

Universidad de Murcia

FACULTAD DE MATEMÁTICAS



**FUNCIONES ARMÓNICAS EN EL PLANO
COMPLEJO**

Trabajo fin de grado.

Autor:

María Monge Mesa

Tutor:

Gustavo Garrigós

Junio 2024

Declaración de originalidad

María Monge Mesa, autor del Trabajo de Fin de Grado “Funciones armónicas en el plano complejo”, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 1 de julio de 2024

Fdo.: María Monge Mesa

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a todos mis profesores de la facultad de Matemáticas de Murcia a los que siempre recordaré con cariño, respeto y admiración, en especial a mi tutor Gustavo Garrigós por su inestimable ayuda y apoyo durante la realización de este trabajo.

También quiero agradecer a mis compañeros y familia el apoyo que me han transmitido a lo largo de esta etapa.

Índice general

Resumen	III
Abstract	1
Notación	5
1. Propiedades básicas de las funciones armónicas	7
1.1. Definición y ejemplos	7
1.1.1. Ejemplos	7
1.2. Propiedades básicas de las funciones armónicas	8
2. Principio del Máximo y Propiedad del Valor Medio	13
2.1. Principio del Máximo	13
2.2. Propiedad del Valor Medio.	14
3. La fórmula de la integral de Poisson	17
3.1. Introducción al problema de Dirichlet e interpretación física.	17
3.2. El Núcleo de Poisson en \mathbb{D} y sus propiedades.	18
3.2.1. El laplaciano en coordenadas polares	18
3.2.2. El problema de Dirichlet en \mathbb{D} por separación de variables	18
3.3. Fórmula de la Integral de Poisson.	19
4. Regularidad de funciones armónicas	25
4.1. Definiciones	25
4.2. Recíproco del Teorema de la Propiedad del Valor Medio	26
5. Principio de Reflexión de Schwarz	29
5.1. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas	29
5.2. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones holomorfas	31

6. Los teoremas de Harnack	33
6.1. La Desigualdad de Harnack	33
6.2. El Principio de Harnack	35
A. Resultados auxiliares	37
A.1. Funciones holomorfas: Definición y propiedades	37
A.2. Propiedades del Núcleo de Poisson	37
A.3. Automorfismos del disco unidad	40
A.4. Integración y Fórmula de Cauchy en el disco.	41
A.5. Más resultados	43
A.6. Resultados clásicos	44
Bibliografía	45

Resumen

Muchos problemas en el campo de la física cuando se formulan matemáticamente conducen a ecuaciones diferenciales parciales y a condiciones asociadas llamadas condiciones de frontera. La determinación de soluciones para una ecuación diferencial que satisfaga las condiciones de frontera se denomina problema de frontera o contorno. Desde el punto matemático y físico es de suma importancia no sólo demostrar la existencia de dichas soluciones sino también demostrar su unicidad.

En este trabajo realizaremos el estudio de las funciones armónicas en el plano complejo aplicado a una de sus interpretaciones físicas : la solución del Problema de Dirichlet. Es decir, dado un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función continua $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nuestro objetivo será determinar una fórmula explícita para una función que satisfaga $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $u = \phi$ en $\partial\Omega$.

Una interpretación física de este problema 3.1 es suponer una lámina homogénea muy fina $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ cuya temperatura ha alcanzado el equilibrio, suponiendo que en la frontera viene fijada por la función $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nuestro objetivo será calcular la temperatura de equilibrio $u(z)$ en cada punto $z \in \bar{\Omega}$.

En el Capítulo 1 realizaremos una introducción a las funciones armónicas en el plano complejo mediante su definición 1.1.1 y algunos ejemplos 1.1.1 para posteriormente enunciar algunas propiedades básicas que muestran su relación con las funciones holomorfas comenzando por la más evidente 1.2.7 donde se afirma que son armónicas tanto la parte real como la imaginaria de cualquier función holomorfa definida en un abierto. Más aún, introduciendo el concepto de función armónica conjugada, veremos en la Proposición 1.2.8 que las funciones armónicas en discos del plano son precisamente aquéllas que son la parte real de funciones holomorfas. Resultado que extenderemos en el Teorema 1.2.12 a funciones armónicas en abiertos simplemente conexos. También veremos que como consecuencia de la Proposición 1.2.8, se sigue en el Corolario 1.2.10 la propiedad de que toda función armónica en un abierto es C^∞ y en el Corolario 1.2.11 que la composición de una función holomorfa y una armónica en abiertos del plano es una función holomorfa.

En el Capítulo 2 veremos que el hecho de que una función armónica sea la parte real de una función holomorfa tiene como consecuencia dos resultados importantes. El primero de ellos es el Principio del Máximo 2.1.1, estrechamente relacionado con el Principio de Módulo Máximo para funciones holomorfas no constantes A.5.22, en el que se afirma que cualquier función armónica definida en un dominio en el que alcanza su máximo es necesariamente una función constante. Su interpretación física en el Problema de Dirichlet es que la temperatura máxima se alcanza en la frontera. Como consecuencia, destacaremos el Principio del Mínimo para funciones armónicas

2.1.2 que se trata de un resultado análogo para funciones armónicas en dominios en los que alcanzan su mínimo (por tanto la temperatura mínima en el Problema de Dirichlet se alcanzará también en la frontera). Y el Corolario 2.1.5 donde se afirma que si dos funciones armónicas en un dominio acotado Ω y continuas en su adherencia coinciden en su frontera entonces necesariamente son iguales en todo Ω . Resultado del que se seguirá la unicidad del Problema de Dirichlet.

El segundo resultado importante que veremos es el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio, relacionado con la Fórmula de la Integral de Cauchy para funciones holomorfas A.4.19 y que nos permite calcular el valor de cualquier función en el centro del disco en que es armónica a partir de sus valores en la frontera. Una interpretación física de este resultado es que en el Problema de Dirichlet la temperatura en el centro del disco es la temperatura media en la frontera.

Teorema 0.0.1 (Teorema de la Propiedad del Valor Medio.) *Sea un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Si $u \in \text{Har}(\Omega)$ entonces*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

En el Capítulo 3 realizaremos una extensión del Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio dando una fórmula explícita del valor de una función en cualquier otro punto distinto del centro del disco en que es armónica. En primer lugar daremos un candidato a solución del Problema de Dirichlet que se podrá obtener mediante la noción de núcleo de Poisson utilizando resultados de edps ó también utilizando sólo teoría de variable compleja mediante la Fórmula de la Integral de Poisson 3.3.1

Teorema 0.0.2 (Fórmula de la Integral de Poisson en \mathbb{D} .) *Dada una función $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ se tiene*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} dt, \quad a \in \mathbb{D}$$

Reescribiendo en coordenadas polares $a = re^{i\theta}$ entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \quad \text{para } 0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi]$$

Donde $P_r(\theta - t) = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}$.

y finalmente extenderemos la Fórmula de la Integral de Poisson 3.3.1 a un disco cualquiera D .

En los siguientes capítulos estudiaremos resultados que son herramientas esenciales para demostrar el Método de Perron que, aunque no lo desarrollamos aquí dada su complejidad, garantiza la existencia de solución del Problema de Dirichlet en abiertos muy generales del plano complejo, (para más información ver [3, Chapter 7, secciones 7 y 8]).

En el Capítulo 4 veremos que se cumple el recíproco del Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio. Para ello, en primer lugar introduciremos las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 de la propiedad $\text{PVM}(\Omega)$ y $\text{PVM}_0(\Omega)$ respectivamente con Ω abierto $\subseteq \mathbb{C}$. En

segundo lugar en el Teorema 4.2.5 daremos una generalización del Principio del Máximo 2.1.1 a todas las funciones que cumplen PVM_0 . Como consecuencia de ello, veremos el corolario 4.2.6 que afirma que dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ si una función $g \in PVM_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces alcanza su máximo en la frontera. Finalmente en el Teorema 4.2.7 veremos que toda función continua con la propiedad $PVM_0(\Omega)$ es armónica en Ω . Como consecuencia obtenemos el Corolario 4.2.8 que en realidad es un teorema de convergencia uniforme sobre compactos para funciones armónicas similar al Teorema de Weierstrass para funciones holomorfas que afirma que si $\{h_j\} \subset \text{Har}(\Omega)$ es una sucesión de funciones armónicas que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces se cumple que $h \in \text{Har}(\Omega)$.

En el Capítulo 5 el Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas 5.1.1 nos proporciona un método para extender una función armónica de un abierto a otro más grande mediante el simetrizado de conjuntos. Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que $\Omega \cap \mathbb{R} = (a, b)$. Definimos $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \Im m(z) > 0\}$, $\widehat{\Omega}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega^+\}$ y $\tilde{\Omega} = \Omega^+ \cup \widehat{\Omega}^+ \cup (a, b)$.

Teorema 0.0.3 (Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas). Si

$$u \in \text{Har}(\Omega^+) \text{ y } \lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = 0 \text{ para cada } \xi \in (a, b), \text{ entonces } \tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } z \in (a, b) \\ -u(\bar{z}) & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$$

cumple $\tilde{u} \in \text{Har}(\tilde{\Omega})$.

Utilizando este método obtenemos un resultado análogo para funciones holomorfas 5.2.3

Teorema 0.0.4 (Principio de Reflexión de Schwarz para funciones holomorfas). Si $f : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Im m(f(z)) = 0, \forall x \in (a, b)$. Entonces existe una función

$$\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{\Omega}) \text{ tal que } \tilde{f}|_{\Omega^+} = f. \text{ En particular, existe } \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Re e(f(z)) = \Phi(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b).$$

$$\text{Y además } \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ \Phi(x) & \text{si } z \in (a, b) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$$

En el Capítulo 6 veremos dos importantes resultados. El primero de ellos es la Desigualdad de Harnack 6.1.1 que nos da una acotación para funciones armónicas positivas en un disco cualquiera.

Teorema 0.0.5 (La Desigualdad de Harnack) Sea $D = D(z_0, R)$. Si $u \in \text{Har}(D)$ y $u(z) \geq 0 \forall z \in D$, entonces para $0 \leq r < R$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \underset{(H1)}{\leq} u(z_0 + re^{i\theta}) \underset{(H2)}{\leq} \frac{R+r}{R-r} u(z_0)$$

Como consecuencia de ello se obtiene el Corolario 6.1.3 donde se afirma que si Ω es un abierto $\subset \mathbb{C}$ y K compacto $\subset \Omega$, entonces existe una constante $C_{K,\Omega} > 0$ tal que para toda función armónica positiva $u \in \text{Har}(\Omega)$ se tiene $\max_K u(z) \leq C_{K,\Omega} \min_K u(z)$.

Finalmente veremos el Principio de Harnack 6.2.4 que afirma que si $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ es una sucesión creciente de funciones armónicas en un abierto conexo U y si para justamente un punto $z \in U$ se cumple que la sucesión $\{u_j(z)\}_j$ es acotada, entonces existe $u \in \text{Har}(U)$ tal que $u_j \rightarrow u$ uniformemente en conjuntos compactos. Es decir, llama la atención cómo la acotación en justamente un punto de la sucesión creciente de funciones armónicas fuerza la acotación en cualquier otro punto.

Abstract

Many problems in physics when are formulated mathematically lead to partial differential equations and associated conditions called boundary conditions. The determination of solutions to a differential equation that satisfies the boundary conditions is called the boundary problem. From a mathematical and physical point of view it is of utmost importance not only to prove the existence of such solutions but also to prove their uniqueness.

In this work we will study harmonic functions on the complex plane applied to one of their physical interpretations: the solution of the Dirichlet Problem. That is to say, given a bounded domain $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ and a continuous function $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ our aim will be to determine an explicit formula for a function that satisfies $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ such that $u = \phi$ en $\partial\Omega$.

A physical interpretation of this problem 3.1 is to assume a very thin homogeneous film $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ whose temperature has reached equilibrium, assuming that at the boundary it is fixed by the function $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Our aim is to calculate the equilibrium temperature $u(z)$ at each point $z \in \overline{\Omega}$.

In Chapter 1, we will introduce harmonic functions on the complex plane by defining them as follows 1.1.1 and giving some examples 1.1.1 and then we will state some basic properties that show their relationship with holomorphic functions, starting with the most obvious one 1.2.7 where it is stated that both the real and the imaginary part of any holomorphic function defined on an open set are harmonic. Moreover, introducing the concept of conjugate harmonic function, we will see in Proposition 1.2.8 that the harmonic functions on discs in the plane are precisely those that are the real part of holomorphic functions. A result that we will extend in Theorem 1.2.12 to harmonic functions on simply connected open sets. We will also see that as a consequence of Proposition 1.2.8, it follows in Corollary 1.2.10, the property that every harmonic function on an open set is C^∞ and in Corollary 1.2.11 that the composition of a holomorphic function and a harmonic function on open sets of the plane is a holomorphic function.

In Chapter 2, we will see that the fact that a harmonic function is the real part of a holomorphic function leads to two important results. The first of these is the Maximum Principle. 2.1.1 which is closely related to the Maximum Modulus Principle for non-constant holomorphic functions A.5.22, which states that any harmonic function defined on a domain in which it reaches its maximum is necessarily a constant function. Its physical interpretation in the Dirichlet Problem is that the maximum temperature is reached at the boundary. As a consequence, we will emphasise the Principle of the Minimum for harmonic functions 2.1.2 which is an analogous result for harmonic functions in domains in which they reach their minimum (hence the minimum temperature in

Dirichlet's Problem will also be reached at the boundary). And the Corollary 2.1.5 where it is stated that if two harmonic functions on a bounded domain Ω and continuous on their closure coincide at their boundary then they are necessarily equal on Ω . Result from which the uniqueness of the Dirichlet Problem will follow.

The second important result we will study is the Mean Value Property Theorem 2.2.6, related to the Cauchy Integral Formula for holomorphic functions A.4.19 which allows us to calculate the value of any function at the centre of the disc in which it is harmonic from its values at the boundary. A physical interpretation of this result is that in the Dirichlet Problem the temperature at the centre of the disc is the mean temperature at the boundary.

Teorema 0.0.6 (The Mean Value Property.) *Let be an open set $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$, $r > 0$. If $u \in \text{Har}(\Omega)$ then*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

In Chapter 3, we will make an extension of the Mean Value Property Theorem 2.2.6 by giving an explicit formula for the value of a function at any point other than the centre of the disc at which it is harmonic. First we will give a candidate solution of the Dirichlet Problem which can be obtained by the notion of Poisson's kernel using results from partial differential equations or also using only complex variable theory by the Poisson Integral Formula 3.3.1.

Teorema 0.0.7 (The Poisson Integral Formula on \mathbb{D} .) *Let be $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ then*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} dt, \quad a \in \mathbb{D}$$

Rewriting in polar coordinates $a = re^{i\theta}$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt, \quad 0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi]$$

Where $P_r(\theta - t) = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}$.

and finally we will extend the Poisson's Integral Formula 3.3.1 to any disc D .

In the following chapters we will study results that are essential tools for proving Perron's Method which, although we do not develop it here given its complexity, guarantees the existence of solution of Dirichlet's Problem in very general opening sets of the complex plane, (for further information see [3, Chapter 7, secciones 7 y 8].

In Chapter 4, we will see that the reciprocal of the Mean Value Property Theorem 2.2.6 holds. To do so, we will first introduce the definitions 4.1.1 y 4.1.2 of property $\text{PVM}(\Omega)$ and $\text{PVM}_0(\Omega)$ respectively where Ω is an open set contained in \mathbb{C} . Secondly, in Theorem 4.2.5 we will give a generalisation of the Maximum Principle 2.1.1 to all functions that satisfy PVM_0 . As a consequence of this, we will see the Corollary 4.2.6 which states that given a connected open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ if a function $g \in \text{PVM}_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ then it reaches its maximum at the boundary. Finally, in Theorem 4.2.7 we will see that every continuous function with the $\text{PVM}_0(\Omega)$ property is harmonic on Ω . As a consequence we

obtain the Corollary 4.2.8 which is in fact a uniform convergence theorem on compacts for harmonic functions similar to the Weierstrass Theorem for holomorphic functions which states that if $\{h_j\} \subset \text{Har}(\Omega)$ is a harmonic functions sequence that converges uniformly on compact subsets of Ω to a function $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ then $h \in \text{Har}(\Omega)$.

In Chapter 5 the Schwarz Reflection Principle for harmonic functions 5.1.1 provides us with a method for extending a harmonic function from an open set to a larger open set by symmetrising sets. Consider $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ as a connected open set such that $\Omega \cap \mathbb{R} = (a, b)$. We define $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \Im(z) > 0\}$, $\widehat{\Omega}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega^+\}$ y $\tilde{\Omega} = \Omega^+ \cup \widehat{\Omega}^+ \cup (a, b)$.

Teorema 0.0.8 (The Schwarz Reflection Principle for harmonic functions).

If $u \in \text{Har}(\Omega^+)$; $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \in (a,b) \\ z \in \Omega^+}} u(z) = 0$, then $\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } z \in (a, b) \text{ satisfies } \tilde{u} \in \text{Har}(\tilde{\Omega}). \\ -u(\bar{z}) & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$

Using this method we obtain a similar result for holomorphic functions 5.2.3

Teorema 0.0.9 (The Schwarz Reflection Principle for holomorphic functions). Let be an holomorfic function $f : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{C}$ and $\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Im(f(z)) = 0, \forall x \in (a, b)$. Then exists a

function $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\tilde{\Omega})$ such as $\tilde{f}|_{\Omega^+} = f$.

In particular, there exists $\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Re(f(z)) = \Phi(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in (a, b)$.

Moreover $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ \Phi(x) & \text{si } z \in (a, b) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$

In Chapter 6, we will see two important results. The first is the Harnack Inequality 6.1.1 which gives us a bound for positive harmonic functions on any disc.

Teorema 0.0.10 (The Harnack Inequality) Let be $D = D(z_0, R)$. Si $u \in \text{Har}(D)$ y $u(z) \geq 0 \forall z \in D$, then for each $0 \leq r < R$ and every $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \underset{(H1)}{\leq} u(z_0 + re^{i\theta}) \underset{(H2)}{\leq} \frac{R+r}{R-r} u(z_0)$$

As a consequence, Corollary 6.1.3 is obtained where it is stated that given an open set $\Omega \subset \mathbb{C}$ and a compact set $K \subset \Omega$, then there exists a constant $C_{K,\Omega} > 0$ such as every positive harmonic function $u \in \text{Har}(\Omega)$ satisfies $\max_K u(z) \leq C_{K,\Omega} \min_K u(z)$.

Finally we will study Harnack's Principle 6.2.4 which states that if $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ is an increasing sequence of harmonic functions on a connected open U and if for exactly one point $z \in U$ it is satisfied that the sequence $\{u_j(z)\}_j$ is bounded, then there exists $u \in \text{Har}(U)$ such as $u_j \rightarrow u$ uniformly on compact sets. That is to say, it is striking how the bounding at just one point of the increasing sequence of harmonic functions forces the bounding at any other point.

Notación

Trabajaremos con funciones armónicas definidas en abiertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. En este trabajo dotamos el plano complejo \mathbb{C} con la topología euclídea de \mathbb{R}^2 , i.e. en \mathbb{C} consideraremos la métrica $d(z, w) = |z - w|$. Los puntos del plano complejo los denotamos habitualmente como $z = x + iy = (x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Dado un punto $z_o \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, al disco abierto de centro z_o y radio r lo denotaremos por $D(z_o, r)$, i. e.,

$$D(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < r\}$$

Utilizaremos también la siguiente notación :

$$\begin{aligned}\overline{D}(z_o, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| \leq r\} \\ \partial D(z_o, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| = r\}\end{aligned}$$

Denotaremos el disco unitario por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y su frontera $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$. También trabajaremos frecuentemente en *dominios*, que son subconjuntos abiertos y conexos del plano complejo.

Dado un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, denotamos:

$$\Re(f) = u, \text{ parte real de } f$$

$$\Im(f) = v, \text{ parte imaginaria de } f$$

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \quad f \text{ es continua en } \Omega\}$$

$$C^N(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \quad \exists \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} \in C(\Omega), \forall n + m \leq N\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \quad f \in C^n(\Omega) \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \quad f \text{ es holomorfa en } \Omega\}$$

Propiedades básicas de las funciones armónicas

ch1

En este capítulo se han utilizado como referencias principales los textos [3, Chapter 7, sección 1] y [5, Cap 11, sección 1].

1.1. Definición y ejemplos

Def1.1

Definición 1.1.1 Una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ diremos que es armónica, y lo denotaremos por $u \in \text{Har}(\Omega)$, si $u \in C^2(\Omega)$ y

$$\Delta u = 0$$

donde el operador laplaciano $\Delta : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ se define como

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u$$

1.1.1. Ejemplos

ej

Además de las funciones constantes, son armónicas las siguientes funciones:

Ejemplo 1.1.2 Las funciones coordenadas. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces $u(z) = \Re(z)$, $v(z) = \Im(z) \in \text{Har}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.1.3 Las sumas y los múltiplos escalares de funciones armónicas. Por ejemplo, si $u(x, y) = ax + by + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces $u \in \text{Har}(\mathbb{C})$.

Ejemplo 1.1.4 Las traslaciones de funciones armónicas. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $u \in \text{Har}(\Omega)$ entonces es armónica la traslación de u , $u_{z_0}(z) = u(z - z_0)$, en el conjunto $z \in \Omega + z_0 = \{w + z_0 ; w \in \Omega\}$.

Ejemplo 1.1.5 Las dilataciones de funciones armónicas. Si $r > 0$ y $u \in \text{Har}(\Omega)$, entonces es armónica la dilatación de u , $u_r(z) = u(rz)$; $z \in \frac{1}{r}\Omega = \{\frac{1}{r}w ; w \in \Omega\}$ ya que

$$(\Delta u_r)(z) = r^2(\Delta u)(rz) = 0, \quad \text{si } z \in \frac{1}{r}\Omega.$$

Ejemplo 1.1.6 $u(x, y) = \log(x^2 + y^2) \in \text{Har}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, como es fácil comprobar por definición.

1.2. Propiedades básicas de las funciones armónicas

La primera relación más evidente entre funciones holomorfas y armónicas es que tanto la parte real como la imaginaria de cualquier función holomorfa son también armónicas.

prop1.1

Proposición 1.2.7 Sea un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces $\Re(f), \Im(f) \in \text{Har}(\Omega)$.

Demostración. Dado $(x, y) \in \Omega$, sea $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se tiene $f \in C^\infty(\Omega)$ [A.4.21]. Por tanto, $u, v \in C^\infty(\Omega)$, en particular $u, v \in C^2(\Omega)$.

Por otro lado, por el Teorema de las Ecuaciones de Cauchy Riemann [A.1.2] se cumple

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.1) \quad \boxed{\text{i1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.2) \quad \boxed{\text{ii1}}$$

Tomando derivadas parciales en (1.2.1),

$$\partial_{xx}^2 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \partial_y (\partial_x v) \quad (1.2.3) \quad \boxed{\text{iii1}}$$

En la última igualdad hemos intercambiado el orden de derivación ya que $v \in C^2(\Omega)$. Análogamente de (1.2.2) se sigue

$$\partial_{yy}^2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\partial_y (\partial_x v) \quad (1.2.4) \quad \boxed{\text{iv1}}$$

Por tanto, sustituyendo (1.2.3) y (1.2.4) en $\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u$ se obtiene que $\Delta u = 0$, luego $u \in \text{Har}(\Omega)$. Razonando de forma similar se demuestra $v \in \text{Har}(\Omega)$; una demostración alternativa más directa se deduce de $v = \Re(-if)$ y del caso anterior. \square

Este resultado supone una fuente de ejemplos de funciones armónicas ya que basta partir de una función holomorfa y quedarnos con su parte real o imaginaria. Por ejemplo la función $u(re^{i\theta}) = r^n \cos(n\theta) = \Re(z^n) \in \text{Har}(\mathbb{C})$ ya que $f(z) = z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Esto nos motiva a preguntarnos si se verifica el recíproco, i.e, ¿cualquier función armónica proviene de una función holomorfa? A continuación vamos a ver que las funciones armónicas son justamente aquellas que son la parte real de funciones holomorfas, al menos localmente. Más adelante veremos que surgen complicaciones cuando la función armónica está definida en un conjunto abierto que no es simplemente conexo.

prop1.2

Proposición 1.2.8 Sea un disco $D = D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ y $u \in \text{Har}(D)$. Entonces existe una función $v \in \text{Har}(D)$ tal que la función $f(z) := u(z) + iv(z)$ es holomorfa en D . En este caso se dice que v es la armónica conjugada de u .

Demostración. Sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Basta encontrar una función $v \in C^1(D)$ que verifique

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.5) \quad \boxed{\text{i2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.6) \quad \boxed{\text{ii2}}$$

Entonces por el Teorema de las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2] concluimos que $f = u + iv \in \mathcal{H}(D)$. Para la construcción de v integramos respecto de x en (1.2.6) teniendo en cuenta que el centro del disco D es el punto (x_0, y_0) .

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u_y(s, y) ds + C(y) \quad (1.2.7) \quad \boxed{\text{iii2}}$$

Suistituyendo en (1.2.5) esta expresión para v

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(- \int_{x_0}^x u_y(s, y) ds + C(y) \right)$$

Como $u \in \text{Har}(D)$, entonces por la Definición 1.1.1, $u \in C^2(D)$, en particular $u_y \in C^1(D)$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= - \int_{x_0}^x u_{yy}(s, y) ds + C'(y) \\ &= \int_{x_0}^x u_{xx}(s, y) ds + C'(y) \\ &= u_x(x, y) - u_x(x_0, y) + C'(y) \end{aligned} \quad (1.2.8) \quad \boxed{\text{iv2}}$$

En la segunda igualdad hemos utilizado $\Delta u = 0$, y en la última hemos aplicado la regla de Barrow. De (1.2.8) se sigue que $C'(y) = u_x(x_0, y)$. Integramos con respecto a y obteniendo

$$C(y) = \int_{y_0}^y u_x(x_0, t) dt + C \quad (1.2.9) \quad \boxed{\text{v2}}$$

Sustituimos (1.2.9) en (1.2.7) y concluimos

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u_y(s, y) ds + \int_{y_0}^y u_x(x_0, t) dt + C.$$

Esta expresión de v nos da el candidato a solución de (1.2.5), (1.2.6); deshaciendo los pasos anteriores se comprueba fácilmente que $v \in C^1(D)$ y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2]. Por tanto, $f = u + iv$ es holomorfa en D . Finalmente, como $v = \Im f$, se concluye que también $v \in \text{Har}(D)$. \square

Observación 1.2.9 Cabe destacar, tal y como se aprecia en esta demostración, que la función armónica conjugada v está unívocamente determinada salvo una constante aditiva.

$\boxed{\text{cor1.1}}$ **Corolario 1.2.10** Sea un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Si $u \in \text{Har}(\Omega)$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración. Es suficiente demostrar que para cada disco $D \subseteq \Omega$ la restricción $u|_D$ es C^∞ . Como $u \in \text{Har}(\Omega)$, en particular $u \in \text{Har}(D)$. Entonces por la Proposición 1.2.8 existe una función $f_D : D \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\Re(f_D) = u|_D$ y $f_D \in \mathcal{H}(D)$. Por tanto, por la regularidad de las funciones holomorfas, ver [A.4.21], se tiene que $f_D \in C^\infty(D)$, se concluye que $u \in C^\infty(D)$. \square

$\boxed{\text{Cor2.3}}$ **Corolario 1.2.11** Sean Ω_1, Ω_2 dos subconjuntos abiertos de \mathbb{C} . Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfa y $h \in \text{Har}(\Omega_2)$, entonces $h \circ f \in \text{Har}(\Omega_1)$.

Demostración.

Sea $z_0 \in \Omega_1$. Entonces $f(z_0) \in \Omega_2$ y como Ω_2 es abierto existe $r > 0$ tal que $D = D(f(z_0), r) \subseteq \Omega_2$. Por la Proposición 1.2.8, h es localmente la parte real de una función holomorfa, en particular

$$\exists g_D \in \mathcal{H}(D) \quad : \quad h = \Re(g)$$

Por la continuidad de f , $A = f^{-1}(D)$ es un abierto tal que $z_0 \in A \subset \Omega_1$. Como $A \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g_D} \mathbb{C}$ con f y g_D ambas holomorfas, se tiene que $g_D \circ f \in \mathcal{H}(A)$. Por la Proposición 1.2.7, $\Re(g_D \circ f) = h \circ f \in \text{Har}(A)$. Por tanto, todo punto $z_0 \in \Omega_1$, tiene un entorno A tal que $h \circ f \in \text{Har}(A)$, luego $h \circ f \in \text{Har}(\Omega_1)$. \square

A continuación generalizamos la Proposición 1.2.7 a conjuntos abiertos simplemente conexos.

lem1.1

Teorema 1.2.12 *Sea un abierto simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $u \in \text{Har}(\Omega)$. Entonces existe una función $v \in \text{Har}(\Omega)$ tal que la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u(z) + iv(z)$ es holomorfa en Ω .*

Demostración. Como $u \in \text{Har}(\Omega)$, por la Definición 1.1.1, en particular $u \in C^2(\Omega)$ y por tanto podemos definir la función

$$h = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

que es clase $C^1(\Omega)$. Por otro lado, como $\Delta u = 0$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2.10) \quad \boxed{\text{i3}}$$

Además por la Definición 1.1.1, $u \in C^2(\Omega)$ luego podemos aplicar en 1.2.10 el Teorema de Schwarz que nos garantiza la igualdad de las derivadas parciales mixtas

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2.11) \quad \boxed{\text{i3}}$$

De (1.2.10) y (1.2.11) se sigue que $\Re(h)$ e $\Im(h)$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2], por tanto $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Como Ω es simplemente conexo, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = h$ [A.5.25]. Sea $\tilde{u} = \Re(g)$ y $\tilde{v} = \Im(g)$. Entonces por el Teorema de las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2]

$$g'(x, y) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

De $g' = h$ se sigue

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}(u - \tilde{u}) = \frac{\partial}{\partial y}(u - \tilde{u}) = 0$$

Como Ω es un abierto conexo concluimos $\tilde{u} = u + C$. De este modo

$$g - C = \tilde{u} + i\tilde{v} - \tilde{u} + u = u + i\tilde{v}$$

Tomando $f = g - C$ obtenemos la función que buscábamos ya que se cumple $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ por ser $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\Re(f) = u$. \square

Observación 1.2.13 Veamos un ejemplo en donde se refleja la condición necesaria de que Ω sea un abierto simplemente conexo para que se cumpla el lema anterior.

La función $u(x, y) = \log(x^2 + y^2) \in \text{Har}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ y no existe ninguna función $v \in C^1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tal que la función $f = u + iv$ sea holomorfa en el abierto no simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Suponiendo que existe una tal f , por un lado, por [A.4.16] se tiene

$$\int_{\partial D} f'(z) dz = 0 \quad (1.2.12) \quad \square$$

Por otro lado, por el Teorema de las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2] para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se cumpliría

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - i \frac{2y}{x^2 + y^2} = 2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{2\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{2}{z}$$

Parametrizamos y hacemos $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\int_{\partial D} f'(z) dz = \int_{\partial D} \frac{2}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{it}} i e^{it} dt = 4\pi i$$

Llegando de este modo a una contradicción con (1.2.12). □

Principio del Máximo y Propiedad del Valor Medio

Ch2

En este capítulo se ha utilizado como referencia principal el texto [3, Chapter 7, sección 2].

2.1. Principio del Máximo

El hecho de que una función armónica es localmente la parte real de una función holomorfa tiene como consecuencia dos importantes resultados: el Principio del Máximo y la Propiedad del Valor Medio. El Principio del Máximo está estrechamente relacionado con el Principio del Módulo Máximo para funciones holomorfas no constantes [A.5.22].

prop2.1

Proposición 2.1.1 (Principio del Máximo para funciones armónicas) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u \in \text{Har}(\Omega)$. Si existe un punto $p_0 \in \Omega$ tal que $u(p_0) = \max_{p \in \Omega} u(p)$ entonces u es una función constante en Ω .

Demostración. Sean $s = \max_{q \in \Omega} u(q)$ y $M = \{p \in \Omega : u(p) = s\}$. Entonces

item1

1. $M \neq \emptyset$ ya que $p_0 \in M$.

item2

2. M es cerrado por ser $M = u^{-1}(\{s\})$ i.e. por ser M la antiimagen por una función continua del conjunto unipuntual $\{s\}$ que es cerrado.

item3

3. Veamos que M es además abierto: tomamos un punto $p \in M$. Como Ω es abierto, existe un $r > 0$ tal que $D = D(p, r) \subset \Omega$. Por hipótesis $u \in \text{Har}(\Omega)$, en particular $u \in \text{Har}(D)$ y aplicando la Proposición 1.2.8 se tiene que existe una función $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g \in \mathcal{H}(D)$ y $u = \Re(g)$. Definimos $f(z) = e^{g(z)}$ que cumple $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces

$$|f(p)| = |e^{g(p)}| = e^{\Re(g(p))} = e^{u(p)} = e^{\max_{q \in D} u(q)} = \max_{q \in D} e^{u(q)} = \max_{q \in D} |f(q)|$$

De este modo tenemos $f \in \mathcal{H}(D)$ y $|f(p)| = \max_{q \in D} |f(q)|$. Entonces por el Principio del Módulo Máximo [A.5.22] se deduce que f es constante en D , luego $|f| = e^u = |C|$ en D . Por tanto $u = \ln |C|$ es constante en D , i.e. $u(q) = u(p) = s$ para todo $q \in D$, quedando demostrado que M es abierto.

Como Ω es un abierto conexo y M verifica 1, 2 y 3, entonces $M = \Omega$ y como consecuencia de ello, u es constante en Ω . \square

ppiomin

Corolario 2.1.2 (Principio del Mínimo para funciones armónicas)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $u \in \text{Har}(\Omega)$. Si existe un punto $p_0 \in \Omega$ tal que $u(p_0) = \min_{p \in \Omega} u(p)$, entonces u es una función constante en Ω .

Demostración. Sea $v(p) = -u(p) \in \text{Har}(\Omega)$. Entonces

$$v(p_0) = -u(p_0) = -\min_{p \in \Omega} u(p) = \max_{p \in \Omega} (-u(p)) = \max_{p \in \Omega} v(p)$$

Entonces por el Principio del Máximo para funciones armónicas 2.1.1 aplicado a v se tiene que v es constante y por tanto u también lo es. \square

cor2.1

Corolario 2.1.3 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio acotado y $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{y} \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

Demostración. Como $\bar{\Omega}$ es compacto y $u \in C(\bar{\Omega})$, se alcanza el máximo de u en $\bar{\Omega}$. Sea $p_0 \in \bar{\Omega}$ este punto máximo. Si $p_0 \in \partial\Omega$, hemos terminado. En otro caso, por el Principio del Máximo 2.1.1 u es constante en Ω , digamos $u(z) \equiv M$, $\forall z \in \Omega$. Por la continuidad de u también tendremos $u(z) \equiv M$, $\forall z \in \bar{\Omega}$, de modo que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = M$. Del mismo modo se demuestra que $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$. \square

cor2.2

Corolario 2.1.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio acotado. Si $u \in \text{Har}(\mathbb{C}) \cap C(\bar{\Omega})$ y u no es constante, entonces

$$\min_{\partial\Omega} u < u(z) < \max_{\partial\Omega} u \quad \forall z \in \Omega$$

Demostración. Por el Corolario 2.1.3 se tiene $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ y $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$. Además como la función u no es constante se tiene $\min_{\bar{\Omega}} u < u(z) < \max_{\bar{\Omega}} u$, si $z \in \Omega$. Por tanto

$$\min_{\partial\Omega} u = \min_{\bar{\Omega}} u < u(z) < \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

 \square

coro

Corolario 2.1.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado. Si $u_1, u_2 \in \text{Har}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$, entonces $u_1 = u_2$ en Ω .

Demostración. Como $u_1 - u_2 \in \text{Har}(\Omega)$, por el Corolario 2.1.3 $u_1 - u_2$ alcanza su máximo en $\partial\Omega$, pero $u_1 - u_2 = 0$ en $\partial\Omega$, luego $u_1(z) - u_2(z) \leq 0 \forall z \in \Omega$. Razonando análogamente para la función $u_2 - u_1$ se tiene que $u_2(z) - u_1(z) \leq 0 \forall z \in \Omega$. Luego $u_1 = u_2$ en Ω . \square

2.2. Propiedad del Valor Medio.

A continuación vamos a ver una propiedad de las funciones armónicas relacionada con la Fórmula de la Integral de Cauchy para funciones holomorfas [A.4.19] llamada

Propiedad del Valor Medio, que nos permite calcular el valor de cualquier función en el centro del disco en el que es armónica a partir de sus valores en la frontera.

teo2.1

Teorema 2.2.6 (Propiedad del Valor Medio.) Sea un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Si $u \in \text{Har}(\Omega)$ entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad (2.2.1) \quad \text{mvp}$$

El resultado también es válido si sólo suponemos que $u \in \text{Har}(D(z_0, r)) \cap C(\overline{D}(z_0, r))$.

Demostración. Tomamos $R > r$ tal que $D = D(z_0, R) \subset \Omega$. Como $u \in \text{Har}(\Omega)$, en particular $u \in \text{Har}(D)$ y por la Proposición 1.2.8, existe $f \in \mathcal{H}(D)$ tal que $u = \Re(f)$ en D . Además $\overline{D}(z_0, r) \subset D$ por lo que podemos aplicar la fórmula de la integral de Cauchy en el disco [A.4.19]

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) + iv(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (2.2.2) \quad \text{i5}$$

La segunda igualdad es consecuencia de parametrizar tomando $\xi = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, y la última por definición de integral. Tomamos parte real en ambos miembros de (2.2.2) y concluimos que

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Para probar la última afirmación consideramos, para $s < 1$, la función

$$v_s(z) := u(z_0 + s(z - z_0)),$$

que es armónica en el disco $D(z_0, r/s)$, que a su vez contiene al disco cerrado $\overline{D}(z_0, r)$. Por tanto, el resultado anterior aplicado a esta función implica

$$v_s(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_s(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

que sustituyendo el valor de v_s da

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + rse^{i\theta}) d\theta.$$

Haciendo $s \nearrow 1$ y usando el Teorema de Convergencia Dominada [A.6.26] se obtiene (2.2.1). \square

Observación 2.2.7 En el caso particular de una función $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, el Teorema de la Propiedad del Valor Medio nos proporciona una determinación explícita el valor de u en el centro de \mathbb{D} , i.e. en el punto $z = 0$ y se dice que $u(0)$ es el promedio de u en $\partial\mathbb{D}$

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) d\theta$$

Esto motiva a preguntarse por una fórmula explícita para los valores de u en cualquier otro punto de \mathbb{D} distinto de su centro, tema que vamos a tratar en el siguiente capítulo.

La fórmula de la integral de Poisson

Ch3

En este capítulo se han utilizado como referencias principales los textos [3, Chapter 7, sección 3] y [5, Cap 11, sección 2].

3.1. Introducción al problema de Dirichlet e interpretación física.

PD

En este capítulo comenzamos planteándonos si dado un disco abierto $D \subset \mathbb{C}$ y una función continua $\phi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ existe una función $u \in \text{Har}(D) \cap C(\bar{D})$ tal que $u = \phi$ en ∂D . Esto es conocido como el Problema de Dirichlet para D con dato frontera ϕ . Más general podemos reformular dicho problema tomando en lugar de D un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Una interpretación física del Problema de Dirichlet sería suponer que tenemos una lámina homogénea muy fina $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ cuya temperatura inicial viene dada por una función continua $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, y cuya temperatura en la frontera viene fijada por la función $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Nuestro objetivo es calcular la temperatura $u(z, t)$ en cada punto $z \in \bar{\Omega}$ y cada instante $t > 0$.

Este problema lo podemos reescribir mediante la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

con condición inicial $u(z, 0) = u_0(z)$, $\forall z \in \Omega$ y con condición frontera $u(z, t) = \phi(z) \forall z \in \partial\Omega$, $t \geq 0$. Conforme transcurre el tiempo el sistema tenderá a estabilizarse alcanzando un estado de equilibrio en el que la temperatura $u(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(z, t)$ ya no dependerá de t . Esta situación queda expresada mediante la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

De este modo, dicho estado de equilibrio es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = \phi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por tanto la función armónica buscada en el Problema de Dirichlet es justamente la función que representa el estado de equilibrio del sistema.

3.2. El Núcleo de Poisson en \mathbb{D} y sus propiedades.

Por el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio se cumple que, en el Problema de Dirichlet, la temperatura en el centro del disco es la temperatura media en la frontera. A continuación vamos a ver que en cualquier disco del plano complejo existe una fórmula explícita de la solución del Problema de Dirichlet que se obtiene mediante la Fórmula de la Integral de Poisson; esta última se puede ver como una extensión del Teorema de la Propiedad del Valor Medio. Veamos previamente la motivación de la fórmula del Núcleo de Poisson. En esta sección, nuestras funciones estarán definidas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

3.2.1. El laplaciano en coordenadas polares

Dada una función $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, en coordenadas polares tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ u_r(r, \theta) &= u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \\ u_{rr}(r, \theta) &= u_{xx} \cos^2(\theta) + 2 u_{xy} \cos(\theta) \sin(\theta) + u_{yy} \sin^2(\theta) \\ u_\theta(r, \theta) &= u_x(-r \sin(\theta)) + u_y(r \cos(\theta)) \\ u_{\theta\theta}(r, \theta) &= u_{xx}(r^2 \sin^2(\theta)) + u_{xy}(-r \sin(\theta) r \cos(\theta)) + u_x(-r \cos(\theta)) \\ &\quad + u_{yy}(r^2 \cos^2(\theta)) + u_{xy}(-r \sin(\theta) r \cos(\theta)) + u_y(-r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Por tanto

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy} - \frac{r}{r^2} (u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta))$$

Luego

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta},$$

que es la expresión del laplaciano en coordenadas polares.

3.2.2. El problema de Dirichlet en \mathbb{D} por separación de variables

Utilizando el método de separación de variables en coordenadas polares se puede expresar la solución general de la ecuación en derivadas parciales $\Delta u = 0$ en \mathbb{D} como

$$u(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m r^{|m|} e^{im\theta}, \quad r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi],$$

donde α_m son coeficientes a determinar. En efecto, este cálculo se ha realizado con detalle en el curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales del grado, así que lo supondremos conocido.

Imponiendo la condición de contorno $u|_{\partial\mathbb{D}} = \phi$, i.e. tomando $r = 1$ se tiene

$$\phi(\theta) = u(1, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{im\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Y por ortogonalidad

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(s) e^{-ims} ds = \widehat{\phi}(m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

que es el coeficiente de Fourier m -ésimo de ϕ . Sustituyendo α_m en $u(r, \theta)$ se tiene

$$u(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}(m) r^{|m|} e^{im\theta}$$

Esta expresión se puede escribir como una integral de convolución utilizando

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(s) e^{-ims} ds \right) e^{im\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(s) \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im(\theta-s)} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(s) P_r(\theta-s) ds, \end{aligned}$$

donde en vista de lo anterior definimos el **núcleo de Poisson** como

$$P_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}, \quad 0 \leq r < 1 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi], \quad (3.2.1) \quad \boxed{\text{pois1}}$$

De este modo nuestro candidato a solución del Problema de Dirichlet en \mathbb{D} es

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) P_r(\theta-t) dt, \quad 0 \leq r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

A esta expresión se le conoce como *la integral de Poisson* de ϕ . En el curso de EDPs se ha demostrado que esta fórmula es válida para toda $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ con $u|_{\partial\mathbb{D}} = \phi$. En la siguiente sección obtendremos esta fórmula por otra vía, utilizando únicamente variable compleja.

3.3. Fórmula de la Integral de Poisson.

A continuación obtenemos una nueva expresión para la integral de Poisson utilizando sólo teoría de funciones holomorfas y la fórmula del valor medio del capítulo anterior.

teo3.3.1

Teorema 3.3.1 *Fórmula de la Integral de Poisson en \mathbb{D} .*Dada una función $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ se tiene

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} dt, \text{ para cualquier } a \in \mathbb{D} \quad (3.3.2) \quad \boxed{\text{i10}}$$

Reescribiendo $a = re^{i\theta}$ en coordenadas polares tenemos

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \text{ para } 0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.3.3) \quad \boxed{\text{i11}}$$

donde se cumple que

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta - t)}. \quad (3.3.4) \quad \boxed{\text{poisson}}$$

Demostración. Para $a = 0$ el resultado coincide con la fórmula del valor medio del Teorema 2.2.6. Para obtener una fórmula cuando $a \in \mathbb{D}$ es general, utilizaremos aplicaciones conformes del tipo

$$\Phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}$$

Observar que Φ_a son transformaciones de Möbius [A.3.7], son biyecciones $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, y cumplen $\Phi_a(a) = 0$ y $\Phi_a^{-1} = \Phi_{-a}$ [A.3.11]. Por definición de Φ_a se tiene $u(a) = u \circ \Phi_{-a}(0)$. Además por el corolario 1.2.11, $u \circ \Phi_{-a} \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ puesto que $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ y $\Phi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ [A.3.11]. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio a $u \circ \Phi_{-a}$, resultando

$$\begin{aligned} u(a) &= u \circ \Phi_{-a}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi_{-a}(e^{i\theta})) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(\Phi_{-a}(e^{i\theta}))}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{u(\Phi_{-a}(\eta))}{\eta} d\eta \quad (\text{parametrizando } \eta = e^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{u(\xi)}{\Phi_a(\xi)} \Phi_a'(\xi) d\xi \quad (\text{cambio variable } \xi = \Phi_{-a}(\eta)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} u(\xi) \frac{1 - |a|^2}{\xi - a - \bar{a}\xi^2 + a\bar{a}\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{e^{it} - a - \bar{a}e^{2it} + a\bar{a}e^{it}} ie^{it} dt \quad (\xi = e^{it}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{1 - ae^{-it} - \bar{a}e^{it} + a\bar{a}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{(a - e^{it})(\bar{a} - e^{-it})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} dt \quad (|z|^2 = z\bar{z}) \end{aligned}$$

La sexta igualdad se debe a

$$\begin{aligned}\frac{\Phi'_a(\xi)}{\Phi_a(\xi)} &= \frac{(1 - \bar{a}\xi) + \bar{a}(\xi - a)}{(1 - \bar{a}\xi)^2} \cdot \frac{1 - \bar{a}\xi}{\xi - a} \\ &= \frac{1 - |a|^2}{1 - \bar{a}\xi} \cdot \frac{1}{\xi - a} = \frac{1 - |a|^2}{\xi - a - \bar{a}\xi^2 + a\bar{a}\xi}\end{aligned}$$

Finalmente sólo nos falta comprobar

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2}, \quad \text{si } a = re^{i\theta}. \quad (3.3.5) \quad \boxed{\text{i12}}$$

Por la definición del núcleo de Poisson en (3.2.1), para $0 \leq r < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}P_r(\theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\ &= 1 + 2 \Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n \right) \quad (a = re^{i\theta}) \\ &= 1 + 2 \Re \left(\frac{a}{1-a} \right) \quad (\text{suma geom. } |a| < 1) \\ &= \Re \left(1 + \frac{2a}{1-a} \right) = \Re \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+\bar{a}}{1-\bar{a}} \right) \quad (\Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - 2|a|^2}{|1-a|^2} \quad (a\bar{a} = |a|^2 = r^2) \\ &= \frac{1-r^2}{1+|a|^2 - 2\Re(a)} \quad (|z-a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2\Re(\bar{z}a)) \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r\cos(\theta)}\end{aligned}$$

Luego $P_r(\theta - t) = \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r\cos(\theta - t)}$. Además

$$|a - e^{it}|^2 = |re^{i\theta} - e^{it}|^2 = |r - e^{i(t-\theta)}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)$$

Por tanto queda demostrado (3.3.5) □

obs332

Observación 3.3.2 Tal y como se aprecia en la sexta igualdad de la demostración anterior, una expresión alternativa para el núcleo de Poisson es $P_r(\theta) = \Re \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right)$

Considerando el caso especial $u \equiv 1$ en (3.3.3) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.3 Para todo $r \in (0, 1)$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 1. \quad (3.3.6) \quad \boxed{\text{AN}}$$

El siguiente teorema nos proporciona la fórmula explícita para la solución del Problema de Dirichlet en \mathbb{D} .

teo3.2

Teorema 3.3.4 (Teorema de Schwarz) Sea f una función continua en $\partial\mathbb{D}$ y

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} dt & \text{si } z \in \mathbb{D} \\ f(z) & \text{si } z \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

Entonces $u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \text{Har}(\mathbb{D})$.

Demostración. Veamos que $u \in \text{Har}(\mathbb{D})$. Tomamos $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P_r(\theta-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \Re \left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} \right) dt && \text{(Obs 3.3.2)} \\ &= \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} dt \right) && \text{(Integramos respecto de } t \in [0, 2\pi]) \\ &= \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}} dt \right) && \text{(Multiplicamos y dividimos por } e^{it}) \end{aligned}$$

Definimos $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dt$$

Multiplicamos y dividimos por ie^{it} y queda

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} e^{-it} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{h(w)}{w-z} dw$$

donde en la última igualdad definimos

$$h(w) := \frac{f(w)(w+z)}{w} \quad \text{con } w = e^{it}, t \in [0, 2\pi].$$

Como $h \in C(\partial\mathbb{D})$ y $w-z \neq 0$ ($w \in \partial\mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$), entonces $\frac{h(w)}{w-z} \in C(\partial\mathbb{D})$, y por el lema de derivación de integrales paramétricas [A.4.17] se tiene $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. De este modo, al ser $u = \Re(g)$ en \mathbb{D} , por la Proposición 1.2.7 concluimos $u \in \text{Har}(\mathbb{D})$.

Veamos a continuación $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Como $u \in \text{Har}(\mathbb{D})$, en particular por la Definición 1.1.1 $u \in C(\mathbb{D})$ por tanto solo nos falta demostrar $u \in C(\partial\mathbb{D})$. Para ello probaremos el siguiente lema:

Lema 3.3.5 Dados $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$, existe $\rho \in (0, 1)$ y un arco $S = \{e^{i\theta} : \alpha - \delta < \theta < \alpha + \delta\}$ tal que si $0 < \rho < r < 1$, entonces $|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \epsilon$ para $\alpha - \delta < \theta < \alpha + \delta$.

Entonces como $u|_{\partial\mathbb{D}} = f$, este resultado nos da la continuidad de u en $e^{i\alpha}$, ya que la región

$$\left\{ re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} : r \in (\rho, 1), |\theta - \alpha| < \delta \right\}$$

es un entorno abierto del punto $e^{i\alpha}$ en \mathbb{D} .

Demostración del lema. Suponemos sin perder generalidad que $\alpha = 0$. En caso contrario basta aplicar una rotación. Como f es continua en $\partial\mathbb{D}$, en particular lo es en $z = 1$, i.e. dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(e^{i\theta}) - f(1)| < \epsilon/3 \quad \text{si } |\theta| < \delta \quad (3.3.7) \quad \boxed{\text{i13}}$$

Por otro lado, al ser f continua en un compacto alcanzará su máximo luego podemos definir

$$M = \text{máx}\{|f(e^{i\theta})| : \theta \in [-\pi, \pi]\}$$

Obsérvese que, si $|\theta| \geq \delta/2$ se tiene

$$P_r(\theta) \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\delta/2)} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2+2r(1-\cos(\delta/2))} \leq \frac{1-r}{r(1-\cos(\delta/2))}$$

y de esta desigualdad se deduce que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0, \quad \text{uniformemente en } |\theta| \geq \delta/2.$$

Luego existe $0 < \rho < 1$ tal que

$$P_r(\theta) < \epsilon/3M \quad \text{para } 0 < \rho < r < 1 \quad \text{y } |\theta| \geq \delta/2 \quad (3.3.8) \quad \boxed{\text{i14}}$$

Sea $S = \{e^{i\theta} : |\theta| < \delta/2\}$. Entonces si $e^{i\theta} \in S$ y $0 < \rho < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) - f(1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(e^{it}) dt - f(1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) [f(e^{it}) - f(1)] dt \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1 \text{ ver (3.3.6)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|t| < \delta} P_r(\theta-t) [f(e^{it}) - f(1)] dt + \int_{|t| \geq \delta} P_r(\theta-t) [f(e^{it}) - f(1)] dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (3.3.9) \quad \boxed{\text{i15}}$$

Por (3.3.7) y (3.3.6) se tiene $|I_1/2\pi| < \epsilon/3$. Por otro lado, si $|t| \geq \delta$ y $|\theta| \leq \delta/2$, entonces, $|t-\theta| \geq \delta/2$ y por (3.3.8)

$$\left| \frac{1}{2\pi} I_2 \right| < \frac{\epsilon}{3M} 2M$$

De este modo tomando módulos en (3.3.9) concluimos

$$|u(re^{i\theta}) - f(1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3M} 2M = \epsilon$$

□

pois-D

Corolario 3.3.6 Podemos extender la Fórmula de la Integral de Poisson en \mathbb{D} a un disco cualquiera $D = D(z_0, R) \subset \mathbb{C}$. Es decir, si $v \in \text{Har}(D) \cap C(\overline{D})$, entonces

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|(z - z_0) - Re^{i\theta}|^2} d\theta \quad \text{para cada } z \in D$$

Demostración. Como $z \in D$ entonces $|\frac{z-z_0}{R}| < 1$ luego $\frac{z-z_0}{R} \in \mathbb{D}$. Definimos la transformación $\Phi : D \rightarrow \mathbb{D}$,

$$\Phi(z) = \frac{z - z_0}{R} \in \mathcal{H}(D)$$

y la función $u := v \circ \Phi^{-1}$, que cumple $u \in \text{Har}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ por el Corolario 1.2.11. Aplicamos la Fórmula de la Integral de Poisson

$$\begin{aligned} v(z) = u(\Phi(z)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - |\Phi(z)|^2}{|\Phi(z) - e^{i\theta}|^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{1 - |\frac{z-z_0}{R}|^2}{|\frac{z-z_0}{R} - e^{i\theta}|^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|(z - z_0) - Re^{i\theta}|^2} d\theta \end{aligned}$$

□

Regularidad de funciones armónicas

Ch4

En este capítulo se ha utilizado como referencia principal el texto [3, Chapter 7, sección 4]. Veamos a continuación que se cumple el recíproco del Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio. Es decir, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$, solamente partiendo de una función $u \in C(\Omega)$, cumpliendo

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

vamos a ver que dicha función es armónica y por tanto C^2 por la Definición 1.1.1. De hecho será C^∞ por el corolario 1.2.10. Además esto no solo será válido para funciones definidas en el plano complejo, sino también en dimensiones superiores ya que todas las técnicas que vamos a utilizar en las demostraciones son válidas en cualquier dimensión.

4.1. Definiciones

def4.1 **Definición 4.1.1** Dada una función u , se dice que $u \in \text{PVM}(\Omega)$ si $u \in C(\Omega)$ y para todo $\overline{D} = \overline{D}_R(z) \subseteq \Omega$ se tiene

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + Re^{it}) dt$$

def4.2 **Definición 4.1.2** Dada una función u se dice que $u \in \text{PVM}_0(\Omega)$ si para cada punto $p \in \Omega$, $\exists \epsilon_p > 0$ tal que $\overline{D}(p, \epsilon_p) \subset \Omega$ y u cumple

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + \epsilon e^{it}) dt \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_p$$

Observación 4.1.3 La propiedad PVM_0 permite que ϵ_p pueda variar según sea p .

obs4.2 **Observación 4.1.4**

$$\text{Har}(\Omega) \subseteq \text{PVM}(\Omega) \subseteq \text{PVM}_0(\Omega)$$

Demostración. La primera inclusión es consecuencia del Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio. La segunda se sigue de las definiciones 4.1.1 y 4.1.2 \square

4.2. Recíproco del Teorema de la Propiedad del Valor Medio

El primer paso consiste en probar una generalización del Principio del Máximo en la Proposición 2.1.1 a todas las funciones en PVM_0 . A diferencia de la Proposición 2.1.1, en la prueba no usaremos la teoría de funciones holomorfas.

lem4.1

Teorema 4.2.5 Dado $V \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y una función continua $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in PVM_0(V)$. Si existe un punto $p_0 \in V$ tal que $g(p_0) = \max_{q \in V} g(q)$, entonces g es constante en V .

Demostración. Sea $s = \max_{q \in V} g(q)$. Definimos $M = \{z \in V : g(z) = s\}$. Entonces se cumple:

1. $M \neq \emptyset$ ya que $p_0 \in M$.
2. M es cerrado en V ya que $M = g^{-1}(s)$, i.e. M es antiimagen por una función continua de un conjunto compacto.
3. Veamos que M es abierto. Dado $p \in M$, por definición de M ,

$$g(p) = s \tag{4.2.1} \quad \boxed{i16}$$

Por otro lado, para cada $0 < \epsilon < \epsilon_p$ se tiene por la Definición 4.1.2

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(p + \epsilon e^{it}) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s dt = s \end{aligned} \tag{4.2.2} \quad \boxed{i17}$$

Combinando (4.2.1) y (4.2.2) se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(p + \epsilon e^{it}) dt = s$$

Luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (s - g(p + \epsilon e^{it})) dt = 0$$

Pero $s - g(p + \epsilon e^{it}) \geq 0$ por definición de s . Por tanto, el integrando debe ser nulo, i.e.

$$g(p + \epsilon e^{it}) = s, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Luego $p + \epsilon e^{it} \in M$ para todo $0 \leq t \leq 2\pi$. De este modo $\partial D(p, \epsilon) \subseteq M$ para $0 < \epsilon < \epsilon_p$, concluyendo así que $D(p, \epsilon_p) \subseteq M$ y que M es abierto.

Como V es un abierto conexo, por los tres puntos anteriores se tiene $M = V$. Por tanto, $g \equiv s$ constante en V . □

cor4.1

Corolario 4.2.6 Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, si $g \in PVM_0(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} g = \max_{\partial\Omega} g$$

Demostración. Como la función g es continua en el conjunto compacto $\bar{\Omega}$, alcanza su máximo. Si lo alcanza en la frontera no hay nada que demostrar. En caso contrario, si lo alcanza en el interior de Ω entonces por el lema 4.2.5 g es constante en Ω luego $\max_{\bar{\Omega}} g = \max_{\partial\Omega} g$. \square

teo4.1

Teorema 4.2.7 Sea una función continua $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h \in \text{PVM}_0(\Omega)$. Entonces $h \in \text{Har}(\Omega)$.

Demostración. Sea D un disco, $\bar{D} \subset \Omega$. Por el Teorema 3.3.4 de Schwarz y la Observación 3.3.6, existe $u_D : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_D \in \text{Har}(D) \cap C(\bar{D})$ y $u_D|_{\partial D} = h$. Definimos la función $w = h - u_D$ en \bar{D} . Sabemos que:

1. $w \in C(\bar{D})$ por serlo h y u_D .
2. $w \in \text{PVM}_0(D)$ ya que $h \in \text{PVM}_0(D)$ y por el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio $u_D \in \text{PVM}_0(D)$.
3. $w|_{\partial D} \equiv 0$ ya que $u_D|_{\partial D} = h$.

Entonces por el Corolario 4.2.6

$$\max_{\bar{D}} w = \max_{\partial D} w = 0$$

Luego $w \leq 0$ en \bar{D} . Aplicando el mismo razonamiento a $-w$ se tiene $-w \leq 0$ en \bar{D} . Por tanto $w \equiv 0$ en \bar{D} y por definición de w concluimos que $h = u_D$ en \bar{D} . En particular $h \in \text{Har}(D)$ por serlo u_D . Como esto ocurre para cualquier disco arbitrario $D \subset \Omega$ concluimos que $h \in \text{Har}(\Omega)$. \square

A continuación obtenemos como corolario un teorema de convergencia uniforme sobre compactos para funciones armónicas, que es similar al teorema de Weierstrass para las funciones holomorfas. La demostración que damos, sin embargo, no se basa en resultados de funciones holomorfas.

cor4.2

Corolario 4.2.8 Sea $\{h_j\} \subset \text{Har}(\Omega)$ una sucesión de funciones armónicas que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces se cumple $h \in \text{Har}(\Omega)$.

Demostración. Como las funciones h_j son armónicas, en particular son continuas por la Definición 1.1.1 y por tanto h es continua. Por otro lado, dado un disco arbitrario $D = D(z_0, R)$, $\bar{D} \subset \Omega$, aplicando el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio se tiene

$$h_j(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_j(z_0 + Re^{it}) dt$$

Tomando límites

$$\begin{aligned} h(z_0) &= \lim_{j \rightarrow \infty} h_j(z_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_j(z_0 + Re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{j \rightarrow \infty} h_j(z_0 + Re^{it}) dt && \text{(convergencia uniforme de } \{h_j\}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + Re^{it}) dt \end{aligned}$$

Luego $h \in \text{PVM}_0(\Omega)$ y por el Teorema 4.2.7 se deduce $h \in \text{Har}(\Omega)$. \square

Principio de Reflexión de Schwarz

Ch5

En este capítulo se han utilizado como referencias principales los textos [3, Chapter 7, sección 5] y [5, Cap 11, sección 2].

El objetivo de este capítulo es estudiar un modo de extender una función armónica de un abierto a otro más grande y posteriormente lo utilizaremos para obtener un método similar para funciones holomorfas. Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que $\Omega \cap \mathbb{R} = (a, b)$. Definimos $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \Im(z) > 0\}$, $\widehat{\Omega}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega^+\}$ y $\tilde{\Omega} = \Omega^+ \cup \widehat{\Omega}^+ \cup (a, b)$.

5.1. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas

teo5.1

Teorema 5.1.1 (Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas). Si $u \in \text{Har}(\Omega^+)$ y $\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = 0$ para cada $\xi \in (a, b)$, entonces

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } z \in (a, b) \\ -u(\bar{z}) & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$$

cumple $\tilde{u} \in \text{Har}(\tilde{\Omega})$.

Observación 5.1.2 En este método vemos el abierto $\widehat{\Omega}^+$ como la reflexión de Ω^+ respecto del eje real, y la función \tilde{u} sobre $\widehat{\Omega}^+$ como una reflexión de la función u .

Demostración. Por definición $\tilde{u} \in C(\tilde{\Omega})$. Efectivamente, como $u \in \text{Har}(\Omega^+)$, en particular por la Definición 1.1.1 $u(z) \in C(\Omega^+)$, luego $-u(\bar{z}) \in C(\widehat{\Omega}^+)$. Además

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \Omega^+}} \tilde{u}(z) = \lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = 0 = \tilde{u}(\xi)$$

Análogamente

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in \widehat{\Omega}^+}} \tilde{u}(z) = \lim_{\bar{z} \rightarrow \xi} -u(\bar{z}) = 0 = \tilde{u}(\xi)$$

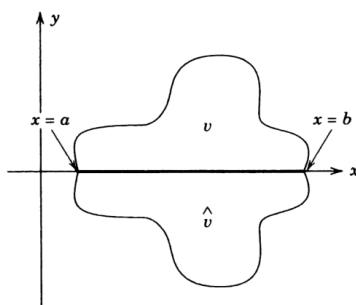


Figura 5.1: Simetrizado de un conjunto

fig1

Veamos a continuación que $\tilde{u} \in \text{PVM}_0(\tilde{\Omega})$ y por el Teorema 4.2.7 concluiremos que $\tilde{u} \in \text{Har}(\tilde{\Omega})$. Para ello distinguiamos tres casos:

Caso 1: Si $z_0 \in \Omega^+$, entonces existe un entorno de z_0 contenido en $\Omega^+ \subset \tilde{\Omega}$ en el que $\tilde{u} = u$ (ya que Ω^+ es abierto y $\tilde{u}(z) = u(z)$ si $z \in \Omega^+$). Por otro lado, como $u \in \text{Har}(\Omega^+)$, entonces por la observación 4.1.4 $u \in \text{PVM}_0(\Omega^+)$, luego $\tilde{u} \in \text{PVM}_0(\Omega^+)$.

Caso 2: Si $z_0 \in \hat{\Omega}^+$, entonces $\tilde{u}(z) = -u(\bar{z})$ para todo z perteneciente a un entorno de z_0 contenido en $\hat{\Omega}^+ \subset \tilde{\Omega}$. Además la función $z \rightarrow -u(\bar{z})$ es armónica. En efecto, si $z = x + iy$, entonces $\tilde{u}(z) = -u(\bar{z}) = -u(x, -y)$, luego

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, -y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, -y)$$

Por tanto $\Delta \tilde{u} = -\Delta u = 0$ ya que $u \in \text{Har}(\Omega^+)$ [Def (1.1.1)]. En definitiva $\tilde{u}(z) = -u(\bar{z}) \in \text{Har}(\hat{\Omega}^+)$ y así por la observación 4.1.4 concluimos que $\tilde{u} \in \text{PVM}_0(\Omega^+)$.

Caso 3: Si $z_0 \in (a, b)$, tomamos $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $\bar{D}(z_0, \epsilon_0) \subseteq \tilde{\Omega}$. Entonces se cumple:

1. $\tilde{u}(z_0) = 0$ por definición de \tilde{u} .
2. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt = 0$ para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

La prueba de esta última afirmación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt + \int_0^{\pi} \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 -u(z_0 + \epsilon e^{-it}) dt + \int_0^{\pi} u(z_0 + \epsilon e^{it}) dt && \text{(Def. de } \tilde{u}) \\ &= -\int_0^{\pi} u(z_0 + \epsilon e^{is}) ds + \int_0^{\pi} u(z_0 + \epsilon e^{it}) dt && \text{(Cambio var : } -t = s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia de las propiedades mencionadas,

$$\tilde{u}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z_0 + \epsilon e^{it}) dt$$

es decir, $\tilde{u} \in \text{PVM}_0(\tilde{\Omega})$ y por el Teorema 4.2.7 concluimos que $\tilde{u} \in \text{Har}(\tilde{\Omega})$. □

5.2. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones holomorfas

En la primera parte de este trabajo, obtuvimos varias propiedades de las funciones armónicas a partir de la teoría de funciones holomorfas. En el siguiente resultado hacemos lo contrario y obtenemos, a partir la teoría de funciones armónicas, un resultado no evidente sobre funciones holomorfas.

teo5.2

Teorema 5.2.3 (Principio de Reflexión de Schwarz para funciones holomorfas). Sean $\Omega, \Omega^+, \widehat{\Omega}^+$ y $\widetilde{\Omega}$ como en el Teorema 5.1.1. Si $f : \Omega^+ \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Im m(f(z)) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

Entonces existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\widetilde{\Omega})$ tal que $\tilde{f}|_{\Omega^+} = f$. En particular, existe

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in \Omega^+}} \Re e(f(z)) = \Phi(x) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada } x \in (a, b)$$

y además

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega^+ \\ \Phi(x) & \text{si } z \in (a, b) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$$

Demostración. Sea $z_0 \in (a, b)$. Tomamos $D = D(z_0, \epsilon_0) \subseteq \widetilde{\Omega}$. Definimos $v(z) = \Im m(f(z)) \in \text{Har}(D \cap \Omega^+)$ [Proposición 1.2.7]. Además, por hipótesis $v(z) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_1, z_1 \in D \cap (a, b)$. Entonces por el teorema 5.1.1 existe $\tilde{v} \in \text{Har}(D)$ tal que $\tilde{v} = v$ en $D \cap \Omega^+$ (y $\tilde{v} = 0$ en $D \cap (a, b)$). Por la Proposición 1.2.8 existe $\tilde{u} \in \text{Har}(D)$ cumpliendo $\tilde{u} + i\tilde{v} \in \mathcal{H}(D)$. Sea $G = f - (\tilde{u} + i\tilde{v}) \in \mathcal{H}(D \cap \Omega^+)$. Entonces $\Im m(G) = \Im m(f) - \tilde{v} = v - v = 0$ en $D \cap \Omega^+$. luego $G \equiv C$ constante en $D \cap \Omega^+$ ya que en un abierto conexo sólomente las funciones holomorfas constantes pueden tener parte imaginaria nula [A.1.3].

Definimos $F_0 = \tilde{u} + i\tilde{v} + C \in \mathcal{H}(D)$. Si $z \in D \cap \Omega^+$ entonces $F_0 = f - G + C = f$.

Sea $F_1 = \overline{F_0(\bar{z})}$, entonces se cumple $F_1 \in \mathcal{H}(D)$, veámoslo:

Como $F_0 \in \mathcal{H}(D)$, por el Teorema de las ecuaciones de Cauchy-Riemann [A.1.2]

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(x, y) \quad (5.2.1) \quad \boxed{18}$$

Por otro lado $\overline{F_0(\bar{z})} = \overline{F_0(x - iy)} = \tilde{u}(x, -y) - i\tilde{v}(x, -y) + \bar{C}$.

Sean $\hat{u}(x, y) := \tilde{u}(x, -y)$ y $\hat{v}(x, y) := -\tilde{v}(x, -y)$. Por definición de \hat{u}, \hat{v} , y por (5.2.1) se cumple:

$$\hat{u}_x(x, y) = \tilde{u}_x(x, -y) = \tilde{v}_y(x, -y) = \hat{v}_y(x, y) \quad \text{y} \quad \hat{u}_y(x, y) = -\tilde{u}_y(x, -y) = \tilde{v}_x(x, -y) = -\hat{v}_x(x, y)$$

Por tanto F_1 cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego $F_1 \in \mathcal{H}(D)$. Además $F_1(z) = F_0(z)$ en $D \cap (a, b)$ ya que F_0 es real en $D \cap (a, b)$ por hipótesis. Entonces aplicando el Principio de Prolongación Analítica [A.5.23] se tiene que $F_1(z) = F_0(z) \forall z \in D$. De

este modo:

$$F_0(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D \cap \Omega^+ \\ F_1(z) = \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in D \cap \widehat{\Omega}^+ \end{cases}$$

Además si $z \in (a, b) \cap D$ se tiene:

$$F_0(z) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega^+ \cap D}} F_0(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega^+ \cap D}} f(w) = \lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \in \Omega^+ \cap D}} \Re(f(w)) = \Phi(z)$$

Por tanto $F_0 = \tilde{f}$ en D . Como $\tilde{f}(z) = f(z) \in \mathcal{H}(\Omega^+)$ y $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \in \mathcal{H}(\widehat{\Omega}^+)$ concluimos que $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\widehat{\Omega})$. \square

Los teoremas de Harnack

Ch6

En este capítulo se han utilizado como referencias principales los textos [3, Chapter 7, sección 6] y [5, Cap 11, sección 3].

6.1. La Desigualdad de Harnack

desH

Teorema 6.1.1 (La Desigualdad de Harnack) Sea $D = D(z_0, R)$. Si $u \in \text{Har}(D)$ y $u(z) \geq 0 \forall z \in D$, entonces para $0 \leq r < R$ y todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \underset{(H1)}{\leq} u(z_0 + re^{i\theta}) \underset{(H2)}{\leq} \frac{R+r}{R-r} u(z_0)$$

Demostación. Tomamos ρ tal que $0 \leq r < \rho < R$. Como $u \in \text{Har}(D)$, en particular $u \in \text{Har}(D(z_0, \rho)) \cap C(\bar{D}(z_0, \rho))$. Aplicamos la Fórmula de la Integral de Poisson para u en $D(z_0, \rho)$ [Observación 3.3.6],

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it}) \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{it} - re^{i\theta}|^2} dt \quad (6.1.1) \quad 19$$

Por otro lado, como $\rho - r \leq |\rho e^{it} - re^{i\theta}| \leq \rho + r$, se tiene

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} \leq \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{it} - re^{i\theta}|^2} \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} \quad (6.1.2) \quad 20$$

Entonces como $u(z) \geq 0$, de (6.1.1) y (6.1.2) se sigue

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho - r}{\rho + r} u(z_0 + \rho e^{it}) dt \leq u(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho + r}{\rho - r} u(z_0 + \rho e^{it}) dt$$

Aplicamos el Teorema 2.2.6 de la Propiedad del Valor Medio

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} u(z_0) \leq u(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} u(z_0)$$

Finalmente tomamos límite cuando $\rho \rightarrow R$ y llegamos a

$$\frac{R - r}{R + r} u(z_0) \leq u(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} u(z_0)$$

□

cor6.1

Corolario 6.1.2 Sea $D = D(z_0, R)$ un disco de \mathbb{C} , entonces para toda función armónica positiva $u \in \text{Har}(D)$ y $r \in (0, R)$ se tiene

$$\max_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z) \leq C_{R,r} \min_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z)$$

donde $C_{R,r} = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2$ es una constante que sólo depende de R y r . Como consecuencia de ello,

$$1 \leq \frac{\max_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z)}{\min_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z)} \leq C_{R,r}$$

Demostración. Tomamos $z \in \overline{D}(z_0, r)$, luego $z = z_0 + se^{i\theta}$, $s \in [0, r]$. Entonces

$$u(z) = u(z_0 + se^{i\theta}) \leq \frac{R+s}{R-s} u(z_0) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0) \quad (6.1.3) \quad \square$$

La primera desigualdad se sigue de la segunda Desigualdad de Harnack (H2). La segunda desigualdad se sigue del hecho de que la aplicación $s \rightarrow \frac{R+s}{R-s}$ es creciente ya que

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{R+s}{R-s} \right) = \frac{R-s + (R+s)}{(R-s)^2} = \frac{2R}{(R-s)^2} > 0$$

Como (6.1.3) se cumple para todo $z \in \overline{D}(z_0, r)$, se deduce

$$\max_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0) \quad (6.1.4) \quad \square$$

Sea $z' = z_0 + s'e^{i\theta} \in \overline{D}(z_0, r)$ con $s' \in [0, r]$. Por la primera Desigualdad de Harnack (H1)

$$u(z_0) \leq \frac{R+s'}{R-s'} u(z_0 + s'e^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0 + s'e^{i\theta}) \quad (6.1.5) \quad \square$$

Como (6.1.5) es válida para todo z' , entonces

$$u(z_0) \leq \frac{R+r}{R-r} \min_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z) \quad (6.1.6) \quad \square$$

Finalmente, por (6.1.4) y (6.1.6) concluimos

$$\max_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0) \leq \frac{R+r}{R-r} \frac{R+r}{R-r} \min_{z \in \overline{D}(z_0, r)} u(z)$$

□

cor6.2

Corolario 6.1.3 Sea un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y K un subconjunto compacto de Ω . Entonces existe una constante $C_{K,\Omega} > 0$ tal que para toda función armónica positiva $u \in \text{Har}(\Omega)$ se tiene

$$\max_K u(z) \leq C_{K,\Omega} \min_K u(z)$$

Demostración. Dado un conjunto compacto $K \subseteq \Omega$. Si $z \in K$, existe $r_z > 0$ tal que $\overline{D}_{2r_z}(z) \subseteq \Omega$. Como $K \subseteq \bigcup_{z \in K} D_{r_z}$, por ser K compacto existen z_1, \dots, z_J tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^J D_j \quad (6.1.7) \quad \boxed{25}$$

donde cada $D_j = D_{r_j}(z_j)$, con $r_j = r_{z_j}$, $j = 1, \dots, J$. Como Ω es conexo, podemos suponer que la unión de los discos $\bigcup_{j=1}^J D_j$ es también conexa. Como $u \in \text{Har}(\Omega)$, en particular $u \in \text{Har}(D_{R_j}(z_j))$, donde $R_j = 2r_j$, $j = 1, \dots, J$. Entonces por el Corolario 6.1.2, en cada D_j se cumple

$$\max_{z \in \overline{D}_j} u(z) \leq 3 \min_{z \in \overline{D}_j} u(z) \quad (6.1.8) \quad \boxed{26}$$

Ahora, si tomamos dos discos, digamos D_1 y D_2 con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, entonces se tiene

$$\min_{\overline{D}_1} u \leq \min_{\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} u \leq \max_{\overline{D}_2} u \leq 3 \min_{\overline{D}_2} u.$$

Como la unión $\bigcup_{j=1}^J D_j$ es conexa, usando una cadena adecuada de discos esto implica que

$$\min_{\overline{D}_{j_1}} u \leq 3^J \min_{\overline{D}_{j_2}} u, \quad \forall j_1, j_2 \in \{1, \dots, J\}.$$

De aquí sigue, usando que $K \subset \bigcup_{j=1}^J D_j$, que

$$\max_K u \leq \max_{j=1, \dots, J} \max_{\overline{D}_j} u \leq 3 \max_{j=1, \dots, J} \min_{\overline{D}_j} u \leq 3^{J+1} \min_{j=1, \dots, J} \min_{\overline{D}_j} u \leq 3^{J+1} \min_K u.$$

De aquí se concluye el resultado que queremos demostrar. \square

6.2. El Principio de Harnack

Veamos a continuación el Principio de Harnack que afirma que si $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ es una sucesión creciente de funciones armónicas en un abierto conexo U y si para justamente un punto $z \in U$ se cumple que la sucesión $\{u_j(z)\}_j$ es acotada, entonces existe $u \in \text{Har}(U)$ tal que $u_j \rightarrow u$ uniformemente en conjuntos compactos. Es decir, llama la atención cómo la acotación en justamente un punto de la sucesión creciente de funciones armónicas fuerza la acotación en cualquier otro punto.

ppioH

Teorema 6.2.4 (Principio de Harnack) Dado un abierto conexo $U \subseteq \mathbb{C}$ y $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ con cada $u_j \in \text{Har}(U)$, entonces o bien $u_j \rightarrow \infty$ uniformemente en conjuntos compactos, o bien existe $u \in \text{Har}(U)$ tal que $u_j \rightarrow u$ uniformemente sobre conjuntos compactos.

Demostración.

Caso 1: Supongamos que existe $z_0 \in U$ tal que $u_j(z_0) \rightarrow l < \infty$. Para $j > k$ se tiene $u_j(z) - u_k(z) \in \text{Har}(U)$ y además $u_j - u_k \geq 0$. Si K es un compacto de U , por el Corolario 6.1.3, se tiene

$$\max_{z \in K} u_j(z) - u_k(z) \leq C_{K \cup \{z_0\}, U} \left(u_j(z_0) - u_k(z_0) \right) \rightarrow 0$$

Por tanto u_j es de Cauchy uniformemente en K y como consecuencia de ello u_j converge uniformemente para todo $z \in K$. Tomando una sucesión creciente de compactos cuya unión sea U , concluimos que existe $u(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z)$ para todo $z \in U$, y que la convergencia es uniforme sobre compactos. En particular, por el Corolario 4.2.8, obtenemos que $u \in \text{Har}(U)$.

Caso 2: Si para todo $z_0 \in U$ se cumple $u_j(z_0) \rightarrow \infty$, entonces existe j_0 tal que $u_{j_0}(z_0) > 0$. Luego existe $D(z_0, R) \subset U$ con $u_{j_0}|_{D(z_0, R)} > 0$. Por tanto $u_j|_{D(z_0, R)} > 0 \forall j \geq j_0$. Sea $0 \leq r < R$. Del Corolario 6.1.3 se sigue que

$$u_j(z_0) \leq \frac{R+r}{R-r} \min_{\overline{D}_r(z_0)} u_j(z)$$

Hacemos $j \rightarrow \infty$, y como $u_j(z_0) \rightarrow \infty$ se tiene

$$\infty \leq \frac{R+r}{R-r} \lim_{j \rightarrow \infty} \min_{\overline{D}_r(z_0)} u_j(z).$$

Es decir, $u_j(z) \rightarrow \infty$ uniformemente en $z \in \overline{D}_r(z_0)$. Usando que cada compacto $K \subset U$ se puede cubrir con una cantidad finita de tales discos, se obtiene que $u_j(z) \rightarrow \infty$ uniformemente en $z \in K$.

□

Resultados auxiliares

En el apéndice enunciamos varios resultados elementales de variable compleja que se han visto en el curso del grado.

A.1. Funciones holomorfas: Definición y propiedades

Ap_A1

Sea un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$.

defA1

Definición A.1.1 Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **derivable compleja** (u holomorfa) en $z_0 \in \Omega$ si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} := f'(z_0)$$

Diremos que f es **holomorfa** en Ω y lo denotamos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, si f es derivable en todo $z \in \Omega$.

En este trabajo se usará a menudo la siguiente caracterización.

teoA7

Teorema A.1.2 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, diferenciable en z_0 , $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$. Entonces

$$f \text{ derivable compleja en } z_0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en } z_0$$

En ese caso,

$$f'(z_0) = u_x + iv_x = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Demostración. Ver [1, Teorema 2.2.3]. □

C

Teorema A.1.3 Sea un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Si una de las funciones: $\Re(f)$, $\Im(f)$ ó $|f|$, es constante en Ω , entonces f es constante en Ω .

Demostración. (Véase [5, pp. 35-36]). □

A.2. Propiedades del Núcleo de Poisson

Recopilamos algunas propiedades del núcleo de Poisson, que se han usado o mencionado en el Capítulo 3.

E **Proposición A.2.4 (Propiedades del Núcleo de Poisson)** Para cada r fijo con $0 \leq r < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$, el núcleo de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta)}$$

es una función que cumple:

1. $P_r(\theta)$ es una función continua en $[-\pi, \pi]$.

2. $P_r(\theta) > 0$.

3. $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$.

4. $P_r(\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$.

5.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1 \text{ para cada } r \text{ fijo } 0 \leq r < 1.$$

6. Si $0 < \delta < |\theta| < \pi$, entonces $P_r(\theta) < P_r(\delta)$.

7. $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(0) = 0$ uniformemente en $[-\pi, \delta] \cup [\delta, \pi]$ para todo $\delta \in (0, \pi)$.

8. $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(0) = \infty$.

Demostración.

1. Veamos que el denominador de $P_r(\theta)$ no se anula:

Si $0 \leq r < 1$ entonces $2r \cos(\theta) \leq 2r$, o bien $-2r \cos(\theta) \geq 2r$.

Por tanto, $1 + r^2 - 2r \cos(\theta) \geq 1 + r^2 - 2r$,

es decir, $1 + r^2 - 2r \cos(\theta) \geq (1 - r)^2 > 0$.

2. Se sigue de $(1 - r)^2 > 0$ y $1 + r^2 - 2r \cos(\theta) > 0$.

3. Es consecuencia de que el coseno es una función par.

4. Se debe a que el coseno es una función 2π -periódica.

5. Usando la definición de $P_r(\theta)$ en (3.2.1) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \quad (\text{serie conv. unif. al ser } r < 1.) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1 \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} \left[\frac{e^{in\theta}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{0}{n} = 0, & \text{si } n \neq 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

6. Sea $0 < \delta < |\theta| < \pi$ y $f : [\delta, \theta] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t)}$$

Como la función $\cos t$ es par, y decreciente en $[0, \pi]$, tenemos $\cos \delta > \cos |\theta| = \cos \theta$, de donde se sigue que $f(\delta) > f(\theta)$.

7. Si $\delta \in (0, \pi)$ y $\theta \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ se tiene que $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Entonces por (6) $0 < P_r(\theta) < P_r(\delta)$. Es decir,

$$0 < P_r(\theta) < \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\delta)} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$$

Luego $P_r(\theta) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$ uniformemente en $\theta \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, para cada $\delta \in (0, \pi)$.

8.

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(0) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{(1 - r)(1 + r)}{(1 - r)^2} = \infty.$$

□

Observación A.2.5 (Ilustración gráfica del Núcleo de Poisson)

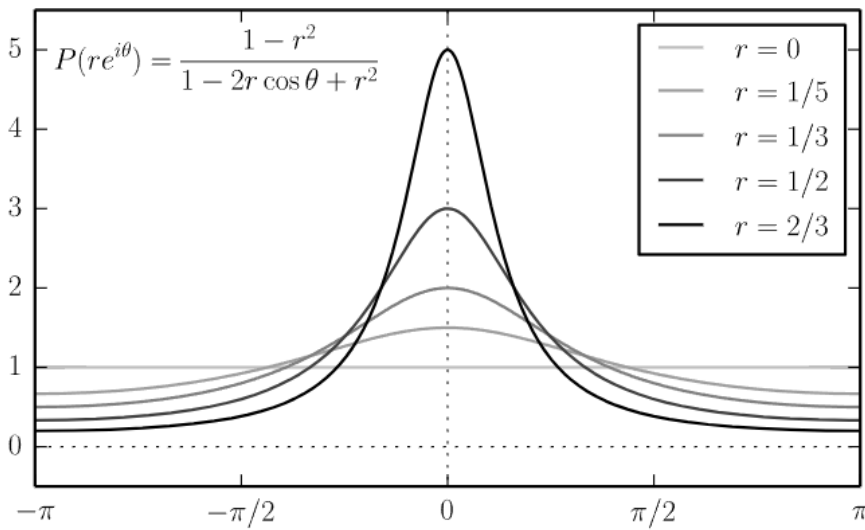


Figura A.1: Núcleo de Poisson en \mathbb{D} para algunos valores de r .

fig2

Observación A.2.6 (Significado geométrico del Núcleo de Poisson)

Si s es la distancia de $re^{i\theta}$ a $e^{i\alpha}$ donde $0 \leq r < 1$ Entonces

$$P_r(\theta - \alpha) = \frac{1 - r^2}{s^2}$$

Demostración. Como $re^{i\theta} = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$ y $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ se tiene

$$s = \sqrt{(r \cos(\theta) - \cos(\alpha))^2 + (r \sin(\theta) - \sin(\alpha))^2} = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \alpha)}$$

□

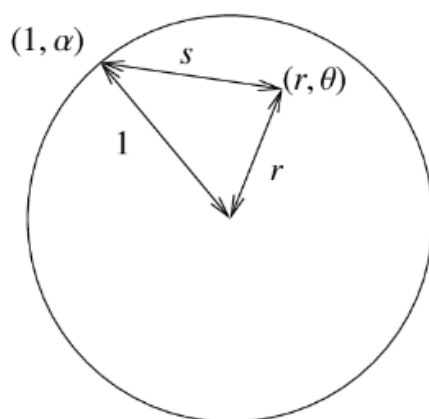


Figura A.2: Significado geométrico de Núcleo de Poisson.

fig3

A.3. Automorfismos del disco unidad

Ap_A2

defA9

Definición A.3.7 Las transformaciones de Möbius son las funciones racionales (no constantes) que se expresan de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad ad - bc = 1$$

El conjunto de todas ellas se suele denotar por \mathfrak{M} .

Observación A.3.8 Notar que

$$\frac{az + b}{cz + d} \equiv cte \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

Observación A.3.9 Habitualmente se identifica

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

donde la notación $SL(2, \mathbb{C})$ hace referencia al conjunto de matrices $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ cuyo determinante vale 1. Con esa identificación es fácil ver que, si $S, T \in \mathfrak{M}$, entonces la composición $S \circ T$ corresponde al producto de las matrices, y la función inversa T^{-1} a la matriz inversa.

propA10

Observación A.3.10 Se cumple la siguiente propiedad: Si $T \in \mathfrak{M}$ y $\#\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, T(z) = z\} \geq 3$ entonces $T = \text{Id}$. Esto se comprueba fácilmente resolviendo la ecuación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z,$$

que da lugar a un polinomio de grado menor o igual que 2, y por tanto a lo sumo tiene 2 soluciones en \mathbb{C} .

Definimos a continuación una familia de transformaciones de Möbius, $\{\Phi_a\}_{a \in \mathbb{D}} \subset \mathfrak{M}$ que tienen la propiedad de ser biyecciones holomorfas del disco unidad \mathbb{D} en sí mismo (es decir, automorfismos de \mathbb{D}).

Lema A.3.11 Sea $a \in \mathbb{D}$. Entonces la aplicación

$$\Phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. Φ_a es holomorfa en un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$.
2. $\Phi_a(a) = 0$ y $\Phi_a(0) = -a$.
3. $\Phi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es biyectiva y su inversa viene dada por $\Phi_a^{-1} = \Phi_{-a}$.

Demostración.

1. Sabemos que $\Phi_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{1/\bar{a}\})$, pero $1/\bar{a} \notin \mathbb{D}$ por ser $a \in \mathbb{D}$, luego $\mathbb{C} - \{1/\bar{a}\}$ es un entorno de $\overline{\mathbb{D}}$.
2. Obvio por definición de $\Phi_a(z)$.
3. Veamos que Φ_a es una aplicación de \mathbb{D} en \mathbb{D} ,

$$\begin{aligned} |\Phi_a(z)| &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \\ \iff |z - a|^2 &< |1 - \bar{a}z|^2 \\ \iff |z|^2 - 2\Re(\bar{a}z) + |a|^2 &< 1 - 2\Re(\bar{a}z) + |a|^2|z|^2 \quad (*) \\ \iff 0 &< (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) \end{aligned}$$

La segunda doble implicación (*) es consecuencia de:

$$|z - w|^2 = |z|^2 - 2\Re(\bar{w}z) + |w|^2 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Como $a \in \mathbb{D}$ entonces $|a| < 1$, luego $|z| < 1$. Veamos que $\Phi_{-a} \circ \Phi_a = Id$. Esto se puede comprobar fácilmente haciendo la composición de ambas funciones (o la multiplicación de las matrices asociadas). Una forma más elegante se basa en la Observación A.3.10, es decir, basta ver que $\Phi_{-a} \circ \Phi_a$ e Id coinciden en tres puntos.

$$\begin{aligned} \Phi_{-a} \circ \Phi_a(0) &= \Phi_{-a}(-a) = 0 \\ \Phi_{-a} \circ \Phi_a(a) &= \Phi_{-a}(0) = a \\ \Phi_{-a} \circ \Phi_a(-a) &= \Phi_{-a}\left(\frac{-2a}{1 + |a|^2}\right) = \frac{-a + a|a|^2}{|a|^2 + 1 - 2|a|^2} = \frac{a(|a|^2 - 1)}{-|a|^2 + 1} = -a \end{aligned}$$

Comprobación análoga para $\Phi_a \circ \Phi_{-a}$.

□

A.4. Integración y Fórmula de Cauchy en el disco.

Recordamos algunos conceptos y resultados sobre integración compleja que se han visto en el grado.

Definición A.4.12 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un **arco** si es continua en $[a, b]$ y C^1 a trozos, i.e. existe una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, tal que $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ es de clase C^1 para cada $j = 1, \dots, n$. El conjunto imagen se denota por $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

A11 **Definición A.4.13** Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco y sea $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua, definimos la **Integral curvilínea sobre un arco**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Definimos también

$$\int_a^b f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

$$\text{Long}(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Enumeramos algunas propiedades elementales que se usan en la memoria.

Proposición A.4.14 Si γ es un arco y $f \in C(\gamma^*)$

1. $\int_{\gamma} (c_1 f_1 + c_2 f_2) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1 dz + c_2 \int_{\gamma} f_2 dz \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
2. $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$.

Demostración. (Véase [5, pp. 70-72]). □

A12 **Teorema A.4.15 Cambio de Variable.** Sea un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $F \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ y γ un arco con $\gamma^* \subset \Omega$. Entonces $F \circ \gamma$ es un arco y se cumple:

$$\int_{F \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(F(w)) F'(w) dw, \quad \forall f \in C(F(\gamma^*))$$

Demostración. Basta probar $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$, usando la regla de la cadena y Cauchy-Riemann. □

A13 **Teorema A.4.16 (Regla de Barrow para funciones holomorfas).** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco tal que $\gamma^* \subset \Omega$. Si f tiene una primitiva $F \in \mathcal{H}(\Omega)$, es decir $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Demostración. (Véase [5, pp. 72-73]). □

B **Lema A.4.17 (Derivación de integrales paramétricas).** Sea un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\gamma = \text{arco}$ y $f : \Omega \times \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Sea

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z, \xi) d\xi, \quad z \in \Omega$$

Supongamos que:

1. Para todo $\xi_0 \in \gamma^*$, la aplicación de Ω a \mathbb{C} tal que $z \mapsto f(z, \xi_0)$ es holomorfa.
2. $\frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi) \in C(\Omega \times \gamma^*)$.

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \left[\int_{\gamma} f(z, \xi) d\xi \right] = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi) d\xi, \quad \forall z \in \Omega.$$

Demostración. (Véase [2, p. 56]). □

Definición A.4.18 $E \subset \mathbb{C}$ se dice un **conjunto estrellado** si

$$\exists z_0 \in E : [z_0, z] \subset E, \forall z \in E.$$

A19 **Teorema A.4.19 (Fórmula integral de Cauchy para el disco).** Sea un abierto estrellado $E \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(E)$, supongamos que $\overline{D}(z_0, r) \subset E$. Entonces, para cada $z \in D = D(z_0, r)$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Demostración. (Véase [5, p. 89]). □

A20 **Teorema A.4.20 (Fórmula de Cauchy para derivadas).** Sea un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, $f^{(n)} \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n = 1, 2, \dots$ y se tiene que si $\overline{D}(z_0, \rho) \subset \Omega$ entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \rho)} \frac{f(w)}{(w - z)^{(n+1)}} dw, \quad \forall z \in D(z_0, \rho)$$

Además,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, \rho).$$

Demostración. (Véase [5, p.90]). □

A20b **Corolario A.4.21** Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $f \in C^{\infty}(\Omega)$.

A.5. Más resultados

A21 **Teorema A.5.22 Principio del Módulo Máximo para funciones holomorfas** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe un $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in \Omega$. Entonces f es constante en Ω .

Demostración. (Véase [5, p.96]). □

A22 **Teorema A.5.23 (Principio de Prolongación Analítica).** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$ un conjunto con puntos de acumulación en Ω . Entonces, si f es un función analítica en Ω y $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}$, se tiene que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. En particular, si f y g son analíticas en Ω y $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathcal{A}$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. (Véase [5, pp.48-49]). □

SC **Definición A.5.24** Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **simplemente conexo** si $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$ es conexo.

AA **Teorema A.5.25** Sea un abierto $\Omega \in \mathbb{C}$. Son equivalentes:

1. Ω es simplemente conexo.
2. Cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva holomorfa en Ω .

Demostración. (Véase [5, p. 112]). □

A.6. Resultados clásicos

Ap_A4

A23 **Teorema A.6.26 (Teorema de la Convergencia Dominada).** Sea $F \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones tales que $|f_n(t)| \leq F(t) \forall t$ y existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ para casi todo punto t . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

Demostración. (Véase [2, pp. 54-55]). □

Bibliografía

- [5] [1] ÓSCAR BLASCO, *Variable Compleja*. Univ. Valencia, (<https://www.uv.es/oblasco/Docencia/Teoria/AnalisisIV.pdf>)
- [6] [2] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd Ed. Pure and Applied Mathematics. New York: Wiley, 1999. ISBN:9780471317166.
- [1] [3] E. GREENE, G. KRANTZ, *Function Theory of One Complex Variable*. 3rd Ed. Editorial Board, 2006.
- [4] [4] ARTHUR A. HAUSER, JR., *Variable Compleja*. Fondo Educativo Interamericano, 1971
- [2] [5] JOSÉ M. MAZÓN RUIZ, *Funciones de Variable Compleja. Teoría y Problemas*. Amazon Italia Logística S.r.l. 2023. ISBN:9798506409052.
- [3] [6] G. VERA, *Lecciones de Análisis Complejo* ([https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC\(2013\).pdf](https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC(2013).pdf)), 2011.