UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Teoría de distribuciones

Antonio Pérez García

2019/2020

Declaración de originalidad

ANTONIO PÉREZ GARCÍA, autor del Trabajo de Fin de Grado *Teoría de distribuciones*, bajo la tutela del profesor GUSTAVO GARRIGÓS ANIORTE, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 2 de septiembre de 2020

Fdo.: Antonio Pérez García

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

A mi madre, Ana, por lo que te ha costado sacarme adelante.

También a mi tutor, Gustavo, por su gran ayuda siempre.

Índice general

Abstract

When we consider, for example, the partial differential equation (PDE) with initial and boundary conditions

$$\blacklozenge \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{for } (x,\, t) \in (0,\, 1) \times \mathbb{R}^+$$
$$f(x,\, 0) = g(x) \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,\, 0) = 0 \quad \text{for all } x \in [0,\, 1]$$
$$f(0,\, t) = 0 = f(1,\, t) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \; \blacklozenge$$

one could take for granted that the solution $f = f(x,\, t)$ needs to be differentiable twice with respect to each variable, as well as the function g (regarding its sole variable). In fact, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) contended that if a function f was not of $\mathtt{C}^2(U)$ class, where U is the open set $(0,\, 1) \times \mathbb{R}^+$, then it could not be a solution for this problem.

However, the famous physicist and mathematician Leonhard Euler (1707-1783) was able to dispute d'Alembert's positions regarding the rejection of not sufficiently differentiable functions as possible solutions of the PDE; with this aim, Euler argued that the solution f to the physics problem of the vibrating string with fixed end-points (shown above) could be completely arbitrary depending on any curve g that could be drawn as its initial state. Apart from that, Euler agreed with d'Alembert that the rules of analysis known up to the moment were not able to solve the problem he had just stated, and retorted that the rules would have to be extended so as to be able to deal with it in a more ambitious way (in the sense of not having to ask a solution for so many regularity conditions).

Around two hundred years later, this would evolve into an abstraction of the concept of function, eventually giving rise to the *Theory of Distributions* in the year 1945 by the French mathematician Laurent Schwartz (1915-2002), who presented a new mathematical object, the *distribution* or *generalized function*. Distributions have the property of being infinitely differentiable, although in a new and wider way (which will be presented in detail in this work), and most importantly, they extend the rules of classical analysis by giving an answer to the d'Alembert-Euler dilemma about the regularity of solutions of a partial differential equation.

The aim of the present work is to study the Theory of Distributions from its fundamental topological roots, defining a generalized function as an element of the topological dual of the space of test functions $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ —compactly supported, smooth functions defined in the open set $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$— equipped with an adequate topology. This study, although supplemented with examples, is mainly theoretical but aims to be complete by presenting as well the most important sub-types of distribution (and their relationship with other function spaces), namely: *compactly supported distributions* and *tempered distributions*.

The work begins by gathering definitions and results related to the *Theory of Topological Vector Spaces* (a topological vector space is a vector space $X = X_{(+,\, \cdot)}$ with a Hausdorff topology

under which the vector space operations are continuous). A frequently cited result along the whole work is **Theorem 1.1.22** from **Chapter 1**, which establishes that,

■ *if* $(X,\,\tau_1)$ *and* $(Y,\,\tau_2)$ *are two topological vector spaces and* τ_1 *is compatible with an* invariant metric —**Definition 1.1.16**—, *then a linear mapping of* $(X,\,\tau_1)$ *into* $(Y,\,\tau_2)$ *is continuous if, and only if, it is sequentially continuous.*

This, together with the notion of *seminorm* and the convex sets related to it —**Definition 1.2.23**— allows to introduce a new and indispensable ingredient for the next chapter: the concept of invariant metric. We conclude the chapter with **Theorems 1.2.27** and **1.3.29**, which combined together allow to equip the function spaces that appear in the following chapters with adequate topologies; they are quoted, respectively, hereafter:

■ *Let* Π *be a* separating —**Definition 1.2.24**— *family of seminorms on* X *and consider the collection*

$$\mathscr{B}_{\mathbf{0}} = \left\{ \cap_{(p,\,n)\in\Delta} \mathbf{V}(p,\,n) \,\middle|\, \Delta \subset \Pi \times \mathbb{N},\ |\Delta| < +\infty \right\}.$$

Then $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ *is a convex* balanced —see **Definition 1.1.6**— *local base for a vector topology* τ *on* X *under which*

a) *every* $p \in \Pi$ *is continuous and*

b) *a set* $E \subset X$ *is bounded if, and only if, every* $p \in \Pi$ *is bounded on* E.

■ *If* X *is a complex vector space and* $\Pi = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *is a countable separating family of seminorms on* X, *then the vector topology* τ *induced by* Π *is compatible with an invariant metric.*

Following this path, it is not direct to obtain the definition of distribution. Before getting there, already in **Chapter 2**, a meticulous study of the topological vector space $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ needs to be done. The space $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ consists of the smooth functions defined in the open set Ω, along with the usual operations of addition and product by complex scalars, and $\mathscr{E}$ is the topology obtained after applying **Theorem 1.3.29** to $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ by considering a *fundamental compact sequence* $\{\mathtt{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of Ω —see subsection **2.1.3**— and the seminorms

$$p_n(f) = \text{máx}\{|\mathtt{D}^\alpha f(\mathbf{x})| :\ \mathbf{x} \in \mathtt{K}_n,\ |\alpha| \le n\}\ \ \forall\, f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

It is important to mention that $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ is an example of a metrizable topological space which is not normable. In a nutshell, after completing such study, which the main point being the characterisation of the Heine-Borel property in $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ through the *sequential compactness* —**Definition 1.1.12** and subsection **2.2.3**—, the following results are obtained:

■ *Given a sequence* $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ *and a function* $h \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$, *the following statements are equivalent:*

I. $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}} h$

II. *For each* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, *the sequence* $\{\mathtt{D}^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converges uniformly in compact sets of* Ω *to* $\mathtt{D}^\alpha h$.

■ $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ *is a topological vector space with a local convex topology; it is also metrizable, not normable, complete and verifies the Heine-Borel property.*

■ *If $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ —that is, $K \subset \Omega$ is compact— and has nonempty interior, then*

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\psi \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\psi) \subseteq K\}$$

is an $\mathscr{E}-$closed subspace of $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ with $\dim \mathscr{D}_K(\Omega) = \infty$. Also, the topological subspace $(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K)$, where $\mathscr{E}^K$ is the topology that $\mathscr{D}_K(\Omega)$ inherits from $\mathscr{E}$, is metrizable, not normable, complete and verifies the Heine-Borel property.

In fact, these topological subspaces will be the key to define a suitable topology for the space of test functions. Without further ado, **Theorem** 2.3.27 is proved, which claims that,

■ *by considering the families*

$$\mathscr{B}_0 = \left\{W \subset \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \mid W \text{ is convex, balanced and } W \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \mathscr{E}^K \ \ \forall\, K \in \mathfrak{K}(\Omega)\right\}$$
$$\text{and} \quad \mathscr{D} = \left\{\cup_{(\phi,\, W)\in\Delta}(\phi + W) \,\middle|\, \Delta \subseteq \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \times \mathscr{B}_0\right\},$$

we obtain

a) *$\mathscr{D}$ is a topology on $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ and $\mathscr{B}_0$ is a local base for $\mathscr{D}$ and*

b) *$(\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega), \mathscr{D})$ is a locally convex topological vector space.*

Next, the $\mathscr{D}$ topology's properties are proved, gathered in results **Theorems** 2.3.29, 2.3.31 and 2.3.32, where, perhaps, the most interesting are:

■ *For each compact set $K \subset \Omega$, the topology $\mathscr{E}^K$ matches the topology that $\mathscr{D}_K(\Omega)$ inherits from $\mathscr{D}$.*

■ *Given the sequence $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$, the following statements are equivalent:*

I. $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} 0$

II. *There exits a compact set $K_0 \subset \Omega$ such that $\operatorname{supp}(\psi_m) \subseteq K_0$ for all $m \in \mathbb{N}$ and, also,*

$$\mathtt{D}^\alpha \psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}.$$

■ *$(\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega), \mathscr{D})$ is complete.*

■ *A linear mapping of $(\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega), \mathscr{D})$ into another locally convex topological vector space is continuous if, and only if, it is sequentially continuous,* in spite of the fact that *$(\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega), \mathscr{D})$ is not metrizable.*

At this point it becomes possible to present the definition of distribution. A distribution or generalized function is an element $\mathrm{T} : \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ of $\mathscr{D}'(\Omega)$, the topological dual of $(\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega), \mathscr{D})$, that means, it "is" a linear continuous mapping under $\mathscr{D} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$. Following up, **Theorem** 2.4.36 is proved, which characterises distributions according to the seminorms

$$\|\phi\|_n = \text{máx}\{|\mathtt{D}^\alpha \phi(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \Omega, \ |\alpha| \le n\} \ \ \forall\, \phi \in \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

and the subspaces $\mathscr{D}_K(\Omega)$ —$K \subset \Omega$ compact—:

■ *Let* $\mathrm{T} : \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *be a linear form. Then* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *if, and only if, for each compact set* $K \subset \Omega$*, there exist* $n \in \mathbb{N}$*,* $c > 0$ *(constants that depend on* K*) such that*

$$|\mathrm{T}(\phi)| \leq c \cdot \|\phi\|_n \quad \forall\, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Thanks to this characterisation, a large number of examples of distributions is presented rigorously in subsections 2.4.2, 2.4.3 and 2.4.4. To finish **Chapter** 2, we define the space of compactly supported distributubions $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega) \subsetneq \mathscr{D}'(\Omega)$ and establish the following result:

■ *The space* $\mathscr{E}'(\Omega)$ —the dual of $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$— *identifies with* $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$*, in the sense that the natural restriction operator*

$$\mathscr{E}'(\Omega) \ni \mathrm{T} \longmapsto \mathfrak{R}\mathrm{T} := \mathrm{T}|_{\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)}$$

is a linear isomorphism of $\mathscr{E}'(\Omega)$ *into* $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$.

Now in **Chapter** 3, we develop the theoretical machinery that ends up with the definition of the *convolution of two distributions*; this extended notion of convolution is a central tool in the theory, due to its applications to the construction of distributional solutions of partial differential equations. The theorem of Malgrange and Ehrenpreis (only stated here) is of uttermost importance since it ensures the existence of a *fundamental solution* for every constant coefficient linear differential operator —**Definition** 3.3.23—. Here the convolution enters into play, and we derive the following corollary:

■ *Let* $\kappa \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *be a fundamental solution of a constant coefficient linear differential operator* $\mathtt{L}$*. If* v *is a compactly supported distribution on* $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$*, then the inhomogeneous* PDE $\mathtt{L}u = v$ *has as a distributional solution* $u = \kappa * v$.

Last but not least, in **Chapter** 4, we are concerned with another very useful tool in the theory of partial differential equations: the *distributional Fourier transform*. Once we have reviewed the basic concepts regarding Fourier transform $\mathscr{F}\{f\} = \hat{f}$ of functions $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ in section 4.1, we move on to define a new function space (called the Schwartz class) and a new family of seminorms:

$$\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) = \left\{ f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) : \ \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}} \left|\mathrm{P}(\mathbf{x})\, \mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| < +\infty \text{ for all polynomial P and all } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}} \right\}$$
$$s_n(f) = \text{máx}\left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}} \left|\mathbf{x}^{\beta} \mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| : \ |\beta| \leq n, \ |\alpha| \leq n \right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Again, using the theorems of the first chapter, **Theorems** 1.2.27 and 1.3.29, we obtain the topological vector space $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$. **Theorem** 4.3.9 collects its main properties, the most relevant being the following:

■ *Given a sequence* $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *and a function* $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$*, the following statements are equivalent:*

I. $f_m \xrightarrow[m \to \infty]{\mathscr{S}} f$

II. $\mathrm{id}^{\beta} \mathtt{D}^{\alpha}(f_m - f) \xrightarrow[m \to \infty]{\text{unif.}} 0 \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$*, where* id^{β} *is the monomial* $\mathbf{x}^{\beta}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

■ *The topological vector space* $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *is complete.*

After introducing the topology $\mathscr{S}$, we consider the Fourier transform as an operator $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ restricted to the Schwartz class, and we prove in **Theorems** 4.4.11 and 4.4.14 the following

■ *$\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ is a linear, continuous, bijective mapping of $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ into itself, and it has a continuous inverse.*

With these ingredients, after proving that $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *is identified with a certain subspace of* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ —**Theorem** 4.5.19— the definition of tempered distribution can be given: a tempered distribution is an element of $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ which admits a continuous extension under $\mathscr{S} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$ to the Schwartz class or, what is the same, it "is" an element of $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, the dual of $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$. It is also relevant in this chapter the fact that *every compactly supported distribution over* $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ *is tempered* —**Theorem** 4.5.26—, obtaining in this way the relations

$$\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \subset \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \text{ and}$$
$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \hookleftarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \hookleftarrow \mathscr{E}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}),$$

where all inclusions are strict.

Finally, in section 4.6 the definition of distributional Fourier transform is given, its main properties are shown and the Fourier transforms of some tempered distributions are precisely calculated in some examples, which explain briefly the use of this transformation in the resolution of partial differential equations.

Resumen

Cuando se considera, por ejemplo, la ecuación en derivadas parciales (EDP) con condiciones iniciales y de contorno

$$\blacklozenge\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{para } (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}^+$$
$$f(x, 0) = g(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 1]$$
$$f(0, t) = 0 = f(1, t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\ \blacklozenge$$

cualquiera podría dar por hecho que la solución $f = f(x, t)$ ha de ser dos veces derivable respecto de cada variable, al igual que la función g (respecto de su única variable). De hecho, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) sostenía que si una función f no era de clase $\mathtt{C}^2(U)$, donde U es el abierto $(0, 1) \times \mathbb{R}^+$, entonces no podría ser solución de este problema.

Sin embargo, el célebre físico y matemático Leonhard Euler (1707-1783) fue capaz de rebatir muy acertadamente las posiciones de d'Alembert con las que rechazaba como posibles soluciones funciones no suficientemente derivables; para ello, Euler argumentó que la solución f al problema físico de la cuerda vibrante de extremos fijos (expuesto arriba) podría ser completamente arbitraria dependiendo de cualquier curva g que se pudiera dibujar como estado inicial. Además, Euler se mostraba de acuerdo con d'Alembert en que las reglas del análisis hasta entonces conocido no podían solventar el problema que acababa de abrir y replicó que habría que extender estas reglas para poder tratarlo de manera más ambiciosa (en el sentido de no tener que exigirle a una solución tantas condiciones de regularidad).

Alrededor de doscientos años más tarde, esto implicaría tener que abstraer incluso el concepto de función, surgiendo así la *teoría de distribuciones* en el año 1945 a manos del matemático francés Laurent Schwartz (1915-2002), quien presentó un nuevo objeto matemático, la *distribución* o *función generalizada*. Ahora, una distribución tenía la propiedad de ser infinitamente diferenciable, aunque en un nuevo sentido más amplio (que se expondrá con detalle en este trabajo), y, lo más importante, extendía las reglas del análisis clásico dando a la vez solución al dilema de d'Alembert y Euler sobre la regularidad de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales[1].

El objetivo del presente trabajo es estudiar la teoría de distribuciones desde sus raíces topológicas fundamentales, definiendo una función generalizada como una aplicación del dual topológico del espacio de funciones de testeo $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ —funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto definidas en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$—[2] dotado de la topología adecuada. Este

[1] Para saber más sobre los antecedentes de las distribuciones ver la referenica [1].

[2] Esta definición ya fue anticipada, de alguna manera, por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en un intento de dar una solución razonable al problema citado de la cuerda vibrante y está inspirada en la fórmula de la integración por partes. En [1], Fernando Bombal explica el método sugerido por Lagrange: «La ecuación diferencial a estudiar

estudio, aun estando complementado con ejemplos que inciden en el éxito de la generalización del concepto de función, es principalmente teórico y presenta también los dos subtipos de distribuciones más importantes y su relación con otros espacios (vectoriales topológicos) de funciones, a saber: las *distribuciones de soporte compacto* y las *distribuciones temperadas*.

El trabajo comienza con una reunión de definiciones y resultados relativos a la teoría de los *espacios vectoriales topológicos* (un espacio vectorial topológico no es más que un espacio vectorial $X = X_{(+,\,\cdot)}$ con topología Hausdorff bajo la que las operaciones de espacio vectorial son continuas). Un resultado muy recurrido a lo largo de todo el trabajo de este **Capítulo 1** es el **Teorema 1.1.22**, el cual establece que,

- *si* $(X,\,\tau_1)$ *y* $(Y,\,\tau_2)$ *son espacios vectoriales topológicos con* τ_1 *compatible con una* métrica invariante —**Definición 1.1.16**—, *entonces una aplicación lineal de* $(X,\,\tau_1)$ *en* $(Y,\,\tau_2)$ *es continua si, y sólo si, es secuencialmente continua.*

Así, junto con las *seminormas* y los conjuntos convexos asociados a ellas —**Definición 1.2.23**— se introduce un ingrediente indispensable para el siguiente capítulo: las métricas invariantes. El capítulo termina con los resultados **Teorema 1.2.27** y **Teorema 1.3.29** usados conjuntamente para dotar de las topologías adecuadas a los espacios funcionales que aparecen en los siguientes capítulos; son citados, respectivamente, a continuación:

- *Sea* Π *una familia de seminormas sobre* X *que* separa puntos —consultar la **Definición 1.2.24**— *y sea*

$$\mathscr{B}_{\mathbf{0}} = \left\{ \cap_{(p,\,n)\in\Delta} \mathbf{V}(p,\,n) \,\middle|\, \Delta \subset \Pi \times \mathbb{N},\ |\Delta| < +\infty \right\}.$$

Entonces, la colección $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ *es una base local convexa y* equilibrada —ver **Definición 1.1.6**— *de una topología vectorial* τ *para* X *bajo la que*

  a) *cada* $p \in \Pi$ *es continua y*

  b) *un conjunto* $E \subset X$ *es acotado si, y sólo si, cada* $p \in \Pi$ *es acotada sobre* E.

- *Si* X *es un* $\mathbb{C}-$*espacio vectorial y* $\Pi = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una familia (numerable) de seminormas sobre* X *que separa puntos, entonces la topología vectorial* τ *inducida por* Π *es compatible con una métrica invariante.*

Siguiendo este camino, no es directo obtener la definición de distribución. Antes de llegar a ella, ya en el **Capítulo 2**, hay que realizar un exhaustivo estudio del espacio vectorial topológico $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$. El espacio $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ es el de las funciones infinitamente diferenciables definidas en el abierto Ω junto con las operaciones habituales suma y producto por escalares complejos y $\mathscr{E}$ es la topología obtenida al aplicar el **Teorema 1.3.29** a $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ considerando la *sucesión fundamental de compactos* $\{\mathtt{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω —ver subsección **2.1.3**— y las seminormas

$$p_n(f) = \max\{|\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})| :\ \mathbf{x} \in \mathtt{K}_n,\ |\alpha| \le n\}\ \ \forall\, f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Cabe resaltar que $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$ es un ejemplo de espacio topológico metrizable pero no normable. En resumidas cuentas, tras dicho estudio, donde lo más destacable es la caracterización de la propiedad de Heine-Borel en $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$ a través de la *compacidad secuencial* —**Definición 1.1.12** y subsección **2.2.3**—, se tiene los resultados que se expone a continuación:

---

se multiplica por una función suficientemente regular con soporte compacto en un cierto dominio (función test) y el resultado se integra por partes. De esta forma, el operador diferencial se transfiere a la función test y la ecuación integro-diferencial resultante, que ha de verificarse para todas las funciones test, no presupone ninguna regularidad de la solución.»

■ *Dadas una sucesión* $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ *y* $h \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$*, son equivalentes:*

I. $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}} h$

II. *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$*, la sucesión* $\{\mathtt{D}^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de* Ω *a* $\mathtt{D}^\alpha h$*.*

■ $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ *es un espacio vectorial topológico con topología localmente convexa, metrizable (con métrica invariante), completa, con la propiedad de Heine-Borel y, además, es no normable.*

■ *Si* $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ *—es decir,* $K \subset \Omega$ *es compacto— y tiene interior no vacío, entonces*

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\psi \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{sop}(\psi) \subseteq K\}$$

es un subespacio $\mathscr{E}-$*cerrado de* $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ *con* $\dim \mathscr{D}_K(\Omega) = \infty$*. Además, el subespacio topológico* $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$*, donde* $\mathscr{E}^K$ *es la topología que* $\mathscr{D}_K(\Omega)$ *hereda de* $\mathscr{E}$*, tiene la propiedad de Heine-Borel, es metrizable, completo y no normable.*

De hecho, estos subespacios topológicos son claves para definir la topología idónea para el espacio de las funciones de testeo. Sin más rodeos se prueba el **Teorema** 2.3.27, el cual asegura que,

■ *siendo las familias*

$$\mathscr{B}_0 = \left\{W \subset \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega) \mid W \text{ es convexo, equilibrado y } W \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \mathscr{E}^K \;\; \forall\, K \in \mathfrak{K}(\Omega)\right\}$$
$$\text{y} \quad \mathscr{D} = \left\{\cup_{(\phi,\, W)\in\Delta}(\phi + W) \,\middle|\, \Delta \subseteq \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega) \times \mathscr{B}_0\right\},$$

se tiene

a) $\mathscr{D}$ *es una topología para* $\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega)$ *y* $\mathscr{B}_0$ *es una base local de* $\mathscr{D}$ *y*

b) $(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ *es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

A continuación, se prueba las propiedades de la topología $\mathscr{D}$, recogidas en **Teorema** 2.3.29, **Teorema** 2.3.31 y **Teorema** 2.3.32, donde quizá las más interesantes son:

■ *Para cada* $K \subset \Omega$ *compacto, la topología* $\mathscr{E}^K$ *coincide con la topología (relativa) que* $\mathscr{D}_K(\Omega)$ *hereda de* $\mathscr{D}$*.*

■ *Dada la sucesión* $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega)$*, son equivalentes*

I. $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} 0$

II. *Existe un compacto* $K_0 \subset \Omega$ *tal que* $\operatorname{sop}(\psi_m) \subseteq K_0$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y, por otro lado,*

$$\mathtt{D}^\alpha \psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0 \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}.$$

■ $(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ *es completo.*

■ *Una aplicación lineal de* $(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ *en un otro espacio vectorial topológico localmente convexo es continua si, y sólo si, es secuencialmente continua,* a pesar de que $(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ *es no metrizable.*

Ahora sí se está en condiciones de presentar la definición de distribución. Una distribución o función generalizada es un elemento $\mathrm{T} : \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ de $\mathscr{D}'(\Omega)$ el dual topológico de $(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D})$, es decir, una aplicación lineal y continua bajo $\mathscr{D} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$. De seguido, se prueba el **Teorema 2.4.36**, que caracteriza, en función de las seminormas

$$\|\phi\|_n = \text{máx}\{|\mathtt{D}^{\alpha}\phi(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Omega, |\alpha| \leq n\} \ \ \forall \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \quad (n \in \mathbb{N})$$

y de los subespacios $\mathscr{D}_K(\Omega)$ —$K \subset \Omega$ compacto—, a las distribuciones:

■ *Sea* $\mathrm{T} : \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma lineal. Entonces* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *si, y sólo si, para cada compacto* $K \subset \Omega$*, existen* $n \in \mathbb{N}$*,* $c > 0$ *(constantes que dependen de* K*) tales que*

$$|\mathrm{T}(\phi)| \leq c \cdot \|\phi\|_n \ \ \forall \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Gracias a esta caracterización se presenta con total rigor la tira de ejemplos de distribuciones en las subsecciones 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4. Para terminar este **Capítulo 2** se define de manera natural el espacio de las distribuciones de soporte compacto $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega) \subsetneq \mathscr{D}'(\Omega)$ y se prueba la relación

■ *El espacio* $\mathscr{E}'(\Omega)$ *—el dual de* $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$*— se identifica con el espacio* $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$*, en el sentido de que el operador de restricción natural*

$$\mathscr{E}'(\Omega) \ni \mathrm{T} \longmapsto \mathfrak{R}\mathrm{T} := \mathrm{T}|_{\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)}$$

es un isomorfismo lineal de $\mathscr{E}'(\Omega)$ *en* $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$*.*

Ya en el **Capítulo 3** es donde se motiva y se detalla el desarrollo teórico que desemboca en la definición de *convolución de dos distribuciones*; esta convolución es una de las herramientas fundamentales de la teoría por sus aplicaciones a la resolución distribucional de ecuaciones en derivadas parciales. De vital importancia es el teorema de Malgrange-Ehrenpreis (que sólo se enuncia), pues asegura la existencia de *solución fundamental* de un operador diferencial de coeficientes constantes —**Definición 3.3.23**— y aquí es donde entra en juego la convolución:

■ *Sea* $\kappa \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *una solución fundamental del operador diferencial de coeficientes constantes* $\mathtt{L}$*. Si* v *es una distribución sobre* $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *y tiene soporte compacto, entonces la* EDP *no homogénea* $\mathtt{L}u = v$ *tiene como solución distribucional* $u = \kappa * v$*.*

Finalmente, en el **Capítulo 4** y último se presenta otra herramienta del análisis de gran utilidad a la hora de encontrar soluciones a ecuaciones en derivadas parciales: se trata, como no, de la *transformada de Fourier;* más concretamente, de la *transformada de Fourier distribucional*. Una vez hecho en la sección 4.1 el repaso de los conceptos básicos concernientes a la transformada de Fourier $\mathscr{F}\{f\} = \hat{f}$ de funciones $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, se pasa a definir un nuevo espacio de funciones (llamado la *clase de Schwartz*) y una nueva familia de seminormas:

$$\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) = \left\{f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) : \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}\left|\mathrm{P}(\mathbf{x})\mathtt{D}^{\alpha}f(\mathbf{x})\right| < +\infty \text{ para todo polinomio P y todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{n}}\right\}$$
$$s_n(f) = \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}f(\mathbf{x})\right| : |\beta| \leq n, |\alpha| \leq n\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

De nuevo, usando los teoremas del primer capítulo **Teorema 1.2.27** y **Teorema 1.3.29** se obtiene el espacio vectorial topológico $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathscr{S})$. El **Teorema 4.3.9** recoge sus propiedades; las más relevantes son las siguientes:

- *Dadas una sucesión* $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *y* $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, *son equivalentes:*

  I. $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{S}} f$

  II. $\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}(f_m - f) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0\ \ \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, *donde* id^{β} *es el monomio* $\mathbf{x}^{\beta}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

- *El espacio vectorial topológico* $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *es completo.*

Tras este estudio de la topología $\mathscr{S}$, se considera la *transformación de Fourier* restringida a la clase de Schwartz $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ para acabar probando —en los resultados **Teorema** 4.4.11 y **Teorema** 4.4.14— que

- $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ *es una aplicación lineal y continua de* $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *en sí mismo, biyectiva y con inversa continua.*

Con estos ingredientes y tras haber probado que *el espacio* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *se identifica con cierto subespacio de* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ —**Teorema** 4.5.19— ya se puede dar la definición de distribución temperada: una distribución temperada es un elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ que admite extensión continua bajo $\mathscr{S} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$ a toda la clase de Schwartz o, lo que es lo mismo, "es" un elemento de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ el dual de $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$. Relevante es también en este capítulo el hecho de que *toda distribución sobre* $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ *de soporte compacto es temperada* —**Teorema** 4.5.26—, obteniendo así las relaciones

$$\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \subset \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \text{ y}$$
$$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \hookleftarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \hookleftarrow \mathscr{E}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}),$$

donde todas las inclusiones son estrictas.

Por fin, en la sección 4.6 se da la definición de transformada de Fourier distribucional, se muestra sus propiedades más destacadas y se calcula explícitamente la transformada de Fourier de algunas distribuciones temperadas en unos ejemplos, los cuales se limitan a dar unas pinceladas del uso de esta transformación en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

CAPÍTULO 1

Espacios vectoriales topológicos

Este primer capítulo es una breve introducción a los espacios vectoriales topológicos, enfocada en presentar algunos resultados generales, y en demostrar los más relevantes, sobre los que se apoya la teoría de distribuciones. La referencia que se sigue es **[5, Cap 1]**.

En lo sucesivo del trabajo, $d_{|\bullet|}$ será la distancia usual en $\mathbb{C}$, definida por el valor absoluto

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

La expresión $\mathbb{C}_{|\bullet|}$ denotará al espacio métrico $\left(\mathbb{C}, d_{|\bullet|}\right)$ y, ocasionalmente, también a la topología usual para $\mathbb{C}$ que $d_{|\bullet|}$ genera. En particular, la convergencia de las sucesiones de números complejos consideradas en las definiciones siguientes será respecto de la topología $\mathbb{C}_{|\bullet|}$. Finalmente, un disco (o bola abierta) de $\mathbb{C}_{|\bullet|}$ de centro $z \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ se denotará por $\mathrm{D}(z, r)$.

1.1. Definiciones

Definición 1.1.1 Un *espacio vectorial topológico* es un par (X, τ), donde $X = X_{(+,\,\cdot)}$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial y τ es una topología para X tal que

- τ es Hausdorff en X —también se dice que τ es T_2— y
- las operaciones de espacio vectorial $+$ y $\cdot$ son continuas.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, \mathbf{x}) &\longmapsto \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \end{aligned}$$

En estas condiciones, se dice que τ es una *topología vectorial* para X.

Como primer ejemplo, si X es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial y $\|\bullet\|$ es una norma sobre X, entonces la topología τ_d generada por la métrica asociada $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)$ es una topología vectorial. Otros ejemplos de espacios vectoriales topológicos serán el espacio $\left(\mathsf{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega), \mathscr{D}\right)$ de las funciones de testeo definidas sobre el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathsf{n}$ y el espacio de las funciones de decrecimiento rápido $\left(\mathsf{S}(\mathbb{R}^\mathsf{n}), \mathscr{S}\right)$, que serán estudiados más a fondo en los capítulos siguientes.

Definición 1.1.2 En lo sucesivo, si X es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, los conjuntos $A, B \subset X$ y $\Lambda \subset \mathbb{C}$ son no vacíos, $\mathbf{x} \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se usará las siguientes notaciones:

- $\mathbf{x} \pm A = \{\mathbf{x} \pm \mathbf{a} |\ \mathbf{a} \in A\}$, donde se dice que $\mathbf{x} + A$ es el *trasladado de A por* $\mathbf{x}$,
- $\lambda \cdot A = \lambda A = \{\lambda \mathbf{a} |\ \mathbf{a} \in A\}$,
- $\Lambda \cdot A = \{\alpha \mathbf{a} |\ \mathbf{a} \in A,\ \alpha \in \Lambda\}$,

- $A \pm B = \{\mathbf{a} \pm \mathbf{b} | \ \mathbf{a} \in A, \, \mathbf{b} \in B\}$[1].

Observación 1.1.3 Es inmediato de la definición de espacio vectorial topológico que, para cada $\mathbf{a} \in X$ y cada $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, los operadores de traslación $\mathrm{T}_{\mathbf{a}}$ y de homotecia (o multiplicación escalar) M_{λ}, definidos, respectivamente, por

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbf{x}+\mathbf{a} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \lambda\mathbf{x} \end{array}$$

son ambos homeomorfismos de $(X, \, \tau)$ en $(X, \, \tau)$. Este hecho se traduce en, por ejemplo,

- τ es *invariante por traslaciones*, es decir, $U \in \tau$ si y sólo si $\mathbf{a}+U \in \tau$ para todo $\mathbf{a} \in X$,
- V es $\tau-$cerrado si y sólo si $\mathrm{T}_{\mathbf{b}}(V) = \mathbf{b}+V$ es $\tau-$cerrado para algún (o para todo) $\mathbf{b} \in X$,
- $\mathrm{M}_{\lambda}(U) = \lambda U \in \tau$ para todo $U \in \tau$ si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- $\mathbf{w}+\lambda K$ es compacto si $\mathbf{w} \in X$ y $K \subset X$ es compacto, etcétera.

1.1.1. Bases de entornos

Definición 1.1.4 En el espacio vectorial topológico $(X, \, \tau)$, dado $\mathbf{x} \in X$, una colección $\mathscr{B}_{\mathbf{x}}$ contenida en $\mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{x})$ —donde $\mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{x})$ es la familia de todos los entornos abiertos del punto $\mathbf{x}$— es una *base local en* $\mathbf{x}$ si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene un elemento de $\mathscr{B}_{\mathbf{x}}$. Si $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ es una base local en $\mathbf{0}$, se dice simplemente que $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ es *base local*.

Proposición 1.1.5 *Si $(X, \, \tau)$ es un espacio vectorial topológico, entonces τ queda completamente determinada por una base local.*

Demostración. Sea $U \in \tau$. Como τ es invariante, para cada $\mathbf{u} \in U$, es $U - \mathbf{u} \in \mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{0})$. Si $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ es una base local de τ, para cada $\mathbf{u} \in U$, existe $V_{\mathbf{u}} \in \mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ tal que $V_{\mathbf{u}} \subset U - \mathbf{u}$. Con lo cual, $U = \cup_{\mathbf{u} \in U}(\mathbf{u}+V_{\mathbf{u}})$, es decir, U es unión de trasladados de elementos de la base local $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$. $\square$

Definición 1.1.6 Si X es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, se dice que un conjunto

- $C \subset X$ es *convexo* si $\lambda C + (1-\lambda)C \ \ \forall \, \lambda \in [0, \, 1]$;
- $E \subset X$ es *equilibrado* si $\alpha E \subset E$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$;
- $S \subset X$ es *simétrico* si $S = -S$, es decir, si contiene al conjunto de sus opuestos.

Definición 1.1.7 En adelante, siendo τ una topología para el $\mathbb{C}-$espacio vectorial X, si se denota $U \in \mathscr{N}_{\tau}^{c}(\mathbf{0})$, $V \in \mathscr{N}_{\tau}^{e}(\mathbf{0})$, $W \in \mathscr{N}_{\tau}^{ec}(\mathbf{0})$ querrá decir que U es un entorno convexo de $\mathbf{0}$, V es un entorno equilibrado de $\mathbf{0}$, W es un entorno convexo y equilibrado de $\mathbf{0}$.

El siguiente resultado se utilizará a menudo. La demostración es sencilla y se esboza en la sección A.1; ver también [5, Th 1.14].

Teorema 1.1.8 *Sea $(X, \, \tau)$ un espacio vectorial topológico. Entonces,*

a) *todo elemento de $\mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{0})$ contiene un entorno equilibrado de $\mathbf{0}$ y*

b) *todo elemento convexo de $\mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{0})$ contiene un entorno convexo y equilibrado de $\mathbf{0}$.*

Por tanto, todo espacio vectorial topológico tiene una base local equilibrada.

[1]Notar, en particular, que $A+A$ podría no coincidir con $2A$.

A continuación se define varias clases de espacios vectoriales topológicos con propiedades notables.

Definición 1.1.9 Se dice que un espacio vectorial topológico (X, τ) es

- *localmente convexo* si existe una base local cuyos elementos son convexos; en este caso, se dice que τ es una *topología localmente convexa*.
- *localmente acotado* si $\mathbf{0}$ tiene un entorno acotado —ver **Definición 1.1.10**—.
- *localmente compacto* si $\mathbf{0}$ tiene un entorno cuya clausura es compacta.
- un $\mathfrak{F}-$*espacio* si τ está inducida por una métrica invariante —ver **Definición 1.1.16**— y completa.
- un *espacio de Fréchet* si es un $\mathfrak{F}-$espacio localmente convexo.
- *normable* si existe una norma sobre X tal que la métrica que induce es compatible con la topología τ.

1.1.2. Conjuntos acotados y compactos

Definición 1.1.10 En un espacio vectorial topológico (X, τ), se dice que un subconjunto E de X es $\tau-$*acotado* (o, simplemente, *acotado*) si para cada $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ existe $s_V > 0$ tal que $E \subset tV$ si $t > s_V$.

Teorema 1.1.11 *En el espacio vectorial topológico (X, τ), sea $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$.*

a) *Si $0 < r_n \nearrow +\infty$, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.*

b) *Todo subconjunto compacto de X es acotado.*

c) *Si $s_n \searrow 0$, y V es acotado, entonces la colección $\{s_n V\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de τ.*

Demostración. a) Sea $\mathbf{x} \in X$ fijado. Como la aplicación $\mathrm{M}_\mathbf{x} : \mathbb{C} \longrightarrow X$, dada por $\mathrm{M}_\mathbf{x}(\alpha) = \alpha\mathbf{x}$, es continua, se verifica que $\mathrm{M}_\mathbf{x}^{-1}(V) = \{\alpha \in \mathbb{C} |\ \alpha\mathbf{x} \in V\}$ es $\mathbb{C}_{|\bullet|}-$abierto. Además, este abierto contiene al escalar 0, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/r_n \in \mathrm{M}_\mathbf{x}^{-1}(V)$ si $n \geq m$.

b) Sea ahora $K \subset X$ un compacto. Para cada $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$, existe, por el **Teorema 1.1.8**, $W \in \mathscr{N}_\tau^e(\mathbf{0})$ tal que $W \subset U$. Aplicando **a**,

$$K \subset \cup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Como K es compacto, existen naturales $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ tales que

$$K \subset (n_1 W) \cup (n_2 W) \cup \cdots \cup (n_m W) = n_m W.$$

Esta última igualdad es válida debido a que W es equilibrado: si $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ se verifica $n_j/n_m < 1$, luego $(n_j/n_m)W \subset W$, lo que implica evidentemente $n_j W \subset n_m W$ (el contenido restante es obvio). Así, si $t > n_m$, se deduce que $K \subset tW \subset tU$.

c) Sea $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$. Si V es acotado, existe $s_U > 0$ tal que $V \subset tU$ si $t > s_U$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $1/s_n > s_U$, se deduce que $V \subset (1/s_n)U$, y por tanto U contiene a $s_n V$. Dada la arbitrariedad de $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ se obtiene el resultado. □

Definición 1.1.12 Un espacio vectorial topológico (X, τ) tiene la *propiedad de Heine-Borel* si todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.

Teorema 1.1.13 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel. Entonces X tiene dimensión finita.*

La prueba de este resultado se esboza en **A.2**. Ver también **[5, Th 1.23]**.

1.1.3. Sucesiones de Cauchy y métricas

Definición 1.1.14 Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y sea $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ una base local. Dada una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se dice que ésta

- converge a $\mathbf{x} \in X$ bajo la topología τ, o es $\tau-$convergente a $\mathbf{x}$, si para cada $V \in \mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ existe $n_V \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_n - \mathbf{x} \in V$ si $n \geq n_V$. Esta convergencia se va a denotar por
$$\mathbf{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} \mathbf{x} \quad \text{o bien} \quad \tau - \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}.$$
- es una $\tau-$*sucesión de Cauchy* cuando para cada $V \in \mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ existe $n_V \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m \in V$ si $l, m \geq n_V$.

Nota. Notar que la propia definición de base local implica que el concepto de $\tau-$sucesión de Cauchy no depende de la colección $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ tomada.

Proposición 1.1.15 *Las $\tau-$sucesiones de Cauchy son acotadas* y, por tanto, las sucesiones $\tau-$convergentes también lo son.

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una $\tau-$sucesión de Cauchy. Por un lado, sea $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ una base local equilibrada de τ, cuya existencia está garantizada por el **Teorema 1.1.8**. Dado $W \in \mathscr{B}_{\mathbf{0}}$, es posible encontrar $U' \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ tal que $U' + U' \subset W$ —ver **Proposición A.1.1**—. Como $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ es base local, tómese U en $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ verificando $U \subset U'$. Por otro lado, existe $n_U \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m \in U$ para todos $n, m \geq n_U$. Además, por el **Teorema 1.1.11** existe $m_U \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_U} \in m_U U$. Así,
$$\mathbf{x}_n \in \mathbf{x}_{n_U} + U \subset m_U U + U \subset m_U U + m_U U = m_U (U+U) \subset m_U W \text{ si } n \geq n_U,$$
aplicando en el segundo contenido que U es equilibrado. Entonces, como también W es equilibrado, se verifica
$$\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 1} \subset m_U W \subset tW \text{ para todo } t \geq m_U.$$
□

Definición 1.1.16 Sea X un espacio vectorial y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una métrica. Se dice que d es *invariante* (o *invariante por traslaciones*) si $d(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$.

En un espacio vectorial topológico las métricas invariantes juegan un papel especial.

Proposición 1.1.17 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico tal que τ es compatible con una métrica invariante d. Entonces $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es $\tau-$sucesión de Cauchy si y sólo si es $d-$sucesión de Cauchy.*

Demostración. Como $d(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_m) = d(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_m, \mathbf{0})$ para todo par $\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_m \in \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y como $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) \mid r \in \mathbb{R}^+\}$ es una base local de τ, entonces la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una $d-$sucesión de Cauchy si, y sólamente si, es una $\tau-$sucesión de Cauchy. □

Corolario 1.1.18 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y sean d_1, d_2 métricas invariantes que inducen ambas la misma topología τ, entonces*

a) *d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy (las $\tau-$sucesiones de Cauchy) y*

b) *d_1 es completa sobre $X \Leftrightarrow d_2$ es completa sobre X.*

El punto **a** es consecuencia directa de la **Proposición** 1.1.17 y el punto **b** sigue de **a**. La invariancia es necesaria en la hipótesis; un ejemplo de ello es **[5, Exercise 1.12]**, que es enunciado a continuación: *sean* $d(x,y) = |x-y|$, $d_\theta(x,y) = |\theta(x) - \theta(y)|$ $(x, y \in \mathbb{R})$, *donde* $\theta(x) = x/(1+|x|)$*; entonces tanto* d *como* d_θ *son métricas sobre* $\mathbb{R}$ *que inducen la misma topología, la usual para* $\mathbb{R}$*, pero* d *es completa y* d_θ *no lo es.*

Observación 1.1.19 Como es sabido, en un espacio métrico (M, d) un subconjunto $A \subset M$ se dice $d-$*acotado* si verifica

$$\text{diám}(A) := \sup\{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A\} < +\infty.$$

Apuntar que en un espacio vectorial topológico (X, τ) metrizable con métrica d, los conjuntos $d-$acotados y los conjuntos $\tau-$acotados no coinciden en general; ver **Observación** A.4.9. La equivalencia, sin embargo, sí se da cuando (X, τ) es normable —**Proposición** A.4.10—.

1.1.4. Aplicaciones lineales

Sean (X, τ_1) e (Y, τ_2) dos espacios vectoriales topológicos. Como bien es conocido, una aplicación $\mathrm{T}: X \longrightarrow Y$ se dice lineal si $\mathrm{T}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{x}) + \beta\mathrm{T}(\mathbf{y})$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Recordar que en el caso $Y = \mathbb{C}$ una tal aplicación lineal se conoce indistintamente con los nombres *forma lineal* y *funcional*. La aplicación T también se dice continua si para cada $U \in \tau_2$ se tiene que $\mathrm{T}^{-1}(U) \in \tau_1$; a menudo se escribirá que T *es continua bajo* $\tau_1 - \tau_2$ para evitar confusión (esto se hará sobre todo en **Capítulo** 2 y **Capítulo** 3, donde se maneja distintas topologías en un mismo contexto).

El siguiente resultado es consecuencia elemental de la invarianza de las topologías.

Teorema 1.1.20 *Sean* (X, τ_1) *e* (Y, τ_2) *dos espacios vectoriales topológicos y sea* $\mathrm{T}: X \longrightarrow Y$ *una aplicación lineal continua en el punto* $\mathbf{0}$*. Entonces,* T *es continua en todo* $\mathbf{x} \in X$ *y, además, es uniformemente continua en el siguiente sentido: para cada* $W \in \mathscr{N}_{\tau_2}(\mathbf{0})$ *existe* $V \in \mathscr{N}_{\tau_1}(\mathbf{0})$ *tal que*

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} \in V \Rightarrow \mathrm{T}(\mathbf{y}) - \mathrm{T}(\mathbf{x}) \in W.$$

Demostración. Dado $W \in \mathscr{N}_{\tau_2}(\mathbf{0})$, la continuidad de T en $\mathbf{0}$ prueba que $\mathrm{T}(V) \subset W$ para algún $V \in \mathscr{N}_{\tau_1}(\mathbf{0})$. Si ahora se toma $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ con $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in V$, la linealidad de la aplicación T prueba que $\mathrm{T}(\mathbf{y}) - \mathrm{T}(\mathbf{x}) = \mathrm{T}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in W$. Entonces T aplica el entorno $\mathbf{x} + V$ de $\mathbf{x}$ en el entorno prefijado $\mathrm{T}(\mathbf{x}) + W$ de $\mathrm{T}(\mathbf{x})$, lo que implica que T es continua. □

Teorema 1.1.21 *Sean* (X, τ) *un espacio vectorial topológico y* $\mathrm{T}: X \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma lineal. Supongamos que* $\mathrm{T}(\mathbf{x}) \neq 0$ *para algún* $\mathbf{x} \in X$*. Entonces las cuatro propiedades siguientes son equivalentes.*

I. T *es continua bajo el par* $\tau - \mathbb{C}_{|\bullet|}$.

II. *El núcleo* $\ker(\mathrm{T})$ *es cerrado.*

III. $\ker(\mathrm{T})$ *no es denso en* X.

IV. *Existe* $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ *tal que* $\mathrm{T}(V)$ *es acotado.*

La demostración de esta caracterización de continuidad es elemental y se esboza en A.3 —ver **[5, Th 1.18]**—. Por último, en el caso en que (X, τ_1) admita una métrica invariante se tiene la siguiente caracterización de continuidad en términos de sucesiones; su demostración se detalla en A.3 —ver **[5, Th 1.32]**—.

Teorema 1.1.22 *Sean* (X, τ_1) *e* (Y, τ_2) *espacios vectoriales topológicos y* $\mathrm{T} : X \longrightarrow Y$ *una aplicación lineal. Si* τ_1 *es compatible con una métrica d invariante, las siguientes cuatro propiedades son equivalentes.*

- **I.** T *es continua.*
- **II.** T *transforma conjuntos* τ_1-*acotados en conjuntos* τ_2-*acotados.*
- **III.** *Para cada sucesión* $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *con* $\tau_1 - \text{lím}\,\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ *vale* $\{\mathrm{T}(\mathbf{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es* τ_2-*acotado.*
- **IV.** *Para cada sucesión* $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *con* $\tau_1 - \text{lím}\,\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ *vale* $\tau_2 - \text{lím}\,\mathrm{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \in Y$.

1.2. Seminormas y convexidad local

En toda esta sección, $X = X_{(+,\,\cdot)}$ será un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. El resultado principal será el **Teorema** 1.2.27, que da un procedimiento para construir una topología vectorial a partir de una familia adecuada de seminormas. Dicho teorema es fundamental en los siguientes capítulos de este trabajo, por lo que se incluye su demostración con detalle.

Definición 1.2.23 Una *seminorma* sobre X es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$, (*subaditividad*)
- $p(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| p(\mathbf{x})$

para todos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Se define también, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathbf{V}(p, n) = \{\mathbf{x} \in X |\ p(\mathbf{x}) < 1/n\}.$$

Definición 1.2.24 Una familia Π de seminormas sobre X se dice que *separa puntos* si para cada $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe $p_{\mathbf{x}} \in \Pi$ tal que $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \neq 0$.

Definición 1.2.25 Un subconjunto A de X se dice *absorbente* si para cada $\mathbf{x} \in X$ existe un número positivo $t_{\mathbf{x}}$ tal que $\mathbf{x} \in t_{\mathbf{x}} A$.

Proposición 1.2.26 *Sea* $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una seminorma.*

- **a)** $p(\mathbf{0}) = 0$.
- **b)** $|p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y})| \leq p(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ *para todo par* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$.
- **c)** $p(\mathbf{x}) \geq 0\ \ \forall\, \mathbf{x} \in X$.
- **d)** $\ker(p) = \{\mathbf{x} \in X |\ p(\mathbf{x}) = 0\}$ *es un subespacio de* X.
- **e)** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, el conjunto* $\mathbf{V}(p, n)$ *es convexo, equilibrado y absorbente y verifica* $\ker(p) \subseteq \mathbf{V}(p, n)$ *—es decir, es no vacío—.*

Demostración. **a** se desprende de $p(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| p(\mathbf{x})$ para $\alpha = 0$ (con $\mathbf{x} \in X$ cualquiera). Para ver **b**, tómese $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ y escríbase

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + p(\mathbf{y}), \text{ que implica } p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$

intercambiando ahora en esta última desigualdad $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ se obtiene también

$$p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x}) \leq p\big(-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big) = p(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

luego $-p(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Tomando aquí $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ se tiene $p(\mathbf{x}) \geq |p(\mathbf{x})| \geq 0$ $(\mathbf{x} \in X)$, es decir, la propiedad **c** es verdadera. Ahora, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ son tales que $p(\mathbf{x}) = 0 = p(\mathbf{y})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son cualesquiera, de $0 \leq p(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) \leq |\alpha| p(\mathbf{x}) + |\beta| p(\mathbf{y}) = 0$ se desprende la propiedad **d**.

Finalmente, para ver **e**, sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}(p, n)$ cualesquiera; entonces

$$p(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| p(\mathbf{x}) \leq p(\mathbf{x}) < 1/n \quad \text{y}$$
$$p(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda p(\mathbf{x}) + (1-\lambda) p(\mathbf{y}) < \lambda/n + (1-\lambda)/n = 1/n.$$

Sólo resta probar que $\mathbf{V}(p, n)$ es absorbente: $\mathbf{w} \in X$ verifica $p(\mathbf{w}) < m$ para algún $m \geq n$, evidentemente, entonces

$$\mathbf{w} = m^2 \cdot \frac{1}{m^2}\mathbf{w} \in m^2 \cdot \mathbf{V}(p, n), \quad \text{pues } p\left(\mathbf{w}/m^2\right) < 1/m \leq 1/n.$$

□

Teorema 1.2.27 *Sea* Π *una familia de seminormas sobre* X *que separa puntos, y sea*

$$\mathscr{B}_{\mathbf{0}} = \left\{\cap_{(p,\, n)\in\Delta}\mathbf{V}(p, n) \,\middle|\, \Delta \subset \Pi \times \mathbb{N},\, |\Delta| < +\infty\right\}.$$

Entonces, la colección $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ *es una base local convexa y equilibrada de una topología vectorial* τ *para* X *bajo la que*

a) *cada* $p \in \Pi$ *es continua y*

b) *un conjunto* $E \subset X$ *es acotado si, y sólo si, cada* $p \in \Pi$ *es acotada sobre* E.

Definición 1.2.28 La topología vectorial τ para X del **Teorema** 1.2.27 se denomina *topología inducida por la familia de seminormas* Π en X.

Demostración. Usando topología elemental sigue que la colección

$$\mathscr{B} = \left\{\cap_{(p,\, n,\, \mathbf{x})\in\Theta}[\mathbf{x}+\mathbf{V}(p, n)] \,\middle|\, \Theta \subset \Pi \times \mathbb{N} \times X,\, |\Theta| < +\infty\right\},$$

constituye una base de una topología τ, bajo la que un subconjunto de X es abierto si, y sólo si, es unión (arbitraria, y que puede ser vacía) de elementos de $\mathscr{B}$. En particular, $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ es una base local de τ, y como τ está formada por las uniones de trasladados de elementos de $\mathscr{B}_{\mathbf{0}}$ se deduce que τ es invariante. Además, es rutinario probar que las intersecciones finitas de conjuntos convexos y equilibrados son conjuntos convexos y equilibrados, luego $\mathscr{B}_{\mathbf{0}} \subset \mathscr{N}_{\tau}^{ec}(\mathbf{0})$.

Pásese a demostrar que τ es topología vectorial. Para ver que la topología es Hausdorff, se toma $\mathbf{u} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$; se ha de encontrar dos abiertos disjuntos tales que uno contenga a $\mathbf{u}$ y otro, a $\mathbf{0}$. En efecto, $q(\mathbf{u}) > 0$ para alguna seminorma $q \in \Pi$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $q(\mathbf{u}) > 2/k$, entonces los conjuntos $\mathbf{u}+\mathbf{V}(q, k)$ y $\mathbf{V}(q, k)$ son tales abiertos, respectivamente.

Pruébese ahora la continuidad de las operaciones de espacio vectorial. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $U \in \mathscr{N}_{\tau}(\mathbf{0})$ cualesquiera. Por un lado, por definición de base local, se verifica

$$U \supset \mathbf{V}(p_1, n_1) \cap \cdots \cap \mathbf{V}(p_m, n_m)$$

para ciertos $p_j \in \Pi$, $n_j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq m)$. Póngase $W = \cap_{j=1}^{m}\mathbf{V}\left(p_j, 2n_j\right)$, entonces la subaditividad de las seminormas implica $W + W \subset U$ y, en consecuencia,

$$(\mathbf{x}+W) + (\mathbf{y}+W) \subset (\mathbf{x}+\mathbf{y}) + U.$$

Esto brinda la continuidad de la operación suma. Por otro lado, como la intersección finita de conjuntos absorbentes y equilibrados es un conjunto absorbente (comprobación rutinaria), para algún $s > 0$ vale $\mathbf{x} \in sW$. Póngase

$$t = \frac{1}{|\alpha| + 1/s}.$$

Entonces, si $\mathbf{w} \in \mathbf{x} + tW$ y $|\beta - \alpha| < 1/s$, se verifica

$$\beta \mathbf{w} - \alpha \mathbf{x} = \beta (\mathbf{w} - \mathbf{x}) + (\beta - \alpha) \mathbf{x},$$

punto que pertenece a $|\beta| tW + |\beta - \alpha| sW \subset W + W \subset U$. El primer contenido se justifica como sigue: por la desigualdad triangular

$$|\beta| \leq |\alpha| + |\beta - \alpha| < |\alpha| + 1/s$$

y ya es evidente que $|\beta| t < 1$; ahora, aplicando que W es equilibrado, se obtiene el contenido a justificar. En definitiva, se ha probado

$$\mathrm{D}(\alpha,\, 1/s) \cdot (\mathbf{x} + tW) \subset \alpha \mathbf{x} + U.$$

Este razonamiento prueba que la multiplicación por escalares es continua.

Finalmente, abórdese los asertos **a** y **b** del teorema.

La definición de los conjuntos $\mathbf{V}(p,\, n)$ $(p \in \Pi,\, n \in \mathbb{N})$ implica la continuidad de las seminormas de Π en el origen. Ahora, si $\mathbf{x} \in X$ es cualquiera, entonces

$$|p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y})| \leq p(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

y de aquí sigue que cada $p \in \Pi$ es continua en todo X.

Tómese a continuación $p \in \Pi$ cualquiera y un conjunto $E \subset X$ acotado. Se tiene

$$E \subset k\mathbf{V}(p,\, 1) \text{ para algún } k > 0,$$

luego un punto de E es de la forma $k\mathbf{w}$ con $p(\mathbf{w}) < 1$, entonces,

$$p(\mathbf{x}) < k \;\; \forall\, \mathbf{x} \in E, \text{ es decir, } p \text{ es acotada sobre } E.$$

Recíprocamente, supóngase $E \subset X$ tal que $p(\mathbf{x}) < R_p \;\forall\, \mathbf{x} \in E$ $(p \in \Pi)$, con $\{R_p\}_{p \in \Pi}$ contenido en $\mathbb{R}^+$. Retómese ahora el contenido $U \supset \cap_{j=1}^{m} \mathbf{V}\left(p_j,\, n_j\right)$. Si $r > 0$, entonces es evidente que $r\mathbf{V}\left(p_j,\, n_j\right) = \{\mathbf{x} \in X |\; p_j(\mathbf{x}) < r/n_j\}$ para cada $1 \leq j \leq m$, luego, si r verificara

$$R_{p_j} < r/n_j \;\; \forall\, j \in \{1,\, \ldots,\, m\} \;\left(\text{por ejemplo, } r = 1 + \text{máx}\{R_{p_j} n_j |\; 1 \leq j \leq m\}\right),$$

se obtendría

$$E \subset \cap_{j=1}^{m} r\mathbf{V}\left(p_j,\, n_j\right) = r \cap_{j=1}^{m} \mathbf{V}\left(p_j,\, n_j\right) \subset rU$$

y esto, dada la arbitrariedad de $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$, probaría que E es acotado. □

1.3. Seminormas y metrizabilidad

Teorema 1.3.29 *Si $X = X_{(+,\,\cdot)}$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial y $\Pi = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia (numerable) de seminormas sobre X que separa puntos, entonces la topología vectorial τ inducida por Π es compatible con una métrica invariante.*

Demostración. Es sabido que $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ con fórmula $\theta(x) = x/(1+|x|)$ es continua, estrictamente creciente (es decir, biyectiva) y con inversa continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase $f_n(\mathbf{w}) = 2^{-n}(\theta \circ p_n)(\mathbf{w})$ $(\mathbf{w} \in X)$. El **Teorema 1.2.27** asegura la existencia de una topología vectorial τ bajo la que p_n es continua, lo que implica que f_n es continua —f_n es composición de funciones continuas— $(n \in \mathbb{N})$. Además,

$$|f_n(\mathbf{w})| \leq 2^{-n} \;\; \forall\, \mathbf{w} \in X \;\; (n \in \mathbb{N}) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Entonces, la sucesión de funciones continuas $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ dada por

$$s_\nu(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\nu} f_n(\mathbf{w}) \quad (\mathbf{w} \in X)$$

converge uniformemente (por el criterio de Weiersstrass) a la función

$$s(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(\mathbf{w})}{1+p_n(\mathbf{w})} \quad (\mathbf{w} \in X),$$

que es continua —ver **Teorema B.1.7**—. Sea ahora $d : X \times X \longrightarrow [0, 1)$ dada por la fórmula $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Pruébese que d es una métrica.

- Es obvio que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \;\forall\; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times X$.
- También es obvio $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$.
- ¿d verifica la desigualdad triangular? Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ se cumple: $p_n(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \leq p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z}) + p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})$ implica

$$\begin{aligned}\frac{p_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})} &\leq \frac{p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})+p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})+p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})} = \frac{p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})+p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})} + \\ &+ \frac{p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})+p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})} \leq \frac{p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{z})} + \frac{p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})}{1+p_n(\mathbf{z}-\mathbf{y})}\end{aligned}$$

  para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego d verifica efectivamente la desigualdad triangular.

Además, d es invariante, como es evidente.

Pásese ahora a probar la compatibilidad de τ con d. Para ello, llámese τ_d a la topología generada por d. Como s es continua, la base local $\{\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) \,|\, r \in \mathbb{R}^+\}$ de τ_d está contenida en τ puesto que

$$\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in X \,|\, s(\mathbf{x}) < r\} = s^{-1}(-\infty, r) \;\forall\, r \in \mathbb{R}^+.$$

Como $A \in \tau_d$ si, y sólo si, $A = \cup_{(\mathbf{x},\, r) \in \Delta} \mathrm{B}_d(\mathbf{x}, r) = \cup_{(\mathbf{x},\, r) \in \Delta} [\mathbf{x} + \mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r)]$ para algún $\Delta \subset X \times \mathbb{R}^+$ y como τ es invariante, la afirmación anterior implica $\tau_d \subset \tau$.

Recíprocamente, para probar que $\tau \subset \tau_d$ basta ver que $\{\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) \,|\, r \in \mathbb{R}^+\}$ es base local de τ pues, así, cualquier $\tau-$abierto será unión de τ_d-abiertos y se obtendría el contenido buscado. Por tanto, tómese $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ arbitrario, que verifica $U \supset \cap_{j=1}^{m} \mathbf{V}(p_{k_j}, n_j)$ para algunos naturales k_j, n_j $(1 \leq j \leq m)$. Razónese como sigue. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r)$ para un $r > 0$ arbitrario,

$$\frac{p_n(\mathbf{x})}{1+p_n(\mathbf{x})} < 2^n r \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{y, en particular,} \quad \frac{p_{k_j}(\mathbf{x})}{1+p_{k_j}(\mathbf{x})} < 2^{k_j} r \;\; \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Como θ^{-1} es continua, si $n_0 = \text{máx}\{n_j |\ 1 \leq j \leq m\}$ entonces existe $\delta = \delta(n_0, k_1, \ldots, k_m) > 0$ tal que si $r \leq \delta$ y $d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) < r$ se tiene

$$p_{k_j}(\mathbf{x}) < \frac{1}{n_0} \ \ \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Con lo cual, $\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, \delta) \subset \cap_{j=1}^m \mathbf{V}\left(p_{k_j}, n_0\right) \subset \cap_{j=1}^m \mathbf{V}\left(p_{k_j}, n_j\right) \subset U$. □

Observación 1.3.30 Sean $X = X_{(+,\,\cdot)}$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial y $\Pi = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de seminormas sobre X que separa puntos. Por el teorema que se acaba de probar, (X, τ) es espacio vectorial topológico, donde τ es la topología generada por la métrica invariante

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{1+p_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X).$$

Así, si $Y \subset X$ es subespacio vectorial, por el mismo teorema, las seminormas de $\{p_n|_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ inducen una topología para Y, la cual, trivialmente, es compatible con la métrica $d|_{Y\times Y}$. Entonces[2] los elementos de la topología relativa $\{A \cap Y |\ A \in \tau\}$ son precisamente las uniones de

$$\mathbf{w} + \cap_{(n,\, m)\in\Delta} \mathbf{V}(p_n|_Y, m),$$

con $\mathbf{w} \in Y$, $\Delta \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ finito.

[2]Para ver esta implicación conviene recordar que, en un espacio métrico (X, d), siendo Y un subconjunto de X, la topología para Y generada por la métrica $d|_{Y\times Y}$ coincide con la topología que Y hereda de τ_d, donde τ_d es la topología para X generada por d.

CAPÍTULO 2

Funciones de testeo y distribuciones

Continúese fijando la notación para el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, d_2)$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ genérico se escribirá siempre en su forma expandida como $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{\mathsf{n}})$, con $x_\nu \in \mathbb{R}$ $(1 \leq \nu \leq \mathsf{n})$. Así, se define el producto escalar sobre $\mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_{\mathsf{n}} y_{\mathsf{n}},$$

de donde resulta la norma euclídea

$$|\mathbf{x}|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \left(x_1^2 + \cdots + x_{\mathsf{n}}^2\right)^{1/2} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}),$$

que se denotará simplemente por $|\bullet|$. En esta notación los puntos de $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ se escriben siempre en **negrita**, en contraposición con la escritura de los escalares complejos, siempre en *itálica*.

La métrica euclídea d_2 es la inducida por la norma $|\bullet|$. Una bola en el espacio métrico $(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, d_2)$ de centro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ y radio $\rho > 0$ se denotará por $\mathrm{B}(\mathbf{x}, \rho)$ y su clausura, por $\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{x}, \rho)$. Dicha métrica genera la topología usual τ_u para $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, al igual que toda métrica inducida por una norma sobre $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$. Enlazando con el **Capítulo 1**, $(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \tau_u)$ es espacio vectorial topológico. Los conceptos topológicos que se consideren serán respecto de τ_u si se refieren a subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$.

Finalmente, en todo lo que resta de trabajo, λ denotará la medida de Lebesgue y la integral con la que se trabaja es la de Lebesgue.

2.1. Preliminares

Esta primera sección está dedicada a fijar la notación que se seguirá a lo largo del trabajo y a definir los espacios vectoriales de funciones que aparecen en la teoría de distribuciones. En este capítulo se sigue principalmente la referencia **[5, Cap 1.46]**.

2.1.1. Notaciones

Definición 2.1.1 Se llama $\mathsf{n}-$*índice* a un elemento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathsf{n}}) \in \mathbb{N}_0^{\mathsf{n}} := \left(\mathbb{N} \cup \{0\}\right)^{\mathsf{n}}$ y se define su *orden* como $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\mathsf{n}}$. Si $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{\mathsf{n}})$ es otro $\mathsf{n}-$índice, se denota

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{\mathsf{n}} + \beta_{\mathsf{n}}) \quad \text{y} \quad \beta \leq \alpha \;\text{ si }\; \beta_\nu \leq \alpha_\nu \;\; (1 \leq \nu \leq \mathsf{n}).$$

En particular, para cada $\nu \in \{1, \ldots, \mathsf{n}\}$,

$$\mathbf{e}_\nu = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\nu}, 0, \ldots, 0)$$

denota el $\mathsf{n}-$índice de orden 1 asociado al vector canónico $\overrightarrow{\mathbf{e}_\nu} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\nu}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$.

Definición 2.1.2 A cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ se le asocia el operador diferencial

$$\mathtt{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{y, en particular,} \quad \mathtt{D}^{\mathbf{e}_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \ (1 \leq \nu \leq n).$$

Además, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable, la derivada direccional de f en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ según el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ es

$$\mathtt{D}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}, \quad \text{donde } \nabla f = (\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} f, \ldots, \mathtt{D}^{\mathbf{e}_n} f).$$

Observación 2.1.3 Tras estas dos últimas definiciones, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable y $\mathbf{x} \in \Omega$, se puede escribir

$$\mathtt{D}_{\overrightarrow{\mathbf{e}_\nu}} f(\mathbf{x}) = \mathtt{D}^{\mathbf{e}_\nu} f(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\mathbf{x} + \varepsilon \overrightarrow{\mathbf{e}_\nu}\right) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon}.$$

2.1.2. Definición de los espacios $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ y $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$

En adelante, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotará un conjunto abierto distinto del vacío y se escribirá $\mathfrak{K}(\Omega)$ para denotar a la familia de todos los subconjuntos compactos contenidos en Ω. También se va a usar la notación usual $\mathtt{C}(\Omega)$ para el conjunto de las funciones complejas definidas en Ω y continuas. Además, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathtt{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} |\ \mathtt{D}^\alpha f \in \mathtt{C}(\Omega)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

Definición 2.1.4 El $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ de las funciones complejas infinitamente diferenciables en Ω es el que se define estableciendo

$$f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) :\Leftrightarrow \left[\mathtt{D}^\alpha f \in \mathtt{C}(\Omega) \ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right]$$

y considerando las operaciones siguientes:

- suma de funciones, $+ : \mathtt{C}^\infty(\Omega) \times \mathtt{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathtt{C}^\infty(\Omega)$, dada por $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in \Omega$, y
- multiplicación por escalares complejos, $\cdot : \mathbb{C} \times \mathtt{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathtt{C}^\infty(\Omega)$, dada por $(a \cdot h)(\mathbf{x}) = a \cdot h(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in \Omega$.

El neutro para la suma es la función nula $\Omega \ni \mathbf{x} \longmapsto 0$, que se representa simplemente por 0.

Definición 2.1.5 El *soporte* de una función $\psi \in \mathtt{C}(\Omega)$ se define como

$$\operatorname{sop}(\psi) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega |\ \psi(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Definición 2.1.6 Dado un compacto $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, se define el subespacio vectorial $\mathscr{D}_K(\Omega)$ como

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \{\psi \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \,|\, \operatorname{sop}(\psi) \subseteq K\}.$$

Nota. Cada vez que se escriba $\mathscr{D}_K(\Omega)$ se supondrá que es $K \subset \Omega$ un compacto de interior no vacío —pues si $\operatorname{int}(K) = \emptyset$ entonces $\mathscr{D}_K(\Omega) = \{0\}$—.

Definición 2.1.7 El $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω o *funciones de testeo sobre* Ω es

$$\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega) = \{\phi \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \,|\, \operatorname{sop}(\phi) \in \mathfrak{K}(\Omega)\}$$

dotado de las mismas operaciones de la **Definición** 2.1.4 —en realidad, se trata de un subespacio de $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$—.

2.1.3. Sucesión fundamental de compactos

Si $A \subseteq \mathbb{R}^\mathsf{n}$ es un subconjunto no vacío e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\mathsf{n}$ es un punto, denótese

$$\operatorname{dist}(\mathbf{y}, A) = \text{ínf}\{d_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) :\ \mathbf{x} \in A\} = \text{ínf}\{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| :\ \mathbf{x} \in A\}.$$

Definición 2.1.8 Se llama *sucesión fundamental de compactos de* Ω a la familia $\{\mathtt{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω dada por

$$\mathtt{K}_n = \begin{cases} \overline{\mathrm{B}}(\mathbf{0}, n) & \text{si } \Omega = \mathbb{R}^\mathsf{n}, \\ \{\mathbf{x} \in \Omega |\ \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega) \geq 1/n,\ |\mathbf{x}| \leq n\} & \text{si } \Omega \neq \mathbb{R}^\mathsf{n}. \end{cases}$$

Proposición 2.1.9 *Se verifica efectivamente* $\mathtt{K}_n \in \mathfrak{K}(\Omega)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$$\mathtt{K}_n \subset \operatorname{int}(\mathtt{K}_{n+1}) \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \ y \ \ \Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \mathtt{K}_n.$$

Demostración. Como el caso $\Omega = \mathbb{R}^\mathsf{n}$ es trivial, supóngase $\Omega \neq \mathbb{R}^\mathsf{n}$. En $(\mathbb{R}^\mathsf{n}, \tau_u)$ se cumple la propiedad de Heine-Borel, luego el subconjunto $\mathtt{K}_n$ de Ω es compacto porque es cerrado y es acotado. En efecto, como la función a valores no negativos $\rho_\Omega(\mathbf{x}) = \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega)$ $(\mathbf{x} \in \Omega)$ es continua, entonces $\rho_\Omega^{-1}[1/n, +\infty) = \{\mathbf{x} \in \Omega |\ \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega) \geq 1/n\}$ es un cerrado y, por tanto, su intersección con la bola cerrada $\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{0}, n)$, que es igual a $\mathtt{K}_n$, es también un cerrado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase $V_{n+1} := \{\mathbf{x} \in \Omega |\ \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega) > 1/(n+1),\ |\mathbf{x}| < n+1\}$; este conjunto es un abierto que verifica $\mathtt{K}_n \subset V_{n+1} \subset \mathtt{K}_{n+1}$, luego $\mathtt{K}_n \subset \operatorname{int}(\mathtt{K}_{n+1})$. Finalmente, si $\mathbf{x} \in \Omega$, como $\mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega$ es cerrado, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega) = d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ para algún $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\mathsf{n} \setminus \Omega$, luego $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 1/m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $\mathbf{x} \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathtt{K}_n$. □

Nota. Nótese que existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathtt{K}_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. En adelante, supóngase por comodidad que $n_0 = 1$.

2.1.4. Particiones finitas de la unidad en Ω

Teorema 2.1.10 *Si* $K \subset \Omega$ *es compacto, existe* $\phi \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$0 \leq \phi \leq 1 \quad y \quad \phi|_K = 1.$$

Este teorema se conoce como el *lema* $\mathtt{C}^\infty$ *de Urysohn*. Una función como la del enunciado se llama *función meseta*. Para conocer los detalles de la demostración consultar la referencia **[2, Lemma 8.18]**.

Definición 2.1.11 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathsf{n}$ un abierto no vacío y Γ una colección de abiertos de $\mathbb{R}^\mathsf{n}$ cuya unión es Ω. Si una sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ verifica

- **a)** para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene $\operatorname{sop}(\psi_m) \subset A$ para algún $A \in \Gamma$,
- **b)** $\psi_m(\mathbf{x}) \geq 0 \ \ \forall\, \mathbf{x} \in \Omega \quad (m \in \mathbb{N})$,
- **c)** $\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\mathbf{x}) = 1 \ \ \forall\, \mathbf{x} \in \Omega$,
- **d)** para cada compacto $K \subset \Omega$, existen $l \in \mathbb{N}$ y un abierto $W \subset \Omega$ verificando $K \subset W$ y

$$\psi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \psi_l(\mathbf{x}) = 1 \ \ \forall\, \mathbf{x} \in W,$$

entonces se dice que $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una *partición localmente finita de la unidad en* Ω *subordinada al recubrimiento* Γ de Ω.

Teorema 2.1.12 *Sea Γ una colección de abiertos cuya unión es $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces existe una sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ que es una partición localmente finita de la unidad en Ω subordinada al recubrimiento Γ.*

Demostración. Sean $D = \Omega \cap \mathbb{Q}^n$, subconjunto denso y numerable de Ω, y

$$\mathscr{C}_\Gamma = \left\{ \overline{B}(\mathbf{q}, r) \mid \mathbf{q} \in D, r \in \mathbb{Q}^+ \text{ y } \overline{B}(\mathbf{q}, r) \subset A \text{ para algún } A \in \Gamma \right\}$$

y póngase $\mathscr{C}_\Gamma = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$, donde $C_m = \overline{B}(\mathbf{q}_m, r_m)$ $(m \in \mathbb{N})$. Es fácil comprobar que

$$\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B(\mathbf{q}_m, r_m/2), \tag{2.1.1}$$

pero, aun así, desgránese el contenido "$\subseteq$". Si $\mathbf{x} \in \Omega$, entonces $\mathbf{x} \in A$ para algún abierto $A \in \Gamma$, luego existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $B(\mathbf{x}, 2r) \subset A$; por otro lado, por densidad existe $\mathbf{x}_0 \in D$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r/2$ luego $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r/2)$. La prueba de este contenido acaba al probar que $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ está contenido en A, pero esto está claro:

$$|\mathbf{w} - \mathbf{x}| \leq |\mathbf{w} - \mathbf{x}_0| + |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| < 3r/2 < 2r \;\; \forall\, \mathbf{w} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, r),$$

es decir, $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) \subset B(\mathbf{x}, 2r) \subset A$.

Ahora, aplicando el **Teorema 2.1.10**, es posible construir una sucesión de funciones $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \phi_m \leq 1$ y tal que

$$\phi_m(\mathbf{x}) = 0 \;\; \forall\, \mathbf{x} \notin \operatorname{int}(C_m) \quad \text{y} \quad \phi_m(\mathbf{x}) = 1 \;\; \forall\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{q}_m, r_m/2).$$

De seguido, defínase $\psi_1 = \phi_1$ y, después, inductivamente, $\psi_m = (1 - \phi_1) \cdots (1 - \phi_{m-1})\, \phi_m$ para cada $m \geq 2$. Es evidente que $\psi_m \geq 0$ y que se anula en los puntos en los que se anula ϕ_m, es decir, $\psi_m(\mathbf{x}) = 0 \;\; \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}(C_m)$, luego

$$\{\mathbf{x} \in \Omega \mid \psi_m(\mathbf{x}) \neq 0\} \subset \operatorname{int}(C_m) \quad \text{y} \quad \operatorname{sop}(\psi_m) \subseteq C_m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Así se concluye la prueba de las propiedades **a** y **b** de la **Definición 2.1.11**.

Continúese probando las propiedades **c** y **d** de la misma definición. Se comprueba por inducción que

$$\sum_{m=1}^{l} \psi_m = 1 - \prod_{m=1}^{l} (1 - \phi_m) \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Como se da (2.1.1), si $\mathbf{x} \in \Omega$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x} \in B\left(\mathbf{q}_{l_0}, r_{l_0}/2\right), \text{ luego } \lim_{l\to\infty} \sum_{m=1}^{l} \psi_m(\mathbf{x}) = 1 - \lim_{l_0 \leq l \to \infty} \prod_{m=1}^{l} \big(1 - \phi_m(\mathbf{x})\big) = 1,$$

lo que prueba **c**. Por último, si $K \subset \Omega$ es compacto, entonces $K \subset \cup_{j=1}^{l} B\left(\mathbf{q}_j, r_j/2\right)$ para un cierto $l \in \mathbb{N}$, lo que prueba **d** y concluye la demostración. □

2.2. La topología $\mathscr{E}$ para $C^\infty(\Omega)$

En esta sección se va a utilizar la teoría del **Capítulo 1** para poder exponer con detalle y rigor las propiedades de las topologías para los espacios funcionales $C^\infty(\Omega)$ y $C_c^\infty(\Omega)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase la siguiente seminorma sobre $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$:

$$p_n(f) = \text{máx}\{|\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \mathtt{K}_n, \ |\alpha| \leq n\}.$$

Esta familia numerable de seminormas tiene la propiedad

$$p_n(f) \leq p_{n+1}(f) \ \ \forall f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.2.2}$$

Además, es fácil ver que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ separa puntos en $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, en el sentido de la **Definición 1.2.24**. En efecto, si $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ es no nula, entonces existe $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $f(\mathbf{x}) \neq 0$ y, tomando n suficientemente grande, se tiene que $\mathbf{x} \in \mathtt{K}_n$, luego $p_n(f) \geq |f(\mathbf{x})| > 0$.

Ahora, el **Teorema 1.3.29** asegura que estas seminormas definen una topología para $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, que aquí será denotada por $\mathscr{E}$, que es localmente convexa y metrizable. Además, el **Teorema 1.2.27** y la propiedad (2.2.2) establecen que una base local de $\mathscr{E}$ está formada por los conjuntos

$$\mathbf{V}_n := \mathbf{V}(p_n, n) = \{f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega) \,|\, p_n(f) < 1/n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

En particular, la sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ converge en la topología $\mathscr{E}$ a $h \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m_n$ implica

$$f_m - h \in \mathbf{V}_n \Leftrightarrow p_n(f_m - h) = \text{máx}\{|\mathtt{D}^{\alpha} f_m(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^{\alpha} h(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \mathtt{K}_n, \ |\alpha| \leq n\} < 1/n$$

—ver **Definición 1.1.14**—, lo cual se reescribe, gracias a (2.2.2), como:

$$\lim_{m\to\infty} p_n(f_m - h) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Apuntado esto, desgránese las propiedades de este nuevo espacio vectorial topológico.

2.2.1. Convergencia en $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$

Aunque resultan intuitivas, antes de seguir adelante conviene consultar **B.1** para conocer las notaciones adoptadas en este trabajo para la convergencia uniforme (o puntual o uniforme sobre compactos) de sucesiones de funciones. Apuntado esto y para comenzar, la noción básica de $\mathscr{E}-$convergencia de una sucesión en $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ en términos tangibles:

Teorema 2.2.13 *Dadas una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ y $h \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, son equivalentes:*

- **I.** $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}} h$
- **II.** *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, la sucesión $\{\mathtt{D}^{\alpha} f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω a $\mathtt{D}^{\alpha} h$.*

Demostración. $\boxed{\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{II}}$ Fíjese $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ y tómese $K \subset \Omega$ un compacto arbitrario. Sea $\varepsilon > 0$ y considérese $n = n_{(\alpha, K, \varepsilon)} \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \mathtt{K}_n$, $\varepsilon n \geq 1$ y $|\alpha| \leq n$, entonces existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\mathbf{x}\in K} \left|\mathtt{D}^{\alpha} f_m(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^{\alpha} h(\mathbf{x})\right| \leq p_n(f_m - h) < 1/n \leq \varepsilon \ \text{ si } \ m \geq m_n.$$

De la arbitrariedad al tomar $\varepsilon > 0$ se obtiene $\mathtt{D}^{\alpha} f_m$ converge uniformemente sobre K a $\mathtt{D}^{\alpha} h$, probando **II**.

$\boxed{\mathbf{II} \Rightarrow \mathbf{I}}$ Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\mathtt{n}-$índice α que verifique $|\alpha| \leq n$ existe $m_{\alpha,n} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\mathbf{x}\in \mathtt{K}_n} \left|\mathtt{D}^{\alpha} f_m(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^{\alpha} h(\mathbf{x})\right| < 1/n \ \text{ si } \ m \geq m_{\alpha,n} \ \text{ (aplicando } \mathbf{II}\text{)}.$$

Ya es claro que $p_n(f_m - h) < 1/n$ si $m \geq \text{máx}\{m_{\alpha,n} : \ |\alpha| \leq n\}$. $\square$

Teorema 2.2.14 *El espacio vectorial topológico* $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ *es completo.*

Demostración. Sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ una $\mathscr{E}-$sucesión de Cauchy, entonces, por definición,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, k_n \in \mathbb{N}\ :\ \left(m,\, l \geq k_n \Rightarrow \max_{\mathbf{x}\in\mathtt{K}_n,\, |\alpha|\leq n} \left|\mathtt{D}^\alpha f_m(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^\alpha f_l(\mathbf{x})\right| < 1/n\right).$$

Una demostración análoga a la de la implicación $\boxed{\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{II}}$ del **Teorema 2.2.13** prueba que lo anterior supone que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, $\{\mathtt{D}^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre todo $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$. Ahora, el **Teorema B.1.6** asegura lo siguiente: para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, $\{\mathtt{D}^\alpha f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $g_\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua —continua por el **Teorema B.1.7**— y también

$$\mathtt{D}^\alpha f_m \xrightarrow[m\to\infty]{K-\text{unif.}} g_\alpha \ \text{ para todo } K \in \mathfrak{K}(\Omega).$$

En particular,

$$f_m \xrightarrow[m\to\infty]{K-\text{unif.}} g_{\mathbf{0}} \ \text{ para todo } K \in \mathfrak{K}(\Omega),$$

y es ahora evidente que $g_{\mathbf{0}} \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ pues $g_\alpha = \mathtt{D}^\alpha g_{\mathbf{0}}\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ —debido esto último al **Teorema B.1.8**—. Por tanto, $\mathscr{E} - \text{lím}_{m\to\infty} f_m = g_{\mathbf{0}}$. □

Corolario 2.2.15 $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ *es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Como la topología $\mathscr{E}$, además de ser completa, es compatible con una métrica invariante y $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ es localmente convexo, el corolario sigue de la definición de espacio de Fréchet. □

2.2.2. Densidad de $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ en $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$

Teorema 2.2.16 $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ *es denso en* $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ *bajo la topología* $\mathscr{E}$.

Demostración. Sea $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ una sucesión tal que

$$\phi_m|_{\mathtt{K}_m} = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi_m \leq 1,$$

cuya existencia está garantizada por el **Teorema 2.1.10**. Sea también $f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$; por un lado, es evidente que $\text{sop}(\phi_m f) \subseteq \text{sop}(\phi_m)$, luego $\phi_m f \in \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ $(m \in \mathbb{N})$; por otro lado, sean $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ y $K \subset \Omega$ un compacto cualesquiera; existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \mathtt{K}_m$ si $m \geq l$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in K} \left|\mathtt{D}^\alpha(\phi_m f)(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^\alpha f(\mathbf{x})\right| = \lim_{l\leq m\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in K} \left|\mathtt{D}^\alpha\big(f(\phi_m - 1)\big)(\mathbf{x})\right| = 0.$$

De la arbitrariedad al tomar el $\mathtt{n}-$índice y el compacto se obtiene $\mathscr{E} - \text{lím}\, \phi_m f = f$. □

2.2.3. Compacidad en $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$

Se va a hacer uso ahora de un resultado conocido de topología que afirma que en un espacio métrico se cumple la propiedad «*un subconjunto es compacto si, y sólo si, es secuencialmente compacto*»[1] —consultar referencia **[7, 17G, pag. 125]**—. Con dicha propiedad se quiere probar que $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ tiene la propiedad de Heine-Borel, pero como paso previo comiéncese con el siguiente lema, en el que se usa la noción de *familia de funciones equicontinua en un compacto* —ver la sección **B.2**—.

[1] En un espacio topológico (X, τ), un subconjunto K de X es *secuencialmente compacto* si, por definición, cada sucesión contenida en K tiene una subsucesión convergente a algún punto de K.

Lema 2.2.17 *Si $E \subset \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ es $\mathscr{E}-$acotado, entonces, para cada par $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ con $|\alpha| \le n$, la familia $F_\alpha = \{\mathtt{D}^\alpha f \mid f \in E\}$ es*

a) *equicontinua en $\mathtt{K}_n$ y*

b) *uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_n$.*

Demostración. En primer lugar, por el **Teorema 1.2.27** la acotación de E es equivalente a la existencia de $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $p_n(f) \le R_n$ para todos $f \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Esto es:

$$|\alpha| \le n \Rightarrow \left[\max_{\mathbf{x}\in\mathtt{K}_n}\left|\mathtt{D}^\alpha f(\mathbf{x})\right| \le R_n \;\; \forall f \in E\right]$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual prueba la propiedad **b**.

En segundo lugar, fíjese $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ con $|\alpha| \le n$ cualesquiera. A continuación, dado $\mathbf{x} \in \mathtt{K}_n$, sea $\varepsilon > 0$: como $\mathbf{x} \in \operatorname{int}(\mathtt{K}_{n+1})$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{B}_{d_1}(\mathbf{x}, \delta) \subset \operatorname{int}(\mathtt{K}_{n+1})$ y, como la bola es convexa,

$$\mathbf{y} \in \mathrm{B}_{d_1}(\mathbf{x}, \delta) \Rightarrow \left[(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathrm{B}_{d_1}(\mathbf{x}, \delta) \;\; \forall t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\right].$$

Si $h \in E$, defínase $\eta(t) := (\mathtt{D}^\alpha h)\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big)$ para cada $t \in [0, 1]$, que verifica

$$\int_0^1 \eta'(t)\,dt = \eta(1) - \eta(0), \quad \text{donde } \eta'(t) = \nabla(\mathtt{D}^\alpha h)\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned}\left|\mathtt{D}^\alpha h(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^\alpha h(\mathbf{y})\right| &= |\eta(1) - \eta(0)| \le \int_0^1 \left|\eta'(t)\right| dt \le \\ &\le \max_{0\le t\le 1}\left|\sum_{\nu=1}^{\mathtt{n}} \frac{\partial(\mathtt{D}^\alpha h)}{\partial \xi_\nu}\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big) \cdot (y_\nu - x_\nu)\right| \le \\ &\le R_{n+1}\sum_{\nu=1}^{\mathtt{n}} |y_\nu - x_\nu| = R_{n+1}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_1\end{aligned}$$

y, ahora, si se toma $\delta \le \varepsilon / R_{n+1}$, se obtiene

$$\left|\mathtt{D}^\alpha h(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^\alpha h(\mathbf{y})\right| \le R_{n+1}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_1 \le \varepsilon.$$

En tercer lugar, se apunta que de la arbitrariedad al tomar $h \in E$ se obtiene

$$\left|\mathtt{D}^\alpha f(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^\alpha f(\mathbf{y})\right| \le \varepsilon \;\text{ si }\; \mathbf{y} \in \mathrm{B}_{d_1}(\mathbf{x}, \delta) \cap \mathtt{K}_n \;\text{ para toda }\; f \in E.$$

De aquí y de la arbitrariedad al tomar $\varepsilon > 0$ se deduce que $F_\alpha = \{\mathtt{D}^\alpha f \mid f \in E\}$ es equicontinua en el punto $\mathbf{x}$. Finalmente, como se ha tomado $\mathbf{x} \in \mathtt{K}_n$ cualquiera, el razonamiento anterior prueba el resultado: $F_\alpha = \{\mathtt{D}^\alpha f \mid f \in E\}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_n$. □

Teorema 2.2.18 *Sea $F \subset \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ un subconjunto cerrado y acotado bajo la topología $\mathscr{E}$. Toda sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset F$ tiene una subsucesión convergente a algún elemento de F. En particular, $(\mathtt{C}^{\infty}(\Omega), \mathscr{E})$ verifica la propiedad de Heine-Borel.*

Demostración. Tómese una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset F$. En cada paso de la siguiente construcción de subsucesiones de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ se va a usar el evidente hecho «*toda subsucesión de una sucesión uniformemente convergente sobre un subconjunto de su dominio es uniformemente convergente sobre dicho subconjunto y tiene el mismo límite que la original*».

Aplicando el **Lema 2.2.17**, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ que verifique $|\alpha| \leq 1$, $\{\mathtt{D}^\alpha f |\ f \in F\}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_1$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_1$. Así, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_1$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_1$. Ahora, el **Teorema B.2.12** asegura la existencia de una subsucesión $\{g_{0,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$g_{0,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_1-\text{unif.}} g_1, \quad \text{donde } g_1 \in \mathtt{C}(\text{int}\,\mathtt{K}_1).$$

A su vez $\{\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} g_{0,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_1$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_1$, luego la sucesión $\{g_{0,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{g_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} g_{1,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_1-\text{unif.}} g_{[1,\,\mathbf{e}_1]}.$$

Como en particular $\{g_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $\mathtt{K}_1$ a g_1, el **Teorema B.1.8** implica que g_1 es derivable en la coordenada x_1 y que $\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} g_1 = g_{[1,\,\mathbf{e}_1]}$. De nuevo, $\{\mathtt{D}^{\mathbf{e}_2} g_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_1$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_1$, luego $\{g_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{g_{2,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathtt{D}^{\mathbf{e}_2} g_{2,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_1-\text{unif.}} g_{[1,\,\mathbf{e}_2]}, \quad \text{donde } \mathtt{D}^{\mathbf{e}_2} g_1 = g_{[1,\,\mathbf{e}_2]}$$

Inductivamente, como $\{\mathtt{D}^{\mathbf{e}_\mathtt{n}} g_{\mathtt{n}-1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_1$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_1$, $\{g_{\mathtt{n}-1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{g_{\mathtt{n},\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathtt{D}^{\mathbf{e}_\mathtt{n}} g_{\mathtt{n},\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_1-\text{unif.}} g_{[1,\,\mathbf{e}_\mathtt{n}]} = \mathtt{D}^{\mathbf{e}_\mathtt{n}} g_1.$$

En particular, $g_1 \in \mathtt{C}^1(\text{int}\,\mathtt{K}_1)$.

Llegado a este punto, se renombra: $f_{1,\,k} = g_{\mathtt{n},\,k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Se ha obtenido la subsucesión $\{f_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y una función $g_1 \in \mathtt{C}^1(\text{int}\,\mathtt{K}_1)$ que verifica lo siguiente:

$$\boxed{\mathtt{D}^\alpha f_{1,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_1-\text{unif.}} \mathtt{D}^\alpha g_1 \ \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}} \text{ con } |\alpha| \leq 1.}$$

Continúese con el razonamiento. Como, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ verificando $|\alpha| \leq 2$, la familia $\{\mathtt{D}^\alpha f |\ f \in F\}$ es equicontinua en $\mathtt{K}_2$ y uniformemente acotada sobre $\mathtt{K}_2$, $\{g_{\mathtt{n},\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{g_{\mathtt{n}+1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$g_{\mathtt{n}+1,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_2-\text{unif.}} g_2, \quad \text{donde } g_2 \in \mathtt{C}(\text{int}\,\mathtt{K}_2).$$

Como la convergencia uniforme implica convergencia puntual y $\{g_{\mathtt{n}+1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $\mathtt{K}_1$, se verifica $g_2 = g_1$ en $\mathtt{K}_1$. Repitiendo todo el proceso anterior, teniendo en cuenta que $\mathtt{D}^{\mathbf{e}_\nu+\mathbf{e}_\mu} = \mathtt{D}^{\mathbf{e}_\nu}\mathtt{D}^{\mathbf{e}_\mu}$ $(1 \leq \nu, \mu \leq \mathtt{n})$ en los casos $|\alpha| = 2$, se construye una subsucesión de $\{f_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ —y, por tanto, de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$—, $\{f_{2,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, que verifica

$$\boxed{\mathtt{D}^\alpha f_{2,\,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_2-\text{unif.}} \mathtt{D}^\alpha g_2 \ \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}} \text{ con } |\alpha| \leq 2,}$$

donde $g_2 \in \mathtt{C}^2(\operatorname{int} \mathtt{K}_2)$ y, además, $g_2 = g_1$ en $\mathtt{K}_1$.

En conclusión, existen una sucesión de subsucesiones de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$\left\{S_n = \{f_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y funciones $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican, para cada $n \in \mathbb{N}$,

- S_{n+1} es subsucesión de S_n,
- $\mathtt{D}^\alpha f_{n,k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathtt{K}_n-\text{unif.}} \mathtt{D}^\alpha g_n$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ con $|\alpha| \leq n$ y
- $g_n \in \mathtt{C}^n(\operatorname{int} \mathtt{K}_n)$ con $g_{n+1} = g_n$ en $\mathtt{K}_n$.

Del punto tercero se deduce la existencia de

$$h \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \text{ tal que } g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} h.$$

Ahora, por el proceso diagonal de Cantor, la sucesión $\Lambda = \{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y verifica

$$f_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{E}} h.$$

Efectivamente, fijado $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ arbitrariamente y para cualquier $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, siempre existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha| \leq n_0$ y $K \subseteq \mathtt{K}_{n_0}$; como es obvio que $\{f_{n,n}\}_{n_0<n}$ es una subsucesión de S_{n_0} y $\mathtt{D}^\alpha f_{n_0,k}$ converge uniformemente sobre $\mathtt{K}_{n_0}$ a $\mathtt{D}^\alpha h$, entonces también es obvio que

$$\mathtt{D}^\alpha f_{n,n} \xrightarrow[n\to\infty]{K-\text{unif.}} \mathtt{D}^\alpha h.$$

Finalmente, como F es cerrado, $h \in F$. □

2.2.4. El subespacio $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$

Sea $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ con interior no vacío; el subespacio $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ ya fue introducido en la **Definición** 2.1.6.

Teorema 2.2.19 *Para cada compacto $K \subset \Omega$ con interior no vacío, se verifica que $\mathscr{D}_K(\Omega)$ es un subespacio $\mathscr{E}-$cerrado de $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ con dimensión infinita. En particular,* $\dim \mathtt{C}^\infty(\Omega) = \infty$.

Demostración. En primer lugar, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, considérese el funcional

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{x}} : \mathtt{C}^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Claramente, $\Lambda_{\mathbf{x}}$ es continuo y, por tanto, el núcleo $\ker(\Lambda_{\mathbf{x}})$ es $\mathscr{E}-$cerrado. Con lo cual,

$$\mathscr{D}_K(\Omega) = \cap_{\mathbf{x}\in\Omega\setminus K} \ker(\Lambda_{\mathbf{x}}) \qquad \text{(intersección arbitraria de } \mathscr{E}-\text{cerrados)}$$

es un subespacio $\mathscr{E}-$cerrado.

En segundo lugar, como el interior de K es no vacío, se construye una sucesión de bolas $\{\mathrm{B}(\mathbf{x}_m, r_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ disjuntas dos a dos y contenidas en el compacto K. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tómese $\psi_m \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ con $\operatorname{sop}(\psi_m) \subseteq \overline{\mathrm{B}}(\mathbf{x}_m, r_m)$ —por ejemplo, según el **Teorema** 2.1.10—.

Ahora, en tercer y último lugar, para cada $n \in \mathbb{N}$, es obvio que la ecuación

$$\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_n\psi_n = 0 \text{ en las incógnitas } \lambda_m \in \mathbb{C} \ (1 \leq m \leq n)$$

tiene única solución $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, es decir, $\{\psi_m\}_{m=1}^n$ es un conjunto linealmente independiente. Por tanto, $\dim \mathscr{D}_K(\Omega) \geq \dim \operatorname{span}\{\psi_m\}_{m=1}^n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definición 2.2.20 Si $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ tiene interior no vacío, se denota por $\mathscr{E}^K$ a la topología que hereda $\mathscr{D}_K(\Omega) \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ como subespacio topológico de $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$.

Como resumen final de los resultados de esta sección se enuncia el siguiente

Corolario 2.2.21

a) $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ *es un espacio vectorial topológico con topología localmente convexa, metrizable, completa, con la propiedad de Heine-Borel y, además, es no normable.*

b) *Si* $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ *tiene interior no vacío, entonces* $\mathscr{D}_K(\Omega)$ *es un subespacio* $\mathscr{E}-$*cerrado de* $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ *con* $\dim \mathscr{D}_K(\Omega) = \infty$. *Además, el subespacio topológico* $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$ *tiene la propiedad de Heine-Borel, es metrizable, completo y no normable.*

Demostración. La no normabilidad de $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$ y de $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$ se deduce de los resultados **Teorema** 1.1.13 y **Teorema** A.4.11; el resto de propiedades enunciadas ya están probadas o son directas. □

2.2.5. El dual topológico de $(\mathtt{C}^\infty(\Omega), \mathscr{E})$

Definición 2.2.22 El conjunto de todas las formas lineales definidas sobre $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ y continuas bajo el par $\mathscr{E} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$ se denota por $\mathscr{E}'(\Omega)$. De manera natural, se define también las operaciones suma $+ : \mathscr{E}'(\Omega) \times \mathscr{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{E}'(\Omega)$ y multiplicación por escalares complejos $\cdot : \mathbb{C} \times \mathscr{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{E}'(\Omega)$ dadas por

- $(\mathrm{T}+\mathrm{S})(f) = \mathrm{T}(f) + \mathrm{S}(f) \ \ \forall f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$,
- $(a \cdot \mathrm{R})(f) = a \cdot \mathrm{R}(f) \ \ \forall f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$.

Nota. Es directo obtener que $(\mathscr{E}'(\Omega), +, \cdot)$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. Como aclaración, el neutro para la suma se representa por 0, como el escalar cero y como la función nula.

Ejemplo 2.2.23 Dado $\mathbf{x} \in \Omega$, la forma lineal $\Lambda_{\mathbf{x}} : \mathtt{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en (2.2.3) es continua y, por tanto, $\Lambda_{\mathbf{x}} \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Teorema 2.2.24 *Sea* $\mathrm{T} : \mathtt{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma lineal. Se da la siguiente caracterización:* $\mathrm{T} \in \mathscr{E}'(\Omega)$ *si, y sólo si, existen* $n \in \mathbb{N}$ *y* $c > 0$ *tales que*

$$|\mathrm{T}(f)| \leq c \cdot p_n(f) \ \ \forall f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega).$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Considérese una sucesión $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\mathscr{E} - \text{lím}\, g_m = g$, con $g \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$, y sea $\mathrm{T} : \mathtt{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal de manera que

$$|\mathrm{T}(f)| \leq c \cdot p_n(f) \ \ \forall f \in \mathtt{C}^\infty(\Omega) \ \text{ para algunos } c > 0,\, n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, aplicando que $\mathscr{E} - \text{lím}_{m\to\infty}\, g_m = g$, se tiene

$$|\mathrm{T}(g_m - g)| \leq c \cdot p_n(g_m - g) < c/n$$

si $m \geq m_n$ para cierto $m_n \in \mathbb{N}$. La equivalencia $\boxed{\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{III}}$ del **Teorema** 1.1.22 prueba que T es continua.

$\boxed{\Rightarrow}$ Por reducción al absurdo, si no se cumple la condición, entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $f_m \in \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ tal que $|\mathrm{T}(f_m)| > m \cdot p_m(f_m)$. Tómese ahora $\psi_m = \mathrm{T}(f_m)^{-1} f_m$ $(m \in \mathbb{N})$. Esta sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty(\Omega)$ verifica la siguiente contradicción —ver equivalencia $\boxed{\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{IV}}$ del **Teorema** 1.1.22—:

- $\mathrm{T}(\psi_m) = 1 \ \forall\, m \in \mathbb{N}$.
- $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}} 0$, pues, fijados arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ y $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$,

$$\sup_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathtt{D}^\alpha \psi_m(\mathbf{x})\right| \leq p_m(\psi_m) = \frac{p_m(f_m)}{|\mathrm{T}(f_m)|} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

□

2.3. La topología $\mathscr{D}$ para $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$

En esta sección se pasa a definir una nueva familia de seminormas sobre $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ y una topología localmente convexa para este espacio vectorial. Además, se demuestra un importante teorema de caracterización para las formas lineales continuas de $(\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ en un otro espacio localmente convexo. Se sigue principalmente la referencia **[5, Cap 6]**.

2.3.1. Conjuntos $\mathscr{D}-$abiertos en $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase la siguiente seminorma sobre $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$:

$$\|\phi\|_n = \text{máx}\{|\mathtt{D}^\alpha \phi(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \Omega, \ |\alpha| \leq n\}.$$

Como motivación, apuntar que esta nueva sucesión de normas $\{\|\bullet\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podría utilizarse para definir una topología $\mathscr{D}^*$ localmente convexa y metrizable para $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$, pero es que ésta presenta el inconveniente de no ser completa en general. Por ejemplo, tómese $\mathtt{n} = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ y elíjase $\phi \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[0,\,1]$, $\phi(x) > 0$ si $x \in (0,\,1)$. Si, para cada $m \in \mathbb{N}$, se define

$$\psi_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\phi(x-k) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

entonces $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una $\mathscr{D}^*-$sucesión de Cauchy, como se muestra a continuación:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathtt{D}^\alpha\psi_m(x) - \mathtt{D}^\alpha\psi_l(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=l+1}^{m}\frac{1}{k}(\mathtt{D}^\alpha\phi)(x-k)\right| \leq \frac{1}{l+1}\cdot \underset{t\in[0,\,1]}{\text{máx}}\left|\mathtt{D}^\alpha\phi(t)\right|$$

tiende a 0 cuando $m > l \to \infty$. Pero su límite no tiene soporte compacto, es decir, no vive en $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R})$. Este contratiempo obliga a hilar más fino.

Defínase pues una nueva colección de conjuntos candidata a topología (completa) para el $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$.

Definición 2.3.25 Sean las siguientes familias de subconjuntos de $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$:

- $\mathscr{B}_0 = \left\{W \subset \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega) \,|\, W \text{ es convexo, equilibrado y } W \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \mathscr{E}^K \ \ \forall\, K \in \mathfrak{K}(\Omega)\right\}$
- $\mathscr{D} = \left\{\cup_{(\phi,\,W)\in\Delta}(\phi + W) \,\middle|\, \Delta \subseteq \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega) \times \mathscr{B}_0\right\}$

Comiéncese con la siguiente observación elemental.

Lema 2.3.26 *Sea $K \subset \Omega$ un compacto con interior no vacío, entonces*

a) *la familia de seminormas $\left\{\|\bullet\|_n|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ induce la topología $\mathscr{E}^K$ para $\mathscr{D}_K(\Omega)$ y*

b) *una base local de $\mathscr{E}^K$ está formada por los conjuntos*

$$\mathbf{V}_n^K = \{\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : \|\phi\|_n < 1/n\} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.3.4}$$

Demostración. Claro, a partir de un cierto $n \in \mathbb{N}$ se da $K \subseteq \mathtt{K}_n$ y, en consecuencia, se verifica $p_n(\phi) = \|\phi\|_n$ para toda $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Ahora **a** y **b** son consecuencia de la **Observación 1.3.30** y de la propiedad (2.2.2). □

Teorema 2.3.27

a) *$\mathscr{D}$ es una topología para $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ y $\mathscr{B}_0$ es una base local de $\mathscr{D}$.*

b) *$(\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega), \mathscr{D})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Demostración. Para demostrar **a** es claramente suficiente probar que, dados

$$V_1, V_2 \in \mathscr{D} \text{ y } \varphi \in V_1 \cap V_2, \text{ se verifica } \varphi + W \subset V_1 \cap V_2 \text{ para algún } W \in \mathscr{B}_0. \tag{2.3.5}$$

La definición de $\mathscr{D}$ muestra que existen $\phi_j \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$, $W_j \in \mathscr{B}_0$ tales que $\varphi \in \phi_j + W_j \subset V_j$ $(j = 1, 2)$. Tómese $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ de forma que $\varphi, \phi_1, \phi_2 \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Como $\varphi - \phi_j \in \mathscr{D}_K(\Omega) \cap W_j$, que es un abierto de $\mathscr{E}^K$, se tiene[2] $\varphi - \phi_j \in (1 - \delta_j) W_j$ para cierto $\delta_j \in (0, 1)$ y, entonces, por ser W_j convexo,

$$\varphi - \phi_j + \delta_j W_j \subset (1 - \delta_j) W_j + \delta_j W_j = W_j, \text{ luego}$$
$$\varphi + \delta_j W_j \subset \phi_j + W_j \subset V_j$$

para $j = 1, 2$. Con lo cual, tomando $W = (\delta_1 W_1) \cap (\delta_2 W_2)$ se verifica (2.3.5).

Observación 2.3.28 Probado **a**, en adelante, los conceptos topológicos considerados serán respecto de $\mathscr{D}$ si se refieren a subconjuntos de $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$.

Pásese ahora a probar **b** o, lo que es lo mismo, pruébese que $\mathscr{D}$ es una topología vectorial. En primer lugar probamos la propiedad de Hausdorff. Sean ϕ, ϕ' elementos distintos de $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ y póngase

$$U_1(\phi, \phi') = \left\{\psi \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega) : \|\psi\|_1 \le \tfrac{1}{2}\|\phi - \phi'\|_1\right\},$$

que es convexo y equilibrado y verifica, para cada compacto $K \subset \Omega$,

$$U_1(\phi, \phi') \cap \mathscr{D}_K(\Omega) = \tfrac{1}{2}\|\phi - \phi'\|_1 \cdot \mathbf{V}_1^K \in \mathscr{E}^K,$$

luego $U_1(\phi, \phi') \in \mathscr{B}_0$. Además, los conjuntos

$$\phi + U_1(\phi, \phi') \quad \text{y} \quad \phi' + U_1(\phi, \phi') \tag{2.3.6}$$

son abiertos en $\mathscr{D}$ y disjuntos dos a dos, de donde sigue que la topología es Hausdorff.

En segundo lugar, veamos que las operaciones de espacio vectorial son continuas. Por un lado, la suma es continua porque, al ser convexo cada $W \in \mathscr{B}_\mathbf{0}$, para cualesquiera que sean $\psi_1, \psi_2 \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\Omega)$ se verifica

$$\left(\psi_1 + \frac{1}{2}W\right) + \left(\psi_2 + \frac{1}{2}W\right) = (\psi_1 + \psi_2) + W.$$

[2] Para justificar este paso: si (X, τ) es espacio vectorial topológico y $\mathbf{x} \in X$, entonces la aplicación $\mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \alpha\mathbf{x}$ es continua, luego es continua en $\alpha = 1$.

Por otro lado, para probar que la multiplicación por escalares es continua, razónese como sigue. Sean $a \in \mathbb{C}$, $\phi \in \mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$, $W \in \mathscr{B}_\mathbf{0}$ arbitrarios. Existe $s > 0$ tal que $\phi \in \frac{s}{2}W$. Póngase $t = 1/(2|a| + 2/s)$. Entonces, para $b \in \mathbb{C}$,

$$b\psi - a\phi = b(\psi - \phi) + (b - a)\phi.$$

Si $|b - a| < 1/s$ y $\psi - \phi \in tW$ entonces del hecho de que W es convexo y equilibrado se desprende que

$$b\psi - a\phi \in \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W = W.$$

Se ha probado $\mathrm{D}(a, 1/s) \cdot (\phi + tW) \subset a\phi + W$ y, por tanto, la continuidad del producto. □

2.3.2. Propiedades de la topología $\mathscr{D}$

El siguiente resultado recoge las propiedades principales de $(\mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega), \mathscr{D})$ como espacio vectorial topológico.

Teorema 2.3.29 *El espacio de las funciones de testeo tiene las siguientes propiedades:*

a) *Un conjunto convexo y equilibrado $V \subset \mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$ es abierto si, y sólo si, $V \in \mathscr{B}_0$.*

b) *Para cada $K \subset \Omega$ compacto, la topología $\mathscr{E}^K$ coincide con la topología de subespacio que $\mathscr{D}_K(\Omega)$ hereda de $\mathscr{D}$, es decir, $\mathscr{E}^K = \{U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \mid U \in \mathscr{D}\}$.*

c) *Un subconjunto $E \subset \mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$ es acotado si, y sólo si, $E \subset \mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ para cierto compacto $K_0 \subset \Omega$ y, además, existe una sucesión $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|\phi\|_n \leq \sigma_n \ \ \forall\, \phi \in E \quad (n \in \mathbb{N}).$$

d) $(\mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega), \mathscr{D})$ *tiene la propiedad de Heine-Borel.*

e) *La sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en algún $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ y*

$$\lim_{m,\, l \to \infty} \|\psi_m - \psi_l\|_n = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

f) *La sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$ verifica $\mathscr{D} - \lim \psi_m = 0$ si, y sólo si, existe un compacto $K_0 \subset \Omega$ tal que* $\operatorname{sop}(\psi_m) \subseteq K_0$ *para todo $m \in \mathbb{N}$ y, por otro lado,*

$$\mathtt{D}^\alpha \psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^\mathtt{n}.$$

g) *Cada sucesión de Cauchy en $\mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$ es convergente a alguna función de $\mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega)$, es decir, $(\mathtt{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega), \mathscr{D})$ es completo.*

Demostración. **a)** Basta demostrar el siguiente hecho:

$$\text{si } V \in \mathscr{D} \text{ entonces } V \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \mathscr{E}^K \text{ para todo } K \in \mathfrak{K}(\Omega). \tag{2.3.7}$$

Suponer que $V \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \neq \emptyset$ (de otro modo es trivial). Sea $\phi_0 \in V \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$. Por la propiedad de base local existe $W_0 \in \mathscr{B}_0$ tal que $\phi_0 + W_0 \subset V$. Esto implica

$$\phi_0 + (\mathscr{D}_K(\Omega) \cap W_0) \subset \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V,$$

donde el conjunto de la izquierda es además $\mathscr{E}^K-$abierto. Este razonamiento prueba que el conjunto $\mathscr{D}_K(\Omega)\cap V$ es unión de $\mathscr{E}^K-$abiertos y, por tanto, que él mismo pertenece a $\mathscr{E}^K$.

b) Sea $K\in\mathfrak{K}(\Omega)$ fijado arbitrariamente. El contenido $\mathscr{E}^K\supset\{U\cap\mathscr{D}_K(\Omega)\mid U\in\mathscr{D}\}$ está probado en (2.3.7). Ahora, sea $E\in\mathscr{E}^K$; se ha de ver que E es la intersección de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ con algún elemento de $\mathscr{D}$. Para cada $\phi\in E$ existe $n_\phi\in\mathbb{N}$ tal que

$$\phi+\mathbf{V}^K_{n_\phi}=\{\psi\in\mathscr{D}_K(\Omega):\ \|\psi-\phi\|_{n_\phi}<1/n_\phi\}\subset E,$$

ya que, por el **Lema 2.3.26**,

$$\mathscr{E}^K=\left\{\cup_{(\varphi,\,n)\in\Delta}\left(\varphi+\mathbf{V}^K_n\right)\,\middle|\,\Delta\subset\mathscr{D}_K(\Omega)\times\mathbb{N}\right\}.$$

Póngase $W_\phi=\{\psi\in C^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega):\ \|\psi\|_{n_\phi}<1/n_\phi\}$, entonces $W_\phi\in\mathscr{B}_0$ (se comprueba fácilmente) y

$$\mathscr{D}_K(\Omega)\cap\left(\phi+W_\phi\right)=\phi+\mathbf{V}^K_{n_\phi}\subset E.$$

Con lo cual, $U_0:=\cup_{\phi\in E}\left(\phi+W_\phi\right)$ verifica $U_0\cap\mathscr{D}_K(\Omega)=E$. Así se prueba el otro contenido.

c) $\boxed{\Leftarrow}$ Si $K\subset\Omega$ es compacto, $E\subset\mathscr{D}_K(\Omega)$ y $\|\phi\|_n<\sigma_n\ \forall\ \phi\in E$ para cierto $\sigma_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$, entonces E es $\mathscr{E}^K-$acotado. Como se da **b**, E es acotado.

$\boxed{\Rightarrow}$ Considérese un conjunto $E\subset C^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ que no esté contenido en ningún $\mathscr{D}_K(\Omega)$ y procédase por el contrarrecíproco. Entonces,

$$\text{para cada } C\in\mathfrak{K}(\Omega) \text{ existe algún elemento } \varphi\in E \text{ tal que } \operatorname{sop}(\varphi)\not\subseteq C. \tag{2.3.8}$$

Recordar que la unión finita de subconjuntos compactos es un subconjunto compacto. Por (2.3.8) existe $\phi_1\in E$ tal que $\operatorname{sop}(\phi_1)\not\subseteq K_1$. Se toma $\mathbf{x}_1\in\operatorname{sop}(\phi_1)\setminus K_1$ tal que[3] $\phi_1(\mathbf{x}_1)\neq 0$. Aplicando de nuevo (2.3.8), existe una función $\phi_2\in E$ tal que $\operatorname{sop}(\phi_2)\not\subseteq K_2\cup\operatorname{sop}(\phi_1)$, y existe $\mathbf{x}_2\in\operatorname{sop}(\phi_2)\setminus\left(K_2\cup\operatorname{sop}(\phi_1)\right)$ tal que $\phi_2(\mathbf{x}_2)\neq 0$. Usando de nuevo (2.3.8), existe $\phi_3\in E$ tal que $\operatorname{sop}(\phi_3)\not\subseteq K_3\cup\operatorname{sop}(\phi_2)\cup\operatorname{sop}(\phi_1)$ y un punto $\mathbf{x}_3$ tal que…

Inductivamente se construye dos sucesiones $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset E$, $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Omega$ que verifican

- $\phi_n(\mathbf{x}_n)\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$,
- los puntos de $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos dos a dos y
- $\mathbf{x}_n\notin K_n$, lo que implica que la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación en Ω —es decir, “se aleja hacia $\partial\Omega\cup\{\infty\}$”—.

A continuación, sea

$$W=\{\phi\in C^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega):\ |\phi(\mathbf{x}_n)|<|\phi_n(\mathbf{x}_n)|/n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Véase que $W\in\mathscr{B}_0$. Como W es convexo y equilibrado, sólo hay que verificar que

$$W\cap\mathscr{D}_K(\Omega)\in\mathscr{E}^K\ \ \forall\ K\in\mathfrak{K}(\Omega). \tag{2.3.9}$$

Sea $\mathsf{N}=\{n\in\mathbb{N}\mid\mathbf{x}_n\in K\}$, el cual es un conjunto finito (debido a las propiedades de la sucesión), y, por comodidad, llámese $a_n=|\phi_n(\mathbf{x}_n)|/n>0$. Considerar el conjunto

$$A=\{\psi\in\mathscr{D}_K(\Omega):\ \|\psi\|_1<b\}=b\cdot\mathbf{V}^K_1,\quad \text{donde } b=\min_{n\in\mathsf{N}}a_n>0,$$

[3] Si $\mathbf{w}\in\operatorname{sop}(\phi_1)\setminus K_1$, entonces $B(\mathbf{w},\delta)\subset\Omega\setminus K_1$ para algún $\delta>0$. Por definición de soporte, necesariamente se da $B(\mathbf{w},\delta)\cap\{\mathbf{x}\in\Omega\mid\phi_1(\mathbf{x})\neq 0\}\neq\emptyset$.

que es $\mathscr{E}^K-$abierto y verifica $A \subset W \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$. Basta probar que para cada $\phi \in W \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ existe $t_\phi > 0$ tal que

$$\phi + t_\phi A \subset W \cap \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Para ello, si $t > 0$ y $f \in A$, uno cuenta con que

$$|(\phi + tf)(\mathbf{x}_n)| \leq |\phi(\mathbf{x}_n)| + t\|f\|_1 \leq |\phi(\mathbf{x}_n)| + tb \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como sop$(\phi + tf) \subset K$, la expresión de la izquierda se anula si $n \notin \mathsf{N}$, así que basta elegir $t_\phi > 0$ tal que

$$|\phi(\mathbf{x}_n)| + t_\phi b < a_n \ \ \forall\, n \in \mathsf{N},$$

lo cual es siempre posible pues $\phi \in W$. Esto prueba (2.3.9) y por tanto que $W \in \mathscr{B}_0$. Pero $\phi_n \notin nW$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $E \nsubseteq nW$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, E es no acotado.

En definitiva, un subconjunto acotado E de $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ está necesariamente contenido en $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ para algún $K_0 \in \mathfrak{K}(\Omega)$. Finalmente, y en virtud de **b**, un tal subconjunto es acotado bajo la topología $\mathscr{E}^{K_0}$ y esto completa la demostración de **c**.

d) Este aserto se desprende de **b**, de **c** y del hecho de que cada $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.

e) $\boxed{\Rightarrow}$ Puesto que toda sucesión de Cauchy es acotada —**Proposición 1.1.15**—, en virtud de **c**, la sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ está contenida en algún $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$. Por **b**, $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es también una $\mathscr{E}^{K_0}-$sucesión de Cauchy. Así, si $n \in \mathbb{N}$ es cualquiera, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \geq n$ tal que $K_0 \subseteq \mathrm{K}_{n_\varepsilon}$ y $\varepsilon n_\varepsilon \geq 1$ de manera que se verifica

$$\|\psi_m - \psi_l\|_n \leq \|\psi_m - \psi_l\|_{n_\varepsilon} = p_{n_\varepsilon}(\psi_m - \psi_l) < 1/n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

si $m \geq l \geq k_{n_\varepsilon}$ para cierto $k_{n_\varepsilon} \in \mathbb{N}$. Sumando a este razonamiento la arbitrariedad al tomar $\varepsilon > 0$ se obtiene

$$\lim_{m\geq l\to\infty} \|\psi_m - \psi_l\|_n = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente,

$$\lim_{m\geq l\to\infty} \|\psi_m - \psi_l\|_n = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}) \text{ junto con } \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$$

implica la existencia de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq l \geq k_n \Rightarrow \|\psi_m - \psi_l\|_n < 1/n \Leftrightarrow \psi_m - \psi_l \in \mathbf{V}_n^{K_0}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ —ver (2.3.4)—. Con lo cual, $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una $\mathscr{E}^{K_0}-$sucesión de Cauchy y, por **b**, es una sucesión de Cauchy.

f) Este aserto sigue las mismas líneas que el **e**. Si $\mathscr{D} - \lim \psi_m = 0$, entonces $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por **e**, $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en algún $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$. Ahora, de esto y de **b** se deduce $\mathscr{E}^{K_0} - \lim \psi_m = 0$, lo que implica $\lim_{m\to\infty} \|\psi_m\|_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El recíproco es directo gracias a **b**.

g) La completitud de $\left(\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D}\right)$ se sigue de **b**, de **e** y de la completitud de los subespacios topológicos $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$. □

Corolario 2.3.30 *Si $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$ tiene interior no vacío, entonces $\mathscr{D}_K(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\left(\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D}\right)$ de dimensión infinita.*

Demostración. Por el **Teorema 2.3.29** (punto **b**), en $\mathscr{D}_K(\Omega)$ coinciden las topologías $\mathscr{D}$ y $\mathscr{E}^K$. Por tanto, el resultado sigue directamente del **Teorema 2.2.19**. □

Teorema 2.3.31 *El espacio vectorial topológico* $(\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D})$ *es no metrizable* y, en consecuencia, también es no normable.

Demostración. Dado un compacto $K \subset \Omega$ con interior no vacío, $\mathscr{D}_K(\Omega)$ es un subespacio propio, no trivial y cerrado de $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ que verifica, por la **Proposición** A.1.3, $\mathrm{int}\mathscr{D}_K(\Omega) = \emptyset$. De todo esto esto se deduce que $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ es de primera categoría, ya que

$$\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}_{\mathrm{K}_n}(\Omega).$$

Una versión contrarrecíproca del **Teorema** C.1.2, de Baire, establece que $\mathscr{D}$, siendo una topología completa, no es compatible con ninguna métrica. $\square$

2.3.3. Continuidad de aplicaciones lineales

El siguiente resultado es una reformulación del **Teorema** 1.1.22 sobre la caracterización de la continuidad de las aplicaciones lineales de $(\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D})$ en un otro espacio localmente convexo (X, τ). Dicho teorema no es directamente aplicable a $(\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D})$ por no ser éste metrizable, sin embargo se puede obtener la misma caracterización utilizando las propiedades de $\mathscr{D}$ probadas en la subsección anterior.

Teorema 2.3.32 *Sea* (X, τ) *un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea*

$$\mathrm{T} : (\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D}) \longrightarrow (X, \tau)$$

una aplicación lineal. Entonces son equivalentes:

- **I.** T *es continua.*
- **II.** T *transforma subconjuntos acotados en subconjuntos* $\tau-$*acotados.*
- **III.** *Cada sucesión* $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *que verifica* $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} 0$ *también verifica* $\mathrm{T}(\psi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{\tau} 0$.
- **IV.** *Para cada* $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, *la restricción de* T *a cada* $\mathscr{D}_K(\Omega)$ *es continua, entendiendo esta continuidad bajo el par* $\mathscr{E}^K - \tau$.

Demostración. $\boxed{\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}}$ Sigue del mismo argumento que la prueba del **Teorema** 1.1.22.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{III}}$ Supóngase $\mathscr{D} - \lim \psi_m = 0$. Por la propiedad **f** del **Teorema** 2.3.29 existe algún $K_0 \in \mathfrak{K}(\Omega)$ tal que $\mathscr{E}^{K_0} - \lim \psi_m = 0$. Aplicando además la propiedad **b** del mencionado teorema, la hipótesis **II** implica que

$$\mathrm{T}|_{\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)} : \mathscr{D}_{K_0}(\Omega) \longrightarrow X$$

transforma subconjuntos acotados en subconjuntos $\tau-$acotados. Como $\left(\mathscr{D}_{K_0}(\Omega), \mathscr{E}^{K_0}\right)$ es metrizable, el **Teorema** 1.1.22 asegura que $\tau - \lim \mathrm{T}(\psi_m) = \mathbf{0}$.

$\boxed{\mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{IV}}$ Considérese $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, la aplicación $\mathrm{T}|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ y una sucesión $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathscr{D}_K(\Omega)$ que sea $\mathscr{E}^K-$convergente a 0. Si se verifica **III**, entonces $\tau - \lim \mathrm{T}(\phi_m) = \mathbf{0}$ puesto que, por el teorema anterior, $\mathscr{D} - \lim \phi_m = \mathbf{0}$. De nuevo, como $\left(\mathscr{D}_K(\Omega), \mathscr{E}^K\right)$ es metrizable, el **Teorema** 1.1.22 asegura que $\mathrm{T}|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ es continua.

$\boxed{\mathrm{IV} \Rightarrow \mathrm{I}}$ Sea $U \in \mathscr{N}_{\tau}^{ec}(\mathbf{0})$ y póngase $V = \mathrm{T}^{-1}(U)$, que es convexo y equilibrado por la **Proposición** A.3.6. La parte **a** del **Teorema** 2.3.29 asegura que

$$V \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \mathscr{D}_K(\Omega) \cap V \in \mathscr{E}^K \quad \forall\, K \in \mathfrak{K}(\Omega).$$

Como se da **IV**, ahora **I** es evidente. $\square$

Corolario 2.3.33 *Todo operador diferencial* $\mathtt{D}^{\alpha}$ $\left(\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}\right)$ *es una aplicación lineal continua de* $\left(\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \mathscr{D}\right)$ *en sí mismo.*

Demostración. Fíjese $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$. La demostración es simple: se trata de comprobar que $\mathtt{D}^{\alpha}$ transforma subconjuntos acotados en subconjuntos acotados para poder aplicar el teorema anterior.

Si $E \subset \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ es acotado, por **c** del **Teorema 2.3.29**, estará contenido en algún $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ y existirá $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ de manera que

$$\|\phi\|_n \leq \sigma_n \ \ \forall\, \phi \in E \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como es obvio que $\mathtt{D}^{\alpha}(E) \subset \mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ y $\|\mathtt{D}^{\alpha}\phi\|_n \leq \|\phi\|_{n+|\alpha|}$ $\forall\, \phi \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\mathtt{D}^{\alpha}(E)$ es acotado. Así, $\mathtt{D}^{\alpha}$ es continua. □

2.4. El espacio de distribuciones $\mathscr{D}'(\Omega)$

Definición 2.4.34 Una forma lineal $\mathrm{T}: \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua bajo el par $\mathscr{D} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$ se llama *distribución* o *función generalizada* sobre Ω. El conjunto de todas las distribuciones se representa por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Sean también las operaciones habituales suma $+ : \mathscr{D}'(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ y multiplicación por escalares complejos $\cdot : \mathbb{C} \times \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ dadas por

- $(\mathrm{T}+\mathrm{S})(\phi) = \mathrm{T}(\phi) + \mathrm{S}(\phi) \ \ \forall\, \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$
- $(a \cdot \mathrm{R})(\phi) = a \cdot \mathrm{R}(\phi) \ \ \forall\, \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$.

Nota. Es directo obtener que $(\mathscr{D}'(\Omega), +, \cdot)$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. El neutro para la suma se sigue representando por 0.

Ejemplo 2.4.35 Dado $\mathbf{x} \in \Omega$, considérese la forma lineal

$$\delta_{\mathbf{x}} : \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ dada por } \delta_{\mathbf{x}}(\phi) = \phi(\mathbf{x}),$$

la cual se denomina *delta de Dirac en* $\mathbf{x}$. Es inmediato verificar que dichas formas son continuas y, por tanto, que $\delta_{\mathbf{x}} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Cuando $\mathbf{0} \in \Omega$, se escribirá directamente $\delta = \delta_{\mathbf{0}}$.

2.4.1. Caracterización de distribuciones

El siguiente resultado da una caracterización bastante útil de continuidad de distribuciones en $\mathscr{D}'(\Omega)$, que es análoga a la obtenida en el **Teorema 2.2.24** para $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Teorema 2.4.36 *Sea* $\mathrm{T}: \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma lineal. Se da la siguiente caracterización:* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *si, y sólo si, para cada compacto* $K \subset \Omega$*, existen* $n \in \mathbb{N}$*,* $c > 0$ *(constantes que dependen de* K*) tales que*

$$|\mathrm{T}(\phi)| \leq c \cdot \|\phi\|_n \ \ \forall\, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Tómese arbitrariamente $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega)$ una sucesión $\mathscr{D}-$convergente a 0. Entonces, por el aserto **f** del **Teorema 2.3.29**, existe $K_0 \in \mathfrak{K}(\Omega)$ tal que $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está contenida en $\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ y $\lim_{m\to\infty} \|\psi_m\|_n = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Como existen $n_0 \in \mathbb{N}$, $c_0 > 0$ tales que

$$|\mathrm{T}(\phi)| \leq c_0 \|\phi\|_{n_0} \ \ \forall\, \phi \in \mathscr{D}_{K_0}(\Omega),$$

ya es evidente que $\lim \mathrm{T}(\psi_m) = 0$, y por el **Teorema 2.3.32**, que T es continua.

$\boxed{\Rightarrow}$ Por reducción al absurdo, tómese $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y supóngase no se verifica la condición del enunciado, es decir, supóngase existe un compacto $K_0 \subset \Omega$ tal que, para cualquier par de números $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$, se verifica

$$|\mathrm{T}(\phi)| > c \cdot \|\phi\|_n \text{ para algún } \phi = \phi_{(n,\, c)} \in \mathscr{D}_{K_0}(\Omega).$$

Así, sea una sucesión $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ que verifica $|\mathrm{T}(\phi_m)| > m \cdot \|\phi_m\|_m \; \forall \, m \in \mathbb{N}$. Tómese a continuación

$$\varphi_m := \mathrm{T}(\phi_m)^{-1} \phi_m \;\; \forall \, m \in \mathbb{N}.$$

Entonces la sucesión $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_{K_0}(\Omega)$ verifica lo siguiente:

- $\mathrm{T}(\varphi_m) = 1 \; \forall \, m \in \mathbb{N}$ y
- $\varphi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}^{K_0}} 0$, pues, dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\|\varphi_m\|_n \leq \|\varphi_m\|_m < 1/m$ para todo $m \geq n$.

Esto entra en contradicción con el hecho de que $\mathrm{T}|_{\mathscr{D}_{K_0}(\Omega)}$ es continua —**Teorema** 2.3.32—. □

2.4.2. Ejemplos de distribuciones

Distribuciones definidas por funciones

Definición 2.4.37 Una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ se dice *localmente integrable* en Ω, y se denota $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si verifica

$$\int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda < +\infty \text{ para todo } K \in \mathfrak{K}(\Omega).$$

Definición 2.4.38 Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sea la forma lineal $\mathrm{T}_f : \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ con fórmula

$$\mathrm{T}_f(\phi) = \int_\Omega f(\mathbf{x}) \, \phi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Proposición 2.4.39 *Si* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *entonces* $\mathrm{T}_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Demostración. Dado $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, se verifica

$$\left|\mathrm{T}_f(\phi)\right| \leq \left(\int_K |f| \, \mathrm{d}\lambda\right) \|\phi\|_1 \;\; \forall \, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Entonces, debido a la arbitrariedad al tomar el compacto, T_f es una distribución sobre Ω, aplicando el **Teorema** 2.4.36. □

Nota. Dada una función f localmente integrable en Ω, es costumbre identificar la distribución T_f con la función f (diciendo que tal función es una distribución), reemplazar la escritura T_f simplemente por f —pudiendo así escribir $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$— y denotar su acción sobre $\phi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ por (f, ϕ).

Distribuciones definidas por medidas

Análogamente al caso anterior, si Σ es la $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Borel en Ω, y $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ es una medida positiva que verifica $\mu(K) < +\infty$ para todo $K \in \mathfrak{K}(\Omega)$, entonces

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \ni \phi \longmapsto \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu$$

es una distribución sobre Ω. Las deltas de Dirac del **Ejemplo** 2.4.35 son un caso especial de esta situación.

2.4.3. Derivación de distribuciones

Definición 2.4.40 Sean $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$. Se define la derivada $\alpha-$ésima de T como la forma lineal $\mathtt{D}^\alpha \mathrm{T} : \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ con fórmula

$$(\mathtt{D}^\alpha \mathrm{T})(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\mathrm{T}(\mathtt{D}^\alpha \phi).$$

Proposición 2.4.41 *Si α y β son dos $\mathtt{n}-$índices, la derivada $\alpha-$ésima $\mathtt{D}^\alpha \mathrm{T}$ de $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ es una distribución sobre Ω y vale la fórmula*

$$\mathtt{D}^\alpha \mathtt{D}^\beta \mathrm{T} = \mathtt{D}^{\alpha+\beta}\mathrm{T} = \mathtt{D}^\beta \mathtt{D}^\alpha \mathrm{T}.$$

Demostración. Como T es una distribución, dado un compacto $K \subset \Omega$, existen $c > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|\mathrm{T}(\phi)| \leq c\,\|\phi\|_n$ para todo $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, luego pasa que

$$\left|(\mathtt{D}^\alpha \mathrm{T})(\phi)\right| = \left|(-1)^{|\alpha|}\mathrm{T}(\mathtt{D}^\alpha \phi)\right| \leq c\,\|\mathtt{D}^\alpha \phi\|_n \leq c\,\|\phi\|_{n+|\alpha|} \;\; \forall\, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Entonces $\mathtt{D}^\alpha \mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Además, debido a que en $\mathtt{C}^\infty(\Omega)$ los operadores diferenciales $\mathtt{D}^\alpha$, $\mathtt{D}^\beta$ conmutan, si $\phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega)$, entonces vale

$$\begin{aligned}(\mathtt{D}^\alpha \mathtt{D}^\beta \mathrm{T})(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}(\mathtt{D}^\beta \mathrm{T})(\mathtt{D}^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\mathrm{T}(\mathtt{D}^\beta \mathtt{D}^\alpha \phi) = \\ &= (-1)^{|\alpha+\beta|}\mathrm{T}(\mathtt{D}^{\alpha+\beta}\phi) = (\mathtt{D}^{\alpha+\beta}\mathrm{T})(\phi).\end{aligned}$$

□

Definición 2.4.42 Sean $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$. Si existe una función $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con la propiedad $\mathrm{T}_g = \mathtt{D}^\alpha \mathrm{T}_f$, es decir,

$$\int_\Omega g(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathtt{D}^\alpha \phi(\mathbf{x})\;\mathrm{d}\mathbf{x} \;\;\forall\, \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^\infty(\Omega), \tag{2.4.10}$$

se escribe $g = \mathtt{D}^\alpha f$ *en sentido débil* y se dice que g *es una $\alpha-$ésima derivada débil de f*.

Ejemplo 2.4.43 Sea la función $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, que claramente es localmente integrable en $\mathbb{R}$. Compútese las primera y segunda derivadas de la distribución T_f.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_f'(\phi) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} e^{x}\phi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} e^{-x}\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\phi(0) + \int_{-\infty}^0 e^x\phi(x)\,\mathrm{d}x + \phi(0) - \int_0^{+\infty} e^{-x}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{sgn}(x)\,e^{-|x|}\phi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donde $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función (localmente integrable) dada por

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Como $g(x) = -\mathrm{sgn}(x)\,e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ es localmente integrable, entonces $g = f'$ en sentido débil. Aprovechando los cálculos ya realizados se computa la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_g(\phi') &= -\int_{-\infty}^0 e^x\phi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-x}\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\phi(0) + \int_{-\infty}^0 e^x\phi(x)\,\mathrm{d}x - \phi(0) + \int_0^{+\infty} e^{-x}\phi(x)\,\mathrm{d}x = -2\delta(\phi) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\phi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por tanto, en el sentido de las distribuciones, se tiene

$$f'' = f - 2\delta.$$

Este ejemplo muestra que, mientras que la distribución T_f tiene derivadas de todos los órdenes, simplemente no existe ninguna segunda derivada débil de f.

Observación 2.4.44 El ejemplo anterior también pone de manifiesto el hecho de que no siempre es posible expresar, dados $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathtt{n}}$ y f una función localmente integrable en Ω, la derivada $\mathtt{D}^{\alpha}\mathrm{T}_f$ en la forma de la parte izquierda de (2.4.10), como quizá cabría pensar de primeras.

La siguiente proposición muestra que la noción de *derivada distribucional* extiende la derivada usual cuando se aplica a funciones diferenciables en Ω.

Proposición 2.4.45 *Sea $f \in \mathtt{C}^k(\Omega)$ para algún $k \geq 1$. Entonces*

$$\mathtt{D}^{\alpha}\mathrm{T}_f = \mathrm{T}_{\mathtt{D}^{\alpha} f} \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}} \ \textit{con}\ |\alpha| \leq k.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que $\mathtt{D}^{\alpha} f \in \mathtt{C}(\Omega)$ y, por tanto, es localmente integrable en Ω, para todo $|\alpha| \leq k$; tiene sentido pues definir las distribuciones $\mathrm{T}_{\mathtt{D}^{\alpha} f}$. En segundo lugar, utilizando integración por partes se verifica

$$\left(\mathtt{D}^{\alpha}\mathrm{T}_f\right)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\,(\mathtt{D}^{\alpha}\phi)(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathtt{D}^{\alpha} f)(\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} \ \ \forall\, \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega), \quad (2.4.11)$$

donde se anulan los términos de frontera porque $\operatorname{sop}(\phi) \in \mathfrak{K}(\Omega)$. □

Los siguientes ejemplos muestran que la derivación distribucional permite definir nuevas distribuciones además de derivar funciones y otros objetos no derivables en el sentido clásico ni en el sentido débil.

Derivadas de la delta de Dirac

Ejemplo 2.4.46 Sean $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, entonces $\mathtt{D}^{\alpha}\delta_{\mathbf{x}}$ coincide con la distribución que sigue:

$$\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\Omega) \ni \phi \longmapsto (-1)^{|\alpha|}\delta_{\mathbf{x}}(\mathtt{D}^{\alpha}\phi) = (-1)^{|\alpha|}(\mathtt{D}^{\alpha}\phi)(\mathbf{x}).$$

Derivada de la función de Heaviside

Ejemplo 2.4.47 Se define

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

que es la denominada *función de Heaviside*. Evidentemente, $H \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, luego T_H es una distribución sobre $\mathbb{R}$ cuya acción sobre una $\phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ es

$$\mathrm{T}_H(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\,\phi(x) = \int_0^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

La función H no es derivable en 0 (ni tampoco continua). Sin embargo, tiene derivada distribucional, la cual coincide con la delta de Dirac:

$$\mathrm{T}_H'(\phi) = -\mathrm{T}_H\left(\phi'\right) = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\phi(x)\right]_{x=0}^{+\infty} = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Abusando de notación se dice que $H' = \delta$ (en el sentido de las distribuciones).

La distribución $\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}$

Ejemplo 2.4.48 La función $f(x)=1/x$ $(x\in\mathbb{R})$ no pertenece a $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y, por tanto, no se identifica con una distribución en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. En este ejemplo se define una variante adecuada que sí es una distribución. Denótese $\mathrm{id}(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$. Entonces, dada $\phi\in\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R})$, sea

$$\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}(\phi):=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Notar que se da la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right)=\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_{+\infty}^{\varepsilon}\frac{\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}\mathrm{d}x\right)=\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x=\\&=\int_{0}^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La última integral (impropia) es convergente dado que el integrando es una función continua que se anula en el infinito (pues es de soporte compacto) puesto que vale

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}=2\phi'(0). \tag{2.4.12}$$

Con lo cual, la forma lineal $\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R})\ni\phi\longmapsto\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}(\phi)$ está bien definida. Ésta recibe el nombre de *valor principal de* $1/\mathrm{id}$. Además, si $\phi\in\mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, con $K\subset[-R,R]$, entonces

$$\left|\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}(\phi)\right|=\left|\int_0^R\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^R\frac{1}{x}\left|\int_{-x}^{x}\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leq\int_0^R2\|\phi\|_1\,\mathrm{d}x=2R\|\phi\|_1.$$

Por el **Teorema** 2.4.36, de la arbitrariedad al tomar el compacto se deduce que $\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.4.49 Considérese la función $g(x)=\log|x|$ $(x\in\mathbb{R})$. Es obvio que esta función es par y es fácil ver que $g\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ya que

$$\int_{-R}^{R}|g(x)|\mathrm{d}x=-2\int_0^1\log(x)\,\mathrm{d}x+2\int_1^R\log(x)\,\mathrm{d}x=2+2\int_1^R\log(x)\,\mathrm{d}x<+\infty\ \ \forall\,R\geq1.$$

Notar que la función g no es continua en 0 y que, además, la derivada usual $g'(x)=1/x$ $(x\in\mathbb{R})$ no es localmente integrable en $\mathbb{R}$. Hilando con el **Ejemplo** 2.4.48, pruébese que su derivada en el sentido de distribuciones coincide con $\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}$: dada una función de testeo $\phi\in\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R})$, teniendo en cuenta (2.4.12) y que vale

$$\lim_{x\to0^+}x\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to0^+}x=0,\qquad\text{(L'Hôpital)}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_g'(\phi)&=-\int_{\mathbb{R}}\log|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\log(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}\log(-x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x=\\&=-\int_0^{+\infty}\log(x)\big(\phi'(x)+\phi'(-x)\big)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\log(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\big(\phi(x)-\phi(-x)\big)\mathrm{d}x=\\&=-\left[x\log(x)\,\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\right]_{x=0}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}(\phi).\end{aligned}$$

2.4.4. Multiplicación de una función $\mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ por una distribución

Definición 2.4.50 Sean $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$. Se define el producto de f por T como la forma lineal $f \cdot \mathrm{T} : \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(f \cdot \mathrm{T})(\phi) = \mathrm{T}(f\phi).$$

Proposición 2.4.51 *Dadas* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *y* $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, *la forma lineal* $f \cdot \mathrm{T}$ *está bien definida y es una distribución sobre* Ω.

Demostración. Si $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, es evidente que el producto $f \cdot \mathrm{T}$ está bien definido porque $f\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$ si $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$. Véase ahora que $f \cdot \mathrm{T}$ es una distribución, para lo cual se hace uso de la fórmula de Leibniz para expandir la derivada del producto

$$\mathtt{D}^{\alpha}(gh) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha,\,\beta}(\mathtt{D}^{\alpha-\beta}g)(\mathtt{D}^{\beta}h) \quad \left(g,\, h \in \mathtt{C}^{k}(\Omega),\ |\alpha| \le k\right) \tag{2.4.13}$$

—los valores de las constantes $c_{\alpha,\,\beta}$ $(\beta \le \alpha)$ no son necesarios para la demostración—.

Dado $K \subset \Omega$ un compacto cualquiera, como T es una distribución, existen $c_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\mathrm{T}(f\phi)| \le c_1 \|f\phi\|_n = c_1 \cdot \text{máx}\{|\mathtt{D}^{\alpha}(f\phi)(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \Omega,\ |\alpha| \le n\} \tag{2.4.14}$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Ahora, como se da (2.4.13) y el máximo de (2.4.14) se alcanza realmente en el compacto K, existe $c_{(f,\,K,\,n)} = c_2 > 0$ tal que $\|f\phi\|_n \le c_2 \|\phi\|_n \ \forall\, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. De esto sigue

$$|(f \cdot \mathrm{T})(\phi)| \le c_1 c_2 \|\phi\|_n \ \ \forall\, \phi \in \mathscr{D}_K(\Omega),$$

que, dada la arbitrariedad al tomar el compacto K, implica $f \cdot \mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. □

Ejemplo 2.4.52 La ecuación en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$\mathrm{id} \cdot \mathrm{T} = 1$$

tiene por solución $\mathrm{T} = \mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}} + a\delta$, con $a \in \mathbb{C}$ constante. Claro, si $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R})$,

$$\left[\mathrm{id} \cdot \left(\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}} + a\delta\right)\right](\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \ge \varepsilon} \frac{x\phi(x)}{x} \mathrm{d}x + a\delta(\mathrm{id} \cdot \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\, \mathrm{d}x + 0 = (1,\, \phi).$$

Esta definición extiende el producto usual de funciones cuando $\mathrm{T} = \mathrm{T}_g$ con $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, como muestra la siguiente

Proposición 2.4.53 *Sea* $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *y* $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$. *Entonces* $f \cdot \mathrm{T}_g = \mathrm{T}_{fg}$.

Demostración. En efecto, si $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$,

$$(f \cdot \mathrm{T}_g)(\phi) = \mathrm{T}_g(f\phi) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{T}_{fg}(\phi).$$

□

Entonces, si $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ y $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$, la distribución $f \cdot \mathrm{T}$ se puede derivar. ¿Verifica también la fórmula de Leinbiz? La respuesta es afirmativa —lo cual incide en el éxito de la generalización del concepto de función que se hace en este capítulo tras la **Definición 2.4.50**— y se recoge en la siguiente proposición, cuya demostración se obvia pues no va a ser usada más adelante.

Proposición 2.4.54 *Sean* $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$, $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *y* $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, *entonces se verifica:*

$$\mathtt{D}^{\alpha}(f \cdot \mathrm{T}) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\,\beta}(\mathtt{D}^{\alpha-\beta} f) \cdot (\mathtt{D}^{\beta}\mathrm{T})$$

para ciertas constantes $c_{\alpha,\,\beta}$.

2.5. Distribuciones de soporte compacto

2.5.1. Soporte de una distribución

Definición 2.5.55 Si $A \subseteq \Omega$ es un abierto, sea el conjunto de funciones

$$\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(A,\,\Omega) = \{\psi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega) \mid \mathrm{sop}(\psi) \subset A\}.$$

Definición 2.5.56 Sea $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si $A \subseteq \Omega$ es un abierto que verifica $\mathrm{T}(\phi) = 0$ para toda función $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(A,\,\Omega)$, se dice que T *es nula en* A y se escribe $\mathrm{T} = 0$ *en* A. Sea $\mathrm{N_T}$ la unión de todos los abiertos contenidos en Ω en los que T es nula; el complementario de $\mathrm{N_T}$ en Ω es, por definición, el *soporte distribucional* de T y se denota $\mathrm{sop}(\mathrm{T})$.

Proposición 2.5.57 *Sea* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *Entonces* T *es nula en* $\mathrm{N_T}$.

Demostración. Sea $\mathscr{A}_{\mathrm{T}} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ es abierto, } \mathrm{T} = 0 \text{ en } A\}$, entonces $\mathrm{N_T} = \cup_{A \in \mathscr{A}_{\mathrm{T}}} A$. Hay que probar que $\mathrm{N_T} \in \mathscr{A}_{\mathrm{T}}$. Para ello, sea $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathrm{N_T},\,\Omega)$ una partición localmente finita de la unidad subordinada a $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$ —aplicando el **Teorema** 2.1.12—. Si $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathrm{N_T},\,\Omega)$, entonces $\phi = \sum \psi_j \phi$, suma que sólo tiene un número finito de términos distintos de cero. Con lo cual, $\mathrm{T}(\phi) = \sum \mathrm{T}\left(\psi_j \phi\right) = 0$. Esta última igualdad se debe a que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{sop}\left(\psi_j \phi\right)$ está contenido en algún abierto de $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$. □

Ejemplo 2.5.58 Si $\mathbf{x} \in \Omega$ y α es un $\mathtt{n}-$índice, entonces de la definición de la delta de Dirac en el punto $\mathbf{x}$ se tiene

$$\mathrm{sop}(\delta_{\mathbf{x}}) = \mathrm{sop}(\mathtt{D}^{\alpha}\delta_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x}\}.$$

Teorema 2.5.59 *Sea* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *entonces se da las siguientes propiedades:*

a) *Si el soporte de una función* $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$ *es disjunto con* $\mathrm{sop}(\mathrm{T})$, *entonces* $\mathrm{T}(\phi) = 0$.

b) *Si* $\mathrm{sop}(\mathrm{T}) = \emptyset$, *entonces* $\mathrm{T} = 0$.

c) *Si* $h \in \mathtt{C}^{\infty}(\Omega)$ *y vale* $h \equiv 1$ *en algún abierto* U *con* $\mathrm{sop}(\mathrm{T}) \subset U$, *entonces* $h \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

d) *Si* $\mathrm{sop}(\mathrm{T})$ *es un subconjunto compacto de* Ω, *entonces existen constantes* $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$|\mathrm{T}(\phi)| \leq c\,\|\phi\|_n \quad \forall\, \phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega).$$

Demostración. Las afirmaciones **a** y **b** son triviales.

c) Considérese $(1-h)\,\phi$, $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$. El soporte de $(1-h)\,\phi$ no corta a U pues $h \equiv 1$ en U, luego tampoco corta a $\mathrm{sop}(\mathrm{T})$ y, así, $\mathrm{T}\big((1-h)\,\phi\big) = 0$. Por tanto $\mathrm{T}(\phi) = \mathrm{T}(h\phi) = (h \cdot \mathrm{T})(\phi)$, para todo $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$, de donde se desprende el resultado.

d) Si $\mathrm{sop}(\mathrm{T})$ es compacto, por la propiedad **d** de la **Definición** 2.1.11 existen una función $\psi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\Omega)$ y un abierto $U \supset \mathrm{sop}(\mathrm{T})$ que verifican $\psi \equiv 1$ en U. Póngase $K = \mathrm{sop}(\psi)$; por un lado, por el **Teorema** 2.4.36, existen $c_1 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\mathrm{T}(\varphi)| \leq c_1\,\|\varphi\|_n \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega);$$

por otro lado, la fórmula de Leibniz muestra que existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|\psi\phi\|_n \leq c_2 \|\phi\|_n \quad \forall\, \phi \in \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$$

ya que, recuérdese, $\|\psi\phi\|_n = \text{máx}\{|\mathtt{D}^\alpha(\psi\phi)(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in K,\ |\alpha| \leq n\}$. Además, para cada ϕ en $\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$, se tiene $\mathrm{T}(\phi) = \mathrm{T}(\psi\phi)$ —aplicando **c**— y, como $\psi\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, también se tiene

$$|\mathrm{T}(\phi)| = |\mathrm{T}(\psi\phi)| \leq \|\psi\phi\|_n \leq c_1 c_2 \|\phi\|_n .$$

□

Definición 2.5.60 Se define el conjunto de las distribuciones sobre Ω con soportes compactos como

$$\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega) = \{\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega) |\ \mathrm{sop}(\mathrm{T}) \in \mathfrak{K}(\Omega)\}.$$

Nota. Es directo comprobar que las operaciones de la **Definición 2.4.34** son cerradas en $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$, luego este conjunto junto con dichas operaciones es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial.

2.5.2. Soporte de una función arbitraria

Definición 2.5.61 Dados un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ y una función $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ medible, el *soporte de* f es

$$\mathrm{supp}(f) = \{\mathbf{x} \in E |\ \text{ no existe } r > 0 \text{ tal que } f = 0 \text{ en casi todo } \mathrm{B}(\mathbf{x}, r) \cap E\}.$$

Para saber más acerca de las propiedades del soporte supp de una función arbitraria y para conocer los detalles de las demostraciones (aquí no es menester reproducirlas) de los dos enunciados siguientes ver **[3, Exercise 2.51, pag. 37]**.

Proposición 2.5.62 *Si* $f \in \mathtt{C}(\Omega)$*, entonces* $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{sop}(f)$.

Nota. Tras esta porposición, resulta natural escribir $\mathrm{sop}(f)$ en lugar de $\mathrm{supp}(f)$ aun cuando la función $f : E \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{C}$ no sea continua.

Teorema 2.5.63 *Si f es localmente integrable en Ω, entonces* $\mathrm{sop}\left(\mathrm{T}_f\right) = \mathrm{sop}(f)$.

Observación 2.5.64 Este resultado implica que, si f es localmente integrable en Ω y $\mathrm{sop}(f)$ es compacto, entonces f se identifica con una distribución de soporte compacto, la T_f.

2.5.3. La inclusión $\mathscr{D}'(\Omega) \hookleftarrow \mathscr{E}'(\Omega)$

Teorema 2.5.65 *El espacio $\mathscr{E}'(\Omega)$ se identifica con el espacio $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$, en el sentido de que el operador de restricción natural*

$$\mathscr{E}'(\Omega) \ni \mathrm{T} \longmapsto \mathfrak{R}\mathrm{T} := \mathrm{T}|_{\mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)} \tag{2.5.15}$$

es un isomorfismo lineal de $\mathscr{E}'(\Omega)$ en $\mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$.

Demostración. Véase, en primer lugar, que $\mathfrak{R}\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $\mathrm{sop}\,(\mathfrak{R}\mathrm{T})$ es compacto si $\mathrm{T} \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Es evidente que $\mathfrak{R}\mathrm{T}$ es lineal. Sea ahora $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\mathscr{D}-$convergente a la función $\phi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$. Por el punto **f** del **Teorema** 2.3.29 se verifica que $\mathscr{E} - \lim \phi_m = \phi$. Es decir, la inclusión

$$\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}^\infty(\Omega)$$

es continua. Aplicando que $\mathrm{T} \in \mathscr{E}'(\Omega)$ se obtiene que $\lim \mathrm{T}(\phi_m) = \mathrm{T}(\phi) = \mathfrak{R}\mathrm{T}(\phi)$. Resta probar que $\mathfrak{R}\mathrm{T}$ tiene soporte compacto. Para ello se aplica el **Teorema** 2.2.24, es decir, que existen $n \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ tales que

$$|\mathrm{T}(f)| \leq p_n(f) \quad \forall\, f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega),$$

donde, recuérdese, $p_n(f) = \max\{|\mathrm{D}^\alpha f(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \mathrm{K}_n,\ |\alpha| \leq n\}$. Entonces, $\mathrm{T}(\psi) = 0$ para todo $\psi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ con $\mathrm{sop}\,(\psi) \cap \mathrm{K}_n = \emptyset$ porque vale $p_n(\psi) = 0$. Esto último prueba que $\mathfrak{R}\mathrm{T}$ es una distribución de soporte compacto (contenido en K_n).

En segundo lugar, pruébese que $\mathfrak{R}$ es inyectiva. Sea S un elemento de

$$\ker \mathfrak{R} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{E}'(\Omega) \,|\, \mathfrak{R}\mathrm{T} = 0\} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{E}'(\Omega) \,|\, \mathrm{T}(\phi) = 0 \ \ \forall\, \phi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)\}.$$

Como $\mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ es $\mathscr{E}-$denso en $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ —probado en el **Teorema** 2.2.16—, entonces para cada $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ existe una sucesión $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ tal que $\mathscr{E} - \lim \phi_m = f$ y, por tanto,

$$\mathrm{S}(f) = \mathrm{S}(\mathscr{E} - \lim \phi_m) = \lim \mathrm{S}(\phi_m) = 0.$$

Así, $\mathrm{S} = 0$ y se concluye que $\ker \mathfrak{R} = \{0\}$ o, equivalentemente, que $\mathfrak{R}$ es inyectiva.

En tercer y último lugar, pruébese que $\mathfrak{R}$ es suprayectiva. Si $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\Omega)$ y se llama K a $\mathrm{sop}\,(\mathrm{T})$, tómese una función $\psi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$ idénticamente igual a 1 en un entorno de K. Defínase

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{\mathrm{ext}} : \mathrm{C}^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \mathrm{T}(\psi f). \end{aligned}$$

Se procede a probar que esta extensión de T es aplicación lineal y continua, es decir, que $\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}$ vive en $\mathscr{E}'(\Omega)$. La linealidad de $\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}$ es consecuencia de la de T. Además, $\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}$ es continua porque ψ tiene soporte compacto: siendo $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty(\Omega)$,

$$f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{E}} f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) \ \text{ implica } \ \psi f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} \psi f, \ \text{ donde } \{\psi f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega),$$

y, como T es distribución, $\lim \mathrm{T}_{\mathrm{ext}}(f_m) = \mathrm{T}_{\mathrm{ext}}(f)$. Finalmente, $\mathfrak{R}\mathrm{T}_{\mathrm{ext}} = \mathrm{T}$. Claro, si $\phi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\Omega)$, se tiene

$$\mathfrak{R}\mathrm{T}_{\mathrm{ext}}(\phi) = \mathrm{T}_{\mathrm{ext}}(\phi) = \mathrm{T}(\psi\phi) = (\psi \cdot \mathrm{T})(\phi) = \mathrm{T}(\phi),$$

usando en el último paso que $\psi \equiv 1$ en un entorno de K y la parte **c** del **Teorema** 2.5.59. □

CAPÍTULO 3

Convolución

Este capítulo y el siguiente son un complemento natural a la teoría de distribuciones. En este tercero se introduce rigurosamente la convolución en el contexto de las distribuciones, importante herramienta del análisis que juega un papel destacado en la resolución distribucional de EDPs, si bien esta aplicación sólo se esboza al final porque se sale del ámbito del trabajo. Se sigue principalmente la referencia **[5, Cap 6]**.

3.1. Preliminares a la convolución

Las demostraciones de las dos proposiciones de esta sección se omiten pues son de comprobación rutinaria.

Definición 3.1.1 Si ψ es una función definida en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto, sean las funciones *cotraslación de* ψ *por* $\mathbf{x}$ y *traslación de* ψ *por* $\mathbf{x}$, respectivamente,

$$(\iota_{\mathbf{x}}\psi)(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (\tau_{\mathbf{x}}\psi)(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad (\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n).$$

Para el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, estas dos fórmulas definen los operadores *cotraslación* $\iota_{\mathbf{x}}$ y *traslación* $\tau_{\mathbf{x}}$, cuyo dominio es el conjunto de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$. En este contexto, el *operador identidad* se representa por 1.

Proposición 3.1.2 *Se verifica* $\tau_{\mathbf{x}}\iota_{\mathbf{y}} = \iota_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \iota_{\mathbf{x}}\tau_{-\mathbf{y}}$ *para todos* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\iota_{\mathbf{0}}\iota_{\mathbf{0}} = 1$*, donde la yuxtaposición es composición. Además, dado* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, la restricción* $C_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \longmapsto \iota_{\mathbf{w}}\phi$ *es una aplicación lineal y continua bajo el par* $\mathscr{D}-\mathscr{D}$.

Definición 3.1.3 Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles Lebesgue. Se define su convolución en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como

$$(f*g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\, (\iota_{\mathbf{x}}g)(\mathbf{y})\, d\mathbf{y},$$

supuesta la finitud de esta integral, es decir, supuesto que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} < +\infty.$$

Proposición 3.1.4 *Si* $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *son funciones medibles Lebesgue y si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *es un punto para el que* $(f*g)(\mathbf{x})$ *existe con valor finito, entonces* $(f*g)(\mathbf{x}) = (g*f)(\mathbf{x})$.

3.2. Convolución de una distribución por una función

3.2.1. Convolución de una distribución por una función $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$

Definición 3.2.5 El producto de *convolución de* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *por* $\psi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ es la función compleja $\mathrm{T} * \psi : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \longrightarrow \mathbb{C}$ con fórmula

$$(\mathrm{T} * \psi)(\mathbf{x}) = \mathrm{T}(\iota_{\mathbf{x}}\psi).$$

Observación 3.2.6 La **Definición 3.1.3** es la razón por la que resulta natural presentar esta última, ya que, para el caso en que $\mathrm{T} = \mathrm{T}_f$ con f una localmente integrable en $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, las dos son definiciones coincidentes: si $\psi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$,

$$(f * \psi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \mathrm{T}(\iota_{\mathbf{x}}\psi) = \big(\mathrm{T}_f * \psi\big)(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}.$$

Además, si f sigue siendo una función localmente integrable en $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, la traslación de f por $\mathbf{x}$ también lo es y se da, para cada $\phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} (\tau_{\mathbf{x}}f)(\mathbf{t})\,\phi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} &= \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{t}-\mathbf{x})\,\phi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{y})\,\phi(\mathbf{y}+\mathbf{x})\,d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{y})\,(\tau_{-\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \mathrm{T}_f(\tau_{-\mathbf{x}}\phi),\end{aligned}$$

luego también resulta natural la siguiente

Definición 3.2.7 Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, la *traslación de* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *por* $\mathbf{x}$ es la forma lineal

$$\tau_{\mathbf{x}}\mathrm{T} : \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ con fórmula } (\tau_{\mathbf{x}}\mathrm{T})(\phi) = \mathrm{T}(\tau_{-\mathbf{x}}\phi).$$

Proposición 3.2.8 *Dados* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ *y* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$*,* $\tau_{\mathbf{x}}\mathrm{T}$ *es una distribución sobre* $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$.

Demostración. Sea $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ fijado y $\phi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ cualquiera. Por una parte se tiene que $\operatorname{sop}(\tau_{-\mathbf{x}}\phi) = \operatorname{sop}(\phi) - \mathbf{x} \subseteq K - \mathbf{x}$, donde para el compacto $K - \mathbf{x}$ existen constantes $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $|\mathrm{T}(\psi)| \leq c\,\|\psi\|_n$ para toda $\psi \in \mathscr{D}_{K-\mathbf{x}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. Por otra parte es claro que $\|\phi(\bullet + \mathbf{x})\|_n$ es igual a $\|\phi\|_n$. Con lo cual,

$$|(\tau_x\mathrm{T})(\phi)| = |\mathrm{T}(\tau_{-\mathbf{x}}\phi)| \leq c\,\|\tau_{-\mathbf{x}}\phi\|_n = c\,\|\phi\|_n.$$

□

Lema 3.2.9 *Sean* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *y* $\phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}})$*, entonces*

a) *la función*

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}})$$

pertenece a $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *y*

b) *vale la igualdad*

$$\mathrm{T}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \mathrm{T}\big(\phi(\bullet, \mathbf{y})\big)d\mathbf{y},$$

donde, para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$*, la expresión* $\phi(\bullet, \mathbf{w})$ *denota la función* $\phi_{\mathbf{w}} \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *dada por la fórmula* $\phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}})$.

Demostración. Como $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, existe $R > 0$ tal que $\operatorname{sop}(\phi) \subseteq [-R, R]^{\mathsf{n}} \times [-R, R]^{\mathsf{n}}$. Es claro que, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ verifica $|\mathbf{x}| \geq R$, entonces $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, luego $\operatorname{sop}(\psi)$ está contenido en $[-R, R]^{\mathsf{n}}$. Además, que $\psi \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ se obtiene aplicando la regla de derivación bajo la integral de Lebesgue —**Teorema** C.3.5—. Esto prueba el punto **a**.

Para el punto **b**, póngase $K = [-R, R]^{\mathsf{n}}$. En primer lugar, se observa que ψ es una integral de una función continua y de soporte compacto, entonces ψ puede expresarse como el límite de una suma de Riemann. ¿Pero esta sucesión de sumas de Riemann converge también bajo la topología $\mathscr{D}$? Sólo si es así se podrá aplicar el **Teorema** 2.3.32 para obtener **b**. Así, en segundo lugar, sea la sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ dada por

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \operatorname{vol}(Q_k^m)\, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^m) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}), \quad \mathbf{y}_k^m \in \overline{Q_k^m} \ \ (1 \leq k \leq m^{\mathsf{n}}), \quad K = \bigcup_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \overline{Q_k^m},$$

donde $\{Q_k^m\}_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}}$ es una partición de K a cubos disjuntos dos a dos y de lado $2R/m$. ¿Se verifica

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left| \mathtt{D}^{\alpha}\psi_m(\mathbf{x}) - \mathtt{D}^{\alpha}\psi(\mathbf{x}) \right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathsf{n}} \ ?$$

Basta contestar a esta pregunta para el $\mathsf{n}-$índice $\mathbf{0}$ pues la regla de derivación bajo la integral de Lebesgue hace el resto del trabajo. Fijado $\varepsilon > 0$, razónese:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left| \psi_m(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \right| &= \sup_{\mathbf{x}\in K} \left| \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \operatorname{vol}(Q_k^m)\, \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^m) - \int_K \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| = \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in K} \left| \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \int_{Q_k^m} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^m)\, d\mathbf{y} - \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \int_{Q_k^m} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}\in K} \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \int_{Q_k^m} \left| \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^m) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| d\mathbf{y} \end{aligned}$$

y, además, como ϕ es uniformemente continua (pues es continua y tiene soporte compacto), existe $\eta > 0$ tal que si $|\mathbf{z} - \mathbf{y}| < \eta$, entonces $|\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \varepsilon / (2R)^{\mathsf{n}}$ cualquiera que sea $\mathbf{x} \in K$; por tanto, si se toma $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $\operatorname{diám}\left(Q_k^m\right) < \eta$ para todo $1 \leq k \leq m^{\mathsf{n}}$ se va a verificar

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left| \psi_m(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \right| \leq \sup_{\mathbf{x}\in K} \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \int_{Q_k^m} \left| \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^m) - \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| d\mathbf{y} \leq \frac{\varepsilon}{(2R)^{\mathsf{n}}} \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \operatorname{vol}(Q_k^m) = \varepsilon.$$

En tercer lugar y finalmente, se obtiene lo que se quería probar:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\psi) &= \mathrm{T}\big(\mathscr{D} - \lim_{m\to\infty} \psi_m\big) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{T}(\psi_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m^{\mathsf{n}}} \mathrm{T}\big(\phi(\bullet, \mathbf{y}_k^m)\big) \operatorname{vol}(Q_k^m) = \\ &= \int_K \mathrm{T}\big(\phi(\bullet, \mathbf{y})\big)\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \mathrm{T}\big(\phi(\bullet, \mathbf{y})\big)\, d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es válida porque la aplicación $\mathbb{R}^{\mathsf{n}} \ni \mathbf{y} \longmapsto \mathrm{T}(\phi_{\mathbf{y}})$ es continua.

Para completar la demostración, pruébese esta última afirmación. Dado $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, tómese una sucesión $\{\mathbf{w}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ verificando $\lim \mathbf{w}_m = \mathbf{w}$; entonces $\{\phi_{\mathbf{w}_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, como es evidente. Sea ahora $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}) \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{n}}$ arbitrario y póngase $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}, 0, 0, \ldots, 0)$ en $\mathbb{N}_0^{2\mathrm{n}}$. Para cualesquiera $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ se tiene

$$\mathtt{D}^{\alpha}\left(\phi_{\mathbf{w}_m} - \phi_{\mathbf{w}}\right)(\mathbf{x}) = \mathtt{D}_{\mathbf{x}}^{\alpha}\left[\phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{w}_m\right) - \phi\left(\mathbf{x}, \mathbf{w}\right)\right] = \left[\mathtt{D}^{\overline{\alpha}}\phi\right](\mathbf{x}, \mathbf{w}_m) - \left[\mathtt{D}^{\overline{\alpha}}\phi\right](\mathbf{x}, \mathbf{w}),$$

luego, debido a que $\mathtt{D}^{\overline{\alpha}}\phi$ es uniformemente continua,

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}\left|\mathtt{D}^{\alpha}\left(\phi_{\mathbf{w}_m} - \phi_{\mathbf{w}}\right)(\mathbf{x})\right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Se ha probado que $\mathscr{D} - \operatorname{lím}\phi_{\mathbf{w}_m} = \phi_{\mathbf{w}}$. Como T es distribución, se tiene que

$$\mathbf{w}_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \mathbf{w} \Rightarrow \mathrm{T}\left(\phi_{\mathbf{w}_m}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mathrm{T}\left(\phi_{\mathbf{w}}\right),$$

es decir, $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{y} \longmapsto \mathrm{T}\left(\phi_{\mathbf{y}}\right)$ es continua. □

Lema 3.2.10 *Dados un vector* $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *y una función* $\phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *se verifica*

$$\frac{\phi\left(\bullet + \varepsilon\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) - \phi}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathscr{D}} \mathtt{D}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}\phi. \tag{3.2.1}$$

Demostración. Por linealidad, basta probar el enunciado para $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{e}_\nu}$ $(1 \leq \nu \leq \mathrm{n})$; por simetría, para $\nu = 1$. Entonces, y para también simplificar la notación, se puede suponer $\mathrm{n} = 1$.

Sea ahora la colección $\{\phi_\varepsilon\}_{0<|\varepsilon|<1}$ dada por

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)}{\varepsilon} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Se tiene, por un lado, que $\operatorname{sop}(\phi_\varepsilon) \subseteq \operatorname{sop}(\phi) + [-1, 1]$ si $0 < |\varepsilon| < 1$. Por otro lado, se ha de probar

$$\phi_\varepsilon^{(n)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{unif.}} \phi^{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

pero basta probar esto para $n = 0$ y después proceder iterativamente.

Para ello, obsérvese que

$$\phi(x+\varepsilon) - \phi(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(\phi(x+t\varepsilon)\big)\mathrm{d}t = \varepsilon\int_0^1 \phi'(x+t\varepsilon)\,\mathrm{d}t,$$

de donde

$$\left|\frac{\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)}{\varepsilon} - \phi'(x)\right| = \left|\int_0^1 \phi'(x+t\varepsilon)\,\mathrm{d}t - \phi'(x)\right| = \left|\int_0^1 \phi'(x+t\varepsilon) - \phi'(x)\,\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \int_0^1 \left|\phi'(x+t\varepsilon) - \phi'(x)\right|\mathrm{d}t.$$

Sea $\eta > 0$ conocido; como ϕ' es uniformemente continua, existe $\delta = \delta(\eta, \phi') > 0$ tal que $|y| < \delta$ implica $|\phi'(x+y) - \phi'(x)| < \eta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, tomando ε suficientemente cercano a cero como para que $|t\varepsilon| < \delta$ se va a verificar

$$\left|\phi_\varepsilon(x) - \phi'(x)\right| \leq \int_0^1 \left|\phi'(x+t\varepsilon) - \phi'(x)\right|\mathrm{d}t < \int_0^1 \eta\ \mathrm{d}t = \eta \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

□

En lo sucesivo, se va a representar a las distribuciones sobre $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ con las letras u, v, w.

Teorema 3.2.11 *Sean $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi,\ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces*

a) $\tau_{\mathbf{x}}(u*\phi) = (\tau_{\mathbf{x}}u)*\phi = u*(\tau_{\mathbf{x}}\phi)$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b) $u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$D^\alpha(u*\phi) = (D^\alpha u)*\phi = u*(D^\alpha\phi) \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

c) $u*(\phi*\psi) = (u*\phi)*\psi$.

Demostración. **a)** Fijado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, las tres funciones complejas de **a** evaluadas en un punto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ valen $u(\iota_{\mathbf{y}-\mathbf{x}}\phi)$. Se comprueba rutinariamente usando la **Proposición** 3.1.2.

b) Sean $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Por un lado,

$$\iota_{\mathbf{x}}(D^\alpha\phi) = (D^\alpha\phi)(\mathbf{x}-\bullet) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\iota_{\mathbf{x}}\phi) \ \text{ implica}$$
$$(u*D^\alpha\phi)(\mathbf{x}) = u\big(\iota_{\mathbf{x}}(D^\alpha\phi)\big) = (-1)^{|\alpha|}u\big(D^\alpha(\iota_{\mathbf{x}}\phi)\big) = (D^\alpha u)(\iota_{\mathbf{x}}\phi) = (D^\alpha u*\phi)(\mathbf{x}).$$

Por otro lado, para completar la demostración es suficiente probar la igualdad primera de **b** cuando $|\alpha| = 1$ (después se procede iterativamente para obtener dicha igualdad para cualquier $n-$índice). Considérese entonces el cociente incremental

$$\frac{(u*\phi)\left(\mathbf{x}+\varepsilon\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\right)-(u*\phi)(\mathbf{x})}{\varepsilon} = \frac{u\left(\iota_{\mathbf{x}+\varepsilon\overrightarrow{\mathbf{e}_1}}\phi\right)-u(\iota_{\mathbf{x}}\phi)}{\varepsilon} = u\left(\frac{\iota_{\mathbf{x}+\varepsilon\overrightarrow{\mathbf{e}_1}}\phi-\iota_{\mathbf{x}}\phi}{\varepsilon}\right), \tag{3.2.2}$$

donde, por el **Lema** 3.2.10,

$$\mathscr{D}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi\left(\mathbf{x}-\bullet+\varepsilon\overrightarrow{\mathbf{e}_1}\right)-\phi(\mathbf{x}-\bullet)}{\varepsilon} = (D^{\mathbf{e}_1}\phi)(\mathbf{x}-\bullet) = \iota_{\mathbf{x}}(D^{\mathbf{e}_1}\phi).$$

Entonces, haciendo tender ε a cero en (3.2.2) se obtiene $D^{\mathbf{e}_1}(u*\phi)(\mathbf{x}) = \big(u*(D^{\mathbf{e}_1}\phi)\big)(\mathbf{x})$.

c) Aplicando el **Lema** 3.2.9 se obtiene este resultado: dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\big((u*\phi)*\psi\big)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n}(u*\phi)(\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n}u(\iota_{\mathbf{y}}\phi)\,\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}u\big(\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\iota_{\mathbf{y}}\phi\big)d\mathbf{y} = u\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\phi(\mathbf{y}-\bullet)\,d\mathbf{y}\right) = \\ &= u\left(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbf{x}-\bullet-\mathbf{t})\,\phi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}\right) = u\big((\phi*\psi)(\mathbf{x}-\bullet)\big) = \\ &= u\big(\iota_{\mathbf{x}}(\phi*\psi)\big) = \big(u*(\phi*\psi)\big)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

□

3.2.2. Convolución de una distribución $\mathscr{D}'_c(\mathbb{R}^n)$ por una función $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto, u puede extenderse de modo único a una forma lineal $\mathfrak{R}^{-1}u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ —ver **Teorema** 2.5.65—. Así,

Definición 3.2.12 El producto de *convolución de $u \in \mathscr{D}'_c(\mathbb{R}^n)$ por $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$* es la función compleja $u*f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por la misma fórmula de la **Definición** 3.2.5, es decir, dada por

$$(u*f)(\mathbf{x}) = \left(\mathfrak{R}^{-1}u\right)(\iota_{\mathbf{x}}f).$$

Teorema 3.2.13 *Sean* $u \in \mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y* $f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. *Entonces*

a) $\tau_{\mathbf{x}}(u * f) = (\tau_{\mathbf{x}} u) * f = u * (\tau_{\mathbf{x}} f)$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$,

b) $u * f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y*

$$\mathtt{D}^{\alpha}(u * f) = (\mathtt{D}^{\alpha} u) * f = u * (\mathtt{D}^{\alpha} f) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{n}}.$$

c) *Si, además,* $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, *entonces* $u * \phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y*

$$u * (f * \phi) = (u * f) * \phi = (u * \phi) * f.$$

Se prueba estas propiedades manejando los soportes distribucionales y sus demostraciones siguen las mismas líneas que las de las tres propiedades del teorema anterior, luego no vale la pena detallarlas. Aun así, se puede consultar **[5, Th 6.35]**.

3.3. Convolución de dos distribuciones

Desde ya se adelanta que la convolución de dos distribuciones sólo tendrá sentido cuando al menos una de las dos tenga soporte compacto.

3.3.1. Construcción

Teorema 3.3.14

a) *Sean* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *y*

$$\mathrm{H}_u : \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \longrightarrow \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \quad \text{con fórmula} \quad \mathrm{H}_u \phi = u * \phi. \tag{3.3.3}$$

Entonces H_u *es una aplicación lineal y continua bajo el par* $\mathscr{D} - \mathscr{E}$ *que verifica la igualdad* $\tau_{\mathbf{x}} \mathrm{H}_u = \mathrm{H}_u \tau_{\mathbf{x}}$ *para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

b) *Recíprocamente, sea* H *una aplicación lineal y continua de* $(\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathscr{D})$ *en* $(\mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}), \mathscr{E})$. *Si* H *verifica* $\tau_{\mathbf{x}} \mathrm{H} = \mathrm{H} \tau_{\mathbf{x}}$ *para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, *entonces existe una única* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ *tal que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_u$ *donde* H_u *es como en* (3.3.3).

Demostración. a) Como, dada $\phi \in \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, se verifica $\tau_{\mathbf{x}}(u * \phi) = u * (\tau_{\mathbf{x}} \phi)$ para todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, de la definición de H_u se deduce la conmutatividad del enunciado. Para probar que H_u es continua, tómese un compacto $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ arbitrario y demuéstrese que $\mathrm{H}_u|_{\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})}$ es continua —**Teorema 2.3.32**—; a su vez, para esto último, si se prueba que

$$\operatorname{Graf} \mathrm{H}_u|_{\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})} = \left\{ (\psi, u * \psi) \mid \psi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \right\} \tag{3.3.4}$$

es cerrado (bajo la topología producto, claro), se obtendrá, por el teorema del grafo cerrado —**Teorema C.2.3**—, que $\mathrm{H}_u|_{\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})}$ es continua.

Recuérdese que, en un espacio topológico, un subconjunto es cerrado si, y sólo si, el límite de cada sucesión convergente contenida en dicho subconjunto vive en él. De este hecho que se tome $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ tal que

$$\psi_m \xrightarrow[m \to \infty]{\mathscr{E}^K} \psi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \quad \text{ y } \quad u * \psi_m \xrightarrow[m \to \infty]{\mathscr{E}} f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Dado $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, un simple cálculo muestra $\iota_{\mathbf{w}} \psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} \iota_{\mathbf{w}} \psi$, luego

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} (u * \psi_m)(\mathbf{x}) = \lim_{m\to\infty} u(\iota_{\mathbf{x}} \psi_m) = u(\iota_{\mathbf{x}} \psi) = (u * \psi)(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

y esto es: (ψ, f) vive en (3.3.4).

b) Defínase la aplicación $u : \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $u(\phi) = (\Lambda_{\mathbf{0}} \circ \mathrm{H} \circ \iota_{\mathbf{0}})(\phi) = (\mathrm{H}\iota_{\mathbf{0}}\phi)(\mathbf{0})$ —recordar el **Ejemplo** 2.2.23—. La **Proposición** 3.1.2 asegura que $\iota_{\mathbf{0}}$ es un operador lineal y continuo bajo $\mathscr{D} - \mathscr{D}$, entonces u es una distribución sobre $\mathbb{R}^n$ por ser composición de aplicaciones lineales y continuas. Ahora, puesto que H conmuta con las traslaciones y se da, dado $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ un punto cualquiera, $\tau_{-\mathbf{w}}(\mathrm{H}\phi) = (\mathrm{H}\phi)(\bullet + \mathbf{w})$, se tiene

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}\phi)(\mathbf{x}) &= (\tau_{-\mathbf{x}}\mathrm{H}\phi)(\mathbf{0}) = (\mathrm{H}\tau_{-\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{0}) = (\mathrm{H}\iota_{\mathbf{0}}\iota_{\mathbf{0}}\tau_{-\mathbf{x}}\phi)(\mathbf{0}) = \\ &= u(\iota_{\mathbf{0}}\tau_{-\mathbf{x}}\phi) = u(\iota_{\mathbf{x}}\phi) = (u * \phi)(\mathbf{x})\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La unicidad de u es evidente: si $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $v * \phi = 0$ para toda $\phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces $v(\iota_{\mathbf{0}}\phi) = (v * \phi)(\mathbf{0}) = 0$ para toda $\phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, luego $v = 0$; con lo cual, si existiera $u_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{u_1}$, se tendría

$$0 = u * \phi - u_1 * \phi = (u - u_1) * \phi \quad \forall\, \phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u = u_1.$$

$\square$

Definición 3.3.15 Sean $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si al menos una de estas dos distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$ es de soporte compacto, sea la aplicación $\mathbf{conv}_{u,\,v} : \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\mathbf{conv}_{u,\,v}(\phi) = u * (v * \phi).$$

Lema 3.3.16 *En las condiciones de la* **Definición** 3.3.15*, la aplicación* $\mathbf{conv}_{u,\,v}$ *está bien definida, verifica* $\tau_{\mathbf{x}}\mathbf{conv}_{u,\,v} = \mathbf{conv}_{u,\,v}\tau_{\mathbf{x}}$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *y es continua bajo el par* $\mathscr{D} - \mathscr{E}$.

Demostración. La buena definición y la conmutatividad del enunciado se desprenden, sin más dilación, de los resultados **Teorema** 3.2.11 y **Teorema** 3.2.13.

Para ver la continuidad supóngase, en primer lugar, v tiene soporte compacto. En este caso, $v * \psi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para toda $\psi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ —propiedad **c** del **Teorema** 3.2.13— y la aplicación $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \longrightarrow v * \phi$ es lineal (ya visto) y continua bajo el par $\mathscr{D} - \mathscr{D}$. Esto último se prueba como sigue: sea $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión $\mathscr{D}$–convergente a 0, entonces, si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ es cualquiera, se verifica

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left|\mathrm{D}^{\alpha}(v * \phi_m)(\mathbf{x})\right| &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left|(v * \mathrm{D}^{\alpha}\phi_m)(\mathbf{x})\right| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left|v(\iota_{\mathbf{x}}\mathrm{D}^{\alpha}\phi_m)\right| \leq \\ &\leq c \cdot \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\iota_{\mathbf{x}}\mathrm{D}^{\alpha}\phi_m\|_n = \qquad (c > 0, \text{—}\mathbf{d} \text{ de } \mathbf{Teorema}\ 2.5.59\text{—}) \\ &= c \cdot \sup\left\{\left|(-1)^{|\beta|}\mathrm{D}^{\beta+\alpha}\phi_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq n\right\} \leq \\ &\leq c \cdot \sup\left\{|\mathrm{D}^{\gamma}\phi_m(\mathbf{z})| : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, |\gamma| \leq n + |\alpha|\right\} = \\ &= c \cdot \|\phi_m\|_{n+|\alpha|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Así, y aplicando la parte **a** del **Teorema** 3.3.14, $\mathbf{conv}_{u,\,v}$ es continua bajo $\mathscr{D} - \mathscr{E}$.

En segundo lugar, supóngase u es de soporte compacto. Como, de nuevo, la parte **a** del **Teorema** 3.3.14 asegura que $\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \longmapsto v * \phi$ es continua bajo $\mathscr{D} - \mathscr{E}$, si se prueba que

$\mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \ni f \longmapsto u * f$ es continua bajo $\mathscr{E} - \mathscr{E}$, entonces $\mathbf{conv}_{u,\,v}$ será continua bajo $\mathscr{D} - \mathscr{E}$ por composición. Sea, pues, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ con $\mathscr{E} - \text{lím}\, f_m = 0$. Dados $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$ y $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ cualesquiera, se tiene, análogamente al caso anterior,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in K}\left|\mathtt{D}^{\alpha}(u * f_m)(\mathbf{x})\right| &= \max_{\mathbf{x}\in K}\left|(u * \mathtt{D}^{\alpha} f_m)(\mathbf{x})\right| = \max_{\mathbf{x}\in K}\left|\left(\mathfrak{R}^{-1}u\right)\left(\iota_{\mathbf{x}}\mathtt{D}^{\alpha} f_m\right)\right| \le \\ &\le c\cdot \max_{\mathbf{x}\in K} p_n\left(\iota_{\mathbf{x}}\mathtt{D}^{\alpha} f_m\right) = \quad (c>0, \text{—}\textbf{Teorema 2.2.24}\text{—}) \\ &= c\cdot \max\left\{\left|\mathtt{D}^{\beta+\alpha} f_m(\mathbf{z})\right| :\ \mathbf{z}\in K - \mathtt{K}_n,\ |\beta| \le n\right\} \le \\ &\le c\cdot p_{n_1}(f_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

y esta última desigualdad vale para $n_1 \in \mathbb{N}$ con $K - \mathtt{K}_n \subseteq \mathtt{K}_{n_1}$ y $n_1 \ge n + |\alpha|$. □

Corolario 3.3.17 *Existe una única $w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ tal que, si al menos una de las dos distribuciones u, v sobre $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ tiene soporte compacto, entonces*

$$\mathbf{conv}_{u,\,v}(\phi) = w * \phi \quad \forall\, \phi \in \mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}). \tag{3.3.5}$$

Claro, el lema anterior no es más que la prueba de que las hipótesis de la parte **b** del **Teorema 3.3.14** son ciertas para $\mathrm{H} = \mathbf{conv}_{u,\,v}$.

Definición 3.3.18 Sean $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ con, al menos una de ellas, soporte compacto. La *convolución* $u * v$ es la distribución w sobre $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ que viene caracterizada por (3.3.5), es decir, es

$$w = \Lambda_{\mathbf{0}} \circ \mathbf{conv}_{u,\,v} \circ \iota_{\mathbf{0}} = \left(\mathbf{conv}_{u,\,v}(\iota_{\mathbf{0}}\bullet)\right)(\mathbf{0})$$

—ver demostración de **b** del **Teorema 3.3.14**—.

3.3.2. Propiedades

La siguiente proposición asegura que la convolución de dos distribuciones expuesta en la definición anterior extiende la convolución de dos funciones de la **Definición 3.1.3**. Para conocer los detalles de la demostración, ver **[3, Remark 2.86]**.

Proposición 3.3.19 *Sean $f, g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ con, al menos una de las dos, soporte* —recuérdese la **Definición 2.5.61**— *compacto. Entonces $f * g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y vale la igualdad $\mathrm{T}_f * \mathrm{T}_g = \mathrm{T}_{f*g}$.*

Teorema 3.3.20 *Sean u, v, w tres distribuciones sobre $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$.*

a) *Si una al menos de u, v tiene soporte compacto, entonces $u * v = v * u$.*

b) *Si dos al menos de u, v, w tienen soportes compactos, entonces $(u * v) * w = u * (v * w)$.*

La demostración consiste en realizar los cálculos y no merece la pena reproducirla. Para conocer los detalles ver **[5, Th 6.37]**. Las propiedades **a** y **b** se conocen, respectivamente, como *conmutatividad* y *asociatividad del producto de convolución*.

Teorema 3.3.21 *Sean u, v dos distribuciones sobre $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ con v soporte compacto. Sea también α un $\mathtt{n}-$índice. Entonces:*

a) $\mathtt{D}^{\alpha} u = (\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * u$ *y, en particular,* $u = \delta * u$.

b) $\mathtt{D}^{\alpha}(u * v) = (\mathtt{D}^{\alpha} u) * v = u * (\mathtt{D}^{\alpha} v)$.

Demostración. **a)** Para ver este punto, sea $\psi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ cualquiera, entonces vale

$$(\delta * \psi)(\mathbf{x}) = \delta(\iota_{\mathbf{x}}\psi) = (\iota_{\mathbf{x}}\psi)(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{x}-\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \text{ es decir, } \delta * \psi = \psi.$$

Por consiguiente, aplicando el aserto **b** del **Teorema 3.2.11**, se obtiene

$$(\mathtt{D}^{\alpha}u) * \phi = u * (\mathtt{D}^{\alpha}\phi) = u * \left(\mathtt{D}^{\alpha}(\delta * \phi)\right) = u * \left((\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * \phi\right) = \mathbf{conv}_{u,\, \mathtt{D}^{\alpha}\delta}(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}).$$

Ahora, la **Definición 3.3.18** y **a** del **Teorema 3.3.20** dan

$$u * (\mathtt{D}^{\alpha}\delta) = \mathtt{D}^{\alpha}u = (\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * u.$$

b) Este segundo punto es consecuencia del primero y del teorema anterior:

$$\begin{aligned} \mathtt{D}^{\alpha}(u * v) &= (\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * (u * v) = \left((\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * u\right) * v = (\mathtt{D}^{\alpha}u) * v \quad \text{y} \\ \left((\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * u\right) * v &= \left(u * (\mathtt{D}^{\alpha}\delta)\right) * v = u * \left((\mathtt{D}^{\alpha}\delta) * v\right) = u * \mathtt{D}^{\alpha}v. \end{aligned}$$

□

Observación 3.3.22 En general, no existe una noción de producto de convolución de dos distribuciones arbitrarias que extienda las propiedades anteriores y sea asociativa: en el sentido de las distribuciones sobre $\mathbb{R}$ se tiene

- $H * [(\delta') * 1] = H * \left[(\delta * 1)'\right] = H * (1') = 0$, mientras que también
- $[H * (\delta')] * 1 = \left[(H * \delta)'\right] * 1 = [(H') * \delta] * 1 = (\delta * \delta) * 1 = 1.$

3.3.3. Aplicación a la resolución de EDPs

Definición 3.3.23 Sea $\mathtt{L}$ un operador diferencial de coeficientes constantes y de orden $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\mathtt{L} = \sum_{|\alpha| \le n} a_{\alpha}\mathtt{D}^{\alpha} \quad \left(a_{\alpha} \in \mathbb{C} \text{ y } a_{\alpha_0} \neq 0 \text{ para algún } |\alpha_0| = n\right).$$

Se dice que $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ es una *solución fundamental* de $\mathtt{L}$ si se cumple

$$\mathtt{L}u = \delta.$$

Ejemplo 3.3.24 Si $\mathtt{L} = \partial/\partial x$, entonces $u = H$, la función de Heaviside, es solución fundamental de $\mathtt{L}$.

Ejemplo 3.3.25 Si $\mathtt{L} = \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_{\mathrm{n}}^2$ en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ con $\mathrm{n} \geq 3$, entonces se puede probar que una solución fundamental de $\mathtt{L}$ en sentido de las distribuciones es la función

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{c_{\mathrm{n}}}{|\mathbf{x}|^{\mathrm{n}-2}} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \quad \text{con} \quad \frac{1}{c_{\mathrm{n}}} = (\mathrm{n}-2)\,|\mathrm{B}(\mathbf{0},\, 1)|,$$

donde $|\mathrm{B}(\mathbf{0},\, 1)| = 2\pi^{\mathrm{n}/2}/\Gamma(\mathrm{n}/2)$ es el volumen de la esfera unidad. Para más información ir a **[2, Exercise 9.1.14, pag. 291]**.

Ejemplo 3.3.26 Si $\mathtt{L} = \partial/\partial t - \Delta$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, entonces se puede probar que una solución fundamental de $\mathtt{L}$ en sentido de las distribuciones es la función

$$W(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{\mathsf{n}/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right) \qquad \left[(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathsf{n}}\right].$$

Para más información ir a **[2, Exercise 9.1.15, pag. 291]**.

Corolario 3.3.27 *Sea $\kappa \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ una solución fundamental del operador diferencial de coeficientes constantes* $\mathtt{L}$. *Si v es una distribución sobre $\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ y tiene soporte compacto, entonces la* EDP *no homogénea $\mathtt{L}u = v$ tiene como solución distribucional $u = \kappa * v$.*

Demostración. Notar que $u = \kappa * v$ está bien definido pues $v \in \mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. El **Teorema 3.3.21** da

$$\mathtt{L}u = \mathtt{L}(\kappa * v) = (\mathtt{L}\kappa) * v = \delta * v = v.$$

□

Para terminar, se enuncia el importante teorema (de Malgrange-Ehrenpreis) que sigue, el cual no va a ser demostrado pues se sale del ámbito de este trabajo. Una demostración puede consultarse en **[5, Theorem 8.5]**.

Teorema 3.3.28 *Si* $\mathtt{L}$ *es un operador diferencial de coeficientes constantes, entonces*

$$\exists\ \kappa \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})\ :\ \mathtt{L}\kappa = \delta,$$

es decir, existe al menos una solución fundamental de $\mathtt{L}$.

CAPÍTULO 4

La clase de Schwartz y distribuciones temperadas

La transformada de Fourier se presenta en el análisis como una herramienta fundamental a la hora de dar solución a múltiples problemas. En este capítulo, que sigue principalmente la referencia **[5, Chapter 7]**, se presenta sus propiedades algebraicas y analíticas cuando se restringe su acción a la *clase de Schwartz* y se define la transformada de Fourier de un tipo particular de distribuciones, las *distribuciones temperadas*.

Para este propósito conviene considerar el siguiente espacio de funciones continuas:

$$\mathtt{C}_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathtt{C}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} f(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

4.1. Transformada de Fourier

Definición 4.1.1

- La *medida de Lebesgue normalizada* en $\mathbb{R}^n$ es $\lambda_n = \lambda/\pi_n$, donde $\pi_n = \sqrt{(2\pi)^n}$.
- Dado $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, sea la función

$$e_{i\xi}(\mathbf{x}) = e^{i\xi\cdot\mathbf{x}} = \exp\left\{ i \cdot (\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n) \right\} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

- La *transformada de Fourier* de una función $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ es la función

$$\mathscr{F}\{f\}(\xi) = \frac{1}{\pi_n} \int_{\mathbb{R}^n} f e_{i(-\xi)} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_n(\mathbf{x}) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

  que se suele denotar simplemente por $\hat{f}$.
- La aplicación $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \mathscr{F}\{f\}$ se denomina *transformación de Fourier*.

Teorema 4.1.2 *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)}$ y $\hat{f} \in \mathtt{C}_0(\mathbb{R}^n)$.*

La demostración de este primer resultado, llamado *lema de Riemann-Lebesgue*, se obvia a razón de restringir en este capítulo el estudio de la acción de la transformada de Fourier sobre la clase de Schwartz. Se pretende así presentar sin dar demasiados rodeos las distribuciones temperadas.

Pásese a mostrar un ejemplo de cómputo de transformada de Fourier.

Ejemplo 4.1.3 Calcúlese la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$, la cual es integrable. Entonces, dado $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi_1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi_1}\int_{-\infty}^{0} e^{x-i\xi x}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi_1}\int_{0}^{+\infty} e^{-x-i\xi x}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\pi_1}\left(\left[\frac{e^{(1-i\xi)x}}{1-i\xi}\right]_{x=-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(1+i\xi)x}}{-(1+i\xi)}\right]_{x=0}^{+\infty}\right) = \frac{1}{\pi_1}\left(\frac{1}{1-i\xi}+\frac{1}{1+i\xi}\right) = \frac{1}{\pi_1}\frac{2}{1+\xi^2}.$$

Las llamadas *propiedades algebraicas* de la transformada de Fourier, usadas con frecuencia en las demostraciones de los siguientes resultados, han sido relegadas a la sección **C.4** a razón de aligerar este estudio.

4.2. Las funciones de decrecimiento rápido $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$

Definición 4.2.4 Suele llamarse *función de decrecimiento rápido* a una función de $\mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ con la siguiente propiedad: ella y todas sus derivadas tienden más rápido a 0 en el infinito que el inverso de cualquier polinomio de n variables. El conjunto de todas las funciones de decrecimiento rápido o *clase de Schwartz* es, pues,

$$\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) = \left\{f \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) : \ \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}}\left|\mathrm{P}(\mathbf{x})\mathtt{D}^{\alpha}f(\mathbf{x})\right| < +\infty \text{ para todo polinomio P y todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathsf{n}}\right\}.$$

Observación 4.2.5 El contenido $\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ es estricto. La función ϕ_{n} definida en el **Lema 4.4.12** es un ejemplo de función $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ que no tiene soporte compacto.

Definición 4.2.6 Sea P un polinomio de n variables con coeficientes complejos (todos nulos salvo un número finito de ellos), es decir,

$$\mathrm{P}(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\mathsf{n}}} a_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{\mathsf{n}}} a_\alpha t_1^{\alpha_1}\cdots t_{\mathsf{n}}^{\alpha_{\mathsf{n}}} \quad (\mathbf{t}\in\mathbb{C}^{\mathsf{n}}) \quad \text{o, simplemente,} \quad \mathrm{P} = \sum a_\alpha \mathrm{id}^\alpha,$$

donde $\mathrm{id} : \mathbb{C}^{\mathsf{n}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathsf{n}}$ es la identidad y, para cada n-índice α, se denota por id^α a la aplicación $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_{\mathsf{n}}^{\alpha_{\mathsf{n}}}$ $(\mathbf{x}\in\mathbb{C}^{\mathsf{n}})$. Entonces, si $b\in\mathbb{C}$, se define el operador diferencial

$$\mathrm{P}(b\mathtt{D}) = \sum b^{|\alpha|}a_\alpha \mathtt{D}^\alpha \quad \text{y, en particular,} \quad \mathrm{P}(\mathtt{D}) = \sum a_\alpha \mathtt{D}^\alpha.$$

Proposición 4.2.7

a) *Por un lado, si* $f\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, *entonces* $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}}(f * e_{i\xi})(\mathbf{0})$ $\forall\, \xi\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$.

b) *Por otro, si* $\mathbf{x}, \mathbf{t}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ *son dos puntos, entonces*

- $\mathtt{D}^\alpha e_{i\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = (i\mathbf{t})^\alpha e_{i\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ *para cada* $\mathsf{n}-$*índice* α, *luego, en particular,*
- *el operador diferencial* $\mathrm{P}(\mathtt{D})$ *de la definición anterior actúa sobre* $e_{i\mathbf{t}}$ *como*

$$\mathrm{P}(\mathtt{D})e_{i\mathbf{t}} = \sum a_\alpha \mathtt{D}^\alpha e_{i\mathbf{t}} = \sum a_\alpha (i\mathbf{t})^\alpha e_{i\mathbf{t}} = \mathrm{P}(i\mathbf{t})e_{i\mathbf{t}}.$$

Lema 4.2.8 *Sea* $f\in\mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. *Las siguientes primeras cuatro afirmaciones son equivalentes. Además, la afirmación* **I** *implica* **V** *y* **VI**.

I. $f\in\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$.

II. $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^n \mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| < +\infty$ *para todos* $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$.

III. $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\left(1+|\mathbf{x}|\right)^n \mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| < +\infty$ *para todos* $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$.

IV. $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| < +\infty$ *para todo par* α, β *de* $\mathtt{n}-$*índices.*

V. $\mathrm{P}\cdot\mathtt{D}^{\alpha} f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *para todo polinomio* P *y todo* $\mathtt{n}-$*índice* α.

VI. *Dado* $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$, *si* P *es un polinomio, entonces* $\left(\mathrm{P}(\mathtt{D}) f\right) * e_{i\mathbf{t}} = f * \left(\mathrm{P}(\mathtt{D}) e_{i\mathbf{t}}\right)$.

Demostración. $\boxed{\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{II}}$ Obvio pues $|\mathbf{x}|^2$ ($\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$) es un polinomio.

$\boxed{\mathbf{II} \Rightarrow \mathbf{III}}$ Se verifica la siguiente cadena de equivalencias si $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$:

$$\left(1-|\mathbf{x}|\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2|\mathbf{x}| \leq 1+|\mathbf{x}|^2 \Leftrightarrow \left(1+|\mathbf{x}|\right)^2 \leq 2\left(1+|\mathbf{x}|^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1+|\mathbf{x}|\right)^{2n} \leq 2^n\left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}_0.$$

$\boxed{\mathbf{III} \Rightarrow \mathbf{IV}}$ Sean α, β dos $\mathtt{n}-$índices cualesquiera, entonces, si $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$, se tiene

$$\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| = \frac{|\mathbf{x}^{\beta}|}{\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{|\beta|}}\left|\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{|\beta|}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right|, \text{ con } \left|\mathbf{x}^{\beta}\right| = |x_1|^{\beta_1}\cdots|x_{\mathtt{n}}|^{\beta_{\mathtt{n}}} \leq \left(1+|\mathbf{x}|\right)^{|\beta|}.$$

$\boxed{\mathbf{IV} \Rightarrow \mathbf{I}}$ Obvio pues un polinomio es una suma finita de monomios.

$\boxed{\mathbf{III} \Rightarrow \mathbf{V}}$ Dados α, β dos $\mathtt{n}-$índices, basta probar que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} < +\infty.$$

Pero es que se verifica lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\frac{|\mathbf{x}^{\beta}|}{\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{\mathtt{n}+|\beta|+1}}\left|\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{\mathtt{n}+|\beta|+1}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} \leq$$
$$\leq \left(\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{\mathtt{n}+|\beta|+1}\mathtt{D}^{\alpha} f(\mathbf{x})\right|\right)\int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\frac{d\mathbf{x}}{\left(1+|\mathbf{x}|\right)^{\mathtt{n}+1}} < +\infty.$$

$\boxed{\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{VI}}$ Comiéncese probando el enunciado para el operador $\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1}$. Después, procediendo por iteración, se obtendrá el enunciado en su forma general. Entonces, el cálculo es el que sigue: para cada $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left((\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} f) * e_{i\mathbf{t}}\right)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}} \mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} f(y_1, \mathbf{y}_1)\, e^{i\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{x}-(y_1,\mathbf{y}_1)\right)}\, dy_1\, d\mathbf{y}_1 = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} f(y_1, \mathbf{y}_1)\, e^{i\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{x}-(y_1,\mathbf{y}_1)\right)} dy_1\right) d\mathbf{y}_1 = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}-1}}\left(\left[f(y_1, \mathbf{y}_1)\, e^{i\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{x}-(y_1,\mathbf{y}_1)\right)}\right]_{y_1=-\infty}^{+\infty} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \mathbf{y}_1)(-it_1)\, e^{i\mathbf{t}\cdot\left(\mathbf{x}-(y_1,\mathbf{y}_1)\right)} dy_1\right) d\mathbf{y}_1 = \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}} f(\mathbf{y})(it_1)\, e^{i\mathbf{t}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{y} = \left(f * (it_1 e_{i\mathbf{t}})\right)(\mathbf{x}) = \left(f * (\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1} e_{i\mathbf{t}})\right)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad es cierta por el teorema de Fubini; la tercera, por la integración por partes; la cuarta, porque $f\in\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y por el teorema de Fubini de nuevo. Además, se ha denotado $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{\mathtt{n}}) = (y_1, \mathbf{y}_1)$. □

4.3. La topología $\mathscr{S}$ para $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$

Sobre el nuevo $\mathbb{C}-$espacio vectorial $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, con la suma de funciones y la multiplicación por escalares de la **Definición** 2.1.4 restringidas a $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, se define las seminormas (que evidentemente separan puntos)

$$s_n(f) = \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}f(\mathbf{x})\right| : |\beta| \leq n,\ |\alpha| \leq n\right\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

las cuales definen una topología, llamada $\mathscr{S}$, con las propiedades que recogen los resultados **Teorema** 1.2.27 y **Teorema** 1.3.29. Ya que $s_n(f) \leq s_{n+1}(f)$ para todos $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y $n \in \mathbb{N}$, una base local está formada por

$$\mathbf{W}_n := \mathbf{V}(s_n, n) = \{f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \mid s_n(f) < 1/n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Además, como es sabido, la sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ converge bajo la topología $\mathscr{S}$ a la función $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m_n$ implica

$$f_m - f \in \mathbf{W}_n \Leftrightarrow s_n(f_m - f) < 1/n,$$

es decir, si

$$\lim_{m\to\infty} s_n(f_m - f) = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Esta última indicación basta para ver el punto **a** del siguiente teorema, donde vienen recogidas otras propiedades de la topología $\mathscr{S}$.

Teorema 4.3.9 *Las siguientes cuatro afirmaciones son verdaderas.*

a) *Dadas una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, son equivalentes:*

I. $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{S}} f$

II. $\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}(f_m - f) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0$ *para todos α, $\beta \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$.*

b) *El espacio vectorial topológico $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ es completo.*

c) $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *es un espacio de Fréchet.*

d) $\mathtt{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *es denso en $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ bajo la topología $\mathscr{S}$.*

Demostración. b) Sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ una $\mathscr{S}-$sucesión de Cauchy, es decir, para cada par de $\mathtt{n}-$índices α, β,

$$\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}(f_m - f_l) \xrightarrow[m,\, l\to\infty]{\text{unif.}} 0 \tag{4.3.1}$$

o, lo que es lo mismo, $\{\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}_0(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ —contenido que se debe a la equivalencia dada en el **Lema** 4.2.8— es uniformemente de Cauchy. Así, el **Teorema** B.1.6 y el hecho «una sucesión de funciones acotadas y continuas que converge uniformemente tiene por límite una función acotada y continua» aseguran: para cada par α, β de $\mathtt{n}-$índices,

$$\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} g_{\alpha,\,\beta} \in \mathtt{C}_0(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}).$$

Por un lado, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, se tiene $\mathtt{D}^{\alpha}g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}} = g_{\alpha,\,\mathbf{0}}$, de donde $g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}} \in \mathtt{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, y para cada par de $\mathtt{n}-$índices α, β, el hecho (4.3.1) implica

$$\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}f_{m_\varepsilon}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}}(\mathbf{x})\right| = \lim_{l\to\infty}\left|\mathbf{x}^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}(f_{m_\varepsilon} - f_l)(\mathbf{x})\right| \leq \varepsilon \ \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$$

si $m_\varepsilon \geq k_\varepsilon$, para cierto $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$; de la arbitrariedad al tomar $\varepsilon > 0$ se deduce

$$\mathrm{id}^\beta \mathtt{D}^\alpha f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} \mathrm{id}^\beta \mathtt{D}^\alpha g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}}.$$

Como los $\mathtt{n}-$índices tomados son cualesquiera, este razonamiento prueba $g_{\alpha,\,\beta} = \mathrm{id}^\beta \mathtt{D}^\alpha g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}}$ para todos $\alpha,\,\beta \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$, se concluye $g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}} \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y, por supuesto, también $\mathscr{S} - \lim f_m = g_{\mathbf{0},\,\mathbf{0}}$.

c) El punto **b** y el hecho de que $\mathscr{S}$ es compatible con una métrica invariante prueban que $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ es un $\mathfrak{F}-$espacio. Como también $\mathscr{S}$ es localmente convexa, $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ es un espacio de Fréchet.

d) Tómese $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ arbitraria. Sea $\psi \in \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ con $\psi|_{\mathrm{B}(\mathbf{0},\,1)} = 1$ para definir la colección $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ dada por $f_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}/m)$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. Fijado $m \in \mathbb{N}$, para cada $\mathtt{n}-$índice α y cada polinomio P se verifica, por la fórmula de Leibniz,

$$\mathrm{P}\cdot \mathtt{D}^\alpha(f - f_m) = \mathrm{P}\cdot \sum_{\gamma\leq\alpha} a_{\alpha,\,\gamma}\left(\mathtt{D}^{\alpha-\gamma} f\right)\cdot m^{-|\gamma|}\cdot(\mathtt{D}^\gamma\phi)\circ\frac{\mathrm{id}}{m},$$

donde se ha denotado $\phi = 1 - \psi$. Entonces,

$$\left|\mathrm{P}(\mathbf{x})\cdot \mathtt{D}^\alpha(f - f_m)(\mathbf{x})\right| \leq \sum_{\mathbf{0}\leq\gamma\leq\alpha} \frac{w_{\alpha,\,\gamma}}{m^{|\gamma|}}\frac{\left|(\mathtt{D}^\gamma\phi)(\mathbf{x}/m)\right|}{|\mathbf{x}|^2} =: A(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}} \tag{4.3.2}$$

con $w_{\alpha,\,\gamma} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|a_{\alpha,\,\gamma}|\mathbf{x}|^2\,\mathrm{P}(\mathbf{x})\,\mathtt{D}^{\alpha-\gamma}f(\mathbf{x})\right| < +\infty$ $(\mathbf{0} \leq \gamma \leq \alpha)$ ya que $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

Notar que, por la forma en que se ha tomado ϕ, vale $(\mathtt{D}^\beta\phi)(\mathbf{x}/m) = 0$ si $|\mathbf{x}| \leq m$ para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^{\mathtt{n}}$. Mientras tanto, se tiene

$$\sup_{|x|>m} A(\mathbf{x}) \leq \sum_{\mathbf{0}\leq\gamma\leq\alpha} \frac{w_{\alpha,\,\gamma}}{m^{2+|\gamma|}}\,\|\phi\|_{|\alpha|} \leq \frac{c}{m^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

□

4.4. La transformación de Fourier $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$

Definición 4.4.10 La *transformación de Fourier restringida a la clase de Schwartz* es

$$\mathscr{F}_{\mathbf{rd}} : \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \longrightarrow \mathtt{C}_0(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$$

con fórmula, por supuesto, $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}\{f\} = \hat{f}$.

Nota. La notación $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ hace referencia al rápido decrecimiento en el infinito de las funciones de la clase de Schwartz $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

4.4.1. Propiedades analíticas

Teorema 4.4.11

a) *Sean* P *un polinomio,* $g \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *y* α *un* $\mathtt{n}-$*índice; entonces cada una de las tres aplicaciones*

$$f \longmapsto \mathrm{P}f, \quad f \longmapsto gf, \quad f \longmapsto \mathtt{D}^\alpha f$$

es una transformación lineal y continua de $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *en sí mismo.*

b) *Sean* $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ *y* P *un polinomio; entonces*

$$\mathscr{F}\{\mathrm{P}(\mathtt{D})f\}(\xi) = \mathrm{P}(i\xi)\hat{f}(\xi) \quad y \quad \mathscr{F}\{\mathrm{P}f\}(\xi) = \mathrm{P}(i\mathtt{D})\hat{f}(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$.

c) *La transformación de Fourier* $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ *verifica* $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}\{\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})\} \subseteq \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. *Además,* $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ *es una aplicación lineal y continua de* $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}), \mathscr{S})$ *en sí mismo.*

Demostración. a) La linealidad es obvia. Si $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, es evidente que $\mathtt{D}^{\alpha}f$ está en el mismo espacio y, usando la fórmula de Leibniz, es también evidente que $\mathrm{P}f$ y gf pertenecen a $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. La continuidad de las tres aplicaciones es ahora consecuencia sencilla del teorema del grafo cerrado —que puede ser aquí aplicado en virtud del punto **c** del **Teorema** 4.3.9—. Por ejemplo, si $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ es $\mathscr{S}-$convergente a $h \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y, además, $\{\mathtt{D}^{\alpha}f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es $\mathscr{S}-$convergente a $h_{\alpha} \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, entonces, para todo par β, γ de $\mathtt{n}-$índices, dado que

$$\mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\gamma}(\mathtt{D}^{\alpha}f_m) = \mathrm{id}^{\beta}\mathtt{D}^{\gamma+\alpha}f_m \ \text{ para todo } \ m \in \mathbb{N},$$

se verifica $h_{\alpha} = \mathtt{D}^{\alpha}h$.

b) En virtud de **a**, si $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, entonces $\mathrm{P}(\mathtt{D})f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y, por el **Lema** 4.2.8, $\mathrm{P}(\mathtt{D})f$ es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$, luego se puede considerar, para cada $\xi \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$,

$$\mathscr{F}\{\mathrm{P}(\mathtt{D})f\}(\xi) = \frac{1}{\pi_{\mathtt{n}}}\Big(\big(\mathrm{P}(\mathtt{D})f\big) * e_{i\xi}\Big)(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_{\mathtt{n}}}\Big(\big(\mathrm{P}(i\xi)e_{i\xi}\big) * f\Big)(\mathbf{0}) = \mathrm{P}(i\xi)\hat{f}(\xi),$$

donde la segunda igualdad se da también gracias al **Lema** 4.2.8.

Ahora, como también es sabido que $\mathrm{P}f$ es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$, es posible considerar $\mathscr{F}\{\mathrm{P}f\}$. Comiéncese probando esta segunda igualdad para el monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{e}_1} = x_1$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}})$; después, procediendo por recurrencia y teniendo en cuenta la linealidad del operador integral, se obtendrá la fórmula en su forma general. Así, usando la regla de derivación de integrales paramétricas —**Lema** C.3.5— se tiene

$$i\mathtt{D}^{\mathbf{e}_1}\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}} x_1 f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}\mathrm{d}\lambda_{\mathtt{n}}(\mathbf{x}) = \mathscr{F}\{\mathrm{id}^{\mathbf{e}_1}f\}(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}.$$

c) Sea $f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^{\mathtt{n}}$, si α, β son $\mathtt{n}-$índices, ocurre que el valor $\xi^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}\hat{f}(\xi)$ es igual al valor $\mathscr{F}\{\mathtt{D}^{\beta}(\mathrm{id}^{\alpha}f)\}(\xi)$ salvo una potencia de i, aplicando **b**. Por **a**, se tiene que $\mathtt{D}^{\beta}(\mathrm{id}^{\alpha}f) \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y, por el **Lema** 4.2.8, la función $\mathtt{D}^{\beta}(\mathrm{id}^{\alpha}f)$ es integrable en $\mathbb{R}^{\mathtt{n}}$. Así,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\xi^{\beta}\mathtt{D}^{\alpha}\hat{f}(\xi)\right| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\mathtt{D}^{\beta}\big(\mathbf{x}^{\alpha}f(\mathbf{x})\big)e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi}\mathrm{d}\lambda_{\mathtt{n}}(\mathbf{x})\right| \leq \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}}\left|\mathtt{D}^{\beta}\big(\mathbf{x}^{\alpha}f(\mathbf{x})\big)\right|\mathrm{d}\lambda_{\mathtt{n}}(\mathbf{x}) < +\infty$$

y, de la arbitrariedad al tomar los $\mathtt{n}-$índices, $\hat{f} \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

Para probar la continuidad de $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ considérese $\mathrm{Graf}\mathscr{F}_{\mathbf{rd}} = \{(f,\hat{f}) : \ f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})\}$. Si se prueba que este subconjunto es cerrado en la topología producto, se podrá aplicar el teorema del grafo cerrado para obtener que $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ es continua. Sea, pues, $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ y $\mathscr{S}-$convergente a g, entonces, para todo $\mathtt{n}-$índice α y todo polinomio P

$$\mathrm{P}\cdot\mathtt{D}^{\alpha}(f_m - g) \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} 0. \tag{4.4.3}$$

De aquí que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |f_m - g| \, \mathrm{d}\lambda \leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left| (f_m - g)(\mathbf{x}) \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{\mathsf{n}} \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{-\mathsf{n}} \mathrm{d}\mathbf{x} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

es decir, $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})} g$. Con lo cual,

$$\left| \widehat{f_m}(\xi) - \hat{g}(\xi) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} (f_m - g)(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\xi} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \|f_m - g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}},$$

que se traduce en $\widehat{f_m} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{unif.}} \hat{g}$.

Finalmente, si se supone $\mathscr{S} - \text{lím}\, \widehat{f_m} = h$, lo anterior prueba que $h = \hat{g}$. De la arbitrariedad al tomar la sucesión convergente en $\text{Graf}\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ se obtiene que dicho subconjunto del espacio producto $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \times \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ es cerrado. □

4.4.2. Transformación inversa

La demostración del siguiente lema también es un ejemplo más de cómputo de la transformada de Fourier de una función.

Lema 4.4.12 *Sea la función $\phi_{\mathsf{n}} : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ definida mediante la fórmula*

$$\phi_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right).$$

Entonces ϕ_{n} pertence a la clase de Schwartz y vale

$$\widehat{\phi_{\mathsf{n}}} = \phi_{\mathsf{n}} \quad y \quad \phi_{\mathsf{n}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \widehat{\phi_{\mathsf{n}}} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Demostración. Como, dado un $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathsf{n}}$ cualquiera, se tiene $\mathtt{D}^\alpha \phi_{\mathsf{n}} = \mathrm{P}_\alpha \phi_{\mathsf{n}}$ con P_α un polinomio, basta probar que ϕ_{n} verifica la hipótesis III del **Teorema** 4.2.8 sólo para $\alpha = \mathbf{0}$ para asegurar $\phi_{\mathsf{n}} \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. De inmediato, puesto que

$$\lim_{1\leq r\to\infty} \left(1 + r^2\right)^n e^{-r^2/2} \leq 2^n \lim_{r\to\infty} r^{2n} e^{-r^2} = n!\, 2^n \lim_{r\to\infty} \frac{\left(r^2\right)^n / n!}{e^{r^2}} = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

se prueba lo apuntado en la afirmación anterior.

A continuación, defínase $\phi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por $\phi_1(r) = e^{-r^2/2}$. Un breve cálculo muestra que ϕ_1 verifica la ecuación diferencial

$$y'(r) + r y(r) = 0 \quad (r \in \mathbb{R}). \tag{4.4.4}$$

Tomando transformadas de Fourier en (4.4.4) se obtiene

$$0 = -i\mathscr{F}\{\phi_1' + \mathrm{id}\cdot\phi_1\} = \mathrm{id}\cdot\widehat{\phi_1} + \widehat{\phi_1}',$$

es decir, $\widehat{\phi_1}$ también verifica (4.4.4). Así, ϕ_1 y $\widehat{\phi_1}$ son la misma función salvo una constante (que multiplica), donde vale $\phi_1(\mathbf{0}) = 1$ y

$$\widehat{\phi_1}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_1} \int_{\mathbb{R}} \phi_1 \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2/2} \, \mathrm{d}r = 1,$$

como muestra el **Ejemplo** C.3.7. Entonces, en realidad, $\phi_1 = \widehat{\phi_1}$ y, por tanto,

$$\phi_\mathsf{n}(\mathbf{x}) = \phi_1(x_1)\cdots\phi_1(x_\mathsf{n}) = \widehat{\phi_1}(x_1)\cdots\widehat{\phi_1}(x_\mathsf{n}) = \widehat{\phi_\mathsf{n}}(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathsf{n}.$$

Es decir, $\phi_\mathsf{n} = \widehat{\phi_\mathsf{n}}$ y, entonces,

$$\phi_\mathsf{n}(\mathbf{0}) = \widehat{\phi_\mathsf{n}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \phi_\mathsf{n}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \widehat{\phi_\mathsf{n}}\, \mathrm{d}\lambda.$$

$\square$

Lema 4.4.13 *Si* $f,\, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathsf{n})$, *entonces*

$$\frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f} g\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{y})\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\pi_\mathsf{n}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\pi_\mathsf{n}} = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f\hat{g}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Resulta de aplicar el teorema de Fubini.

Estos dos últimos lemas son la clave para probar el siguiente resultado, llamado el *teorema de inversión* de la transformada de Fourier.

Teorema 4.4.14 *Si* $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^\mathsf{n})$, *entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f} e_{i\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}(\xi)\, e^{i\mathbf{x}\cdot\xi}\, \mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\xi) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathsf{n}. \tag{4.4.5}$$

Además, la transformación de Fourier $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ es una aplicación lineal, continua —ya probado en **Teorema** 4.3.9—, *biyectiva, de periodo* 4 *y cuya inversa es también continua.*

Demostración. Sean $\phi,\, f \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^\mathsf{n})$ cualesquiera y $r > 0$. Vale la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f(\mathbf{y}/r)\,\hat{\phi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f(\mathbf{x})\, r^\mathsf{n}\hat{\phi}(r\,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f(\mathbf{x})\,\mathscr{F}\{\phi(\bullet/r)\}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}(\xi)\,\phi(\xi/r)\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\xi).\end{aligned}$$

La primera igualdad se obtiene con cambio de variables; la segunda, aplicando la propiedad de dilatación —ver **Teorema** C.4.9—; la tercera, aplicando el **Lema** 4.4.13. Dado que las funciones de $\mathrm{S}(\mathbb{R}^\mathsf{n})$ son integrables en $\mathbb{R}^\mathsf{n}$ es inmediato comprobar que se verifican las hipótesis de la convergencia dominada de Lebesgue —**Teorema** C.3.4—, luego:

$$\frac{f(\mathbf{0})}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{\phi}\, \mathrm{d}\lambda = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} f(\mathbf{y}/r)\,\hat{\phi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\mathbf{y}) = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}(\xi)\,\phi(\xi/r)\,\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\xi) = \frac{\phi(\mathbf{0})}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}\, \mathrm{d}\lambda$$

En particular, tomando en la igualdad anterior $\phi = \phi_\mathsf{n}$ la función del **Lema** 4.4.13, la cual verifica $\phi_\mathsf{n}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \widehat{\phi_\mathsf{n}}\, \mathrm{d}\lambda/\pi_\mathsf{n}$, se tiene

$$f(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}\, \mathrm{d}\lambda, \tag{4.4.6}$$

que es la fórmula de inversión (4.4.5) evaluada en $\mathbf{0}$. El caso general (4.4.5) se deduce de (4.4.6) tomando traslaciones —cualquier traslación de f sigue viviendo en $\mathrm{S}(\mathbb{R}^\mathsf{n})$—:

$$f(\mathbf{x}) = (\tau_{-\mathbf{x}}f)(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \mathscr{F}\{\tau_{-\mathbf{x}}f\}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi_\mathsf{n}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f} e_{i\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^\mathsf{n}} \hat{f}(\xi)\, e^{i\mathbf{x}\cdot\xi}\mathrm{d}\lambda_\mathsf{n}(\xi) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathsf{n}$$

Ahora, la propia fórmula (4.4.5) muestra que $\ker \mathscr{F}_{\mathbf{rd}} = \{f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) |\, \hat{f} = 0\} = \{0\}$, luego $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ es inyectiva. Sea $h \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ arbitraria; para probar la suprayectividad de $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ calcúlese primero:

$$\mathscr{F}^2\{h\}(\mathbf{x}) = \mathscr{F}\{\hat{h}\}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \hat{f}(\xi)\, e^{i(-\mathbf{x})\cdot\xi} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\xi) = h(-\mathbf{x}) = (\iota_{\mathbf{0}} h)(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$$

Entonces $\mathscr{F}\{\mathscr{F}^3\{g\}\} = \mathscr{F}^4\{g\} = \mathscr{F}^2\{\iota_{\mathbf{0}} g\} = \iota_{\mathbf{0}}\iota_{\mathbf{0}} g = g$ para toda $g \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, lo que prueba que $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ es suprayectiva y, de paso, que tiene periodo 4 e inversa $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}^{-1} = \mathscr{F}_{\mathbf{rd}}^{3}$ —inversa que es continua por ser composición de aplicaciones continuas—. □

Definición 4.4.15 La transformada de Fourier inversa de $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ es la función

$$\check{g}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} g(\xi)\, e^{i\mathbf{x}\cdot\xi} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\xi) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}).$$

4.5. Distribuciones temperadas

4.5.1. El dual topológico de $(\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}), \mathscr{S})$

Lema 4.5.16 *La aplicación idéntica de* $\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *en* $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ —que se va a denotar por $\mathtt{1}^{\mathbf{rd}}_{\mathbf{c}}$— *es continua. Esta continuidad debe entenderse, evidentemente, con relación a las topologías* $\mathscr{D}$ *para* $\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *y* $\mathscr{S}$ *para* $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$.

Demostración. Para verlo, lo más ordenado es probar que, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$, la restricción $\mathtt{1}^{\mathbf{rd}}_{\mathbf{c}}|_{\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})}$ es continua bajo el par $\mathscr{E}^K - \mathscr{S}$. Por lo tanto, sea $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ con $\mathscr{E} - \lim \phi_m = 0$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica lo siguiente:

$$s_n(\phi_m) \leq \max_{\mathbf{x}\in K} |\mathbf{x}|^n \cdot \max\left\{|\mathtt{D}^{\alpha}\phi_m(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in K,\ |\alpha| \leq n\right\} \leq \max_{\mathbf{x}\in K} |\mathbf{x}|^n \cdot p_{n_1}(\phi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

donde $n_1 \in \mathbb{N}$, que depende de K y n, verifica $K \subseteq \mathtt{K}_{n_1}$ y $n_1 \geq n$. □

Definición 4.5.17 El conjunto de todas las formas lineales continuas bajo el par $\mathscr{S} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$ y definidas sobre $\mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ se denota por $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$.

Nota. Junto con las operaciones habituales suma de formas lineales y multiplicación por escalares complejos $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. Rutinario de probar.

Teorema 4.5.18 *Sea* $\mathrm{M} : \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una forma lineal. Se da la siguiente caracterización:* $\mathrm{M} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *si, y sólo si, existen* $n \in \mathbb{N}$ *y* $c > 0$ *tales que*

$$|\mathrm{M}(f)| \leq c \cdot s_n(f) \quad \forall\, f \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}).$$

Se obvia la demostración porque es exactamente la misma que la del **Teorema 2.2.24**.

Teorema 4.5.19 *El espacio* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *se identifica con cierto subespacio de* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. *Esta identificación debe entenderse en el sentido de que la aplicación de restricción natural*

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \ni \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}|_{\mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})} \tag{4.5.7}$$

define un isomorfismo lineal entre $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *y su imagen.*

Demostración. La aplicación del enunciado es lineal obviamente. Además, dada $\mathrm{N} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\mathrm{N}|_{\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n)}(\phi) = \left(\mathrm{N} \circ \mathtt{1}_\mathbf{c}^\mathbf{rd}\right)(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n);$$

el lema anterior asegura que $\mathtt{1}_\mathbf{c}^\mathbf{rd}$ es continua, luego $\mathrm{N}|_{\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathrm{N} \circ \mathtt{1}_\mathbf{c}^\mathbf{rd} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. De la arbitrariedad al tomar N se deduce que la imagen de (4.5.7) está en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ahora, un breve cálculo, usando la densidad de $\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\mathtt{S}(\mathbb{R}^n)$ bajo $\mathscr{S}$ —parte **d** del **Teorema 4.3.9**—, muestra

$$\mathrm{M}|_{\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \mathrm{N}|_{\mathtt{C}_\mathbf{c}^\infty(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \mathrm{M} = \mathrm{N} \quad \text{para cada par } \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

y esto es: (4.5.7) es inyectiva. Con lo cual, la aplicación (4.5.7) define un isomorfismo lineal entre $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y su imagen. □

Definición 4.5.20 Una *distribución temperada* es precisamente un elemento de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ que admite extensión continua a toda la clase de Schwartz. El conjunto de todas las distribuciones temperadas se denota por $\mathscr{D}'_\mathbf{t}(\mathbb{R}^n)$.

Nota. Es directo comprobar que las operaciones de la **Definición 2.4.34** son cerradas en $\mathscr{D}'_\mathbf{t}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\mathscr{D}'_\mathbf{t}(\mathbb{R}^n)$ junto con dichas operaciones es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial.

Nota. En virtud del teorema anterior, resulta natural identificar $\mathrm{M} \circ \mathtt{1}_\mathbf{c}^\mathbf{rd}$ y M, para cada forma lineal $\mathrm{M} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, por lo que es costumbre decir que las distribuciones temperadas "son" precisamente los elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 4.5.21 Recuérdese la distribución $\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}$ del **Ejemplo 2.4.48**. Dada $\phi \in \mathtt{S}(\mathbb{R})$ cualquiera, se afirma que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \mathrm{d}x < +\infty.$$

Por un lado, atendiendo a (2.4.12) se tiene

$$\int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \mathrm{d}x < +\infty,$$

y es inmediato comprobar que el valor de esta integral en valor absoluto es menor o igual que el valor $2s_1(\phi)$. Por otro lado, se verifica

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{x\phi(x) - x\phi(-x)}{x^2} \mathrm{d}x \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|x\phi(x)| + |-x\phi(-x)|}{x^2} \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \left(\sup_{t \geq 1} |t\phi(t)| + \sup_{t \leq -1} |t\phi(t)| \right) \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq 2s_1(\phi).$$

Con lo cual,

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| \mathrm{d}x \leq 4s_1(\phi) < +\infty \tag{4.5.8}$$

Entonces, la forma lineal

$$\mathtt{S}(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} \mathrm{d}x \tag{4.5.9}$$

está bien definida y la desigualdad (4.5.8) prueba que es continua —**Teorema 4.5.18**—. Por lo tanto, (4.5.9) es una extensión a $\mathtt{S}(\mathbb{R})$ continua de la distribución valor principal de $1/\mathrm{id}$, luego

$$\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}} \in \mathscr{D}'_\mathbf{t}(\mathbb{R}).$$

Distribuciones temperadas definidas por funciones

Proposición 4.5.22 *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ con $p \geq 1$ (finito), entonces*

$$\mathrm{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \ni \phi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f\phi \, \mathrm{d}\lambda \tag{4.5.10}$$

es una distribución temperada.

Demostración. Sea $\phi \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ en toda la demostración.

En primer lugar, si $p = 1$, se tiene:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f\phi \, \mathrm{d}\lambda\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |f| \, \mathrm{d}\lambda\right) \cdot \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left|\phi(\mathbf{x})\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |f| \, \mathrm{d}\lambda\right) s_1(\phi),$$

es decir, (4.5.10) está bien definida y es continua —**Teorema 4.5.18**—.

En segundo lugar, si $p > 1$ y q es tal que $1/p + 1/q = 1$ (el conjugado de p), aplicando la desigualdad de Hölder —**Teorema C.3.8**— se obtiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f\phi \, \mathrm{d}\lambda\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |\phi|^q \, \mathrm{d}\lambda\right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^{-qk} \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/q} \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left|\left(1+|\mathbf{t}|^2\right)^k \phi(\mathbf{t})\right| < +\infty\end{aligned}$$

si $k \in \mathbb{N}$ verifica $\mathsf{n}+1 \leq 2qk$. Como $\left(1+|\mathrm{id}|^2\right)^k$ es un polinomio, evidentemente es de la forma $\sum a_\alpha \mathrm{id}^\alpha$ (suma finita), luego **a** del **Teorema 4.3.9**, **Teorema 4.5.18** y la desigualdad obtenida prueban que (4.5.10) es continua. □

Definición 4.5.23 Una función de *lento crecimiento* es una función $f : \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \longrightarrow \mathbb{C}$ para la que existen constantes $c > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$|f(\mathbf{x})| \leq c\left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^n \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}},$$

es decir, f está mayorada en valor absoluto por algún polinomio. El conjunto de las funciones de lento crecimiento se denota por $\mathrm{S}_{\mathrm{li}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ —del inglés *slowly increasing function*—.

Proposición 4.5.24 *Si $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{li}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, entonces* (4.5.10) *es una distribución temperada.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$. Tras la demostración de la proposición anterior, la prueba de ésta se desprende de la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f\phi \, \mathrm{d}\lambda\right| \leq c\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left|\left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^n \phi(\mathbf{x})\right| \mathrm{d}\mathbf{x} \leq c \sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left|\left(1+|\mathbf{t}|^2\right)^{n+k} \phi(\mathbf{t})\right| \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left(1+|\mathbf{x}|^2\right)^{-k} \mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty$$

si $k \in \mathbb{N}$ verifica $2k \geq \mathsf{n}+1$, donde $c > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ son las constantes de la definición de función de lento crecimiento. □

Definición 4.5.25 Sea $p \geq 1$ finito. Tanto si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ como si $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{li}}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$, se llama M_f a la forma lineal

$$\mathrm{S}(\mathbb{R}^{\mathsf{n}}) \ni \phi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f\phi \, \mathrm{d}\lambda.$$

4.5.2. Las inclusiones $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$

La primera inclusión la da el **Teorema 4.5.19**; la segunda, el siguiente

Teorema 4.5.26 *Toda distribución sobre $\mathbb{R}^n$ de soporte compacto es temperada.*

Demostración. Dada $T \in \mathscr{D}'_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^n)$, sea $\phi \in C^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^n)$ verificando $\phi|_U = 1$ para un abierto U de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\mathrm{sop}(T)$. Esto es factible porque $\mathrm{sop}(T)$ es compacto. Defínase ahora la forma lineal $T_{\mathrm{ext}} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$T_{\mathrm{ext}}(f) = T(\phi f).$$

Pruébese que T_{ext} es una extensión continua a $S(\mathbb{R}^n)$ de T.

Si $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ es $\mathscr{S}$−convergente a 0, es claro que $\mathrm{sop}(\phi f) \subset \mathrm{sop}(\phi)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y también se tiene

$$f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{S}} 0 \overset{\mathbf{a)}}{\Longrightarrow} \phi f_m \xrightarrow[m\to\infty]{\mathscr{D}} 0 \overset{\mathbf{b)}}{\Longrightarrow} T_{\mathrm{ext}}(f_m) = T(\phi f_m) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathbb{C}_{|\bullet|}} 0.$$

La fórmula de Leibniz muestra **a**, mientras que **b** se debe a que T es una distribución. Entonces, como $\mathscr{S}$ está generada por una métrica invariante, el **Teorema 1.1.22** asegura que T_{ext} es continua bajo el par $\mathscr{S} - \mathbb{C}_{|\bullet|}$.

Puesto que se verifica, además, $T_{\mathrm{ext}}(\psi) = T(\phi\psi) = (\phi\cdot T)(\psi) = T(\psi)$ para toda función $\psi \in C^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^n)$ —la última igualdad debida al punto **c** del **Teorema 2.5.59**—, T_{ext} es extensión de la distribución de soporte compacto T. □

Observación 4.5.27 La inclusión $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ es estricta: un polinomio no nulo definido en $\mathbb{R}^n$ no tiene soporte compacto.

Observación 4.5.28 La inclusión $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ es estricta. Muestra de ello es el

Ejemplo 4.5.29 Sea la función $f(\mathbf{x}) = e^{|\mathbf{x}|}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$; evidentemente f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces supóngase que existe $M \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $M|_{C^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^n)} = T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Por una parte, el **Teorema 4.5.18** asegura la existencia de constantes finitas $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|M(\varphi)| \leq c\cdot s_n(\varphi) \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

A continuación, considérese una función $\psi \in C^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^n)$ verificando

$$\psi \geq 0, \quad \mathrm{sop}(\psi) \subseteq \overline{B}(\mathbf{0}, 1), \quad \int_{\frac{1}{2}\leq|\mathbf{x}|\leq 1} \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1.$$

Con ella se construye la sucesión $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dada por $\psi_m(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}/m)$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$, la cual verifica

$$|M(\psi_m)| \leq c\cdot s_n(\psi_m) \leq c \max_{\mathbf{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},\, m),\ |\alpha|\leq n,\ |\beta|\leq n} |\mathbf{x}|^{|\beta|} \left|(D^\alpha\psi)(\mathbf{x}/m)\, m^{-|\alpha|}\right| \leq$$
$$\leq c\cdot m^n \max_{\mathbf{x}\in\overline{B}(\mathbf{0},\, 1),\ |\alpha|\leq n} |D^\alpha\psi(\mathbf{x})| \leq c\cdot m^n s_n(\psi) \quad \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte se tiene, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$|M(\psi_m)| = \int_{|\mathbf{x}|\leq m} e^{|\mathbf{x}|}\psi_m(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geq \int_{\frac{m}{2}\leq|\mathbf{x}|\leq m} e^{|\mathbf{x}|}\psi_m(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geq$$
$$\geq e^{m/2}\int_{\frac{m}{2}\leq|\mathbf{x}|\leq m} \psi_m(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = e^{m/2}m^{-n}\int_{\frac{1}{2}\leq|\mathbf{x}|\leq 1} \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = e^{m/2}m^{-n}.$$

Operando con las dos desigualdades obtenidas se llega a que

$$e^{m/2} \leq c\, s_n(\psi)\, m^{\mathtt{n}+n} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

lo cual es falso para m suficientemente grande. Con lo cual, $\mathrm{T}_f \notin \mathscr{D}'_{\mathbf{t}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

4.6. Transformada de Fourier distribucional

Definición 4.6.30 Sean α un $\mathtt{n}-$índice, P un polinomio y $g \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, entonces las formas lineales

$$\phi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} u(\mathtt{D}^{\alpha}\phi), \quad \phi \longmapsto u(\mathrm{P}\phi), \quad \phi \longmapsto u(g\phi) \quad [\phi \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})]$$

son denotadas, respectivamente, por $\mathtt{D}^{\alpha}u$, $\mathrm{P}u$, gu.

Teorema 4.6.31 *En las condiciones de la* **Definición 4.6.30**, *las formlas lineales* $\mathtt{D}^{\alpha}u$, $\mathrm{P}u$ *y* gu *son elementos de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$.

Consecuencia inmediata de **a** de **Teorema 4.4.11**.

Definición 4.6.32 Dada $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, la *transformada de Fourier distribucional* de u es la forma lineal $\mathscr{F}\{u\} : \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por la fórmula

$$\mathscr{F}\{u\}(\phi) = u(\hat{\phi}),$$

la cual también se denota simplemente por $\hat{u}$. La *transformación de Fourier distribucional* es, pues,

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \ni u \longmapsto \hat{u}.$$

Teorema 4.6.33 *Si* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, *su transformada de Fourier* $\hat{u}$ *está bien definida y extiende la definición de transformada de Fourier ususal* —en el sentido de que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ vale $\mathscr{F}\{\mathrm{M}_f\} = \mathrm{M}_{\hat{f}}$—.

Demostración. En primer lugar, si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, se verifica

$$\mathscr{F}\{\mathrm{M}_f\}(\phi) = \mathrm{M}_f(\hat{\phi}) = \frac{1}{\pi_{\mathtt{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}} f\hat{\phi}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\pi_{\mathtt{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathtt{n}}} \hat{f}\phi\, \mathrm{d}\lambda = \mathrm{M}_{\hat{f}}(\phi) \quad \forall\, \phi \in \mathtt{S}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$$

y tiene sentido considerar $\mathrm{M}_{\hat{f}}$ puesto que $\hat{f}$ es acotada (lema de Riemann-Lebesgue). La tercera igualdad se da gracias al **Lema 4.4.13** y el resto son definiciones.

En segundo lugar, puesto que $\mathscr{F}_{\mathbf{rd}}$ es lineal y continua bajo el par $\mathscr{S} - \mathscr{S}$ —parte **c** del **Teorema 4.4.11**— y $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, $\hat{u}$ pertenece a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ por ser composición de aplicaciones continuas. □

Como $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) \hookleftarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$, este último teorema da todo el sentido a la siguiente

Definición 4.6.34 La *transformada de Fourier de* $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'_{\mathbf{t}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}})$ es la distribución (temperada)

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\mathrm{T}\} : \mathtt{C}^{\infty}_{\mathbf{c}}(\mathbb{R}^{\mathtt{n}}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \mathrm{T}(\hat{\phi}), \end{aligned}$$

que también se denota por $\hat{\mathrm{T}}$.

Ejemplo 4.6.35 La delta de Dirac δ es de soporte compacto, entonces es una distribución temperada. Dada una función de testeo ϕ se tiene

$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(\mathbf{0}) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \phi \, \mathrm{d}\lambda = \left(\frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}}, \phi \right).$$

Además, como los polinomios "son" distribuciones temperadas, se puede calcular lo siguiente:

$$\mathscr{F}\{1/\pi_{\mathsf{n}}\}(\phi) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \hat{1}(\phi) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} (1, \hat{\phi}) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \hat{\phi} \, \mathrm{d}\lambda = \phi(\mathbf{0}) = \delta(\phi).$$

En conclusión,

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \quad \text{y} \quad \hat{1} = \pi_{\mathsf{n}} \cdot \delta.$$

Ejemplo 4.6.36 Compútese la transformada de Fourier de $\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}$. Para ello, sea ϕ una función de testeo.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}}(\phi) = \mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}(\hat{\phi}) &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\phi}(\xi) - \hat{\phi}(-\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-i\xi x} \frac{\mathrm{d}x}{\pi_1} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{i\xi x} \frac{\mathrm{d}x}{\pi_1} \right) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \\
&= -\frac{2i}{\pi_1} \int_{\xi \geq 0} \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x} - e^{-i\xi x}}{2i} \frac{\phi(x)}{\xi} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\xi = \\
&= -\frac{2i}{\pi_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi \right) \phi(x) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En la última igualdad se ha aplicado el teorema de Fubini. Además, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x),$$

donde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función presentada en el **Ejemplo 2.4.43** —para calcular esta integral impropia consultar **[6, Prop 8.1.5]**—. Con lo cual,

$$\widehat{\mathrm{VP}\frac{1}{\mathrm{id}}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{T}_{\mathrm{sgn}}.$$

Finalmente, es posible enunciar un análogo del **Teorema 4.4.11** para la transformación de Fourier distribucional, cuya demostración se deduce del mismo teorema y de la definición de transformada de Fourier distribucional:

Teorema 4.6.37

a) *La transformación de Fourier distribucional es un isomorfismo lineal de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *en sí mismo.*

b) *Siendo* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *y* P *un polinomio se tiene*

$$\mathscr{F}\{\mathrm{P}(\mathtt{D})u\} = \mathrm{P}(i \cdot \bullet)\hat{u}.$$

Ejemplo 4.6.38 Hallar una solución de la ecuación $u'' - u = \delta$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Para ello, se intenta tomando transformadas de Fourier en la ecuación:

$$\mathrm{P}(i \cdot \bullet)\,\hat{u} = \mathscr{F}\{u'' - u\} = \hat{\delta} = \frac{1}{\pi_1},$$

donde P es el polinomio $w^2 - 1$ ($w \in \mathbb{R}$). Entonces se tiene, para cada $\phi \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbf{c}}(\mathbb{R})$,

$$\hat{u}(\phi) = -\frac{1}{\pi_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi_1}\frac{2}{1+\xi^2}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

donde $f(x) = e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) —la función f del **Ejemplo** 4.1.3—. Como $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, el **Teorema** 4.6.33 y la parte **a** del **Teorema** 4.6.37 dan

$$u = \mathrm{T}_g, \quad g(x) = \mathscr{F}^{-1}\{-\hat{f}/2\}(x) = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

El **Ejemplo** 2.4.43 aporta la comprobación de que T_g es una solución de la ecuación.

APÉNDICE A

Más sobre espacios vectoriales topológicos

Este primer apéndice está dedicado a complementar algunos resultados sobre espacios vectoriales topológicos, los cuales son presentados en el **Capítulo 1**. En algunos casos se esboza las demostraciones, si bien en general se refiere al texto **[5, Chapter 1]**.

A.1. Bases de entornos en un espacio vectorial topológico

El siguiente resultado elemental se utilizó en la sección 1.1.3.

Proposición A.1.1 *Si $W \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$, entonces existe un entorno $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ simétrico* —revisar la **Definición** 1.1.6— *que satisface $U + U \subset W$.*

Demostración. Para ver esto obsérvese que $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ y que la suma es continua, por tanto existen conjuntos V_1 y V_2 en $\mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ tales que $V_1+V_2 \subset W$. Si $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$, entonces U tiene las propiedades requeridas. Compruébese:

- $\mathbf{0} \in U$ y U es abierto por ser intersección finita de abiertos, es decir, $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$;
- es obvio que U es simétrico y que $U \subset V_1$, $U \subset V_2$, luego
- $U+U \subset V_1+V_2 \subset W$.

□

Las siguientes afirmaciones, usadas con frecuencia en las demostraciones de los teoremas, son sencillas de probar; pueden encontrarse en **[5, Th 1.13]**.

Proposición A.1.2 *Se verifica las siguientes afirmaciones.*

a) *Si $A \subset X$, entonces $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})} (A+V)$.*

b) *Si $A, B \subset X$, entonces $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$.*

c) *Si Y es un subespacio propio de X, también lo es $\overline{Y}$.*

d) *Si C es un subconjunto convexo de X, también lo son $\overline{C}$ y $\mathring{C}$.*

e) *Si B es un subconjunto equilibrado de X, también lo es $\overline{B}$; si, además, $\mathbf{0} \in \mathring{B}$, entonces $\mathring{B}$ es equilibrado.*

f) *Si E es un subconjunto acotado de X, también lo es $\overline{E}$.*

Demostración del Teorema 1.1.8. **a)** Sea $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$. Como la multiplicación por escalares es continua, existen $\delta > 0$ y $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ tales que $\alpha V \subset U$ siempre que $|\alpha| < \delta$. Sea ahora $W = \cup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$, entonces:

- por ser unión de abiertos W es abierto y $\mathbf{0} \in W$ evidentemente;
- es claro que, si $\beta \in \mathbb{C}$ es tal que $|\beta| \leq 1$, entonces $|\beta\alpha| < \delta$; así, si $\mathbf{w} \in W$, se verifica $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u}$ para algunos $\mathbf{u} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| < \delta$, por lo que $\beta\mathbf{w} = \beta\alpha\mathbf{u} \in \beta\alpha V \subset W$; es decir, W es equilibrado;
- por supuesto, $W \subset U$.

b) Sea $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ convexo. Sean también $A = \cap_{|\alpha|=1} \alpha U$ y $U \supset W \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ equilibrado (aplicando **a**). Como W es equilibrado, $\alpha^{-1}W = W$ cuando $\alpha \in \mathbb{C}$ verifica $|\alpha| = 1$, por tanto, $W \subset \alpha U$ $\big(|\alpha| = 1\big)$. Entonces, $W \subset A$, lo que implica que $\mathring{A} \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$, donde $\mathring{A} \subset U$ (pues U es uno de los términos de la intersección de subconjuntos de A).

Por ser una intersección de conjuntos convexos, A es convexo, luego también lo es $\mathring{A}$. Queda probar que $\mathring{A}$ es equilibrado, pero para ello basta probar que A es equilibrado —aplicando la afirmación **e** del **Proposición** A.1.2 y aplicando $\mathbf{0} \in \mathring{A}$—. Tomemos $0 \leq r \leq 1$ y $\beta \in \mathbb{C}$ con $|\beta| = 1$ (es decir, $r\beta \in \mathbb{C}$ verifica $|r\beta| \leq 1$), entonces

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U;$$

como αU es un subconjunto convexo que contiene a $\mathbf{0}$, se tiene $r\alpha U \subset \alpha U$ $\big(|\alpha| = 1\big)$, luego $r\beta A \subset A$, lo que completa la demostración. $\square$

Proposición A.1.3 *Si Y es un subespacio propio de X, se verifica $\mathring{Y} = \emptyset$.*

Demostración. Razónese por reducción al absurdo suponiendo $\mathring{Y} \neq \emptyset$. Entonces sea $\mathbf{x} \in \mathring{Y}$. Como $\mathring{Y}$ es abierto, existe $U \in \tau$ tal que $\mathbf{x} \in U \subset \mathring{Y} \subset Y$. Así, $U - \mathbf{x} \in \tau$ y $\mathbf{0} \in U - \mathbf{x}$. Además, por ser Y subespacio, $U - \mathbf{x} \subset Y$. Por un lado, como $Y \subsetneq X$, existe $\mathbf{v} \in X \setminus Y$ (luego $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). Por otro lado, la aplicación $\mathrm{M}_\mathbf{v} : \mathbb{C} \longrightarrow X$, dada por $\mathrm{M}_\mathbf{v}(\alpha) = \alpha\mathbf{v}$, es continua. Ahora, como $\mathbf{0} \in U - \mathbf{x}$, entonces $0 \in \mathrm{M}_\mathbf{v}^{-1}(U - \mathbf{x}) = \{\alpha \in \mathbb{C} |\ \alpha\mathbf{v} \in U - \mathbf{x}\}$, que es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y por tanto contiene un escalar $\beta \neq 0$. Con lo cual, $\beta\mathbf{v} \in U - \mathbf{x} \subset Y$, lo que implica la contradicción $\mathbf{v} \in \beta^{-1}Y \subset Y$. $\square$

Proposición A.1.4 *Ningún subespacio $Y \neq \{\mathbf{0}\}$ de X puede ser acotado.*

Demostración. Tómese $\mathbf{x} \in Y \setminus \{\mathbf{0}\}$, con Y subespacio no trivial, claro, y sea el subconjunto $S = \{n\mathbf{x}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por la propiedad de Hausdorff existe $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ tal que $\mathbf{x} \notin V$, por tanto, $n\mathbf{x} \notin nV$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto es: $S \not\subset nV$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, S es no acotado. Entonces, como $S \subset Y$, Y es no acotado. $\square$

A.2. Espacios de dimensión finita

Proposición A.2.5 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente compacto. Entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. El origen de X tiene un entorno V cuya clausura es compacta. Por las partes **b** y **c** del **Teorema** 1.1.11, V es acotado y $\{2^{-n}V\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para X. La compacidad de $\overline{V}$ prueba que existen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X$ (para algún natural $m > 1$) tales que

$$\overline{V} \subset \left(\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}V\right) \cup \cdots \cup \left(\mathbf{x}_m + \frac{1}{2}V\right).$$

Sea $Y = \mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$, entonces $\dim(Y) \leq m$ e Y es un subespacio cerrado de X. Dado que $V \subset Y + \frac{1}{2}V$, la propiedad de subespacio implica que $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$ y, por tanto,

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Continuando inductivamente este razonamiento se prueba que $V \subset Y + 2^{-n}V \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $V \subset \cap_{n=1}^{\infty}(Y + 2^{-n}V) = \overline{Y}$; esta igualdad se asegura aplicando la afirmación **a** de la **Proposición A.1.2**. Pero $\overline{Y} = Y$, entonces $V \subset Y$, luego $nV \subset nY = Y \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\cup_{n=1}^{\infty} nV \subset Y$. Pero es que $X = \cup_{n=1}^{\infty} nV$ aplicando la parte **a** del **Teorema 1.1.11**, con lo cual, $X = Y$ y $\dim(X) \leq m$. □

Demostración del Teorema 1.1.13. El origen de X tiene un entorno acotado, llámeselo V. La afirmación **f** de la **Proposición A.1.2** asegura que $\overline{V}$ es también acotado, luego es compacto. Por tanto, todo (X, τ) localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel es localmente compacto. En conclusión (proposición anterior), X tiene dimensión finita. □

A.3. Aplicaciones lineales

Proposición A.3.6 *Sean X e Y dos $\mathbb{C}-$espacios vectoriales. Si $\mathrm{T}: X \longrightarrow Y$ es lineal y $C \subset X$ es un subconjunto convexo (equilibrado), también lo es $\mathrm{T}(C)$. Si $E \subset Y$ es un conjunto convexo (equilibrado), también lo es $\mathrm{T}^{-1}(E)$.*

Demostración. En toda la demostración, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$. Si $C \subset X$ es convexo, directamente se tiene

$$\lambda \mathrm{T}(C) + (1-\lambda)\mathrm{T}(C) = \mathrm{T}\big(\lambda C + (1-\lambda)C\big) \subset \mathrm{T}(C).$$

Si $C \subset X$ es equilibrado, $\alpha \mathrm{T}(C) = \mathrm{T}(\alpha C) \subset \mathrm{T}(C)$.

Ahora sea $E \subset Y$ convexo y tomemos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{T}^{-1}(E)$, es decir, $\mathrm{T}(\mathbf{x}), \mathrm{T}(\mathbf{y}) \in E$; aplicando la linealidad de T y la convexidad de E se tiene $\mathrm{T}\big(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) = \lambda\mathrm{T}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\mathrm{T}(\mathbf{y}) \in E$ y esto es $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \mathrm{T}^{-1}(E)$. Finalmente, si $E \subset Y$ es equilibrado, $\mathrm{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathrm{T}(\mathbf{x}) \in E$ para todo $\mathbf{x} \in \mathrm{T}^{-1}(E)$, luego $\alpha\mathrm{T}^{-1}(E) \subset \mathrm{T}^{-1}(E)$. □

Demostración del Teorema 1.1.21. $\boxed{\textbf{I} \Rightarrow \textbf{II}}$ Como $\ker(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^{-1}(\{0\})$ y $\{0\}$ es cerrado de $\mathbb{C}_{|\bullet|}$, $\ker(\mathrm{T})$ es cerrado por ser antiimagen de un cerrado por una aplicación continua.

$\boxed{\textbf{II} \Rightarrow \textbf{III}}$ Por hipótesis, $\ker(\mathrm{T}) \neq X$, luego $\overline{\ker(\mathrm{T})} = \ker(\mathrm{T}) \neq X$.

$\boxed{\textbf{III} \Rightarrow \textbf{IV}}$ Si se supone que $\ker(\mathrm{T})$ no es denso, entonces

$$U_0 \cap \ker(\mathrm{T}) = \emptyset \text{ para algún } U_0 \in \tau.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $U_0 = \mathbf{x} + V$ para algunos $\mathbf{x} \in X$ y $V \in \mathscr{N}_{\tau}^{e}(\mathbf{0})$ —aplicando el **Teorema 1.1.8**—. Así

$$(\mathbf{x} + V) \cap \ker(\mathrm{T}) = \emptyset. \tag{A.3.1}$$

Por la **Proposición A.3.6**, $\mathrm{T}(V)$ es equilibrado. Ahora bien, si $\mathrm{T}(V)$ es acotado, se verifica **IV**. Si no, $\mathrm{T}(V) = \mathbb{C}$. Pruébese esta afirmación:

- Como $\mathrm{T}(V) \subset \mathbb{C}$ es no acotado, existe $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $\lim_{n\to\infty} |\mathrm{T}(v_n)| = +\infty$.

- Sea $n \in \mathbb{N}$ fijado arbitrariamente tal que $|\mathrm{T}(v_n)| \neq 0$ y considérese el disco cerrado
$$C_n := \overline{\mathrm{D}}\big(0,\ |\mathrm{T}(v_n)|\big) = \big\{z \in \mathbb{C}:\ |z| \leq |\mathrm{T}(v_n)|\big\}.$$
Como cualquier punto de C_n es de la forma $\gamma \mathrm{T}(v_n)$ con $\gamma \in \mathbb{C}$ verificando $|\gamma| \leq 1$, aplicando que $\mathrm{T}(V)$ es equilibrado se tiene
$$C_n = \{\alpha \mathrm{T}(v_n):\ |\alpha| \leq 1\} \subset \mathrm{T}(V).$$
- Sea ahora $w \in \mathbb{C}$ cualquiera. Como $\lim_{n\to\infty} |\mathrm{T}(v_n)| = +\infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $w \in C_m$ y, por tanto, $w \in \mathrm{T}(V)$. Este razonamiento prueba que $\mathbb{C} \subset \mathrm{T}(V)$.

En este último caso —$\mathrm{T}(V) = \mathbb{C}$—, existe $\mathbf{y} \in V$ tal que $\mathrm{T}(\mathbf{y}) = -\mathrm{T}(\mathbf{x})$, luego $\mathrm{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 0$, es decir, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \ker(\mathrm{T})$, pero esto contradice (A.3.1). Por tanto, $\mathrm{T}(V)$ es acotado.

$\boxed{\textbf{IV} \Rightarrow \textbf{I}}$ Por último, si se verifica **IV**, $|\mathrm{T}(\mathbf{x})| \leq c\ \forall\ \mathbf{x} \in V$ y algún $c \in \mathbb{R}^+$. Si $\varepsilon > 0$ y $W = (\varepsilon/c)V$, entonces $|\mathrm{T}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon\ \forall\ \mathbf{x} \in W$. Por tanto, T es continua en $\mathbf{0}$, lo que implica que T es continua, por el **Teorema 1.1.20**. □

Proposición A.3.7 *Sea $E \subset X$. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

I. *E es acotado.*

II. *Cada sucesión $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ verifica:*
$$\alpha_n \cdot \mathbf{u}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} \mathbf{0}$$
para toda sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a 0.

Demostración. $\boxed{\textbf{I} \Rightarrow \textbf{II}}$ Sean, en primer lugar, $\{\mathbf{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a 0 cualesquiera. Sea ahora $V \in \mathscr{N}_\tau^e(\mathbf{0})$; entonces $E \subset tV$ para algún $t > 0$. Es claro existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_n| t < 1$ si $n \geq n_1$. Como V es equilibrado, $\alpha_n E \subset \alpha_n tV \subset V$ si $n \geq n_1$, luego $\alpha_n \mathbf{u}_n \in V$ si $n \geq n_1$. La arbitrariedad al tomar $V \in \mathscr{N}_\tau^e(\mathbf{0})$ prueba **II**.

$\boxed{\textbf{II} \Rightarrow \textbf{I}}$ Por el contrarrecíproco, si $E \subset X$ es no acotado, existen $U \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$ y una sucesión de escalares positivos $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim r_n = +\infty$ tal que E no está contenido en $r_n U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tómese una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\mathbf{x}_n \notin r_n U\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces $\frac{1}{r_n}\mathbf{x}_n \notin U\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, luego $\{\frac{1}{r_n}\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\mathbf{0}$. □

Lema A.3.8 *Sea $(X,\ \tau)$ un espacio vectorial topológico tal que τ es compatible con una métrica invariante d.*

a) *$d(n\mathbf{x},\ \mathbf{0}) \leq n \cdot d(\mathbf{x},\ \mathbf{0})$ para todos $\mathbf{x} \in X$, $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Si $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X con $\mathbf{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} \mathbf{0}$, entonces existen $\gamma_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ tales que*
$$\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{C}_{|\bullet|}} +\infty \quad y \quad \gamma_n \cdot \mathbf{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} \mathbf{0}.$$

Demostración. **a)** Como d es invariante, $d(\alpha\mathbf{x},\ \alpha\mathbf{x} - \mathbf{x}) = d(\mathbf{0},\ -\mathbf{x}) = d(\mathbf{x},\ \mathbf{0})$ para todo par $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in X$. La desigualdad triangular asegura que
$$d(n\mathbf{x},\ \mathbf{0}) \leq \sum_{k=1}^{n} d\big(k\mathbf{x},\ (k-1)\mathbf{x}\big) = n \cdot d(\mathbf{x},\ \mathbf{0}),$$

donde $\mathbf{x} \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ son cualesquiera.

b) Como $\lim d(\mathbf{x}_n, \mathbf{0}) = 0$, existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^+$ creciente tal que $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{0}) < 1/k^2$ si $n \geq n_k$. Póngase ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < n_1, \\ k & \text{si } n_k \leq n < n_{k+1} \end{cases}$$

Entonces, $d(\gamma_n \mathbf{x}_n, \mathbf{0}) = d(k\mathbf{x}_n, \mathbf{0}) \leq k \cdot d(\mathbf{x}_n, \mathbf{0}) < 1/k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$ y si $n \in \mathbb{N}$ es grande. □

Demostración del Teorema 1.1.22. $\boxed{\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{II}}$ Sean $E \subset X$ acotado y $W \in \mathscr{N}_{\tau_2}(\mathbf{0})$. Como T es continua y $\mathrm{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ entonces existe $V_W \in \mathscr{N}_{\tau_1}(\mathbf{0})$ tal que $\mathrm{T}(V_W) \subset W$. Como E es acotado, $E \subset tV_W$ si $t > s_W$ para cierto $s_W > 0$, luego $\mathrm{T}(E) \subset \mathrm{T}(tV_W) = t\mathrm{T}(V_W) \subset tW$ si $t > s_W$. Este razonamiento, dada la arbitrariedad de $W \in \mathscr{N}_{\tau_2}(\mathbf{0})$, prueba que $\mathrm{T}(E)$ es acotado.

$\boxed{\mathbf{II} \Rightarrow \mathbf{III}}$ Se desprende del hecho de que las sucesiones convergentes son acotadas.

$\boxed{\mathbf{III} \Rightarrow \mathbf{IV}}$ Tómese una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\tau_1 - \lim \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Según las hipótesis del enunciado, el **Lema** A.3.8 asegura que existe una sucesión de escalares $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ que tiende a $+\infty$ tal que $\tau_1 - \lim \gamma_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Por tanto, $\{\mathrm{T}(\gamma_n \mathbf{x}_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Aplicando ahora el teorema anterior se obtiene el resultado:

$$\mathrm{T}(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{\gamma_n}\mathrm{T}(\gamma_n \cdot \mathbf{x}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_2} \mathbf{0}.$$

$\boxed{\mathbf{IV} \Rightarrow \mathbf{I}}$ Contrarrecíprocamente, supóngase no se verifica **I**, entonces existe $W_0 \in \mathscr{N}_{\tau_2}(\mathbf{0})$ tal que $V \not\subseteq \mathrm{T}^{-1}(W_0)\ \forall\, V \in \mathscr{N}_{\tau_1}(\mathbf{0})$. Como $\mathscr{B}_{\mathbf{0}} = \{\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de τ_1, una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ construida tomando $\mathbf{x}_n \in \mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 1/n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ verifica $\tau_1 - \lim \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$, pero $\mathrm{T}(\mathbf{x}_n) \notin W_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{\mathrm{T}(\mathbf{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\mathbf{0} \in Y$. □

A.4. Acotación y metrizabilidad

Observación A.4.9 La demostración del **Teorema** 1.3.29 proporciona un ejemplo de espacio vectorial topológico con una métrica d tal que el diámetro (bajo esta métrica) de X es menor o igual que 1. Por tanto, X es $d-$acotado; sin embargo, por la **Proposición** A.1.4, $X \neq \{\mathbf{0}\}$ no puede ser $\tau-$acotado. Luego en un espacio vectorial topológico metrizable (X, τ), con métrica d, los conjuntos $d-$acotados y los conjuntos $\tau-$acotados no coinciden en general.

Proposición A.4.10 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico normable con norma $\|\bullet\|$. Si d es la métrica inducida por $\|\bullet\|$, entonces un subconjunto de X es $d-$acotado si y sólo si es $\tau-$acotado.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Como $\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 1)$ es abiero, existe $M > 0$ tal que $E \subset M\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 1)$. Esto implica $\|\mathbf{x}\| < M\ \ \forall\, \mathbf{x} \in E$ y, por tanto, $\text{diám}(E) = \sup\{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| :\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E\} < 2M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{0} \in E$ (τ es invariante). Para todo $\mathbf{x} \in E$ se verifica $\|\mathbf{x}\| \leq \text{diám}(E) =: \delta < +\infty$. Ahora, si $V \in \mathscr{N}_\tau(\mathbf{0})$, se ha de probar que existe $M > 0$ tal que $E \subset MV$. Para ello se toma $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) \subset V$. Entonces

$$E \subset \mathrm{B}_d(\mathbf{0}, \delta) = \frac{\delta}{r}\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, r) \subset \frac{\delta}{r}V.$$

□

Por último, se tiene la siguiente caracterización.

Teorema A.4.11 *Un espacio vectorial topológico (X, τ) es normable si, y sólo si, su origen tiene un entorno convexo y acotado.*

La implicación directa es elemental, simplemente tomando una bola centrada en el origen. Para probar la implicación inversa, que no es usada en la memoria, es necesario introducir el concepto *funcional de Minkowski* de un subconjunto absorbente de X, el cual se prefiere obviar para no desviar demasiado al lector del objetivo de este trabajo. Ver **[5, Th 1.39]**.

APÉNDICE B

Convergencia uniforme de funciones

En este apéndice, que es un recordatorio de resultados básicos de convergencias puntual y uniforme de funciones, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotará siempre una sucesión de funciones complejas definidas todas en un conjunto $\Omega \neq \emptyset$. Se sigue la referencia **[4, Chapter 7]**.

B.1. Definiciones y resultados básicos

Definición B.1.1 Se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* sobre $A \subset \Omega$ si $\exists$ $\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ como valor complejo para cada $\mathbf{x} \in A$; bajo esta condición y tomando $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función que verifica $f(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, también se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f sobre A y se denota

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{A-\text{punt.}} f.$$

Definición B.1.2 Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $A \subset \Omega$. Se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a f sobre A si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\varepsilon$ implica $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ $\forall$ $\mathbf{x} \in A$, lo cual se escribe y se denota, respectivamente,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; \left(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{\mathbf{x}\in A} \Big| f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \Big| < \varepsilon \right), \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{A-\text{unif.}} f.$$

Definición B.1.3 La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *uniformemente de Cauchy* sobre $A \subset \Omega$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : \; \left(n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{\mathbf{x}\in A} \Big| f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x}) \Big| < \varepsilon \right).$$

Observación B.1.4 En las tres definiciones anteriores, cuando A coincida con Ω la expresión común «sobre A» se puede obviar y, en el caso de las dos primeras, se denotará, respectivamente,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} f, \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f.$$

Definición B.1.5 Si τ es una topología para Ω, se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente sobre subconjuntos compactos* de Ω a $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{K-\text{unif.}} f \;\; \text{para cada } K \subset \Omega \;\; \tau-\text{compacto}.$$

Teorema B.1.6 *Sea $A \subset \Omega$. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre A si, y sólamente si, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre A.*

La equivalencia se obtiene usando fundamentalmente la desigualdad triangular y que $\mathbb{C}_{|\bullet|}$ es completo.

Teorema B.1.7 *Si τ es una topología para Ω y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$, entonces f es continua.*

Demostración. Véase que f es continua en el punto arbitrario $\mathbf{x}_0\in\Omega$. Se ha de probar que, dado $\varepsilon>0$,

$$\text{existe } U\in\mathscr{N}_\tau(\mathbf{x}_0) \text{ tal que } f(U)\subseteq \mathrm{D}\big(f(\mathbf{x}_0),\,\varepsilon\big). \tag{B.1.1}$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\mathbf{x}\in\Omega}\Big|f_n(\mathbf{x})-f(\mathbf{x})\Big|<\varepsilon/3 \;\text{ si }\; n\geq n_\varepsilon. \tag{B.1.2}$$

El abierto $U=f_{n_\varepsilon}^{-1}\big[\mathrm{D}\big(f_{n_\varepsilon}(\mathbf{x}_0),\,\varepsilon/3\big)\big]$ —es abierto por ser f_{n_ε} continua—, verifica (B.1.1). Efectivamente, si $\mathbf{y}\in U$, entonces $|f_{n_\varepsilon}(\mathbf{y})-f_{n_\varepsilon}(\mathbf{x}_0)|<\varepsilon/3$ y se da

$$|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}_0)|\leq|f(\mathbf{y})-f_{n_\varepsilon}(\mathbf{y})|+|f_{n_\varepsilon}(\mathbf{y})-f_{n_\varepsilon}(\mathbf{x}_0)|+|f_{n_\varepsilon}(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x}_0)|<\varepsilon.$$

Los otros dos sumandos son menores que $\varepsilon/3$ por (B.1.2). □

Teorema B.1.8 *Tómese $\Omega=\mathbb{R}$. Considerando el espacio métrico $(\mathbb{R},\,d_2)$, supóngase que las funciones de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son derivables en un abierto acotado $I\subsetneq\mathbb{R}$ de modo que $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cierto $x_0\in I$. Si $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre I, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre I a una $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ derivable en I y vale*

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)\;\;\forall\,x\in I.$$

La demostración se puede consultar en **[4, Teorema 7.17]**

B.2. Familias equicontinuas de funciones

Definición B.2.9 Se dice que la familia F de funciones complejas definidas en un subconjunto X del espacio métrico (M,d) es equicontinua en el punto $\mathbf{x}\in X$ si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon,\mathbf{x})>0$ tal que

$$\mathbf{y}\in\mathrm{B}_d(\mathbf{x},\,\delta)\cap X \;\text{ implica }\; |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})|\leq\varepsilon\;\;\forall\,f\in\mathsf{F}.$$

Se dirá que F es equicontinua en X si F es equicontinua en todo punto de X.

Definición B.2.10 Sea $A\subset\Omega$. Se dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

- *puntualmente acotada* sobre A si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|f_n(\mathbf{x})\Big|<+\infty\;\;\forall\,\mathbf{x}\in A.$$

  Es decir, para cada $\mathbf{x}\in A$, la sucesión $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ es acotada.

- *uniformemente acotada* sobre A si existe $R>0$ tal que

$$|f_n(\mathbf{x})|\leq R\;\text{ para todos } n\in\mathbb{N},\,\mathbf{x}\in A.$$

Lema B.2.11 *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente acotada sobre $A\subset\Omega$ un conjunto numerable, entonces tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_{n_k}(\mathbf{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para cada $\mathbf{x}\in A$.*

Demostración. Póngase $A = \{\mathbf{x}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Como $\{f_n(\mathbf{x}_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión $S_1 = \{f_{1,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_{1,\,k}(\mathbf{x}_1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Como es evidente que cualquier subsucesión de una sucesión de funciones puntualmente acotada es puntualmente acotada, de igual manera y generalizando, como la sucesión

$$\{f_{j-1,\,k}(\mathbf{x}_j)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

es acotada, existe una subsucesión $S_j = \{f_{j,\,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de S_{j-1} tal que $\{f_{j,\,k}(\mathbf{x}_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge $(j \geq 2)$. Se verifica las afirmaciones:

- S_j es una subsucesión de S_{j-1} $(j \geq 2)$.
- $\{f_{j,\,k}(\mathbf{x}_j)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge $(j \geq 1)$.

Ahora sea $\Lambda = \{f_{1,\,1}, f_{2,\,2}, f_{3,\,3}, \ldots\}$. Entonces,

- la sucesión Λ es una subsucesión de S_1, $\Lambda \setminus \{f_{1,\,1}\}$ es una subsucesión de S_2 y,
- en general, la sucesión $\Lambda \setminus \{f_{1,\,1}, \ldots, f_{j-1,\,j-1}\}$ es una subsucesión de S_j $(j > 2)$;
- además, todas lo son de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Con lo cual, de estos cinco puntos se deduce

$$\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{k\to\infty} f_{k,\,k}(\mathbf{x}_j) \in \mathbb{C}.$$

□

Teorema B.2.12 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y considérese el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Sea también $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas en K, es puntualmente acotada sobre K y es equicontinua en K, entonces*

a) *tiene una subsucesión uniformemente convergente sobre K y*

b) *es uniformemente acotada sobre K.*

Demostración. **a)** Sea $D = K \cap \mathbb{Q}^n$, que es un subconjunto denso y numerable de K. El lema anterior muestra que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_{n_k}(\mathbf{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para cada $\mathbf{x} \in D$. Para simplificar la notación, póngase $h_k = f_{n_k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Se va a probar que $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K.

En primer lugar, dado $\varepsilon > 0$ conocido, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en K, entonces para cada $\mathbf{x} \in K$ existe $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $|f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{y})| \leq \varepsilon/3$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_{\mathbf{x}}$.

En segundo lugar, recuérdese que, como D es denso en K, para cada punto de K existe una sucesión contenida en D y con límite este punto. Este hecho implica el contenido

$$K = \overline{D} \subseteq \bigcup_{\mathbf{q}\in D} \mathrm{B}(\mathbf{q}, \delta_{\mathbf{q}}).$$

Ahora, como K es compacto, existe una cantidad finita m de puntos en D, sean estos $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m$, tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{B}(\mathbf{q}_j, \delta_{\mathbf{q}_j}).$$

Puesto que $\{h_k(\mathbf{x})\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge para cada $\mathbf{x} \in D$, hay un $k_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|h_k(\mathbf{q}_j) - h_l(\mathbf{q}_j)\right| \leq \varepsilon/3 \ \text{ si } k, l \geq k_m \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Además, si $\mathbf{x} \in K$, entonces $\mathbf{x} \in \mathrm{B}\left(\mathbf{q}_i, \delta_{\mathbf{q}_i}\right)$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, luego

$$|h_k(\mathbf{x}) - h_k(\mathbf{q}_i)| \leq \varepsilon/3 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Con lo cual, de todo lo anterior se deduce que

$$|h_k(\mathbf{x}) - h_l(\mathbf{x})| \leq |h_k(\mathbf{x}) - h_k(\mathbf{q}_i)| + |h_k(\mathbf{q}_i) - h_l(\mathbf{q}_i)| + |h_l(\mathbf{q}_i) - h_l(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$$

si $k, l \geq k_m$. Esto prueba que $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre K, lo cual es equivalente a que $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente sobre K.

b) Puesto que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada puntualmente, existe $R > 0$ tal que $\left|f_n\left(\mathbf{q}_j\right)\right| \leq R \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $(1 \leq j \leq m)$. Si $\mathbf{x} \in K$, entonces $\mathbf{x} \in \mathrm{B}\left(\mathbf{q}_i, \delta_{\mathbf{q}_i}\right)$ para algún $1 \leq i \leq m$ y, por tanto,

$$|f_n(\mathbf{x})| \leq |f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{q}_i)| + |f_n(\mathbf{q}_i)| \leq \varepsilon/3 + R \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

APÉNDICE C

Resultados de análisis funcional

C.1. El teorema de Baire

Definición C.1.1 En un espacio topológico (X, τ), se dice que un subconjunto $A \subset X$ es de *primera categoría* si A es unión numerable (puede ser finita) de cerrados de interior vacío.

Teorema C.1.2 (de Baire) [5, Th 2.2] *Sea (X, τ) un espacio métrico completo o, en su defecto, un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces, si $A \subset X$ es de primera categoría,* $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.

C.2. Continuidad de aplicaciones lineales

Teorema C.2.3 (del grafo cerrado) [5, Th 2.15] *Supóngase que*

a) (X, τ_1) *e* (Y, τ_2) *son* $\mathfrak{F}-$*espacios,*

b) $\mathrm{T} : X \longrightarrow Y$ *es aplicación lineal y*

c) $\operatorname{Graf}\mathrm{T} = \{(\mathbf{x}, \mathrm{T}\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\}$ *es* $(\tau_1 \times \tau_2)-$*cerrado.*

Entonces T *es continua bajo* $\tau_1 - \tau_2$.

C.3. Resultados relativos a la integral de Lebesgue

Teorema C.3.4 (convergencia dominada de Lebesgue) [2, Th 2.24] *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1(X)$ que verifica:*

a) $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ *en casi todo* X,

b) *existe $g \in \mathrm{L}^1(X)$ no negativa tal que $|f_m| \leq g$ en casi todo X $(m \in \mathbb{N})$.*

Entonces $f \in \mathrm{L}^1(X)$ y vale $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \operatorname{lím}_{m\to\infty} \int_X f_m \, \mathrm{d}\mu$.

Lema C.3.5 (regla de derivación de integrales paramétricas) [2, Th 2.26] *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que*

a) *$f(\bullet, t) \in \mathrm{L}^1(X)$ para todo $t \in I$,*

b) *existe $\partial f / \partial t$ en todo $X \times I$ y*

c) *existe $h \in \mathrm{L}^1(X)$ no negativa tal que $|(\partial f / \partial t)(\mathbf{x}, t)| \leq h(\mathbf{x})$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in X \times I$.*

Definiendo

$$F(t) = \int_X f(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mu \quad (t \in I)$$

se tiene que F es derivable en I y que

$$F'(t) = \int_X (\partial f/\partial t)(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}\mu \ \ \forall\, t \in I.$$

Teorema C.3.6 (de Tonelli-Fubini) [2, Th 2.37] *Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ medible en $X \times Y$. Si se supone que*

$$\int_X \left(\int_Y |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \ \mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty$$

o bien

$$\int_Y \left(\int_X |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \ \mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} < +\infty$$

o bien

$$\int_{X\times Y} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \ \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{y} < +\infty,$$

entonces

$$\int_X \left(\int_Y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \mathrm{d}\mathbf{y} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_Y \left(\int_X f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{X\times Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

y, por tanto, cada una de estas tres integrales es absolutamente convergente.

Ejemplo C.3.7 Aplicando el teorema de Fubini, calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2/2} \mathrm{d}r.$$

Elevando al cuadrado la integral, que es convergente pues ya se sabe que el integrando es una función de la clase de Schwartz, se tiene:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2/2} \mathrm{d}r \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(r^2+s^2\right)/2} \mathrm{d}r\, \mathrm{d}s = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2/2}\, \mathrm{d}\rho =$$
$$= -2\pi \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(e^{-\rho^2/2} \right) \mathrm{d}\rho = -2\pi \left[e^{-\rho^2/2} \right]_{\rho=0}^{+\infty} = 2\pi.$$

Teorema C.3.8 (desigualdad de Hölder) [2, Prop 6.2] *Sean $p, q \in [1, +\infty]$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \textit{(conjugados)}$$

y (X, Σ, μ) un espacio de medida. Si $f \in \mathrm{L}^p(X)$ y $g \in \mathrm{L}^q(X)$, entonces $fg \in \mathrm{L}^1(X)$ y se verifica

$$\int_X |fg| \ \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^p \ \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \ \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

C.4. Propiedades algebraicas de la transformada de Fourier

Teorema C.4.9 *Sean* $f,\, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *e* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$. *Entonces*

a) $\mathscr{F}\{\tau_{\mathbf{y}} f\} = e_{i(-\mathbf{y})}\hat{f}$ $\quad$ *(traslación)*

b) $\mathscr{F}\{e_{i\mathbf{y}} f\} = \tau_{\mathbf{y}}\hat{f}$ $\quad$ *(modulación)*

c) $\mathscr{F}\{f * g\} = \pi_{\mathsf{n}}\hat{f}\hat{g}$ $\quad$ *(transformada de una convolución)*

d) $\mathscr{F}\{f\left(\frac{\bullet}{\varepsilon}\right)\}(\xi) = \varepsilon^{\mathsf{n}}\hat{f}(\varepsilon\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}})$ *si* $\varepsilon > 0$ $\quad$ *(dilatación)*

e) $\mathscr{F}\{af + bg\} = a\hat{f} + b\hat{g}$ *si* $a,\, b \in \mathbb{C}$ $\quad$ *(linealidad)*

Demostración. Sea $\xi \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}$ en toda la demostración.

a) El cálculo es el que sigue:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{z})\, e^{-i\xi\cdot(\mathbf{z}+\mathbf{y})} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{z}) = e^{i(-\mathbf{y})\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{z})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{z}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{z})$$

b) El cálculo es el que sigue:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} e^{i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{x})\, e^{-i(\xi-\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\xi - \mathbf{y})$$

c) El cálculo es el que sigue:

$$\mathscr{F}\{f * g\}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} (f * g)(\mathbf{x})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{x}-\mathbf{u})\, g(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\mathbf{u} \right) e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x};$$

aplicando el teorema de Fubini —**Teorema** C.3.6—,

$$\mathscr{F}\{f * g\}(\xi) = \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} g(\mathbf{u}) \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{x}-\mathbf{u})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x} \right) \mathrm{d}\mathbf{u},$$

y, realizando el cambio de variables $\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{v}$, luego $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{v}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f * g\}(\xi) &= \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} g(\mathbf{u}) \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{v})\, e^{-i\xi\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{u})} \mathrm{d}\mathbf{v} \right) \mathrm{d}\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{\pi_{\mathsf{n}}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{v})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{v}} \mathrm{d}\mathbf{v} \right) g(\mathbf{u})\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{u}} \mathrm{d}\mathbf{u} = \pi_{\mathsf{n}} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

d) El cálculo es el que sigue:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{x}/\varepsilon)\, e^{-i\xi\cdot\mathbf{x}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{u})\, e^{-i\xi\cdot(\varepsilon\mathbf{u})} \varepsilon^{\mathsf{n}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{u}) = \varepsilon^{\mathsf{n}} \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{n}}} f(\mathbf{u})\, e^{-i(\varepsilon\xi)\cdot\mathbf{u}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{u})$$

efectuando el cambio de variables $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\varepsilon$, luego $\mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \varepsilon^{\mathsf{n}} \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{n}}(\mathbf{u})$.

La propiedad **e** es consecuencia de la linealidad del operador integral. $\square$

Bibliografía

[1] Bombal, Fernando, *Los orígenes de la Teoría de Distribuciones*, Seminario de Historia de la Matemática I, Universidad Complutense, Madrid, 1991.

[2] Folland, Gerald B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1999.

[3] Mitrea, Dorina, *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*, Springer, 2013.

[4] Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Ed. McGraw-Hill, 1976.

[5] Rudin, Walter, *Functional Analysis*, 2nd Ed. McGraw-Hill, 1991.

[6] Vera Botí, Gabriel, *Variable Compleja, problemas y complementos*, 1ª Ed. Ediciones Electolibris, 2013.

[7] Willard, Stephen, *General Topology*, Dover Publications, 2004.