplo parecido al primero, pero en el que cada entero se estira de forma proporcional. Tomamos $\Lambda_n = \{k + \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\}$. En este caso, el límite débil vuelve a ser $\mathbb{Z}$, puesto que en cada ventana de observación I , existe un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande a partir del cual cada elemento $k + \frac{k}{n}$ está a distancia menor que ε de su entero correspondiente k . Sin embargo, este caso vuelve a poner de manifiesto el carácter local de nuestra definición, puesto que globalmente la convergencia sería imposible. Los puntos se distancian cada vez más cuanto más nos alejamos del 0, debido al factor de proporcionalidad introducido.

Toca ahora explicar el resto de hipótesis de la definición.

- En cuanto a la hipótesis $\delta(\Lambda_n) > d > 0$, si tomáramos un ejemplo que no cumpla esto como $\Lambda_n = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}$, observamos que el límite débil no existiría, en este caso, puesto que ambos puntos han colapsado en el 0. En este caso, $\{0\}$ sería el límite natural de dichos conjuntos. Sin embargo, en nuestra definición no queremos perder densidad en el número de puntos: un caso grave sería que una perturbación de $\mathbb{Z}$ colapsara en $2\mathbb{Z}$, reduciendo la densidad a la mitad.
- Por otro lado, también se exigen biyecciones (la ε -perturbación) para no perder puntos. Si tan solo exigiéramos que en la ventana de observación I , cada punto $\lambda \in \Lambda$ fuera límite de puntos de Λ_n , podríamos tener omisiones de puntos. Por ejemplo, si tomáramos el conjunto $\Lambda_n = \{0, 2\}$, que converge débilmente a $\Lambda = \{0, 2\}$, una definición basada en sucesiones permitiría omitir algún punto, de forma que $\Lambda = \{0\}$ sería también límite de la sucesión.

Explicadas todas las hipótesis, veamos, para finalizar, dos ejemplos ilustrativos más de límites débiles.

- La sucesión $\Lambda_n = \{k \in \mathbb{Z} : k \geq n\}$ tiende débilmente a $\Lambda = \emptyset$, puesto que en cada ventana de observación I , los conjuntos Λ_n desaparecen en algún momento (se desplazan constantemente hacia la derecha).
- Tomamos, finalmente, $\Lambda_n = \mathbb{Z} + (-1)^n \frac{1}{4}$. Esta sucesión no converge porque oscila; hay intervalos donde un punto aparece solo cada dos pasos. Y, sin embargo, las subsucesiones Λ_{2n} y Λ_{2n+1} , al ser constantes, sí convergen. Veremos que esto es un caso aislado, puesto que nuestra definición se construye expresamente para que se satisfaga esta compacidad.

A continuación, estudiamos algunas de las propiedades del límite.

Proposición 3.32 *Supongamos que la sucesión $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple la acotación uniforme de sus constantes de separación (3.4.5) y que converge débilmente al conjunto Λ . Entonces Λ es uniformemente discreto, y su constante de separación cumple*

$$\delta(\Lambda) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta(\Lambda_n). \quad (3.4.6)$$

También se cumple, por lo tanto, la cota $\delta(\Lambda) \geq d$.

Demostración (elaboración propia).

En realidad, comenzaremos demostrando la desigualdad $\delta(\Lambda) \geq d$. Para ello, basta ver que $|\lambda - \lambda^*| \geq d$ para todo par de puntos $\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*$.

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos puntos $\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*$ tales que $|\lambda - \lambda^*| < d$. Puesto que $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$, la Observación 3.30 nos dice que existen sucesiones $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda_n$ y $(\lambda_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda_n$ tales que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ y $\lambda_n^* \rightarrow \lambda^*$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, para todo $0 < \varepsilon < \frac{d - |\lambda - \lambda^*|}{2}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tiene $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ y $|\lambda_n^* - \lambda^*| < \varepsilon$. Esto implica que para todo $n > N$ se tenga

$$|\lambda_n - \lambda_n^*| \leq |\lambda_n - \lambda| + |\lambda - \lambda^*| + |\lambda^* - \lambda_n^*| < 2\varepsilon + |\lambda - \lambda^*| < d.$$

Pero como $\lambda_n, \lambda_n^* \in \Lambda_n$ y $\delta(\Lambda_n) > d$, debe tenerse a la fuerza $\lambda_n = \lambda_n^*$ para todo $n > N$ y, por lo tanto, $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^* = \lambda^*$, llegando así a la contradicción de que los puntos eran distintos. Por lo tanto, $\delta(\Lambda) \geq d$.

Pasamos ahora a demostrar la desigualdad (3.4.6). Vamos a desglosar poco a poco la expresión para especificar qué es lo queremos encontrar. Una vez lo tengamos, el resto de la prueba será sencillo.

Queremos comprobar que se cumple la desigualdad

$$\inf_{\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*} |\lambda - \lambda^*| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} \delta(\Lambda_k)). \quad (3.4.7)$$

Para lo cual, basta ver que

$$|\lambda - \lambda^*| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} \delta(\Lambda_k)), \quad \forall \lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*.$$

Fijamos, pues, dos elementos arbitrarios $\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*$. Para ellos, debemos comprobar que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad |\lambda - \lambda^*| + \varepsilon \geq \sup_{k \geq n} \delta(\Lambda_k).$$

Dicho de otra forma,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq n \quad |\lambda - \lambda^*| + \varepsilon \geq \delta(\Lambda_k) = \inf_{\xi_k, \xi_k^* \in \Lambda_k, \xi_k \neq \xi_k^*} |\xi_k - \xi_k^*|.$$

Por lo tanto, nos queda, finalmente, que debemos comprobar lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall k \geq n \quad \exists \xi_k, \xi_k^* \in \Lambda_k, \xi_k \neq \xi_k^* \quad |\lambda - \lambda^*| + \varepsilon \geq |\xi_k - \xi_k^*|. \quad (3.4.8)$$

Fijamos, pues, un $\varepsilon > 0$ y tomemos un radio $r > 0$ que cumpla

$$r < \frac{|\lambda - \lambda^*|}{2} \quad \text{y} \quad r < \frac{d}{2}.$$

A partir de él, construimos los intervalos

$$I = (\lambda - r, \lambda + r) \quad \text{e} \quad I^* = (\lambda^* - r, \lambda^* + r),$$

los cuales son disjuntos porque se ha tomado $r < |\lambda - \lambda^*|/2$. Además, estos intervalos también cumplen $I \cap \Lambda = \{\lambda\}$ e $I^* \cap \Lambda = \{\lambda^*\}$ porque $\delta(\Lambda) \geq d$ y hemos tomado $r < d/2$. De hecho, los puntos en la frontera de los intervalos tampoco pueden pertenecer a Λ porque $r < d/2$.

Por la definición de límite débil, tenemos, por lo tanto, que existe un natural $n \in \mathbb{N}$ a partir del cual $\forall k \geq n$ pueden tomarse $\xi_k \in \Lambda_k \cap I$ con $|\lambda - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\xi_k^* \in \Lambda_k^* \cap I^*$ con $|\lambda^* - \xi_k^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, ambos puntos son distintos, $\xi_k \neq \xi_k^*$, puesto que $I \cap I^* = \emptyset$.

Ya tenemos todos los elementos preparados. Solo queda comprobar la desigualdad. Y, en efecto, gracias a la construcción hecha, se tiene

$$|\xi_k - \xi_k^*| \leq |\xi_k - \lambda| + |\lambda - \lambda^*| + |\lambda^* - \xi_k^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\lambda - \lambda^*| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon + |\lambda - \lambda^*|.$$

Esto termina de probar la ecuación 3.4.8.

□

Ahora probamos la propiedad de compacidad que ya habíamos anticipado en los ejemplos y que constituye el principal resultado de esta sección a usar a posteriori.

Proposición 3.33 *Supongamos que la sucesión $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumple la acotación uniforme de sus constantes de separación (3.4.5). Entonces tiene una subsucesión que converge débilmente. Es decir, existe una subsucesión $(\Lambda_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y existe un conjunto uniformemente discreto Λ que cumplen $\Lambda_{n_j} \rightharpoonup \Lambda$.*

Demostración (elaboración propia).

En el siguiente argumento, utilizaremos el método diagonal de Cantor para construir nuestro conjunto límite Λ .

Definimos los intervalos compactos y simétricos $I_m := [-m, m]$. Debido a la propiedad de finitud local de los conjuntos uniformemente discretos 2.5, podemos afirmar que el número de puntos de $\Lambda_n \cap I_m$ está acotado superiormente por $\lfloor 2m/\delta(\Lambda_n) \rfloor + 1$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Sin embargo, puesto que estamos suponiendo $\delta(\Lambda_n) > d > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una cota uniforme para todos los conjuntos:

$$0 \leq \#(\Lambda_n \cap I_m) \leq \lfloor 2m/d \rfloor + 1, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Detallamos, a continuación, el proceso recursivo seguido para elaborar nuestro límite.

Comenzamos con el caso $m = 1$. Puesto que el número de puntos que puede tomar el conjunto Λ_n en el intervalo $I_1 = [-1, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, debe ser un natural en $\{0, \dots, \lfloor 2/d \rfloor + 1\}$ —una cantidad finita de opciones—, es posible elegir una subsucesión $(\Lambda_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\alpha_1 := \#(\Lambda_{1,i} \cap I_1) = \#(\Lambda_{1,j} \cap I_1), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Es decir, tal que el número de puntos de $\Lambda_{1,n}$ en I_1 es el mismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Como esta cantidad de puntos es un número finito, podemos ordenarlos. Denotamos por $x_{1,n,i}$ el punto i -ésimo de $\Lambda_{1,n}$ en I_1 —notemos que el primer índice siempre hará referencia al intervalo I_m , el tercero al orden de los puntos y el segundo se mantendrá siempre como n aunque estemos tomando recurrentemente subsucesiones—.

Como el intervalo I_1 es compacto, podemos extraer de $(x_{1,n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a algún elemento $\tilde{x}_{1,1}$. Tomamos, por lo tanto, la correspondiente subsucesión de $(\Lambda_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ para que esto ocurra. Como para los segundos puntos $(x_{1,n,2})_{n \in \mathbb{N}}$ sucede lo mismo, podemos extraer de esta última otra subsucesión tal que $\tilde{x}_{1,n,2} \rightarrow \tilde{x}_{1,2} \in I_1$. Así, sucesivamente y en orden con cada $i \in \{1, \dots, \alpha_1\}$, hasta concluir una nueva subsucesión $(\tilde{\Lambda}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\Lambda_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ que cumple $x_{1,n,i} \rightarrow \tilde{x}_{1,i}$, cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $i \in \{1, \dots, \alpha_1\}$.

Pasemos ahora al caso general del método recursivo. Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que tenemos, del paso previo $m - 1$, una subsucesión $(\tilde{\Lambda}_{m-1,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que cumple $x_{m-1,n,i} \rightarrow \tilde{x}_{m-1,i} \in I_{m-1}$, cuando $n \rightarrow \infty$, para cada $i \in \{1, \dots, \alpha_{m-1}\}$ y para algún $\alpha_{m-1} \in \{0, \dots, \lfloor 2(m-1)/d \rfloor + 1\}$.

El método es similar al que hemos aplicado al caso $m = 1$, pero hay que asegurarse de que no surgen incompatibilidades con el caso anterior. En primer lugar, extraemos una subsucesión $(\Lambda_{m,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\tilde{\Lambda}_{m-1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\alpha_m^- := \#(\Lambda_{m,i} \cap [-m, -m+1]) = \#(\Lambda_{m,j} \cap [-m, -m+1]), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

y

$$\alpha_m^+ := \#(\Lambda_{m,i} \cap [m-1, m]) = \#(\Lambda_{m,j} \cap [m-1, m]), \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Podemos hacerlo porque, nuevamente, existe una cantidad finita de opciones para la elección del número de puntos en $[-m, -m+1]$ y $[m-1, m]$, ambos intervalos de longitud 1. De esta forma, todos los conjuntos en la subsucesión construida tienen el mismo número de puntos en cada uno de los intervalos: I_{m-1} (por ser el caso anterior), $[m-1, m]$ y $[-m, -m+1]$. Ordenamos los puntos de $[-m, -m+1]$ como $y_{m,n,i}$, con $i \in \{1, \dots, \alpha_m^-\}$, mientras que para los de $[m-1, m]$ usaremos la notación $z_{m,n,i}$, con $i \in \{1, \dots, \alpha_m^+\}$.

Como los intervalos $[-m, -m+1]$ y $[m-1, m]$ son compactos, podemos encontrar, igual que hemos hecho antes, una subsucesión $(\tilde{\Lambda}_{m,n})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (\Lambda_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{m,n,i} \rightarrow \tilde{y}_{m,i} \in [-m, -m+1]$ y $z_{m,n,i} \rightarrow \tilde{z}_{m,i} \in [m-1, m]$ cuando $n \rightarrow \infty$. Llamamos entonces

$$\alpha_m = \# \left(\{\tilde{y}_{m,i}\}_{i=1}^{\alpha_m^-} \cup \{\tilde{z}_{m-1,j}\}_{j=1}^{\alpha_{m-1}^+} \cup \{\tilde{z}_{m,k}\}_{k=1}^{\alpha_m^+} \right), \quad (3.4.9)$$

y afirmamos que, para la subsucesión así construida, existe n_0 tal que

$$\alpha_m = \#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap I_m), \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.4.10)$$

En efecto, cuando $\tilde{x}_{m-1,j} \in \overset{\circ}{I}_{m-1}$, para todo j , esto es claro pues, para n suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} \#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap I_m) &= \#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap [-m, -m+1]) + \#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap \overset{\circ}{I}_{m-1}) + \#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap [m-1, m]) \\ &= \alpha_m^- + \alpha_{m-1} + \alpha_m^+ = \alpha_m. \end{aligned}$$

Lo mismo se aplica si todos los puntos en (3.4.9) son distintos entre sí, tomando una partición de I_m con entornos adecuados de dichos conjuntos.

Supongamos pues el caso degenerado en que dos puntos de los conjuntos en (3.4.9) coinciden con un extremo de I_{m-1} , digamos

$$\tilde{x}_{m-1,j} = \tilde{z}_{m,k} = m-1, \quad \text{para ciertos } j, k \text{ fijos}$$

(necesariamente, $j = \alpha_{m-1}$ y $k = 1$), siendo el resto de puntos distintos entre sí. En ese caso, la condición de separación uniforme en los Λ_n implica que debe existir un n_0 tal que, para dichos j, k ,

$$\tilde{x}_{m-1,n,j} = \tilde{z}_{m,n,k} = m-1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Un argumento similar al anterior da entonces

$$\#(\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap I_m) = \alpha_m^- + \alpha_{m-1} + \alpha_m^+ - 1 = \alpha_m, \quad \forall n \geq n_0.$$

Por último, se razona de manera similar si son dos los pares de puntos en (3.4.9) que coinciden con los extremos de I_{m-1} . Esto completaría la justificación de (3.4.10).

Para concluir el proceso inductivo, ordenamos los puntos distintos que conforman los conjuntos en (3.4.9), etiquetándolos como

$$\{\tilde{x}_{m,i}\}_{i=1}^{\alpha_m}, \quad (3.4.11)$$

y de forma similar escribimos

$$\tilde{\Lambda}_{m,n} \cap I_m = \{\tilde{x}_{m,n,i}\}_{i=1}^{\alpha_m}.$$

Con este argumento concluimos el caso general m . Pasamos ahora a construir la subsucesión $(\Lambda_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que aparece en la conclusión del enunciado, para lo cual vamos a usar el método diagonal de Cantor. Tomaremos

$$\Lambda_{n_j} := \tilde{\Lambda}_{j,j}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

que, por la construcción realizada en la prueba, es, en efecto, una subsucesión de $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Lo más importante de esta construcción es que, fijado m , tenemos $\Lambda_{n_j} \in (\tilde{\Lambda}_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $j \geq m$, y que dentro del intervalo compacto $[-m, m]$ el comportamiento de los puntos que hemos construido se sigue conservando (tenemos los puntos ordenados y todas las sucesiones convergiendo donde deben).

En cuanto al conjunto límite, tomaremos la unión de los puntos límite obtenidos en (3.4.11), de decir

$$\Lambda := \bigcup_{m \geq 1} \{\tilde{x}_{m,i}\}_{i=1}^{\alpha_m},$$

notando que dichos conjuntos son por construcción crecientes.

Para concluir la demostración, debemos aún comprobar varias cosas. En primer lugar, veamos que el conjunto límite Λ es uniformemente discreto. Procedemos con un argumento análogo al de la Proposición 3.32. Por reducción al absurdo, imaginemos que existen $\lambda, \lambda^* \in \Lambda, \lambda \neq \lambda^*$, tales que $|\lambda - \lambda^*| < d$. Entonces, por construcción de los puntos de Λ , deben existir sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda_n$ (no indicamos índices m e i porque son prescindibles para este argumento) de puntos tales que $a_n \rightarrow \lambda$ y $b_n \rightarrow \lambda^*$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, para cada $0 < \varepsilon < \frac{d - |\lambda - \lambda^*|}{2}$, existe un $N \in \mathbb{N}$ para el cual $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ y $|b_n - \lambda^*| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Pero entonces, para todo $n > N$:

$$|a_n - b_n| \leq |a_n - \lambda| + |\lambda - \lambda^*| + |b_n - \lambda^*| < 2\varepsilon + |\lambda - \lambda^*| < d < \delta(\Lambda_n),$$

al mismo tiempo que $a_n, b_n \in \Lambda_n$. Esto solo nos deja la posibilidad de que $a_n = b_n$ para todo $n > N$, lo cual implicaría $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda^*$, llegando así a la contradicción.

Hemos probado, de hecho, que $\delta(\Lambda) \geq d$.

Solo queda ver que Λ es límite débil de la sucesión $(\Lambda_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Para ello, fijamos $0 < \varepsilon < d/2$ y un intervalo abierto $I = (a, b)$ cuyos extremos cumplan $a, b \notin \Lambda$. Nombramos

por $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ los puntos de Λ en el intervalo I . Sabemos que, para cada uno de estos puntos, existe una sucesión $(a_{n_j, \lambda_1})_{j \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{n_j, \lambda_p})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $a_{n_j, \lambda_i} \rightarrow \lambda_i$ cuando $j \rightarrow \infty$, para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, con $a_{n_j, \lambda_i} \in \Lambda_{n_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Además, debemos garantizar que no aparecen puntos nuevos en $\Lambda_{n_j} \cap I$ para j suficientemente grande. Formalmente, si existiera una secuencia de puntos en $\Lambda_{n_j} \cap I$ que no convergiera a ninguno de los λ_i , por compacidad (al estar acotados en el intervalo cerrado $\bar{I}$), dicha secuencia admitiría una subsucesión convergente a algún punto de $\bar{I}$. Por la construcción de los Λ_{n_j} , dicho punto límite estaría también en Λ . Como los extremos de I no están en Λ ($a, b \notin \Lambda$), ese punto límite tendría que estar en $\Lambda \cap I$, lo cual es imposible porque ya hemos agotado todos los puntos de $\Lambda \cap I$ en la lista $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Vamos, pues, con el final del argumento. Elijamos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $|\lambda_i - a_{n_j, \lambda_i}| < \varepsilon$ para todo $j > N$ e $i \in \{1, \dots, p\}$.

Por lo tanto, para j suficientemente grande, $\Lambda_{n_j} \cap I$ consta exactamente de p puntos, permitiendo establecer una correspondencia biunívoca natural con cada λ_i de forma que $|\lambda_i - a_{n_j, \lambda_i}| < \varepsilon$. Esto nos da la ε -perturbación en el intervalo I a partir del natural N , lo cual concluye la prueba de que Λ sea límite débil de la sucesión $(\Lambda_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

□

En la demostración del teorema de Beurling no trabajaremos con límites débiles arbitrarios, sino que serán el límite de las traslaciones de un solo conjunto. Dedicamos el final de esta sección a dichas sucesiones de conjuntos.

Definición 3.34 Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Denotaremos por $W(\Lambda)$ al conjunto de límites débiles de traslaciones de Λ . Es decir,

$$\Lambda^* \in W(\Lambda)$$

si existe una sucesión $(\Lambda - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de traslaciones de Λ que converge débilmente a Λ^* .

Con esta definición, la Proposición 3.33 adquiere una forma más sencilla, puesto que la constante de separación de un conjunto uniformemente discreto no se ve alterada por traslaciones.

Corolario 3.35 Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto y $(\Lambda - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de traslaciones suyas. Entonces dicha sucesión tiene una subsucesión que converge débilmente a algún conjunto $\Lambda^* \in W(\Lambda)$.

Existe una relación entre estos límites débiles y sus densidades uniformes que resultará ser el otro resultado clave de esta sección para probar el teorema de Beurling. Dicha relación se presenta en la siguiente proposición.

Proposición 3.36 *Sea Λ un conjunto uniformemente discreto y $\Lambda^* \in W(\Lambda)$. Entonces se tienen las desigualdades*

$$D^-(\Lambda) \leq D^-(\Lambda^*) \quad \text{y} \quad D^+(\Lambda^*) \leq D^+(\Lambda).$$

Demostración (elaboración propia).

Denotamos por $\Lambda_n = (\Lambda - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de conjuntos que converge débilmente a Λ^* .

Fijamos un radio arbitrario de longitud $l > 0$ y tomamos $a \in \mathbb{R}$. En primer lugar, supongamos que $a, a+l \notin \Lambda^*$. En ese caso, la definición de límite débil, gracias al uso de biyecciones, nos dice que

$$\#(\Lambda^* \cap (a, a+l)) = \#(\Lambda_n \cap (a, a+l)) = \#(\Lambda \cap (a+a_n, a+a_n+l)), \quad \forall n > N,$$

con $N \in \mathbb{N}$. En realidad, basta que suceda para un $n \in \mathbb{N}$ ya que lo importante es que hemos conseguido un intervalo de igual longitud l que tiene el mismo número de puntos de Λ que tenía el original de Λ^* .

En el caso $a \in \Lambda^*$ o $a+l \in \Lambda^*$, tomamos un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño (mucho menor que la constante de separación de Λ^*) de forma que $(a-\varepsilon, a+l-\varepsilon)$ ya no tenga sus extremos en Λ^* y se cumpla

$$\#(\Lambda^* \cap (a-\varepsilon, a+l-\varepsilon)) = \#(\Lambda^* \cap (a, a+l))$$

en el caso $a \notin \Lambda^*, a+l \in \Lambda^*$ o bien

$$\#(\Lambda^* \cap (a-\varepsilon, a+l-\varepsilon)) = \#(\Lambda^* \cap (a, a+l)) + 1$$

en el caso $a \in \Lambda^*$.

Como el nuevo intervalo construido cumple que sus extremos no están en Λ^* , sabemos que existe un intervalo $(b, b+l)$, $b \in \mathbb{R}$, tal que

$$|\Lambda \cap (b, b+l)| = |\Lambda^* \cap (a-\varepsilon, a+l-\varepsilon)|$$

De esta forma, sabemos que para todo $l > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$, existe otro $b \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\#(\Lambda^* \cap (a, a+l)) = \#(\Lambda \cap (b, b+l))$$

o, en caso extremo,

$$\#(\Lambda^* \cap (a, a+l)) = \#(\Lambda \cap (b, b+l)) - 1.$$

En cualquier caso, para todo $l > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$, existe otro $b \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\#(\Lambda \cap (b, b+l)) - 1 \leq \#(\Lambda^* \cap (a, a+l)) \leq \#(\Lambda \cap (b, b+l)),$$

y también

$$\frac{\#(\Lambda \cap (b, b+l)) - 1}{l} \leq \frac{\#(\Lambda^* \cap (a, a+l))}{l} \leq \frac{\#(\Lambda \cap (b, b+l))}{l}.$$

Se tiene, por lo tanto, que para todo $l > 0$,

$$\inf_{b \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (b, b+l))}{l} - \frac{1}{l} \leq \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda^* \cap (a, a+l))}{l}$$

y

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda^* \cap (a, a+l))}{l} \leq \sup_{b \in \mathbb{R}} \frac{\#(\Lambda \cap (b, b+l))}{l}.$$

Como las desigualdades son ciertas para todo $l > 0$, estas se seguirán cumpliendo para si se toma en ambos lados el $l \rightarrow \infty$. Tras tomar este límite, la desigualdad de ínfimos concluye

$$D^-(\Lambda) \leq D^-(\Lambda^*),$$

y la desigualdad de supremos concluye

$$D^+(\Lambda^*) \leq D^+(\Lambda).$$

□

3.5. Tercer paso: compacidad

El objetivo de esta sección será probar el siguiente resultado.

Teorema 3.37 *Sea $\sigma > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces*

$$si \quad \forall \Lambda^* \in W(\Lambda) \quad \Lambda^* \text{ es un } US(B_\sigma) \quad \implies \quad \Lambda \text{ es un } SS(B_\sigma).$$

Para ello, será necesario demostrar antes un resultado de compacidad sobre el espacio de Bernstein, el cual precisa a su vez de un teorema clásico del Análisis Complejo: el teorema de Montel.

3.5.1. El teorema de Montel

Aunque este teorema puede probarse, de forma más general, para familias de funciones holomorfas, en este caso enunciamos su versión para sucesiones de funciones, ya que es lo único que necesitaremos.

Teorema 3.38. (Teorema de Montel) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$ una sucesión de funciones enteras uniformemente acotadas sobre cada compacto, es decir, tal que para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$ existe una constante M_K que cumple $|f_n(z)| \leq M_K$ para todo punto $z \in K$. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.

La prueba de este clásico teorema no es difícil y puede encontrarse en [12, Cap. 14].

Gracias al teorema de Montel, probamos la siguiente propiedad de compacidad sobre el espacio de Bernstein.

Proposición 3.39 Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_\sigma$ una sucesión de funciones con norma uniformemente acotada en $\mathbb{R}$, es decir, tales que existe una constante $C > 0$ que cumple $\|f_n\|_\infty \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $f \in \mathbf{B}_\sigma$ tales que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.

Demostración (elaboración propia).

La prueba sigue del teorema de Montel y de las propias características del espacio de Bernstein.

Puesto que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_\sigma$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|f_n(x + iy)| \leq \|f_n\|_\infty e^{\pi\sigma|y|} \leq C e^{\pi\sigma|y|}, \quad \forall x + iy \in \mathbb{C}.$$

Y como en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$, podemos acotar el módulo de la parte imaginaria, es decir, existe $M > 0$ tal que $|y| < M$ para todo $x + iy \in K$, se tiene

$$|f_n(x + iy)| \leq C e^{\pi\sigma M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x + iy \in K. \quad (3.5.1)$$

De esta forma, las funciones de la sucesión, además de ser enteras por pertenecer a $\mathbf{B}_\sigma$, están uniformemente acotadas sobre cada compacto.

El teorema de Montel 3.38 concluye que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función entera $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tales que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.

Para terminar nuestra prueba, basta ver que $f \in \mathbf{B}_\sigma$. Esto se deduce inmediatamente tomando límite $n_k \rightarrow \infty$ en la desigualdad (3.5.1).

□

Para concluir la sección, utilizamos este último resultado para dar una prueba del Teorema 3.37. Pero antes, es necesario demostrar el siguiente lema.

Lema 3.40 Dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(K)$ una sucesión de funciones y $f \in \mathcal{C}(K)$ su función límite, en el sentido de que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre K cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, si tomamos una sucesión de puntos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ tales que $z_n \rightarrow z_0 \in K$, se cumple también la convergencia $f_n(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración (elaboración propia).

Fijamos $\varepsilon > 0$. Por un lado, gracias a la convergencia uniforme de las funciones, se tiene

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq n_0 \quad \sup_{w \in K} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon.$$

Por otro, debido a la continuidad de la función límite $f \in \mathcal{C}(K)$, obtenemos que

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall z \in K, |z - z_0| < \delta_0 \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Dada, en último lugar, la convergencia $z_n \rightarrow z$, es posible tomar un $n_1 \geq n_0$ tal que $|z_n - z_0| < \delta_0$ para todo $n \geq n_1$.

De esta forma, para cualquier $n \geq n_1$ se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|f(z_0) - f_n(z_n)| \leq |f(z_0) - f(z_n)| + |f(z_n) - f_n(z_n)| < \varepsilon + \sup_{w \in K} |f(w) - f_n(w)| < 2\varepsilon,$$

la cual concluye la convergencia $f_n(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. □

Demostración del Teorema 3.37 (consultada en [10, Cap. 3]).

En este caso, vamos a probar el recíproco. Vamos a suponer que Λ no es un $SS(B_\sigma)$ y vamos a demostrar la existencia de un $\Lambda^* \in W(\Lambda)$ tal que Λ^* no es un $US(B_\sigma)$.

En primer lugar, de que Λ no sea un $SS(B_\sigma)$, se obtiene que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists g_n \in B_\sigma \quad \text{tal que} \quad \|g_n\|_\infty > n \|g_n|_\Lambda\|_\infty, \quad (3.5.2)$$

simplemente negando la propia definición. Por simplicidad, continuamos denotando por $g_n(z)$ a la extensión holomorfa de $g_n(x)$, que pertenece al espacio complejo $\mathbf{B}_\sigma$; ver (1.3.3).

Si dividimos cada una de estas funciones g_n por su norma $\|g_n\|_\infty = \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, obtenemos una nueva sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} := (g_n / \|g_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_\sigma$ con norma uniformizada $\|f_n\|_\infty = 1$. Además, la expresión (3.5.2) adquiere una forma más sencilla:

$$\frac{1}{n} > \|f_n|_\Lambda\|_\infty = \sup_{\lambda \in \Lambda} |f_n(\lambda)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.5.3)$$

Ahora, como hemos tomado $\|f_n\|_\infty = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es posible construir una sucesión de puntos $a_n \in \mathbb{R}$ tales que $f_n(a_n) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Consideremos ahora la sucesión de traslaciones $(\Lambda - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De acuerdo con el Corolario 3.35, existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $(\Lambda - a_{n_j})$ converge débilmente a algún conjunto $\Lambda^* \in W(\Lambda)$ cuando $j \rightarrow \infty$. De esta subsucesión, vamos ahora a extraer otra más concreta.

Definimos la sucesión de funciones

$$h_{n_j}(z) := f_{n_j}(z + a_{n_j}), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Estas funciones siguen cumpliendo $\|h_{n_j}\|_\infty = 1$ y $h_{n_j} \in \mathbf{B}_\sigma$ para todo $j \in \mathbb{N}$ porque apenas estamos aplicando traslaciones en la recta real a las funciones f_n . Por lo tanto, la Proposición 3.39 nos da otra subsucesión $(a_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$, que denotaremos por $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ para simplificar, tal que la sucesión h_m converge a alguna función $h \in \mathbf{B}_\sigma$ uniformemente sobre cada compacto.

Ya tenemos todo lo necesario para concluir que el conjunto encontrado $\Lambda^* \in W(\Lambda)$ no es un $US(B_\sigma)$. En este caso, la función límite h será la que rompa la unicidad.

En primer lugar, afirmamos que $h \neq 0$, puesto que

$$h(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(0 + a_m) = 1,$$

por cómo se ha tomado desde un principio la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente, queda ver que nuestra construcción nos ha conducido a $h|_{\Lambda^*} = 0$.

Sea $\lambda^* \in \Lambda^*$. Como Λ^* es límite débil de $(\Lambda - a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ —puesto que esta propiedad se conserva para subsucesiones—, existe una sucesión de puntos de los conjuntos $(\Lambda - a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que tiende a λ^* , es decir, existe una sucesión $(\lambda_m - a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_m - a_m \in (\Lambda - a_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m - a_m = \lambda^*$.

Tomamos, para terminar, un compacto $K \subset \mathbb{C}$ que incluya en su interior a todos estos puntos. Es decir, tal que $\lambda^* \in \mathring{K}$ y, por lo tanto, $\lambda_m - a_m \in K$ a partir de un m suficientemente grande. Como las funciones h_m son funciones continuas —son holomorfas por pertenecer a $\mathbf{B}_\sigma$ — y convergen uniformemente a h sobre todos los compactos de $\mathbb{C}$ y, en concreto, sobre nuestro K , se tiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m(\lambda_m - a_m) = h(\lambda^*),$$

en virtud del Lema 3.40.

Podemos concluir entonces que

$$\begin{aligned} |h(\lambda^*)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |h_m(\lambda_m - a_m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(\lambda_m - a_m + a_m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(\lambda_m)| \\ (\lambda_m \in \Lambda \text{ y (3.5.3)}) &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} |f_m(\lambda)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0, \end{aligned}$$

por lo que $h|_{\Lambda^*} = 0$ y Λ^* no es un $US(B_\sigma)$.

□

3.5.2. Cuarto paso: el espacio de Paley-Wiener

Observemos que, en las tres subsecciones anteriores, todos los resultados demostrados han sido para el espacio de Bernstein. Es ahora, al final, donde encontramos la conexión con el espacio de Paley-Wiener que constituirá el final de la demostración del teorema de Beurling.

Teorema 3.41 Sean $\sigma, \varepsilon > 0$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente discreto. Entonces

$$\Lambda \text{ es un SS}(B_{\sigma+\varepsilon}) \implies \Lambda \text{ es un SS}(PW_{\sigma}).$$

Probamos primero el siguiente lema.

Lema 3.42 Sea $\alpha > 0$. Entonces la función definida como

$$h_{\alpha}(x) := \text{sinc}(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha \pi x)}{\alpha \pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad h_{\alpha}(0) = 1,$$

cumple

$$C_{\alpha} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{\alpha}(k-x)|^2 = \sup_{x \in [0,1]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{\alpha}(k-x)|^2 < \infty.$$

Demostración (elaboración propia).

Como $|\sin \theta| \leq |\theta|$, observamos que

$$|h_{\alpha}(x)| \leq 1 = h_{\alpha}(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, para cada $x \in [0, 1], k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, se cumple

$$|\alpha \pi(k-x)|^2 \geq (\alpha \pi)^2 (|k| - |x|)^2 \geq (\alpha \pi)^2 (|k| - 1)^2. \quad (3.5.4)$$

Esto permite establecer la siguiente acotación uniforme para cada $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{\alpha}(k-x)|^2 &\leq 3 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}} \frac{|\sin(\alpha \pi(k-x))|^2}{|\alpha \pi(k-x)|^2} \\ &\stackrel{\text{(cota (3.5.4))}}{\leq} 3 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}} \frac{1}{|\alpha \pi(|k| - 1)|^2} = C_{\alpha} < \infty, \end{aligned}$$

porque esta última serie es convergente. La uniformidad en esta cadena concluye la prueba. □

Demostración del Teorema 3.41 (consultada en [10, Cap. 3]).

Utilizaremos la función del Lema 3.42 con parámetro ε . Esta función h_ε pertenece a PW_ε porque su transformada es $\widehat{h}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]}$ (Ejemplo 1.7).

Recordemos que para probar que Λ es un $SS(PW_\sigma)$ debe cumplirse

$$\|f\|_2^2 \leq C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2, \quad \forall f \in PW_\sigma,$$

para alguna constante $C > 0$.

Comenzamos, pues, tomando una función $f \in PW_\sigma$. El teorema de Paley-Wiener 1.35 nos dice que f puede extenderse en todo el plano complejo como una función $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de tipo exponencial σ . De igual forma, puesto que $h_\varepsilon \in PW_\varepsilon$, esta función puede extenderse a una $H \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de tipo exponencial ε .

Entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el producto de funciones $F(z) \cdot H(k/\sigma - z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cumple la cota

$$|F(x + iy)H(k/\sigma - x - iy)| \leq e^{\pi\sigma|y|} e^{\pi\varepsilon|y|} = e^{\pi|y|(\sigma + \varepsilon)}, \quad \forall x + iy \in \mathbb{C}.$$

Con lo cual, podemos afirmar que $f \cdot h_\varepsilon(k/\sigma - (\cdot)) \in B_{\sigma + \varepsilon}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Antes de llegar a la acotación final, como $h_\varepsilon(0) = 1$, podemos decir que

$$\left| f\left(\frac{k}{\sigma}\right) \right| = \left| f\left(\frac{k}{\sigma}\right) h_\varepsilon\left(\frac{k}{\sigma} - \frac{k}{\sigma}\right) \right| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) h_\varepsilon\left(\frac{k}{\sigma} - x\right) \right|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.5.5)$$

Por lo tanto, utilizando el teorema de muestreo 1.30, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma \|f\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| f\left(\frac{k}{\sigma}\right) \right|^2 \\ &\stackrel{\text{(Ecuación (3.5.5))}}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \max_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) h_\varepsilon\left(\frac{k}{\sigma} - x\right) \right|^2 \\ &\stackrel{(\Lambda \text{ es un } SS(B_{\sigma + \varepsilon}))}{\leq} C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \max_{\lambda \in \Lambda} \left| f(\lambda) h_\varepsilon\left(\frac{k}{\sigma} - \lambda\right) \right|^2 \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| f(\lambda) h_\varepsilon\left(\frac{k}{\sigma} - \lambda\right) \right|^2 \\ &= C \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| f(\lambda) h_\varepsilon\left(\frac{k - \sigma\lambda}{\sigma}\right) \right|^2 \\ &= C \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_{\varepsilon/\sigma}(k - \sigma\lambda)|^2 \\ &\stackrel{\text{(Lema 3.42 con } \alpha = \varepsilon/\sigma)}{\leq} \tilde{C}_{\varepsilon/\sigma} \sum_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)|^2, \end{aligned}$$

lo cual concluye nuestra prueba. □

3.5.3. Argumento final

Este cuarto paso era el último para poder probar nuestro teorema de Beurling para conjuntos de muestreo estable. Después de desgranar la demostración en varios, el siguiente argumento final queda breve y directo.

Demostración del Teorema 3.18 (elaboración propia).

Sabemos que $D^-(\Lambda) > \sigma$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ intermedio, es decir, tal que

$$D^-(\Lambda) > \sigma + 2\varepsilon > \sigma.$$

La Proposición 3.36 deduce de este hecho que

$$D^-(\Lambda^*) \geq \sigma + 2\varepsilon > \sigma + \varepsilon, \quad \forall \Lambda^* \in W(\Lambda).$$

Aplicando nuestro primer paso, el Teorema 3.19, a cada uno de estos conjuntos del límite débil, se consigue afirmar que

$$\Lambda^* \text{ es un } US(B_{\sigma+\varepsilon}), \quad \forall \Lambda^* \in W(\Lambda).$$

El Teorema 3.37 nos dice entonces que Λ es un $SS(B_{\sigma+\varepsilon})$, lo cual concluye, finalmente, por el Teorema 3.41, que Λ es un $SS(PW_\sigma)$.

□

Referencias

- [1] AVILÉS, J. (2025). *Teoremas de Paley-Wiener*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Murcia. Disponible en: https://webs.um.es/gustavo.garrigos/tfg/TFG_JoseAvilesPerez_teoremas_Paley-Wiener_25jun2025.pdf (Último acceso: 27 de agosto de 2026).
- [2] BEURLING, A. (1989). *The Collected Works of Arne Beurling. Vol. 2: Harmonic Analysis* (L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger & J. Wermer, Eds.), Birkhäuser.
- [3] BEURLING, A., & MALLIAVIN, P. (1967). On the closure of characters and the zeros of entire functions. *Acta Mathematica*, 118(1–2), 79–93.
- [4] BOAS, R.P. (1954). *Entire Functions*, Academic Press.
- [5] FOLLAND, G.B. (1984). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts).
- [6] FOLLAND, G.B. (2009). *Fourier Analysis and Its Applications* (Pure and Applied Undergraduate Texts), American Mathematical Society.
- [7] KREYSZIG, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons.
- [8] LANDAU, H. J. (1967). Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Mathematica*, 117, 37–52.
- [9] NITZAN, S. & OLEVSKII, A. (2012). Revisiting Landau’s density theorems for Paley–Wiener spaces. *C. R. Mathématique*, 350(9–10), 509–512.
- [10] OLEVSKII, A.M. & ULANOVSKII, A. (2016). *Functions with Disconnected Spectrum: Sampling, Interpolation, Translates* (University Lecture Series, Vol. 65), American Mathematical Society.
- [11] PALEY, R.E.A.C. & WIENER, N. (1934). *Fourier Transforms in the Complex Domain* (Colloquium Publications, Vol. 19), American Mathematical Society.
- [12] RUDIN, W. (1987). *Real and Complex Analysis*, 3rd Ed., McGraw-Hill.
- [13] SEIP, K. (2004). *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions* (University Lecture Series, Vol. 29), American Mathematical Society.

- [14] UNSER, M. (2000). *Sampling—50 Years after Shannon*, Proceedings of the IEEE, Vol. 88, No. 4, pp. 569–587.
- [15] YOUNG, R.M. (2001). *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series*, Revised 1st Ed., Academic Press.