



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

**La transformada de Fourier y aplicaciones a las EDPs.**

Sara Pérez Vera  
Curso 2015-2016



# Declaración de originalidad

SARA PÉREZ VERA, autora del TFG "LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y APLICACIONES A LAS EDPS", bajo la tutela del profesor GUSTAVO GARRIGÓS ANIORTE, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 5 de septiembre de 2016.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>1. Convoluciones y aproximaciones de la identidad.</b>	<b>1</b>
1.1. Convolución, ejemplos y propiedades. . . . .	1
1.2. Aproximaciones de la identidad. . . . .	5
1.2.1. Función Maximal de Hardy-Littlewood. . . . .	7
<b>2. La transformada de Fourier en <math>L^1(\mathbb{R}^d)</math>.</b>	<b>14</b>
2.1. Definición y primeras propiedades. . . . .	14
2.2. Ejemplos de cálculo de transformadas de Fourier. . . . .	18
2.3. Transformada de Fourier inversa. . . . .	20
<b>3. La transformada de Fourier en <math>L^2(\mathbb{R}^d)</math>.</b>	<b>22</b>
3.1. El Teorema de Plancherel. . . . .	22
3.2. Ejemplo de aplicación del teorema de Plancherel. . . . .	24
<b>4. La transformada de Fourier en <math>L^p(\mathbb{R}^d)</math>.</b>	<b>26</b>
4.1. El Teorema de Hausdorff-Young. . . . .	26
4.2. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin. . . . .	27
<b>5. Aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de EDPs.</b>	<b>33</b>
5.1. Ecuación del calor. . . . .	35
5.2. Ecuación de Laplace en el semiplano. . . . .	38
5.3. Ecuación de ondas. . . . .	40
5.3.1. La ecuación de ondas en dimensión 1. . . . .	45
5.3.2. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . . . . .	46
5.3.3. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ : descenso. . . . .	48
<b>A. Resultados auxiliares.</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Resumen

En el presente trabajo se procederá al estudio de una herramienta muy útil en Análisis, la transformada de Fourier. Realizaremos un estudio fundamentalmente teórico y en última instancia estableceremos su aplicación a algunas de las más conocidas EDPs, como son la ecuación del calor, la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

En primer lugar, en el Capítulo 1 introduciremos algunas definiciones y resultados que serán relevantes en capítulos posteriores. Daremos la definición y propiedades de la convolución de funciones medibles. La convolución nos aparecerá posteriormente en la expresión de la solución de las EDPs mencionadas anteriormente.

También se estudiará el concepto de aproximación de la identidad regular (AIR) y probaremos dos resultados importantes sobre convergencia en  $L^p$  de AIR (Teorema 1.2.4) y sobre convergencia puntual de AIR (Teorema 1.2.6). Estos resultados nos serán imprescindibles a la hora de probar algunos de los teoremas importantes relacionados con la transformada de Fourier, así como en las aplicaciones.

Al final del capítulo se probará el Teorema de convergencia puntual de AIR. Para ello introduciremos un operador, la función maximal de Hardy-Littlewood, así como la prueba de algunos resultados relacionados con éste.

Será en el Capítulo 2 donde se introduzca propiamente la definición de transformada de Fourier de una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

Estudiaremos sus propiedades algebraicas, entre ellas las fórmulas para la transformada de Fourier de una convolución o una derivada y las propiedades analíticas de la transformada de Fourier, entre las que cabe destacar el lema de Riemann-Lebesgue:

$$\text{“Si } f \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ entonces } \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.”$$

También estudiaremos algunos ejemplos de cálculo de transformadas que nos serán útiles posteriormente tanto en la prueba de algunos resultados como en el cálculo de la solución de EDPs.

Como cierre de este capítulo, veremos uno de los teoremas más importantes de esta teoría y algunas de sus consecuencias. Éste es el Teorema de Inversión (2.3.1), que establece:

“Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  tal que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \text{c.t.p.x.}”$$

Esta expresión es conocida como transformada de Fourier inversa. (Para la prueba de este resultado será necesario el mencionado anteriormente Teorema de convergencia puntual de AIR).

En el Capítulo 3 nos centraremos en el estudio de la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , donde destacamos un resultado fundamental que afirma que la transformada de Fourier es una transformación unitaria en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Es el conocido como Teorema de Plancherel(3.1.1) y nos dice que:

“Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  y además

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.”$$

Para la prueba de este resultado será necesario el teorema de convergencia en  $L^2$  de AIR.

Como corolario, podemos establecer una definición de la transformada para funciones  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ( $\mathcal{F}f$ ) por densidad, pero al ser esta definición abstracta, probaremos que se puede dar una fórmula explícita (Corolario 3.1.3).

Por último, mediante un ejemplo veremos que la resolución de algunas integrales cuyo cálculo no es sencillo, es posible simplificarlo mediante el uso del Teorema de Plancherel.

Es ya en el Capítulo 4 donde pasaremos a estudiar la transformada de Fourier en  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . En primer lugar, daremos una definición de la transformada de una función  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq 2$  y  $f = f_1 + f_2 \in L^1 + L^2$  y veremos que se puede expresar como la suma de las transformadas de  $f_1$  y  $f_2$ . Existe un resultado más preciso que nos dice que si  $f \in L^p$  con  $1 \leq p \leq 2$  entonces  $\mathcal{F}f \in L^{p'}$  siendo  $p'$  el conjugado de  $p$ . La prueba de este teorema será el objetivo fundamental de este capítulo. Este teorema es el conocido como Teorema de Hausdorff-Young (4.1.3):

“Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq 2$ , entonces  $\mathcal{F}f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  y

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d).”$$

Para ello, será necesaria la prueba del Teorema de interpolación de Riesz-Thorin (4.2.2). Una vez probado el Teorema de Hausdorff-Young, nos plantearemos si existe una fórmula explícita para definir la transformada de Fourier en  $L^p$  al igual que lo vimos en  $L^2$  en el capítulo anterior. Probaremos que sí.

El último capítulo del trabajo, lo dedicaremos al estudio de la aplicación de la transformada de Fourier a la resolución de EDPs.

Comenzaremos introduciendo la clase de Schwartz  $\mathcal{S}$ , lo que nos permitirá justificar la validez de los cálculos formales que siguen.

Consideraremos el problema de la ecuación del calor con condiciones iniciales. Mediante el uso de transformadas obtendremos una solución formal y probaremos un resultado más preciso que nos garantizará la existencia de dicha solución y algunas propiedades. Un razonamiento análogo realizaremos para el problema de la ecuación de Laplace en el semiplano con condiciones iniciales.

Realizaremos un estudio más exhaustivo del problema de la ecuación de ondas. Mediante una prueba formal obtendremos la solución, y probaremos un resultado sobre existencia de dicha solución. Veremos también un resultado local de unicidad de la ecuación de ondas (unicidad en conos). Estudiaremos además una propiedad de la ecuación de ondas: la conservación de la energía global.

Para finalizar, y a modo particular, veremos la ecuación de ondas en dimensiones  $d = 1, 2, 3$ . En  $d = 1$  aparecerá la conocida fórmula D'Alembert, solución del problema de la ecuación de ondas en esta dimensión:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

En  $d = 3$ , introduciremos el concepto de media esférica y se verá que la solución puede expresarse usando la media esférica de los datos iniciales.

Por último, veremos que la solución de la ecuación de ondas en dimensión 3 lleva a una solución de la ecuación de ondas en dos dimensiones, lo que llamaremos método del descenso.

A lo largo del trabajo hemos seguido principalmente las referencias [3], [6] y [7].

# Abstract

The current essay focuses on the study of a very powerful tool in Analysis, the Fourier transform. A mainly theoretical study will be made and, finally, it will be applied to three important PDEs: the heat equation, the Laplace equation and the wave equation.

Firstly, in Chapter 1 several definitions and results will be introduced, being relevant in later chapters. The definition and properties of the convolution of measurable functions will be given. The convolution will appear later as a part of the solution of the PDEs mentioned before.

The concept of regular approximation to the identity will be introduced. We shall prove two important results about convergence in  $L^p$  of regular approximation to the identity (Theorem 1.2.4) and about pointwise convergence of regular approximation to the identity (Theorem 1.2.6). Those results will be essential to prove some of the most important theorems related to Fourier transform, as well as in its application.

At the end of the chapter the pointwise convergence of regular approximation to the identity Theorem will be proved. To do so, we shall introduce the Hardy-Littlewood maximal function, as well as the proof of some others results related to it.

In Chapter 2 we give the definition of Fourier transform of a function  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

We shall study its algebraic properties, such as the formulas for the Fourier transform of a convolution or a derivative and the analitic properties of the Fourier transform. It is important to outline the Riemann-Lebesgue lemma:

*“If  $f$  is  $L^1$  integrable on  $\mathbb{R}^d$ , then  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  as  $|\xi| \rightarrow \infty$ .”*

Some examples of transform calculations will be studied as they will be useful afterwards to prove some results as well as to calculate explicit solutions of PDEs.

At the end of this chapter, some of the most important theorems of this theory and some of its consequences will be studied. This is the Fourier inversion Theorem(2.3.1), that establishes:

*“Let  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  such that  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , then*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad \text{almost everywhere } x.”$$



This expression is known as inverse Fourier transform. (To test this result the already mentioned pointwise convergence of regular approximation to the identity Theorem will be needed).

In Chapter 3 the study will be focused on the Fourier transform in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , where a fundamental result will be outlined. It says that the Fourier transform is a unitary transformation in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . This is known as Plancherel Theorem (3.1.1) and it says that:

$$\begin{aligned} & \text{“If } f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d), \text{ then } \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d). \text{ In addition} \\ & \qquad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \text{”} \end{aligned}$$

To test this result the convergence in  $L^2$  of regular approximation to the identity Theorem will be necessary.

As a corollary, we can establish a transform definition to functions  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ( $\mathcal{F}f$ ) by density, but as it is an abstract definition, we shall also prove that an explicit formula can be given (Corollary 3.1.3).

Finally, using an example, we will see that it is possible to simplify the process of solving some integrals, whose calculation is not easy, by using the Plancherel Theorem.

In Chapter 4, we study the Fourier transform in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Firstly, we shall define the Fourier transform of  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , by writing  $f = f_1 + f_2 \in L^1 + L^2$  and letting  $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}_1 + \mathcal{F}(f_2)$ . There is a more precise result which says that if  $f \in L^p$  with  $1 \leq p \leq 2$  then  $\mathcal{F}f \in L^{p'}$  being  $p$  and  $p'$  conjugate exponents. The proof of this theorem will be the main objective of this chapter. This is known as the Hausdorff-Young Theorem (4.1.3):

$$\begin{aligned} & \text{“If } f \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ with } 1 \leq p \leq 2, \text{ then } \mathcal{F}f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d) \text{ where } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ and} \\ & \qquad \|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d). \text{”} \end{aligned}$$

To do it so, it will be necessary to prove the Riesz-Thorin interpolation Theorem (4.2.2). Once it is proven, we will turn to the existence of an explicit formula to define the Fourier transform in  $L^p$ , as it was seen for  $L^2$  in the previous chapter.

The last chapter of the present dissertation is dedicated to study applications of the Fourier transform to the resolution of PDEs.

In first place, we will introduce the Schwartz class  $\mathcal{S}$ . This will allow us to justify the validity of formal calculations that come later.

The initial value problem of the heat equation will be considered. By using transforms we will get to a formal solution and prove a more precise result that will guarantee the existence of a solution and some of its properties. A similar reasoning will be done to the initial value problem of Laplace’s equation in the upper half plane.

Later, we will do a most exhaustive study of wave equation problem. By using a formal prove we will get to the solution, and will prove a result about its existence. A local uniqueness result for wave equation (uniqueness in cones) will also be seen. We shall also prove an important property of the solutions to the wave equation: the global energy conservation.

Finally, and particularly, we will find explicit formulas for the solutions of the wave equation in dimensions  $d = 1, 2, 3$ . In  $d = 1$  we recover the well-known D'Alembert formula:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

In  $d = 3$ , the concept of spherical mean of a function  $f$  is introduced and it is proven that the solution can be expressed by using the spherical mean of initial data (see Theorem 5.3.9).

At the end, it is proven that the wave equation solution in dimension 3 leads to a wave equation solution in two dimensions. This is named as the descent method (see Section 5.3.3).

The main references used in this study are the following: [3], [6] y [7].

# Capítulo 1

## Convoluciones y aproximaciones de la identidad.

En este capítulo, seguiremos principalmente las referencias [6] y [7].

### 1.1. Convolución, ejemplos y propiedades.

Trabajaremos en esta sección en  $\mathbb{R}^d$  con la medida de Lebesgue.

La noción de convolución de dos funciones desempeña un papel fundamental en Análisis. Aparece de forma natural en las series de Fourier, como se ha visto en el Grado, pero también sirve de manera más general para expresar soluciones de EDPs, y en otros aspectos que veremos en este trabajo.

**Definición 1.1.1.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  funciones medibles. Definimos la **convolución de f y g** como:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

siempre que la integral sea absolutamente convergente (es decir  $|f| * |g|(x) < \infty$ ).

Veamos algunos ejemplos relacionados con la solución de EDPs en los que aparecen estas convoluciones:

**Ejemplo 1.1.2 (Solución de la Ecuación del Calor).** Consideramos la ecuación del calor con una condición inicial:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta_x u(x, t) \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Haciendo uso de la transformada de Fourier, veremos en el Capítulo 5 que la solución formal de este problema viene dada por:

$$u(x, t) = h_t(x) * f(x),$$

donde  $h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^d} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  se denomina Núcleo de Gauss.

Vemos así que el problema de estudiar la solución de la ecuación del calor  $u(x, t)$  se reduce a estudiar propiedades de la convolución  $h_t * f$ .

**Ejemplo 1.1.3 (Solución de la ecuación de Laplace en el semiplano).** Consideramos ahora el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Veremos también en el Capítulo 5 que la solución de este problema viene dada por:

$$u(x, y) = (f * P_y)(x)$$

donde  $P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}$  es conocido como Núcleo de Poisson.

**Proposición 1.1.4 (Propiedades de las convoluciones).** Sean  $f, g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  funciones medibles tales que  $f * g$  y  $f * h$  están definidas. Entonces se verifica:

1.  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
2.  $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$  para cualquier  $c \in \mathbb{C}$
3.  $f * g = g * f$
4.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , si alguna de ellas está definida.

*Demostración.* Las propiedades 1) y 2) se siguen de la linealidad de la integral.

3)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy =$$

haciendo el cambio de variable  $x - y = u, dy = du$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)g(x - u)du = (g * f)(x).$$

4)

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x - y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y - z)g(z)dz \right] h(y)dy =$$

haciendo el los cambios de variable  $u = y + z, z = u - y$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} f(x - u)g(u - y)h(y)du \right] dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - u) \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(u - y)h(y)dy \right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - u)(g * h)(u)du = f * (g * h)(x).$$

En la 4ª igualdad hemos usado el teorema de Fubini (Apéndice A.15) ya que si suponemos el primer término definido se tiene  $|f(x - y - z)g(z)h(y)| \in L^1(dydz)$ .

□

**Proposición 1.1.5 (Desigualdad de Young).** Si  $f \in L^1, g \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$ , entonces:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

por tanto  $f * g \in L^p$ .

*Demostración.*

$$\|f * g\|_p \leq \int \| |f(x-y)g(y)| \|_{L^p(dx)} \leq \int \|f(x-y)\|_{L^p(dx)} \|g(y)\|_1 dy = \|f\|_p \|g\|_1$$

donde hemos usado en el segundo paso la Desigualdad integral de Minkowski (recogido en el resultado del Apéndice A.1).  $\square$

**Proposición 1.1.6.** *Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces:*

i)  $f * g \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^d)$

ii)  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

iii) Si  $1 < p < \infty \Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$

Para la demostración de esta proposición haremos uso del siguiente lema:

**Lema 1.1.7.** *Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p = 0.$$

*Demostración.* Usaremos la densidad de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\varphi \in C_c^\infty$  tal que  $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p &= \|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h) + \varphi(\cdot + h) - \varphi + \varphi - f\|_p \\ &\leq \|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \\ &= 2\|\varphi - f\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \end{aligned}$$

El primer sumando del último miembro sabemos que es  $< 2\epsilon$ , nos queda ver que el segundo sumando es menor que  $\epsilon$ , si  $|h|$  es suficientemente pequeño.

Como  $\text{Sop}(\varphi) \subseteq B_R(0)$  para  $R$  suficientemente grande, se tiene que

$$\text{Sop}(\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)) \subseteq B_{2R}(0)$$

si  $|h| \leq R$ .

Como  $\varphi \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^d)$ , existe  $\delta_0 = \delta_0(\varphi, R, \epsilon)$  tal que si  $|h| \leq \delta_0$  y  $x \in \mathbb{R}^d$  entonces  $|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon}{R^{d/p}}$ . Por tanto

$$\|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\|_p = \left( \int_{B_{2R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_{B_{2R}} \frac{\epsilon^p}{R^d} dx \right)^{1/p} < \epsilon C$$

con  $C$  constante. Por tanto,

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p < (C + 2)\epsilon, \quad \text{si } |h| \leq \delta_0.$$

$\square$

Estamos ahora preparados para probar la Proposición 1.1.6:

*Demostración Proposición 1.1.6.* i) Podemos suponer  $1 \leq p < \infty$  (si no, intercambiamos  $f$  por  $g$ ). Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &= \left| \int (f(x+h-y) - f(x-y))g(y)dy \right| \\ &\leq \|f(x+h-\cdot) - f(x-\cdot)\|_p \|g\|_q = (1) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = x - y$  y usando el lema anterior vemos que

$$(1) = \|f(u+h) - f(u)\|_{L^p(u)} \|g\|_q \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

independientemente de  $x$ . Por tanto,  $f * g$  es uniformemente continua.

ii) Aplicando la Desigualdad de Hölder

$$|f * g(x)| = \left| \int f(x-y)g(y)dy \right| \leq \left( \int |f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \left( \int |g(y)|^q dy \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

iii) Sea  $1 < p < \infty$ . Fijamos  $\epsilon > 0$ .

Tomamos  $F, G \in C_c(\mathbb{R}^d)$  tales que  $\|f - F\|_p < \frac{\epsilon}{\|g\|_q}$ ,  $\|g - G\|_q < \frac{\epsilon}{\|f\|_p}$  y  $\|G\|_q \leq 2\|g\|_q$ , lo cual implica que  $F * G$  tiene soporte compacto digamos en  $B_R$ .

Vamos a ver que si  $|x| \geq R$  entonces  $|f * g(x)|$  es pequeño.

$$|f * g(x)| = |f * g(x) - f * G(x) + f * G(x) - F * G(x)|$$

donde el último sumando vale 0 si  $|x| \geq R$ . Entonces

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq |f * (g - G)(x)| + |(f - F) * G(x)| \leq \|f\|_p \|g - G\|_q + \|f - F\|_p \|G\|_q \\ &\leq \epsilon + \epsilon \frac{\|G\|_q}{\|g\|_q} \leq \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

Recogida en la siguiente proposición, se encuentra una propiedad de la derivada de una convolución que nos será de gran utilidad cuando estudiemos aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de EDPs en el Capítulo 5.

**Proposición 1.1.8.** Sean  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y  $g \in C^k(\mathbb{R}^d)$  con  $g$  acotada (y todas sus derivadas también). Entonces

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g), \quad \text{si } |\alpha| \leq k$$

y por tanto  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ .

*Demostración.* Aplicando  $k$  veces el Lema de Derivación de integrales paramétricas (recogido en el Apéndice en el lema A.2) obtenemos la prueba. □

## 1.2. Aproximaciones de la identidad.

En esta sección introducimos el concepto de aproximación de la identidad, el cual nos llevará a probar algunos resultados de convergencia, tanto puntual como en  $L^p$ , de la convolución de una función con una aproximación de la identidad.

Estos resultados serán determinantes a la hora de probar dos de los teoremas fundamentales que veremos en el Capítulo 2 (Teorema de Inversión 2.3.1) y en el Capítulo 3 (Teorema de Plancherel 3.1.1).

**Definición 1.2.1.** Decimos que  $\{\varphi_t\}_{t>0} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$  es una **aproximación de la identidad regular (AIR) cuando  $t \rightarrow 0$**  si

$$\text{i) } \int \varphi_t = 1$$

$$\text{ii) } \sup_{t>0} \int |\varphi_t| < \infty$$

$$\text{iii) } \forall \delta > 0, \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} |\varphi_t| = 0$$

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.2.2.** La familia  $\left\{ \varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{|B_\epsilon(0)|} \chi_{B_\epsilon(0)}(x) \right\}_{\epsilon>0}$  es AIR. Cumple las tres propiedades trivialmente.

**Lema 1.2.3.** Si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y  $\int \varphi = 1$ , entonces  $\left\{ \varphi_t(x) = \frac{1}{t^d} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\}_{t>0}$  es una aproximación de la identidad regular si  $t \rightarrow 0^+$ .

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable  $\frac{x}{t} = u$  tenemos:

$$\int \frac{1}{t^d} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int \varphi(u) du = 1 \quad \forall t$$

Por lo que se verifica i) y ii). Veamos iii):

Haciendo de nuevo el cambio de variable  $\frac{x}{t} = u$ , se tiene

$$\int_{|x| \geq \delta} |\varphi_t(x)| dx = \int_{|u| \geq \frac{\delta}{t}} |\varphi(u)| du$$

por lo que como  $\frac{\delta}{t} \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow 0^+$ , por el Teorema de la Convergencia Dominada (ver Corolario A.11) tenemos:

$$\int_{|u| \geq \frac{\delta}{t}} |\varphi(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

□

Pasamos ahora a estudiar los teoremas mencionados anteriormente sobre convergencia de AIR.

**Teorema 1.2.4 (Convergencia en  $L^p$  de AIR).** Si  $\{\varphi_t\}_{t>0}$  es aproximación a la identidad regular cuando  $t \rightarrow 0$ , entonces:

- a) Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\varphi_t * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$  en  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .
- b) Si  $p = \infty$  y  $f \in UC_{bde}(\mathbb{R}^d)$  (uniformemente continua y acotada) entonces  $\varphi_t * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$  uniformemente.

*Demostración.* a)

$$\varphi_t * f(x) - f(x) = \int f(x-y)\varphi_t(y)dy - f(x) \int \varphi_t(y)dy = \int (f(x-y) - f(x))\varphi_t(y)dy$$

donde la primera igualdad se da ya que  $\varphi_t$  es AIR. Por tanto se tiene:

$$\|\varphi_t * f - f\|_{L^p(dx)} = \left\| \int (f(x-y) - f(x))\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p(dx)} \leq$$

aplicando la Desigualdad Integral de Minkowski

$$\begin{aligned} &\leq \int \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} |\varphi_t(y)| dy \\ &= \int_{|y| \leq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} |\varphi_t(y)| dy \\ &\leq \int_{|y| \leq \delta} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p(dx)} |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} \|2f\|_p |\varphi_t(y)| dy = (1) \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , sabemos que  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_p < \epsilon$  si  $|y| < \delta$  (por el Lema 1.1.7). Por tanto:

$$\begin{aligned} (1) &\leq \int_{|y| \leq \delta} \epsilon |\varphi_t(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} \|2f\|_p |\varphi_t(y)| dy \\ &\leq \epsilon \sup_{t>0} \|\varphi_t\|_1 + 2\|f\|_p \int_{|y| \geq \delta} |\varphi_t(y)| dy = (2) \end{aligned}$$

donde  $\sup_{t>0} \|\varphi_t\|_1$  es finito por ii) de la definición de AIR.

Por iii) de la misma definición,  $\exists t_0 = t_0(\epsilon, \delta)$  tal que  $\int_{|y| \geq \delta} |\varphi_t| \leq \epsilon$ ,  $\forall t < t_0$ , con lo cual

$$(2) \leq \epsilon \sup_{t>0} \|\varphi_t\|_1 + 2\|f\|_p \epsilon \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Por tanto,  $\varphi_t * f \rightarrow f$ .

- b) Este resultado es análogo usando  $\|\cdot\|_\infty$  en lugar de norma  $L^p$ . □

Como Corolario de la prueba de b), se puede extraer el siguiente resultado:

**Corolario 1.2.5.** Sea  $\{\varphi_t\}_{t>0}$  una AIR. Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , tal que  $f$  es continua en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , entonces

$$\varphi_t * f(x_0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x_0).$$



El siguiente resultado sobre convergencia c.t.p. de AIR es más difícil que el 1.2.4 sobre convergencia en  $L^p$ .

**Teorema 1.2.6 (Convergencia puntual de AIR).** Sea  $\{\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d} \varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$  donde  $\varphi \in L^1$ ,  $\int \varphi = 1$  y  $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{d+1}}$ .

Entonces para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < \infty$

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} f * \varphi_t(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.x.}$$

Nuestro objetivo ahora es la prueba de este teorema. Para ello es necesario introducir el concepto de Función Maximal de Hardy-Littlewood y algunos resultados relacionados con esta función, recogidos en la siguiente sección.

### 1.2.1. Función Maximal de Hardy-Littlewood.

**Definición 1.2.7.** Sea  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ , se define la **función maximal de f** como:

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f| dx$$

Introducimos ahora la definición de  $L^p$ -débil y un resultado relacionado con este concepto, la Desigualdad de Tchebichev, que serán necesarios posteriormente en el capítulo.

**Definición 1.2.8.** Decimos que  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  medible está en  $L^p$ -débil  $= L^{p,\infty}$  con  $1 \leq p < \infty$  si  $\exists C > 0$  tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq \lambda\}| \leq \frac{C^p}{\lambda^p}, \quad \forall \lambda > 0, \quad (1.1)$$

y se llama  $\|f\|_{L^{p,\infty}} := \min\{C : (1.1) \text{ es cierto}\}$ .

**Proposición 1.2.9 (Desigualdad de Tchebichev).** Sea  $f \in L^p$  entonces,

$$|\{|f| > \lambda\}| \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

*Demostración.*

$$|\{|f| > N\}| = \int_{|f|>N} 1 = \int_{|f|>N} \frac{N^p}{N^p} \leq \int_{|f|>N} \frac{|f(x)|^p}{N^p} \leq \frac{1}{N^p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p = \frac{\|f\|_p^p}{N^p}.$$

□

Visto este resultado, es claro que  $L^p \subseteq L^{p,\infty}$ . La inclusión contraria no tiene porque ser cierta, veámoslo con un ejemplo:

**Ejemplo 1.2.10.** Veamos que  $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$ .

Sea  $f(x) = \frac{1}{|x|^{1/p}} \in L^{p,\infty} \setminus L^p$ . Es claro que  $f \notin L^p$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} dx = \infty \rightarrow f \notin L^p$$

Veamos que  $f \in L^{p,\infty}$ :

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > N\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|^{1/p}} > N\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{N} > |x|^{1/p}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{N^p} > |x|\right\} = \frac{2}{N^p} \end{aligned}$$

lo cual implica que  $f \in L^{p,\infty}$  y  $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 2^{\frac{1}{p}}$ .

Estamos ahora preparados para continuar con la teoría de la función maximal de Hardy-Littlewood.

**Teorema 1.2.11 (Teorema de Hardy-Littlewood).** Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ :

a) Si  $p = 1$  entonces  $M : L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$ , es decir existe  $C_d > 0$ :

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > R\} \right| \leq \frac{C_d}{R} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall R > 0.$$

b) Si  $1 < p < \infty$  entonces  $M : L^p \rightarrow L^{p,\infty}$ , es decir existe  $C_d > 0$ :

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > R\} \right| \leq \frac{C_d}{R^p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p, \quad \forall R > 0.$$

*Nota.* Este resultado puede ampliarse a  $M : L^p \rightarrow L^p$ ,  $1 < p < \infty$  usando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Este teorema no entra entre los objetivos de este TFG, pero puede encontrarse en [8] (Capítulo II, Teorema 2.5).

Enunciamos y demostramos un lema previo que usaremos en la demostración de este teorema:

**Lema 1.2.12 (Lema de cubrimiento de Vitali).** Si  $B_1, B_2, \dots, B_N$  son bolas de  $\mathbb{R}^d$ , existe una subcolección  $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \dots, \widetilde{B}_k$  tal que:

i)  $\widetilde{B}_l$  son disjuntas dos a dos.

$$ii) \left| \bigcup_{l=1}^k \widetilde{B}_l \right| \geq \frac{1}{3^d} \left| \bigcup_{j=1}^N B_j \right|$$

*Demostración.* Podemos suponer que  $|B_1| \geq |B_2| \geq \dots \geq |B_N|$ .

Elijo  $\widetilde{B}_1 = B_1$ , la bola más grande.

Elijo  $\widetilde{B}_2$  = la siguiente bola más grande que no toca a  $\widetilde{B}_1$ , es decir: sea  $n_2 = \min\{j : \widetilde{B}_1 \cap B_j = \emptyset\}$ , entonces  $\widetilde{B}_2 = B_{n_2}$ .

Tomo  $\widetilde{B}_3$  = la siguiente bola más grande que no toca a  $\widetilde{B}_1 \cup \widetilde{B}_2$ , y así sucesivamente.

En algún momento el algoritmo para. Después de  $k$  iteraciones ya no existen más bolas disjuntas con  $\widetilde{B}_1 \cup \dots \cup \widetilde{B}_k$ . Para cualquier  $B_j$ ,

- o bien coincide con algún  $\widetilde{B}_l$
- o bien  $B_j$  corta a algunas bolas  $\widetilde{B}_{l_1}, \dots, \widetilde{B}_{l_j}$

Escojo la mayor  $\widetilde{B}_l$ . Entonces  $B_j \subseteq 3\widetilde{B}_l$ , ya que el radio de  $\widetilde{B}_l$  es mayor que el de  $B_j$ . Por tanto se tiene:

$$\left| \bigcup_{i=1}^N B_j \right| \leq \left| \bigcup_{l=1}^k 3\widetilde{B}_l \right| \leq \sum_{l=1}^k |3\widetilde{B}_l| = \sum_{l=1}^k 3^d |\widetilde{B}_l| = 3^d \left| \bigcup_{l=1}^k \widetilde{B}_l \right|$$

donde la última igualdad se da por ser los  $\widetilde{B}_l$  disjuntos. Se obtiene la desigualdad

$$\left| \bigcup_{l=1}^k \widetilde{B}_l \right| \geq \frac{1}{3^d} \left| \bigcup_{i=1}^N B_j \right|$$

□

Pasamos ahora a probar el teorema de Hardy-Littlewood:

*Nota.* En primer lugar, como  $r \mapsto \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |f|$  es continua, entonces

$$Mf(x) = \sup_{\substack{r>0 \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |f|,$$

y por ser supremo numerable de funciones medibles, es medible.

*Demostración del teorema 1.2.11:* a) Caso  $p=1$ :

Sea  $E_R = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > R\}$ . Tenemos que ver que  $|E_R| \leq \frac{C}{R} \|f\|_{L_1}$ .

Si  $x \in E_R$ , entonces  $\exists B_x$  (bola centrada en  $x$ ) tal que  $\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f| > R$ .

Tenemos que  $E_R \subseteq \bigcup_{x \in E_R} B_x$ . Como  $|E_R| = \sup\{|K| : K \subseteq E_R\}$  con  $K$  compacto, tomo uno de esos compactos  $K \subseteq E_R \subseteq \bigcup_{x \in E_R} B_x$ . Existe por tanto un recubrimiento finito  $B_1, \dots, B_N$  donde  $N = N(K)$  tal que  $K \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_N$ .

Si las bolas fueran disjuntas,

$$|K| \leq |B_1 \cup \dots \cup B_N| \leq \sum_{j=1}^N |B_j| < \sum_{j=1}^N \frac{1}{R} \int_{B_j} |f| = \frac{1}{R} \int_{\bigcup B_j} |f| \leq \frac{\|f\|_1}{R}$$

y ya lo tendríamos.

En general, las bolas  $\{B_j\}_{j=1}^N$  no serán disjuntas pero podemos usar el Lema de Vitali. Tenemos que  $K \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_N$ , por tanto

$$|K| \leq \left| \bigcup_{j=1}^N B_j \right| \leq$$

usando el lema de Vitali

$$\leq 3^d \left| \bigcup_k \widetilde{B}_l \right| = 3^d \sum_{l=1}^k |\widetilde{B}_l| < 3^d \frac{1}{R} \sum_{l=1}^k \int_{\widetilde{B}_l} |f| = \frac{3^d}{R} \int_{\bigcup_k \widetilde{B}_l} |f| \leq \frac{3^d \|f\|_1}{R} = \frac{C_d \|f\|_1}{R}.$$

Tomando el supremo sobre todos los compactos  $K$  se obtiene el resultado.

b) La misma prueba da que si  $1 < p < \infty$

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > R\}| \leq \frac{3^d}{R^p} \int |f|^p, \text{ ya que}$$

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq \sup_{x \in B} \left( \frac{1}{|B|} \int_B |f|^p \right)^{1/p} = (M|f|^p(x))^{1/p}$$

En particular,  $E_R = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > R\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : M(f^p(x)) > R^p\}$ , y repitiendo el argumento de a) lo tenemos.

Así,  $M : L^p \rightarrow L^{p,\infty}$ .

□

La función maximal de Hardy-Littlewood sirve para controlar las funciones maximales asociadas a las AIR. Veámoslo en el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.13.** Si  $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{d+1}}$ , entonces

$$M^{(\varphi)} f(x) = \sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \leq C_\varphi Mf(x), \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

*Demostración.*

$$|f * \varphi_t(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |\varphi_t(x-y)| dy \leq$$

por hipótesis

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{t^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \frac{C}{\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^{d+1}} dy \\ &= \frac{1}{t^d} \int_{|x-y| \leq t} |f(y)| \frac{C}{\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^{d+1}} dy + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{t^d} \int_{2^j t \leq |x-y| \leq 2^{j+1} t} |f(y)| \frac{C}{\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^{d+1}} dy \\ &\leq \frac{1}{t^d} \int_{B_t(x)} |f(y)| \frac{C}{1^{d+1}} dy + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{t^d} \int_{2^j t \leq |x-y| \leq 2^{j+1} t} |f(y)| \frac{C}{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)^{d+1}} dy \\ &\leq C \frac{1}{t^d} \int_{B_t(x)} |f(y)| dy + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{t^d} \int_{|x-y| \leq 2^{j+1} t} |f(y)| \frac{C}{2^{j(d+1)}} dy \\ &\leq CMf(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j} C}{2^j t^d} \int_{B_{2^{j+1} t}(x)} |f(y)| dy \\ &\leq CMf(x) \left( 1 + 2^d \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \right) = C' Mf(x). \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema será decisivo para la prueba del teorema de Convergencia Puntual de AIR (1.2.6) ya que dicha prueba se extraerá como un corolario del siguiente:

**Teorema 1.2.14.** *Sea  $\Phi = \{\varphi_t\}_{t>0}$  A.I.R. tal que*

$$i) \quad g * \varphi_t(x) \longrightarrow g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall g \in C_c$$

$$ii) \quad \text{Si } M^\Phi f(x) := \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| \text{ cumple que } M^\Phi : L^p \longrightarrow L^{p,\infty}, \text{ para algún } p \geq 1$$

Entonces, para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi_t(x) = f(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^d.$$

*Demostración.* Sea  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .

$$\text{Para } N > 0 \text{ fijo, sea } E_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup |f * \varphi_t(x) - f(x)| \geq \frac{1}{N} \right\}$$

Hay que ver que  $|E_N| = 0 \quad \forall N$ . En ese caso,  $|\bigcup E_N| = 0$  y si  $x \notin \bigcup E_N$  entonces  $\limsup_{t \rightarrow 0} |f * \varphi_t(x) - f(x)| = 0$  y por tanto  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi_t(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} x..$

$$\text{Como } M^\Phi : L^p \longrightarrow L^{p,\infty}, \quad |\{M^\Phi g > \lambda\}| \leq \frac{C \|g\|_p^p}{\lambda^p} \quad \forall \lambda > 0, \forall g \in L^p.$$

$$\text{Fijamos } \epsilon > 0 \text{ y tomamos } g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ tal que } \|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Por i),  $\exists \lim g * \varphi_t(x) = g(x) \quad \forall x$ . Entonces

$$\begin{aligned} E_N &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup [|f - g * \varphi_t(x)| + |g * \varphi_t(x) - g(x)| + |(g - f)(x)|] \geq \frac{1}{N} \right\} \\ &\subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup |(f - g) * \varphi_t(x)| + \limsup |g * \varphi_t(x) - g(x)| + |(g - f)(x)| \geq \frac{1}{N} \right\} = (1) \end{aligned}$$

donde el segundo sumando de este último conjunto es 0 por la hipótesis i).

Hemos usado el resultado recogido en el Apéndice que dice:

“ $\limsup(a_t + b_t) \leq \limsup a_t + \limsup b_t$  y si  $|F(x)| \leq |G(x)|$ , entonces

$$\{x \in \mathbb{R}^d : |F(x)| > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |G(x)| > \lambda\}.”$$

Tenemos que

$$(1) \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^d : M^\Phi(f - g)(x) + |(g - f)(x)| \geq \frac{1}{N} \right\}$$

Así,

$$|E_N| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d : M^\Phi(f - g) \geq \frac{1}{2N} \right\} \right| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |(f - g)(x)| \geq \frac{1}{2N} \right\} \right| \leq$$

usando que  $M^\Phi : L^p \longrightarrow L^{p,\infty}$  y la Desigualdad de Tchebichev(1.2.9)

$$\leq \frac{C \|f - g\|_p}{\left(\frac{1}{2N}\right)^p} + \frac{\|f - g\|_p^p}{\left(\frac{1}{2N}\right)^p} = (2N)^p (C + 1) \|f - g\|_p^p < (C + 1) \epsilon^p \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

□

Una vez llegados a este punto, extraemos como un primer Corolario de este teorema el teorema de Convergencia puntual de AIR(1.2.6). Recordamos su enunciado:

**Corolario 1.2.15 (Convergencia puntual de AIR).** Sea  $\{\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d}\varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$  donde  $\varphi \in L^1$ ,  $\int \varphi = 1$  y  $|\varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{d+1}}$ .

Entonces para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < \infty$

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} f * \varphi_t(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} x$$

*Demostración.* Aplico el teorema anterior. Veamos que se cumple ii) ya que

$$M^\Phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \varphi_t(x)| \leq C_\varphi Mf(x)$$

donde esta última desigualdad se da por la Proposición 1.2.13.

Como  $M : L^p \rightarrow L^{p,\infty}$ , por el teorema de Hardy-Littlewood (1.2.11), tenemos que  $M^\Phi : L^p \rightarrow L^{p,\infty}$  por lo que se verifica ii).

También se cumple i) por el teorema de Convergencia de AIR (teorema 1.2.4 b)). (De hecho,  $g * \varphi_t(x) \rightarrow g(x)$  uniformemente  $\forall x \in \mathbb{R}$  y  $\forall g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ).

Por tanto,

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} f * \varphi_t(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} x.$$

□

Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 1.2.16.** Sea  $\varphi(x) = \frac{1}{|B_1(0)|}\chi_{B_1(0)}(x)$ , entonces  $\varphi_t(x-y) = \frac{1}{|B_t(x)|}\chi_{B_t(x)}(y)$ .

Por tanto

$$f * \varphi_t(x) = \int f(y)\varphi_t(x-y)dy = \frac{1}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} f(y)dy$$

lo cual implica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|B_t(x)|} \int_{B_t(x)} f(y)dy = f(x) \quad \text{c.t.p.} x \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

**Corolario 1.2.17 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue).** Si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(t)dt = f(x) \quad \text{c.t.p.} x \in \mathbb{R}^d \quad (1.2)$$

*Demostración.* Basta probarlo para casi todo punto  $x \in B_N(0)$ ,  $\forall N$ .

Fijamos  $B_N(0)$  y tomamos  $f_N = f\chi_{B_{N+1}}(0) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Por el teorema de Hardy Littlewood (1.2.11) y por el teorema 1.2.14 se tiene que:

$\exists E_N$  tal que  $|E_N| = 0$  y si  $x \in B_N(0) \setminus E_N$ :

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f_N(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} f_N(x) = f(x).$$

Podemos suponer  $r \leq 1$  de modo que  $B_r(x) \subseteq B_{N+1}(0)$ ,  $\forall |x| \leq N$ , lo cual implica  $f_N(x) = f(x)$ . Por tanto se verifica 1.2  $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus (\bigcup E_N)$ .  $\square$

*Observaciones.* 1)  $Mf(x) \leq \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}$ .

2) Del teorema de diferenciación de Lebesgue se sigue que:  $|f(x)| \leq Mf(x)$  c.t.p. x.

3) Consideramos la función  $f(x) = \chi_{(-1,1)}$ . Su función maximal viene dada por:

$$Mf(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 1/2 & \text{si } x = -1, 1 \\ \frac{1}{1+|x|} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Vemos en este caso que  $f(x) = \chi_{(-1,1)} \in L^p$ ,  $\forall 1 \leq p < \infty$  pero  $Mf(x) \notin L^1(\mathbb{R})$  ya que

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{1+|x|} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]_1^\infty = \infty.$$

## Capítulo 2

# La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

En este capítulo, las principales referencias son [3] y [8].

### 2.1. Definición y primeras propiedades.

**Definición 2.1.1.** Sea  $f$  una función tal que  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , se define la **transformada de Fourier de  $f$**  como

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

**Proposición 2.1.2 (Propiedades algebraicas de la transformada de Fourier).**  
Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , sus propiedades algebraicas son:

i) **Linealidad**

$$(\alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g})(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ii) **Conjugación**

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$$

iii) **Traslación:** Llamando  $\mathcal{T}_h f(x) = f(x+h)$ ,

$$\widehat{\mathcal{T}_h f}(\xi) = e^{2\pi i h \xi} \widehat{f}(\xi)$$

iv) **Dilatación**

$$[\widehat{f(\frac{\cdot}{R})}] = R^d \widehat{f}(R\xi)$$

v) **Modulación:** Sea  $g(x) = e^{2\pi i h x} f(x)$ , entonces

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - h)$$

*Demostración.* i) Se prueba trivialmente usando la linealidad de la integral de Lebesgue y sacando las constantes fuera de la integral.



ii)

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(s)e^{-2\pi is\xi} ds = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(s)e^{2\pi is\xi} ds} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$$

iii)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+h)e^{-2\pi ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-2\pi i(u-h)\xi} du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{2\pi ih\xi} e^{-2\pi iu\xi} du = e^{2\pi ih\xi} \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = x + h$ .

iv)

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{R}\right)e^{-2\pi ix\xi} dx = R^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-2\pi iRu\xi} du = R^d \widehat{f}(R\xi).$$

Haciendo en este caso el cambio de variable  $\frac{x}{R} = u$ .

v) Usando la definición de transformada de Fourier,  $\widehat{g}(\xi) = \mathcal{T}_{-h}(\widehat{f})(\xi) = \widehat{f}(\xi - h)$ . □

**Proposición 2.1.3 (Transformada de Fourier de una convolución).** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

*Demostración.*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)e^{-2\pi ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-s)g(s) ds \right) e^{-2\pi ix\xi} dx =$$

usando el teorema de Fubini (ver Apéndice A.15)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} g(s) \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x-s)e^{-2\pi ix\xi} dx \right) ds = \int_{\mathbb{R}^d} g(s) \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi i(y+s)\xi} dy \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(s) \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi iy\xi} e^{-2\pi is\xi} dy \right) ds = \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(s)e^{-2\pi is\xi} ds \right) \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $y = x - s$ . □

**Proposición 2.1.4.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces se verifica:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x) dx.$$

*Demostración.*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi ixy} dy \right) dx =$$

aplicando el teorema de Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\widehat{f}(y) dy.$$

□

**Proposición 2.1.5 (Propiedades analíticas de la transformada de Fourier).** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces:

i)  $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$  y  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ .

ii) Si  $f$  es derivable,  $f, \partial_{x_i} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  entonces

$$\partial_{x_i} \widehat{f}(\xi) = 2\pi i \xi_i \widehat{f}(\xi).$$

iii) Si  $xf(x) \in L^1$ , entonces  $\widehat{f}$  derivable y

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi}(\xi) = -2\pi i x \widehat{f}(\xi).$$

iv) **Lema de Riemann-Lebesgue** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ .

*Demostración.* i)

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) e^{-2\pi i x \xi}| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |e^{-2\pi i x \xi}| dx = \|f\|_1 \end{aligned}$$

ya que  $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$  por ser un elemento de la circunferencia unidad.

Veamos ahora que  $\widehat{f}$  es uniformemente continua:

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{-2\pi i (\xi + h)s} ds - \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{-2\pi i \xi s} ds \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{-2\pi i \xi s} (e^{-2\pi i h s} - 1) ds \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)| |e^{-2\pi i h s} - 1| ds \end{aligned}$$

donde  $f_h(x) = |f(s)| |e^{-2\pi i h s} - 1| \rightarrow 0$  puntualmente  $\forall s$ .

Tenemos que probar que la última integral converge a 0 cuando  $h \rightarrow 0$ . Para ello, haremos uso del Teorema de la Convergencia Dominada. Tenemos que encontrar una función integrable que acote a nuestra función  $f_h(x)$ .

Vemos que  $|f(s)| |e^{-2\pi i h s} - 1| \leq 2|f(s)| \in L^1$ , por tanto en virtud del teorema de la Convergencia Dominada (Apéndice A.11),

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(s)| |e^{-2\pi i h s} - 1| ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Por tanto,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall |h| < \delta$  se tiene  $\int_{\mathbb{R}^d} |f(s)| |e^{-2\pi i h s} - 1| ds < \varepsilon$ . Lo cual implica que  $\widehat{f}$  es uniformemente continua.

ii) Demostramos para dimensión  $d = 1$ . Sea  $N > 0$ , integrando por partes respecto de  $x$ :

$$\int_{-N}^N \partial_x f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[ f(x) e^{-2\pi i x \xi} \right]_{-N}^N + 2\pi i \xi \int_{-N}^N f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

haciendo  $N \rightarrow \infty$  lo tenemos. La generalización al caso  $\mathbb{R}^d$  es inmediata.

iii)

$$\widehat{[-2\pi i x f]}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} -2\pi i s f(s) e^{-2\pi i s \xi} ds = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( e^{-2\pi i s \xi} \right) f(s) ds =$$

ya que  $\left| \frac{\partial}{\partial \xi} (e^{2\pi i s \xi} f(x)) \right| = |2\pi s f(s)| \in L^1$ , usando el teorema de derivación bajo el signo integral

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{-2\pi i s \xi} ds = \frac{\partial}{\partial \xi} \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}'(\xi).$$

iv) Sea  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi_j} \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \left[ \varphi(x', x_j) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi_j} \right]_{x_j=-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi_j} dx_j \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i \xi_j} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \end{aligned}$$

Así,

$$2\pi i \xi_j \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\partial_{x_j} \varphi}(\xi).$$

Por tanto,

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| = \frac{|\widehat{\partial_{x_j} \varphi}(\xi)|}{2\pi |\xi_j|} \leq \frac{\|\partial_{x_j} \varphi\|_1}{2\pi |\xi_j|} = \frac{C_1}{|\xi_j|} \quad (2.1)$$

Por otro lado

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \|\varphi\|_1 = C_2 \quad (2.2)$$

Combinando 2.1 y 2.2 tendremos que

$$(1 + |\xi_j|) |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C_1 + C_2$$

lo que es equivalente a

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{C_1 + C_2}{1 + |\xi_j|}.$$

Iterando tendremos

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{C'_\varphi}{\max_{1 \leq j \leq d} (1 + |\xi_j|)} \leq \frac{C''_\varphi}{1 + |\xi|} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.$$

En general, si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  tal que  $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$ . Por consiguiente:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f - \varphi}(\xi)| + |\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \|f - \varphi\|_1 + \frac{C_\varphi}{1 + |\xi|} \leq \varepsilon + \varepsilon$$

si  $|\xi| \geq R_0(\varphi, \varepsilon)$  grande. □

## 2.2. Ejemplos de cálculo de transformadas de Fourier.

**Ejemplo 2.2.1.** Sea  $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ , su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-a}^a e^{-2\pi i x \xi} dx = \left[ \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right]_{x=-a}^{x=a} \\ &= \frac{e^{-2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi} - \frac{e^{2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{-1}{\pi \xi} \left( \frac{e^{-2\pi i a \xi} - e^{2\pi i a \xi}}{2i} \right) = \frac{1}{\pi \xi} \left( \frac{e^{2\pi i a \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{2i} \right) \\ &= \frac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi} \end{aligned}$$

por la definición compleja del seno.

En particular,  $\widehat{\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}}(\xi) = \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}$ , que es lo que se conoce como “seno cardinal”.

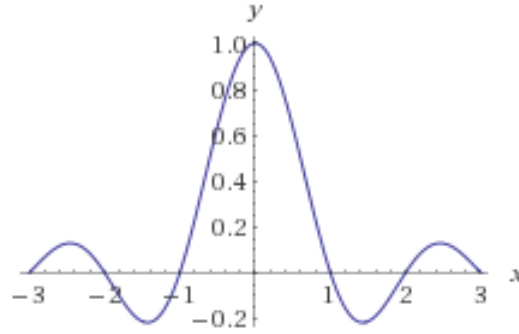


Figura 1.1: Función seno cardinal.

**Ejemplo 2.2.2.** Consideramos  $f(x) = e^{-2\pi|x|}$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x| - 2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi x(1-i\xi)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi x(1+i\xi)} dx = \left[ \frac{e^{2\pi x(1-i\xi)}}{2\pi(1-i\xi)} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-2\pi x(1+i\xi)}}{-2\pi(1+i\xi)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi(1-i\xi)} + \frac{1}{2\pi(1+i\xi)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+i\xi+1-i\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\xi^2}. \end{aligned}$$

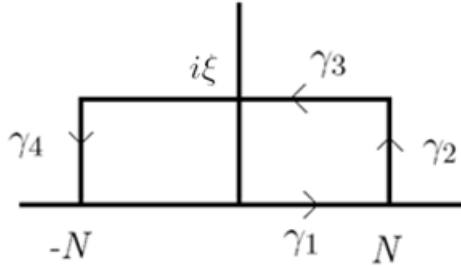
**Ejemplo 2.2.3.** Sea  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ , vamos a probar que su transformada de Fourier es ella misma:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi - \xi^2)} e^{-\pi\xi^2} dx \\ &= e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = (*) = e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2} du = e^{-\pi\xi^2}\end{aligned}$$

ya que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$  (esta integral se resuelve trivialmente mediante un cambio a polares como probaremos en la nota abajo de este ejemplo) y haciendo uso del cambio de variable "formal"  $x + i\xi = u$  en (\*).

Vamos a justificar este cambio de variable mediante el uso de variable compleja:

Consideramos  $F(z) = e^{-\pi z^2}$ , función holomorfa, y el recinto:



con  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ . Sabemos que

$$0 = \int_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F(z) dz$$

Basta ver que:  $\left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right|, \left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Veámoslo para  $\gamma_2 = N + it, t \in [0, \xi]$ :

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_2} F(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \right| = \left| \int_0^\xi e^{-\pi(N+it)^2} i dt \right| \\ &= \left| \int_0^\xi e^{-\pi(N^2 - t^2 + 2iNt)} dt \right| \leq \int_0^\xi e^{-\pi N^2} e^{\pi t^2} dt \\ &\leq e^{-\pi N^2} e^{\pi \xi^2} \xi \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Un cálculo análogo lo prueba para  $\gamma_4$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} F(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N F(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

como queríamos demostrar.

*Nota.* Veamos que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ .

Sea  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $h(x, y) = f(x)f(y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} h = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} f = \left( \int_{\mathbb{R}} f \right)^2$$

Haciendo un cambio a polares:

$x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} h(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta &= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\rho=0}^{+\infty} e^{-\pi\rho^2} \rho \, d\rho d\theta \\ &= 2\pi \left[ \frac{e^{-\pi\rho^2}}{-2\pi} \right]_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

### 2.3. Transformada de Fourier inversa.

Una vez llegados a este punto, podemos preguntarnos: ¿Es posible recuperar la función inicial  $f$  a partir de su transformada  $\widehat{f}$ ?

Para ello contamos con el siguiente teorema, uno de los más importantes dentro de esta teoría:

**Teorema 2.3.1 (Teorema de inversión).** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y suponemos que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \text{c.t.p.x.}$$

*Nota.* Se suele denotar  $\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$  y se le llama **Transformada de Fourier Inversa** (IFT).

*Demostración.* Queremos ver  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$ .

Tomamos  $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$  con  $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ .

Usando la proposición 2.1.3, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f * \varphi_t}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \widehat{\varphi_t}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right) \widehat{\varphi_t}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \quad (a)$$

Por la proposición 2.1.2, usando la propiedad de dilatación y que  $\widehat{\varphi} = \varphi$  (ejemplo 2.2.3) tenemos que

$$\widehat{\varphi_t}(\xi) = \widehat{\varphi}(t\xi) = \varphi(t\xi) = e^{-\pi|\xi|^2|t|^2}.$$

Por tanto, usando ésto y el teorema de Fubini

$$(a) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|t\xi|^2} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) dy = \quad (b)$$

Por el ejemplo 2.2.3, tenemos que

$$e^{-\pi|t\xi|^2}(y-x) = \frac{1}{t^d} e^{-\pi\left|\frac{x-y}{t}\right|^2} = \varphi_t(x-y)$$

por lo que:

$$(b) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi_t(x-y)dy = f * \varphi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) \quad c.t.p.x \quad (1)$$

donde ésto último ocurre por el teorema 1.2.6 de convergencia puntual de aproximación de la identidad regular probado en el Capítulo 1.

Por otra parte tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f * \varphi_t}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi|\xi t|^2} e^{2\pi i x \xi} d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^0 e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

donde ésto último se tiene ya que  $\widehat{f} \in L^1$  y por el Teorema de la Convergencia Dominada.

Igualando (1) y (2) vemos que:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad c.t.p.x.$$

□

Obsérvese que la función de la derecha es continua en todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Por tanto, hemos probado que : Si  $f$  y  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , entonces se puede modificar  $f$  en un conjunto de medida nula de modo que  $f \in C(\mathbb{R}^d)$ .

En virtud de este teorema, puede probarse la unicidad de la transformada de Fourier:

**Corolario 2.3.2.** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  y  $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $f(x) = g(x)$  c.t.p.  $x$ .

*Demostración.* Sean  $f - g = h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Por la linealidad y por hipótesis se tiene que

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi) = 0$$

y  $\widehat{h}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Entonces tenemos:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{h}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = 0 \Rightarrow f(x) = g(x), \quad c.t.p.x.$$

□

## Capítulo 3

# La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Para la construcción de este capítulo hemos seguido principalmente las referencias [3] y [7].

El segundo teorema fundamental de la teoría de la transformada afirma que la transformada de Fourier es una transformación unitaria en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dicho teorema es el que da nombre a la siguiente sección.

### 3.1. El Teorema de Plancherel.

**Teorema 3.1.1 (Plancherel).** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  y además

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (\text{es una isometría}).$$

*Demostración.* Sea  $\varphi_t(x) = \frac{1}{t^d} \varphi(\frac{x}{t})$  con  $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , se tiene:

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f * \varphi_t}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi_t}(\xi)|^2 d\xi.$$

Usando que  $|\widehat{f}(\xi)|^2 = \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)}$ , la propiedad de conjugación de la transformada de Fourier, y que  $\widehat{\varphi_t}(\xi) = e^{-\pi|t\xi|^2}$  (transformada calculada en la demostración del teorema de Inversión), se sigue:

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(y)} e^{2\pi i y \xi} dy \right) e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi =$$

como  $|f(x)||f(y)|e^{-2\pi|t\xi|^2} \in L^1(dx dy d\xi)$ , podemos usar el teorema de Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{f(y)} \left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi|t\xi|^2} e^{-2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right) dx dy.$$

Como  $e^{-2\pi|t\xi|^2} = e^{-\pi|\sqrt{2t}\xi|^2}$ , se tiene  $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi|t\xi|^2} e^{-2\pi i(x-y)\xi} d\xi = \varphi_{\sqrt{2t}}(x-y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{\varphi_{\sqrt{2t}} * f(x)} dx = \langle f, \varphi_{\sqrt{2t}} * f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_2^2$$

ya que  $\varphi_{\sqrt{2t}} * f \xrightarrow{t \rightarrow 0} f$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  por el teorema 1.2.4 de Convergencia en  $L^p$  de AIR visto en el Capítulo 1.



Por tanto hemos llegado a:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

Por otro lado la primera integral, por el teorema de la Convergencia Dominada converge a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \lim_{t \rightarrow 0} e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

por tanto,

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ y } \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

□

**Corolario 3.1.2.** *Existe un único isomorfismo isométrico*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

tal que

- 1)  $\mathcal{F}f = \widehat{f}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$
- 2)  $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$
- 3)  $\mathcal{F}^{-1}f = \check{f}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema A.6 del Apéndice. □

Si  $f \in L^2$ , la definición de  $\mathcal{F}f$  por densidad es demasiado abstracta, y nos gustaría tener una fórmula explícita.

**Corolario 3.1.3.** *Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\mathcal{F}f(\xi) = L^2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$ .*

*Es decir  $g_R(\xi) = \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$  cumple  $\|\mathcal{F}f - g_R\|_2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ .*

*Demostración.*

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \chi_{|x| \leq R} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(por Hölder o Cauchy-Schwarz). Por tanto, por el teorema 3.1.1 se tiene que:

$$g_R(\xi) = \widehat{\chi_{|x| \leq R} f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Además, si  $R' \geq R$

$$\|g_R - g_{R'}\|_2^2 = \left\| \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - \int_{|x| \leq R'} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right\|_2^2 = \|\widehat{\chi_{R \leq |x| \leq R'} f}\|_2^2 =$$

de nuevo por el teorema 3.1.1

$$= \|\chi_{R \leq |x| \leq R'} f\|_2^2 = \int_{R \leq |x| \leq R'} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

por el teorema de la Convergencia Dominada.

Con lo cual, volviendo a (\*), tenemos que  $g_R$  es de Cauchy y por tanto converge en  $L^2$  al ser un espacio completo. Además,  $\|\chi_{|x| \leq R} f - f\|_2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ .

Por el teorema de densidad  $\mathcal{F}f = L^2 - \lim \widehat{\chi_{|x| \leq R} f} = L^2 - \lim g_R$ . □

**Corolario 3.1.4.** Si  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , entonces  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi$ .

*Demostración.* Por el teorema 3.1.1,  $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \forall f$ . Por el lema A.8 probado en el Apéndice se tiene que:

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle \forall f, g \in L^2$$

lo que por definición de producto escalar en  $L^2$  implica:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

□

## 3.2. Ejemplo de aplicación del teorema de Plancherel.

Sabiendo que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty$ , podemos pensar que la integral de la misma función al cuadrado no va a ser finita, lo cual es erróneo, ya que tiene un valor finito  $\pi$ , que se calcula fácilmente usando transformadas y el teorema de Plancherel.

Sin estas herramientas, el cálculo es mucho más complejo. Veamos en primer lugar la primera afirmación que hemos hecho, y posteriormente calcularemos  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right)^2 dx$ .

■

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx$$

y como  $|x|$  es una función par:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$$

Consideramos la siguiente acotación inferior:

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(x)|}{k\pi} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

ya que como  $\sin(x)$  es impar,  $|\sin(x)|$  es par, luego  $\forall k$  con  $k = 1, 2, \dots, n$  se verifica:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

pero como la serie  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  diverge, al tratarse de la serie armonica, entonces tenemos que nuestra integral de partida diverge.

Vamos a probar ahora que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right)^2 dx = \pi$ .

- Por el teorema 3.1.1 sabemos que  $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ .

Buscamos  $f$  tal que  $\frac{\sin(\xi)}{\xi} = \widehat{f}(\xi)$ .

Por el ejemplo 2.2.1, podemos ver que  $f$  sería de la forma  $f(x) = \pi\chi_{(-a,a)}$  con  $a = \frac{1}{2\pi}$ . Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right)^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \pi^2 \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} dx = \pi$$

Éste es un ejemplo de función tal que  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  y  $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

## Capítulo 4

# La transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Ete capítulo esta principalmente basado en [7] y [8].

### 4.1. El Teorema de Hausdorff-Young.

Teniendo definida la transformada de Fourier para funciones en  $L^1(\mathbb{R}^d)$  y para funciones en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , podemos definir la transformada de Fourier sobre la clase  $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ . Como caso especial tenemos  $L^p \subseteq L^1 + L^2$  si  $1 \leq p \leq 2$ .

**Ejemplo 4.1.1.** Sea  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Consideramos la partición  $f = f_1 + f_2 = f\chi_{|f| \geq 1} + f\chi_{|f| < 1}$ .

- $f_1$  está en  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Veámoslo:

$$\int_{|f| \geq 1} |f(x)| dx = \int_{|f| \geq 1} |f(x)|^{p-1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |f(x)|^{p-1} dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty$$

ya que  $f \in L^p$ .

- $f_2$  está en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ya que:

$$\int_{|f| < 1} |f(x)|^2 dx \leq \int_{|f| < 1} |f(x)|^p |f(x)|^{2-p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Observar que  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq 2$  se puede descomponer como suma de dos funciones, una en  $L^1(\mathbb{R}^d)$  y otra en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Definición 4.1.2.** Si  $1 \leq p \leq 2$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , entonces se puede definir:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}_1(\xi) + \mathcal{F}f_2(\xi)$$

si  $f = f_1 + f_2 \in L^1 + L^2$

Veamos que está bien definida la transformada de esta manera:

Si  $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$  con  $g_i \in L^i(\mathbb{R}^d)$  con  $i = 1, 2$ ; entonces

$$g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Como las definiciones de la transformada de Fourier coinciden sobre  $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ , tenemos que

$$\widehat{g_1 - f_1} = \widehat{f_2 - g_2} = \mathcal{F}(f_2 - g_2) \Rightarrow \widehat{g_1} - \widehat{f_1} = \mathcal{F}f_2 - \mathcal{F}g_2 \Rightarrow \widehat{g_1} + \mathcal{F}g_2 = \widehat{f_1} + \mathcal{F}f_2$$

Aunque la definición sólo nos dice que la transformada está en  $L^\infty + L^2$ , en realidad existe un resultado más preciso, que dice que  $\mathcal{F}f$  está en  $L^{p'}$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . De hecho, se verifica lo siguiente:

**Teorema 4.1.3 (Hausdorff-Young).** *Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p \leq 2$ , entonces  $\mathcal{F}f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  y*

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

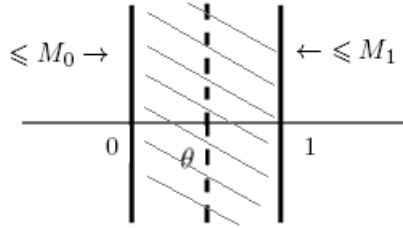
Para realizar la demostración de este teorema es necesario un teorema previo de Interpolación que probamos a continuación.

## 4.2. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

Para esta sección, usaremos las referencias [4] y [6]. El teorema que da nombre a esta sección también precisa de un lema previo:

**Lema 4.2.1 (Lema de las tres líneas).** *Supongamos que  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en el  $\text{Int}(A)$ , siendo  $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ ,  $\phi$  continua y acotada en  $\bar{A}$ . Además, supongamos que  $|\phi(z)| \leq M_0$  en  $\{\Re(z) = 0\}$  y  $|\phi(z)| \leq M_1$  en  $\{\Re(z) = 1\}$ . Entonces  $\forall y \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 1)$ ,*

$$|\phi(\theta + iy)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$



*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , si  $z \in A$  considero

$$\phi_\varepsilon(z) = \phi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon z(z-1)}.$$

Entonces si  $\Re(z) = 0$ , tenemos

$$|\phi_\varepsilon(iy)| \leq \left| M_0 M_0^{iy-1} M_1^{-iy} e^{\varepsilon iy(iy-1)} \right| = \left| e^{-\varepsilon y^2} \right| \leq 1$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que  $|a^{it}| = 1, \forall t \in \mathbb{R}, a > 0$ . Análogamente,

$$|\phi_\varepsilon(1 + iy)| \leq M_1 \left| M_0^{1+iy-1} M_1^{-(1+iy)} e^{\varepsilon(1+iy)(1+iy-1)} \right| = \left| e^{iy \log(\frac{M_0}{M_1})} e^{-\varepsilon y^2} e^{\varepsilon iy} \right| \leq 1.$$

Como  $\phi_\varepsilon$  es holomorfa en  $\text{Int}(A)$ , vemos que satisface las hipótesis del lema (tomando  $M_0$  y  $M_1$  igual a 1). Para ver que está acotada, tomo cualquier  $\theta \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} |\phi_\varepsilon(\theta + iy)| &= \left| \phi(\theta + iy) M_0^{\theta+iy-1} M_1^{-\theta-iy} e^{\varepsilon(\theta+iy)(\theta+iy-1)} \right| \\ &= |\phi(\theta + iy)| \left| M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} e^{\varepsilon(\theta^2-\theta-iy^2)} e^{\varepsilon iy(2\theta-1)} \right| \\ &= |\phi(\theta + iy)| \left| M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} e^{-\varepsilon\theta(1-\theta)} \right| e^{-\varepsilon y^2} \leq C e^{-\varepsilon y^2}, \quad C > 0 \end{aligned}$$

siendo  $C = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left( M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \right) \max_{\bar{A}} |\phi|$ . Esto se sigue del hecho de que  $\max_{\bar{A}} |\phi|$  es acotado en  $A$ .

Como  $e^{-\varepsilon y^2} \rightarrow 0$  si  $|y| \rightarrow \infty$ , se sigue que  $|\phi_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$  si  $|\Im(z)| \rightarrow \infty$ .

Entonces, podemos tomar  $L$  suficientemente grande tal que  $|\phi_\varepsilon(z)| \leq 1$  en la frontera del rectángulo  $0 \leq \Re(z) \leq 1$  y  $-L \leq \Im(z) \leq L$ .

Por el Principio del módulo máximo (recogido en el lema A.14 del Apéndice) se tiene que  $|\phi_\varepsilon(z)| \leq 1$  en el interior del rectángulo también.

Como ésto vale para cualquier  $L$  suficiente grande, tenemos que  $|\phi_\varepsilon(z)| \leq 1$  en todo el conjunto  $A$ .

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\phi_\varepsilon(z)| = |\phi(z)| M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \leq 1, \quad \forall \theta = \Re(z) \quad (0 < \theta < 1)$$

Por tanto,

$$|\phi(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \forall z \in A.$$

□

**Teorema 4.2.2 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin).** Sean  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  espacios de medida y  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ .

Para  $0 < \theta < 1$ , definimos  $p, q$  como:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si  $T$  es un operador lineal de  $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$  en  $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$  tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \forall f \in L^{p_0}(\mu) \text{ y}$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}, \quad \forall f \in L^{p_1}(\mu)$$

Entonces:

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

Para la prueba de este teorema, haremos uso de los siguientes lemas:

**Lema 4.2.3.** Si  $T : L^{p_0} + L^{p_1} \longrightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$  entonces  $\int |T\chi_E| \cdot \chi_F d\nu < \infty \forall E \in \mathcal{M}, F \in \mathcal{N}$  con medida finita.

*Demostración.*  $\chi_E \in L^{p_0} + L^{p_1}$  si  $\mu(E) < \infty$ , por tanto  $T(\chi_E) = h_0 + h_1$  con  $h_0 \in L^{q_0}$  y  $h_1 \in L^{q_1}$ .

$$\int_F |T(\chi_E)| \leq \int_F |h_0| + \int_F |h_1| \leq \left( \int_F |h_0|^{q_0} \right)^{1/q_0} (\mu(F))^{1/q_0'} + \left( \int_F |h_1|^{q_1} \right)^{1/q_1} (\mu(F))^{1/q_1'} < \infty$$

□

**Lema 4.2.4.** Si  $a > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$  entonces  $|a^z| = a^{\Re(z)}$ .

*Demostración.* Sea  $z = x + iy$ ,

$$|a^z| = |e^{z \ln a}| = |e^{(x+iy) \ln a}| = |e^{x \ln a} e^{iy \ln a}| = |e^{x \ln a}| |e^{iy \ln a}| = e^{\ln a^x} = a^x.$$

□

*Demostración del teorema 4.2.2.* Distinguiamos dos casos:

- Probemos primero el caso  $p_0 = p_1 = p$ . Aplicando el corolario A.13 del teorema de Hölder tenemos:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q &\leq \|Tf\|_{q_0}^{1-\theta} \|Tf\|_{q_1}^\theta \leq M_0^{1-\theta} \|f\|_{p_0}^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{p_0}^\theta \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \end{aligned}$$

- A continuación se puede suponer que  $p_0 \neq p_1$ , y en particular  $1 < p < \infty$  para  $0 < \theta < 1$ .

Sea  $\Sigma_x$  (respectivamente  $\Sigma_y$ ), el espacio de las funciones simples en  $X$  (respectivamente en  $Y$ ). Entonces  $\Sigma_x$  es denso en  $L^p(\mu)$  para  $p < \infty$  (análogo para  $\Sigma_y$ ).

La idea es probar que  $\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p \forall f \in \Sigma_x$ . Usaremos el hecho de que

$$\|Tf\|_q = \sup \left\{ \left| \int_Y (Tf)g d\nu \right| : g \in \Sigma_y \text{ y } \|g\|_{q'} = 1 \right\},$$

(ver [6], teorema 6.14) donde  $q'$  es el exponente conjugado de  $q$ . Además, podemos suponer que  $\|f\|_p = 1$ .

A partir de esto queremos ver:

$$\left| \int_Y (Tf)g d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \forall g \in \Sigma_y \text{ tal que } \|g\|_{q'} = 1.$$

Sea  $f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{E_j}$  y  $g = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{F_k}$ , donde los  $E_j$  y los  $F_k$  son disjuntos dos a dos en  $X$  e  $Y$  respectivamente, y  $c_j, d_k \neq 0$ . Consideramos los coeficientes en su forma polar  $c_j = |c_j| e^{i\gamma_j}$ ,  $d_k = |d_k| e^{i\psi_k}$ .

Sean  $\alpha(z) = (1-z)p_0^{-1} + zp_1^{-1}$ ,  $\beta(z) = (1-z)q_0^{-1} + zq_1^{-1}$ .

Por tanto  $\alpha(\theta) = p^{-1}$  y  $\beta(\theta) = q^{-1}$  para  $0 < \theta < 1$ . Fijamos  $\theta \in (0, 1)$ . Habíamos supuesto que  $p < \infty$ , por tanto  $\alpha(\theta) > 0$ . Definimos

$$f_z = \sum_{j=1}^m |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j}$$

y

$$g_z = \sum_{k=1}^n |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i\psi_k} \chi_{F_k}$$

si  $\beta(\theta) \neq 1$ . Mientras que si  $\beta(\theta) = 1$ , definimos  $g_z = g \forall z$ . Definimos finalmente

$$\phi(z) = \int (Tf_z) g_z d\nu.$$

Si  $\beta(\theta) = 1$ ,

$$\phi(z) = \sum_{j,k} |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |d_k| e^{i(\gamma_j + \psi_k)} \int (T\chi_{E_j}) \chi_{F_k}.$$

y si  $\beta(\theta) \neq 1$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_Y (Tf_z) g_z d\nu = \int T \left( \sum_{j=1}^m |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j} \right) \left( \sum_{k=1}^n |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i\psi_k} \chi_{F_k} \right) d\nu \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i(\gamma_j + \psi_k)} \int_Y (T\chi_{E_j}) \chi_{F_k} d\nu \end{aligned}$$

por lo que se tiene que  $\phi$  es una función holomorfa de  $z$  y continua en el conjunto  $0 \leq \Re(z) \leq 1$ . Además está acotada en dicho conjunto por los dos lemas anteriores.

Notar que  $\phi(\theta) = \int_Y (Tf) g d\nu$  ya que, tomando  $z = \theta$ ,

$$f_\theta = \sum_{j=1}^m |c_j|^{\frac{\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}} e^{i\gamma_j} \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^m |c_j| e^{i\gamma_j} \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{E_j} = f.$$

Análogamente  $g_\theta = g$ .

Por el lema de las tres líneas es suficiente ver que  $|\phi(z)| \leq M_0$  para  $\Re(z) = 0$  y  $|\phi(z)| \leq M_1$  para  $\Re(z) = 1$ .

Como  $\alpha(iy) = p_0^{-1} + iy(p_1^{-1} - p_0^{-1})$  y  $1 - \beta(iy) = (1 - q_0^{-1}) - iy(q_1^{-1} - q_0^{-1})$ , para  $y \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$|f_{iy}| = |f|^{\Re\left[\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}\right]} = |f|^{p/p_0}, \quad |g_{iy}| = |g|^{\Re\left[\frac{1-\beta(iy)}{1-\beta(\theta)}\right]} = |g|^{q'/q_0'}.$$

Por la Desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} |\phi(iy)| &= \left| \int_Y (Tf_{iy}) g_{iy} d\nu \right| \leq \|Tf_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q_0'} \leq M_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q_0'} \\ &= M_0 \|f\|_{p_0}^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{q_0'}^{\frac{q'}{q_0'}} = M_0. \end{aligned}$$



Análogamente vemos que  $|f_{1+iy}| = |f|^{\frac{p}{p_1}}$ ,  $|g_{1+iy}| = |g|^{\frac{q'}{q_1}}$  y por tanto

$$\begin{aligned} |\phi(1+iy)| &= \left| \int_y (Tf_{1+iy}) g_{1+iy} d\nu \right| \leq \|Tf_{1+iy}\|_{q_1} \|g_{1+iy}\|_{q_1'} \leq M_1 \|f_{1+iy}\|_{p_1} \|g_{1+iy}\|_{q_1'} \\ &= M_1 \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_1}} = M_1. \end{aligned}$$

Por tanto, como se verifican las hipótesis del lema de las tres líneas, tenemos el resultado que queríamos. □

Una vez llegados a este punto, pasamos a demostrar el teorema de Hausdorff-Young:

*Demostración del teorema 4.1.3.* Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

tal que  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

con  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

Además todo  $1 < p < 2$  se puede escribir de la forma  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$ ,  $0 < \theta < 1$  y también  $\frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ .

Por tanto, por el teorema de interpolación de Riesz-Thorin se tiene:

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

y  $\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . □

Al igual que probamos en el Corolario 3.1.3, en el que se obtenía una fórmula explícita de transformada en  $L^2$ , nos preguntamos si existirá una fórmula similar en  $L^p$ . Veamos que sí.

**Corolario 4.2.5.** Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 < p < 2$ , entonces

$$\mathcal{F}f(\xi) = L^{p'} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Es decir  $g_R(\xi) = \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$  cumple  $\|\mathcal{F}f - g_R\|_{p'} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ .

*Demostración.*

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \chi_{|x| \leq R} f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Lo cual implica, por el teorema 4.1.3 que

$$g_R(\xi) = \widehat{\chi_{|x| \leq R} f}(\xi) \in L^{p'}(\mathbb{R}^d).$$

Además,

$$\|g_R - g_{R'}\|_{p'} = \|\widehat{\chi_{R \leq |x| \leq R'} f}\|_{p'} \leq \|\chi_{R \leq |x| \leq R'} f\|_p = \left( \int_{R \leq |x| \leq R'} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

por el teorema de la Convergencia Dominada.

Tenemos por tanto que  $g_R$  es de Cauchy en  $L^{p'}$  y como  $\chi_{\{|x| \leq R\}} f \xrightarrow{L^p} f$ , entonces  $g_R = \mathcal{F}(\chi_{\{|x| \leq R\}} f) \xrightarrow{L^{p'}} \mathcal{F}f$ . □

## Capítulo 5

# Aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de EDPs.

En este capítulo seguiremos principalmente la referencia [3]. En él, nos dedicaremos a aplicar lo que hemos estudiado acerca de la transformada de Fourier al estudio de algunas EDPs: la ecuación del calor, la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas.

Trabajaremos a partir de ahora con funciones de la clase de Schwartz  $\mathcal{S}$ , funciones de decaimiento rápido  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^d$ , lo que nos simplificará el estudio. Sabemos que en el análisis de estas ecuaciones es importante que las funciones tengan un comportamiento lo más general posible, en particular, podrían ser discontinuas. Sin embargo, lo que perdemos en generalidad considerando funciones de la clase de Schwartz lo ganamos en claridad.

Nuestro estudio en este contexto restringido nos permitirá explicar ciertas ideas básicas en su forma más simple.

Antes de pasar al estudio de algunas EDPs, daremos la definición de clase de Schwartz y algunos resultados relevantes relacionados con ello.

**Definición 5.0.6.** Una función  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  decimos que pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si:

- i)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
- ii)  $\forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d, \forall N \in \mathbb{N}$  se tiene  $|D^\beta f(x)| \leq \frac{C_{\beta, N}}{(1+|x|)^N}$ .

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 5.0.7.** 1) Si  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  entonces  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

2)  $f(x) = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

3)  $e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  porque no es derivable en  $x = 0$ .

**Proposición 5.0.8.**  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si y solo si  $x^\alpha D^\beta f(x) \in L^\infty$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ .  
(donde  $x^\alpha D^\beta f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_d}^{\beta_d} f(x)$ ).

Antes de demostrar la proposición, enunciaremos y demostramos el siguiente lema:

**Lema 5.0.9.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{C_k} |x|^k \leq \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \leq C_k |x|^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ .

*Demostración.* Como  $\frac{\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|}{|x|^k}$  es continua y no nula en la esfera,  $\exists C_k > 0$  tal que

$$\frac{1}{C_k} \leq \frac{\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|}{|x|^k} \leq C_k \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |x| = 1. \quad (1)$$

Si  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , entonces  $x = rw$  con  $|w| = 1$ , por lo que (1) sigue siendo cierto por ser polinomios homogéneos.  $\square$

*Demostración Proposición 5.0.8.* “ $\Rightarrow$ ”

$$\left| x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} D^\beta f(x) \right| \leq |x|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \left| D^\beta f(x) \right| \leq (1 + |x|)^{|\alpha|} \left| D^\beta f(x) \right| \leq C_{\beta, |\alpha|} < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

“ $\Leftarrow$ ” Usando el lema anterior,

$$(1 + |x|)^N \left| D^\beta f(x) \right| = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} |x|^k \left| D^\beta f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} C_k \sum_{|\alpha|=k} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| \leq \widetilde{C}_{N, \beta} < \infty.$$

$\square$

Veamos un último resultado de estas funciones relacionado con su transformada de Fourier:

**Teorema 5.0.10.**  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  si y solo si  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

*Demostración.* Recordemos de la proposición 2.1.5 que

$$D^\beta(\widehat{f})(\xi) = (-2\pi i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta f(x))}(\xi)$$

y

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} \widehat{D^\alpha f}(\xi)$$

que se verifica  $\forall f \in \mathcal{S}$ . Combinando estas dos igualdades

$$\xi^\alpha D^\beta(\widehat{f})(\xi) = \frac{(-2\pi i)^{|\beta|}}{(2\pi i)^{|\alpha|}} D^\alpha \widehat{(x^\beta f(x))}(\xi)$$

donde  $D^\alpha \widehat{(x^\beta f(x))}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Por tanto,

$$\left| \xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) \right| \leq C \|D^\alpha \widehat{(x^\beta f(x))}\|_{L^1} < \infty$$

lo que implica por la proposición anterior que  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Para la implicación contraria, el razonamiento es el mismo en sentido contrario.  $\square$

Antes de pasar al estudio de las EDPs, veamos el siguiente lema que nos será de utilidad en las siguientes secciones:

**Lema 5.0.11.** Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , entonces

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi).$$

*Demostración.* Por la proposición 2.1.5 ii) tenemos que  $\widehat{\partial_{x_i} f}(\xi) = 2\pi i \xi_i \widehat{f}(\xi)$ . Derivando una vez más,  $\widehat{\partial_{x_i}^2 f}(\xi) = -4\pi^2 \xi_i^2 \widehat{f}(\xi)$  por tanto

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi).$$

$\square$

## 5.1. Ecuación del calor.

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta_x u(x, t) \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Resolvamos formalmente:

Para obtener la solución aplicamos la transformada de Fourier a  $u(x, t)$  en la variable  $x$ . En primer lugar, usando el lema anterior tenemos

$$\widehat{\Delta_x u}(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t)$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de la ecuación llegamos a:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, pues sólo aparece la derivada respecto de  $t$ . Llamando  $v(t) = \widehat{u}(\xi, t)$ , donde  $\xi \in \mathbb{R}^d$  está fijo, tenemos la EDO

$$\begin{cases} v'(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 v(t) \\ v(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases} \quad (5.1)$$

cuya solución es:

$$v(t) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} v(0). \quad (5.2)$$

Por tanto, deshaciendo el cambio

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \widehat{f}(\xi).$$

Aplicando transformada de Fourier inversa

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i t \xi} \widehat{u}(\xi, t) d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \widehat{f}(\xi) \right) =$$

por la Proposición 2.1.3

$$= \mathcal{F}^{-1} \left( e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \right) * f(x).$$

Calculamos  $\mathcal{F}^{-1} \left( e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \right)$ . Sea  $\widehat{h}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$ . Por el ejemplo 2.2.3, sabemos que si

$$\phi(x) = e^{-\pi x^2} \text{ entonces } \widehat{\phi}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

En nuestro caso  $\widehat{h}_t(\xi) = e^{-\pi(2\sqrt{\pi t} \xi)^2} = \widehat{\phi}(2\sqrt{\pi t} \xi) = \widehat{\phi}(\lambda \xi)$ . Usando la propiedad de dilatación tenemos que

$$h_t(x) = \lambda^{-d} \phi(\lambda^{-1}x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} * f(x) = h_t(x) * f(x)$$

donde  $h_t(x)$  se conoce como *Núcleo de Gauss*.

**Lema 5.1.1.**  $\{h_t\}_{t>0}$  es una AIR.

*Demostración.* Veamos que verifica las tres propiedades de AIR:

i) y ii) siguen de  $\int h_1(x) = 1$ .

iii) es consecuencia del lema 1.2.3. □

Una vez hallada la solución formal, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.1.2.** Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$   $1 \leq p < \infty$ , la solución

$$u(x, t) = (h_t * f)(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$$

cumple:

i)  $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$

ii)  $u_t(x, t) = \Delta_x u(x, t)$

iii)  $\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$  c.t.p.  $x$ . y en norma  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Antes de pasar a la demostración, enunciemos y demostramos los siguientes lemas que usaremos en dicha prueba:

**Lema 5.1.3.**  $\partial_t (h_t(x)) = \Delta_x (h_t(x))$ .

*Demostración.* Basta ver, tomando transformadas de Fourier en  $x$  que

$$\partial_t \widehat{(h_t(x))} = \Delta_x \widehat{(h_t(x))}.$$

Esto es consecuencia de los cálculos que prueban 5.1 y 5.2 ya que

$$\widehat{h_t}(\xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2}.$$

□

**Lema 5.1.4.** Para todo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  con  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = L$ ,

$$\partial_x^\alpha (h_t(x)) = \frac{P_L\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{t^{L/2}} h_t(x). \tag{5.3}$$

donde  $P_L$  es un polinomio de grado  $L$  en  $\mathbb{R}^d$ .

*Demostración.* Se verifica que :

- $\partial_x^\alpha (h_t(x)) = \frac{1}{t^{d/2}} \partial_x^\alpha \left( h_1 \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right) = \frac{1}{t^{(d+L)/2}} \partial_x^\alpha h_1 \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$
- $\partial_x^\alpha \left[ \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} \right] = P_L(x) h_1(x)$

las cuales implican 5.3. □

*Demostración Teorema 5.1.2.* Veamos que  $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < \infty$   $\exists u(x, t)$  así definida.

- Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} |f(y)| dy \leq \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy < \infty.$$

- Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  con  $1 \leq p < \infty$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} f(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} \right| |f(y)| dy \leq$$

usando la Desigualdad de Hölder

$$\leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \right)^{1/p} \frac{\left( \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2 p'}{4t}} dy \right)^{1/p'}}{(4\pi t)^{d/2}} < \infty \quad (1)$$

Por tanto,  $\exists h_t * f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0$ .

Veamos que se da la última desigualdad (1) (Ese producto es finito):

Haciendo el cambio de variable  $x - y = u$ ,  $dy = du$ :

$$\left( \int_{y \in \mathbb{R}^d} e^{-p' \frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right)^{1/p'} = \left( \int_{u \in \mathbb{R}^d} e^{-p' \frac{|u|^2}{4t}} du \right)^{1/p'} =$$

haciendo el cambio de variable  $\frac{u}{2\sqrt{t}} = v$ ,  $du = (2\sqrt{t})^d dv$ :

$$\left( \int_{v \in \mathbb{R}^d} e^{-p'|v|^2} dv \left( \sqrt{4t} \right)^d \right)^{1/p'} < \infty.$$

*Nota.* Como  $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  (y  $\int h_1 = 1$ ), por la Desigualdad de Young (1.1.5) se tiene  $h_1 * f < \infty$ . Este es un argumento directo, pero mantenemos el argumento anterior ya que nos servirá posteriormente en la demostración.

- Veamos que  $u(t, x)$  es  $C^\infty$  respecto de  $t$  y respecto de  $x$ .

Usando el lema 5.1.3,  $\partial_t^L (h_t(x)) = \Delta_x^L (h_t(x))$ . Por tanto

$$\partial_x^\alpha \partial_t^L (h_t(x)) = \partial_x^\alpha \Delta_x^L (h_t(x))$$

y bastaría comprobar que  $h_t(x)$  es infinitamente derivable en la variable  $x$ .

Por el lema 5.1.4 tenemos que

$$\partial_x^\alpha (h_t(x)) = \frac{P_L\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{t^{L/2}} h_t(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha u(t, x)| &\leq \int |\partial_x^\alpha [h_t(x-y)]| |f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{t^{L/2}} \int \left| P_L\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) \right| |h_t(x-y)| |f(y)| dy < \infty \end{aligned}$$

por el argumento anterior.

ii) Por el lema 5.1.3 se tiene que

$$\partial_t(u(t, x)) = \partial_t(h_t * f) = (\partial_t h_t) * f = (\Delta h_t) * f = \Delta(h_t * f) = \Delta u$$

donde la segunda y la cuarta igualdad se dan por la Proposición 1.1.8.

iii) Si  $f \in L^p$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{x^2}{4t}} * f(x) \longrightarrow f(x) \quad c.t.p.x$$

donde ésto se verifica por el Teorema 1.2.6 y por ser  $h_t$  una AIR (lema 5.1.1) que cumple las hipótesis de dicho teorema.  $\square$

## 5.2. Ecuación de Laplace en el semiplano.

Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ e } y > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Consideramos la transformada de Fourier de la función  $u$  en la variable  $x$ .

$$\widehat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Por el lema 5.0.11

$$\widehat{u}_{xx} = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y).$$

Por otra parte, tenemos:

$$\widehat{u}_{yy}(\xi, y) = \widehat{u}_{yy}(\xi, y)$$

La ecuación del problema queda de la forma:

$$-4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \widehat{u}_{yy}(\xi, y) = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, ya que sólo aparecen las derivadas respecto de la variable  $y$  de la función incógnita  $\widehat{u}$ . Llamando  $v(y) = \widehat{u}(\xi, y)$  para  $\xi$  fijo, llegamos a la siguiente ecuación:

$$-4\pi^2 \xi^2 v(y) + v''(y) = 0.$$



La resolvemos:

$$-4\pi^2\xi^2 + \lambda^2 = 0 \text{ por tanto } \lambda^2 = 4\pi^2\xi^2, \text{ con lo cual } \lambda = \pm 2\pi\xi.$$

La solución es de la forma:

$$v(y) = c_1(\xi)e^{-2\pi\xi y} + c_2(\xi)e^{2\pi\xi y}$$

deshaciendo el cambio de variable:

$$\widehat{u}(\xi, y) = c_1(\xi)e^{-2\pi\xi y} + c_2(\xi)e^{2\pi\xi y}.$$

Según el lema de Riemann-Lebesgue (2.1.5), la transformada de Fourier de una función integrable tiende a cero cuando  $|\xi| \rightarrow +\infty$ . En consecuencia, para que  $\widehat{u}(\xi, y) \rightarrow 0$  cuando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  resulta razonable suponer  $\widehat{u}$  de la forma:

$$\widehat{u}(\xi, y) = \begin{cases} c_1(\xi)e^{-2\pi\xi y} & \text{si } \xi > 0 \\ c_2(\xi)e^{2\pi\xi y} & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

por tanto,

$$\widehat{u}(\xi, y) = c(\xi)e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Para obtener la función  $c(\xi)$  usamos la condición de contorno  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Como estamos transformando en  $x$ , debe ser  $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi)$  con lo que  $c(\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$  y finalmente:

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-2\pi y|\xi|}.$$

Debemos calcular la transformada inversa de esta función para obtener la solución  $u(x, y)$  que buscamos:

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(\xi, y)) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u_0}(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi y|\xi|}) = u_0(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi y|\xi|})$$

Nos falta calcular  $\mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi y|\xi|})$ .

Sabemos que si  $f(x) = e^{-2\pi|x|}$ , entonces  $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\xi^2}$  por el Ejemplo 2.2.2.

Sea nuestra función  $\widehat{h}(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|} = e^{-2\pi|y\xi|} = f(y\xi)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[f(y\cdot)](x) &= y^{-1}\widehat{f}(y^{-1}x) = \frac{1}{\pi y} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{\pi y} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{\pi y} \frac{y^2}{y^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} = P_y(x). \end{aligned}$$

Esta función es la que se conoce como *Núcleo de Poisson*. Por tanto, llegamos a que

$$u(x, y) = (u_0 * P_y)(x).$$

Una vez obtenida esta solución formal, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.1.** Si  $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$   $1 \leq p < \infty$ , la solución

$$u(x, y) = (u_0 * P_y)(x)$$

cumple:

- i)  $u(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$
- ii)  $\Delta u(x, y) = 0$
- iii)  $\exists \lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = u_0(x)$  c.t.p.  $x$ .

Una prueba similar a la realizada en el Teorema 5.1.2 para la ecuación del calor nos daría este resultado. Notar que  $\{P_y\}_{y>0}$  es una AIR.

### 5.3. Ecuación de ondas.

Sea el problema (P):

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t) \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Por el lema 5.0.11

$$\widehat{\Delta_x}(\xi, t) = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi, t).$$

Por otra parte, al igual que vimos en la ecuación del calor,

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t).$$

Damos con la siguiente EDO:

$$4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t).$$

Haciendo el cambio de variable  $\widehat{u}(\xi, t) = v(t)$  tenemos que

$$4\pi^2|\xi|^2v(t) + v''(t) = 0$$

y resolviéndola:  $\lambda^2 + 4\pi^2|\xi|^2 = 0$ , despejando llegamos a  $\lambda = 2\pi|\xi|i$ .

Por tanto, la solución es de la forma  $v(t) = A(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi) \sin(2\pi|\xi|t)$ . Desahaciendo el cambio de variable:

$$\widehat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi) \sin(2\pi|\xi|t).$$

Tomamos también transformadas de Fourier en las condiciones iniciales para obtener  $A(\xi)$  y  $B(\xi)$ :

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \text{ por tanto } \widehat{f}(\xi) = A(\xi).$$

$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi)$  por tanto  $\widehat{u}_t(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi) = -A(\xi) \sin(2\pi|\xi|0)2\pi|\xi| + B(\xi)2\pi|\xi| \cos(2\pi|\xi|0)$  lo que implica que  $B(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi|\xi|}$ . Finalmente llegamos a que

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \quad (5.4)$$

y la solución  $u(x, t)$  se obtiene tomando transformada de Fourier inversa en la expresión anterior en la variable  $\xi$ .

Esta prueba formal nos conduce a un teorema de existencia de solución de nuestro problema:

**Teorema 5.3.1.** *Si  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , una solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas es*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

*Demostración.* Primero comprobamos que  $u$  satisface la ecuación de ondas. Esto es sencillo una vez que observamos que podemos derivar respecto de  $x$  y de  $t$  bajo el signo integral (porque  $f$  y  $g$  con ambas funciones de Schwartz) y por tanto  $u$  es al menos  $C^2$ . Por una parte derivamos la exponencial respecto de  $x$  para obtener

$$\Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] (-4\pi^2|\xi|^2) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

mientras que por otra parte, derivamos la parte entre corchetes respecto de  $t$  dos veces para obtener:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ -4\pi^2|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) - 4\pi^2|\xi|^2 \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Esto muestra que  $u$  verifica la ecuación  $\Delta u = u_{tt}$ . Tomando  $t = 0$  obtenemos

$$u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = f(x)$$

por el teorema de Inversión (Teorema 2.3.1). Por último, derivando respecto de  $t$ , tomando  $t = 0$  y usando transformada de Fourier inversa vemos que  $u_t(x, 0) = g(x)$ . Veámoslo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ -2\pi|\xi| \widehat{f}(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) + 2\pi|\xi| \widehat{g}(\xi) \frac{\cos(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

evaluando en  $t = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = g(x)$$

por lo que  $u$  también verifica las condiciones iniciales y lo tenemos probado.  $\square$

Habiendo probado la existencia de solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas, se plantea la cuestión de la unicidad: ¿Hay soluciones al problema de la ecuación de ondas distintas de las dadas en la fórmula del teorema anterior? La respuesta es no. La prueba de este hecho se basa en un argumento de conservación de energía.

Estudiemos una propiedad de la solución de la ecuación de ondas: la conservación de la energía global.

**Definición 5.3.2.** Definimos la energía de una solución  $u(x, t)$  como:

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right|^2 dx.$$

**Teorema 5.3.3.** Si  $u$  es la solución de la ecuación de ondas dada por la fórmula del teorema 5.3.1, entonces  $E(t)$  se conserva, es decir,

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para la demostración haremos uso del siguiente lema:

**Lema 5.3.4.** Sean  $a, b$  números complejos y  $\alpha$  real. Entonces

$$|a \cos \alpha + b \sin \alpha|^2 + |-a \sin \alpha + b \cos \alpha|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

*Demostración.* Esto se sigue de que  $e_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  y  $e_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$  son un par de vectores ortonormales, por tanto con  $\mathcal{Z} = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ , tenemos

$$|\mathcal{Z}|^2 = |\mathcal{Z} \cdot e_1|^2 + |\mathcal{Z} \cdot e_2|^2,$$

donde  $\cdot$  representa el producto interno en  $\mathbb{C}^2$ . □

Probemos ahora el teorema:

*Demostración.* Por el teorema de Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| -2\pi|\xi| \widehat{f}(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \right|^2 d\xi.$$

De forma similar,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| 2\pi|\xi| \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) \right|^2 d\xi.$$

Aplicando ahora el lema con  $a = 2\pi|\xi| \widehat{f}(\xi)$ ,  $b = \widehat{g}(\xi)$  y  $\alpha = 2\pi|\xi|t$ , el resultado es:

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left( 4\pi^2 |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 + |\widehat{g}(\xi)|^2 \right) d\xi,$$

que es claramente independiente de  $t$ . □

Veamos ahora un resultado local de la unicidad de la ecuación de ondas. En particular, probaremos la unicidad de la ecuación de ondas en conos.

Sea  $B(x_0, r_0)$  la bola cerrada en el hiperplano  $t = 0$  centrada en  $x_0$  y de radio  $r_0$ . El cono con base  $B(x_0, r_0)$  se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_{B(x_0, r_0)} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r_0 - t, \quad 0 \leq t \leq r_0 \right\}.$$

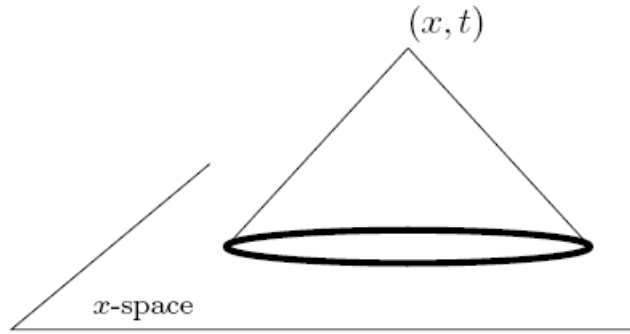


Figura 1.2: Cono centrado en  $(x, t)$ .

**Teorema 5.3.5.** *Supongamos que  $u(x, t)$  es una función de clase  $C^2$  en el cono  $\mathcal{C}_{B(x_0, r_0)}$  que resuelve la ecuación de ondas:*

$$u_{tt} = \Delta u, \quad \text{en } \mathcal{C}_{B(x_0, r_0)}.$$

Si  $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, r_0)$  entonces  $u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_{B(x_0, r_0)}$ .

En otras palabras, si las condiciones iniciales del problema de Cauchy para la ecuación de ondas son cero en una bola  $B$ , entonces cualquier solución  $u$  del problema es idénticamente nula en todo el cono de base  $B$ .

Antes de probar este teorema, enunciaremos y demostramos un lema que usaremos en la demostración:

**Lema 5.3.6.**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{B_t(0)} u(x) dx \right] = \int_{\partial B_t(0)} u(x) d\sigma(x).$$

*Demostración.* Haciendo un cambio a polares:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{B_t(0)} u(x) dx \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t \int_{S^{d-1}} u(rw) d\sigma(w) r^{n-1} dr \right] =$$

haciendo el cambio  $r = ts$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ t^n \int_0^1 \int_{S^{d-1}} u(tsw) d\sigma(w) s^{n-1} ds \right] \\ &= nt^{n-1} \int_0^1 \int_{S^{d-1}} u(tsw) d\sigma(w) s^{n-1} ds + t^n \int_0^1 \int_{S^{d-1}} \nabla u(tsw) \cdot sw d\sigma(w) s^{n-1} ds = (1) + (2). \end{aligned}$$

$$(2) = t^n \int_{S^{d-1}} \left[ \int_0^1 \nabla u(tsw) \cdot s^n w ds \right] d\sigma(w).$$

Sea  $A$  la integral entre corchetes, entonces:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{s^n}{t} \frac{d}{ds} [u(tsw)] ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^1 \frac{d}{ds} [u(tsw) s^n] ds - \frac{1}{t} \int_0^1 ns^{n-1} u(tsw) ds \\ &= \left( \frac{1}{t} u(tw) - 0 \right) - \frac{1}{t} \int_0^1 ns^{n-1} u(tsw) ds. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (2) &= t^{n-1} \int_{S^{d-1}} \left[ u(tw) - \int_0^1 ns^{n-1} u(tsw) ds \right] d\sigma(w) \\ &= t^{n-1} \int_{S^{d-1}} u(tw) d\sigma(w) - t^{n-1} \int_{S^{d-1}} \int_0^1 ns^{n-1} u(tsw) ds d\sigma(w). \end{aligned}$$

Haciendo

$$(1) + (2) = t^{n-1} \int_{S^{d-1}} u(tw) d\sigma(w).$$

Por lo que, finalmente:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{B_t(0)} u(x) dx \right] = t^{n-1} \int_{S^{d-1}} u(tw) d\sigma(w) = \int_{\partial B_t(0)} u(x) d\sigma(x)$$

donde en la última igualdad realizamos el cambio de variable  $x = tw, w \in S^{d-1}$  y por tanto  $d\sigma(x) = t^{n-1} d\sigma(w)$ .  $\square$

Probamos ahora el teorema:

*Demostración.* Asumimos que  $u$  es real. Para  $0 \leq t \leq r_0$ , sea  $B_{r_0-t}(x_0) = \{x : |x - x_0| \leq r_0 - t\}$  y definimos también

$$\nabla u(x, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Consideramos también el funcional de energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{r_0-t}(x_0)} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{B_{r_0-t}(x_0)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{B_{r_0-t}(x_0)} \sum_{j=1}^d \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx_j.$$

Vemos que  $E(t) \geq 0$  y  $E(0) = 0$  ya que  $u_t(x, 0) = u(x, 0) = 0$ . Derivando y usando el lema anterior:

$$E'(t) = \int_{B_{r_0-t}(x_0)} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{r_0-t}(x_0)} |\nabla u|^2 d\sigma(\gamma).$$

Como  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}$ , entonces

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}$$

ya que  $u$  verifica la ecuación de ondas  $u_{tt} = \Delta u$ .

Por lo que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B_{r_0-t}(x_0)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{r_0-t}(x_0)} |\nabla u|^2 d\sigma(\gamma) \\ &= \int_{\partial B_{r_0-t}(x_0)} \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \eta_{x_j} d\sigma(\gamma) - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{r_0-t}(x_0)} |\nabla u|^2 d\sigma(\gamma) \end{aligned}$$

donde la última igualdad la obtenemos por el teorema de la divergencia.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} \eta_{x_j} \right| &= \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} \right| = |u_t(x, t) \nabla_x u \cdot \eta| \leq |u_t(x, t)| |\nabla_x u(x, t)| \\ &\leq \frac{1}{2} (|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad la obtenemos aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto:

$E'(t) \leq 0$  lo que implica que  $E(t) \leq E(0) = 0$  y como  $E(t) \geq 0$ , tenemos que  $E(t) = 0$ , con lo cual  $u_t = 0$  y  $\sum_{j=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$  en el cono  $\mathcal{C}$ . Lo que finalmente implica que  $u \equiv 0$  en  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Corolario 5.3.7.** Si  $u, \tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$  y cumplen ambas (P) para algunas  $f$  y  $g$ . Entonces

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad \forall x, t.$$

*Demostración.* Aplicar el teorema 5.3.5 a  $v = u - \tilde{u}$ . □

Es interesante estudiar también la ecuación de ondas en las distintas dimensiones. Estudiaremos en este trabajo esta ecuación en dimensiones  $d = 1, 2, 3$  y veremos las distintas propiedades que posee.

### 5.3.1. La ecuación de ondas en dimensión 1.

Consideramos en primer lugar el problema de la ecuación de ondas en una dimensión:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ y } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), f \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Por la fórmula dada por el teorema 5.3.1, tenemos que

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \cos(2\pi\xi t) e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

como sabemos que  $\cos(2\pi\xi t) = \frac{e^{2\pi i \xi t} + e^{-2\pi i \xi t}}{2}$ , aplicando transformada de Fourier inversa:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i \xi(x+t)} + e^{-2\pi i \xi(x-t)}}{2} d\xi = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

Calculamos ahora la solución del problema anterior pero con  $u_t(x, 0) = g(x)$ . Como hemos visto en 5.4 al calcular formalmente la solución de la ecuación de ondas:

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(2\pi\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi\xi t)}{2\pi\xi}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= \hat{f}(\xi) \cos(2\pi\xi t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi\xi t)}{2\pi\xi} \\ &= \frac{1}{2} [e^{2\pi i \xi t} + e^{-2\pi i \xi t}] \hat{f}(\xi) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{2\pi i \xi y} dy \hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

y tomando transformada de Fourier inversa:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

Ésta es la conocida como *fórmula D'Alembert*.

*Nota.* En general  $u(x, t)$  puede no ser derivable, pero cumple  $u_{tt} = u_{xx}$  en algún sentido. En general, las EDPs no siempre tienen soluciones clásicas (pero tienen soluciones distribucionales o débiles).

### 5.3.2. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ .

Si  $S^2$  es la esfera unidad en  $\mathbb{R}^3$ , definimos la **media esférica** de la función  $f$  sobre la esfera de radio  $t$  y centro  $x$  como

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - t\gamma) d\sigma(\gamma) \quad (5.5)$$

donde  $d\sigma(\gamma)$  es el elemento de área de superficie para  $S^2$ . Como  $4\pi$  es el área de la esfera unidad, se puede interpretar  $M_t(f)$  como la media de  $f$  sobre la esfera centrada en  $x$  y de radio  $t$ .

El hecho básico de integración en esferas que vamos a necesitar es la siguiente fórmula de la transformada de Fourier.

**Lema 5.3.8.**

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot \gamma} d\sigma(\gamma) = \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}.$$

Esta fórmula está relacionada con el hecho de que la transformada de Fourier de una función (o medida) radial es radial.

*Demostración.* Vemos que la integral de la izquierda es radial en  $\xi$ . En efecto, si  $R$  es una rotación, entonces:

$$\widehat{d\sigma}(R\xi) = \int_{S^2} e^{-2\pi i R(\xi) \cdot \gamma} d\sigma(\gamma) = \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot R^{-1}(\gamma)} d\sigma(\gamma) = \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot \gamma} d\sigma(\gamma) = \widehat{d\sigma}(\xi)$$

porque podemos cambiar las variables  $\gamma \rightarrow R^{-1}(\gamma)$  y el  $|\det R| = 1$ .

Así que, si  $|\xi| = \rho$ , es suficiente probar el lema con  $\xi = (0, 0, \rho)$ .

- Si  $\rho = 0$ , obvio.
- Si  $\rho > 0$ , usamos coordenadas esféricas ( $x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \cos \theta$ ) y vemos que la parte de la izquierda es igual a

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-2\pi i \rho \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

El cambio de variable  $u = -\cos \theta$  nos da

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-2\pi i \rho \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{2\pi i \rho u} du = \frac{1}{4\pi i \rho} [e^{2\pi i \rho u}]_{-1}^1 = \frac{\sin(2\pi \rho)}{2\pi \rho},$$

y la fórmula está probada. □

Por la fórmula definida en 5.5 interpretamos  $M_t(f)$  como la convolución de la función  $f$  con el elemento  $d\sigma$ , y como la transformada de Fourier intercambia convoluciones con productos, podemos esperar que  $\widehat{M_t(f)}$  sea el producto de las correspondientes transformadas de Fourier. En efecto, tenemos la igualdad

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} \quad (5.6)$$



Para ver ésto, escribimos

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x - \gamma t) d\sigma(\gamma) \right) dx,$$

y vemos que podemos intercambiar el orden de integración y hacer un cambio de variable sencillo para conseguir la identidad deseada. Veámoslo:

$$\int_{S^2} \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^3} f(x - \gamma t) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) d\sigma(\gamma)$$

haciendo el cambio de variable  $y = x - \gamma t$ ,  $dy = dx$  tenemos que la integral entre paréntesis es

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(y) e^{-2\pi i (y + \gamma t) \cdot \xi} dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy e^{-2\pi i \gamma t \cdot \xi} = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i \gamma t \cdot \xi}$$

por lo que finalmente:

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \int_{S^2} \frac{1}{4\pi} e^{-2\pi i \gamma t \cdot \xi} d\sigma(\gamma) = \widehat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}.$$

Como resultado de ésto, vemos que la solución de nuestro problema puede ser expresada usando la media esférica del dato inicial.

**Teorema 5.3.9.** *La solución cuando  $d = 3$  del problema de Cauchy para el problema de la ecuación de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

con  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  viene dada por

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (tM_t(f)(x)) + tM_t(g)(x).$$

*Demostración.* Consideramos primero el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Por el teorema 5.3.1 sabemos que su solución  $u_1$  viene dada por

$$u_1(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = t \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \widehat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = tM_t(g)(x)$$

usando 5.6 aplicado a  $g$ , y la transformada de Fourier inversa.

Por el teorema 5.3.1 de nuevo, la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

viene dada por

$$u_2(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \widehat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right) = \frac{\partial}{\partial t} (tM_t(f)(x)).$$

Superponiendo estas dos soluciones obtenemos  $u = u_1 + u_2$  como solución de nuestro problema original.  $\square$

### 5.3.3. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ : descenso.

Es un hecho relevante que la solución de la ecuación de ondas en dimensión 3 lleva a una solución de la ecuación de ondas en dos dimensiones.

Definimos la correspondiente media como:

$$\widetilde{M}_t(F)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} F(x - ty) (1 - |y|^2)^{-1/2} dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

**Teorema 5.3.10.** *Una solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dos dimensiones con condición inicial  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  viene dado por*

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t\widetilde{M}_t(f)(x) \right) + t\widetilde{M}_t(g)(x) \quad (5.7)$$

Vemos la diferencia entre este caso y el caso  $d = 3$ . Aquí  $u$  en  $(x, t)$  depende de  $f$  y  $g$  en el disco completo (de radio  $|t|$  y centro  $x$ ), y no sólo de las condiciones iniciales cerca de la frontera de ese disco.

Formalmente, la igualdad del teorema se obtiene de la siguiente manera. Si empezamos con unas funciones iniciales  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  deberíamos considerar las correspondientes funciones  $\widetilde{f}$  y  $\widetilde{g}$  en  $\mathbb{R}^3$ , que son extensiones de  $f$  y  $g$  constantes en la variable  $x_3$ , es decir,

$$\widetilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) \quad y \quad \widetilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2).$$

Ahora, si  $\widetilde{u}$  es la solución de la ecuación de ondas en dimensión 3 con condiciones iniciales  $\widetilde{f}$  y  $\widetilde{g}$ , podemos esperar que  $\widetilde{u}$  sea también constante en  $x_3$  para que  $\widetilde{u}$  satisfaga la ecuación de ondas en dimensión 2. Un problema de este argumento es que  $\widetilde{f}$  y  $\widetilde{g}$  no decrecen rápidamente ya que son constantes en  $x_3$ , por lo que no se pueden aplicar los métodos previos.

Sin embargo, es fácil modificar el argumento para obtener la prueba del teorema 5.3.10.

Fijamos  $T > 0$  y consideramos una función  $\eta(x_3)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , tal que  $\eta(x_3) = 1$  si  $|x_3| \leq 3T$ . El truco es truncar  $\widetilde{f}$  y  $\widetilde{g}$  en la variable  $x_3$ , y considerar el cambio

$$\widetilde{f}^b(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)\eta(x_3) \quad y \quad \widetilde{g}^b(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)\eta(x_3).$$

Ahora  $\widetilde{f}^b$  y  $\widetilde{g}^b$  están en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , por lo que el teorema 5.3.9 nos proporciona una solución  $\widetilde{u}^b$  de la ecuación de ondas con datos iniciales  $\widetilde{f}^b$  y  $\widetilde{g}^b$ .

Vemos de la fórmula que  $\tilde{u}^b(x, t)$  es independiente de  $x_3$  cuando  $|x_3| \leq T$  y  $|t| \leq T$ .

En particular, si definimos  $u(x_1, x_2, t) = \tilde{u}^b(x_1, x_2, 0, t)$ , entonces  $u$  satisface la ecuación de ondas en dimensión 2 cuando  $|t| \leq T$ .

Como  $T$  es arbitrario,  $u$  es solución de nuestro problema, y queda por ver porque  $u$  tiene la forma que buscamos.

Por la definición de las coordenadas esféricas, recordamos que la integral de una función  $H$  sobre la esfera  $S^2$  viene dada por

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} H(\gamma) \sigma(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi H(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Si  $H$  no depende de la última variable:  $H(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2)$  con  $h$  una función de dos variables, entonces:

$$M_t(H)(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi h(x_1 - t \sin \theta \cos \varphi, x_2 - t \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Para calcular esta última integral, separamos la integral en  $\theta$  de 0 a  $\pi/2$  y de  $\pi/2$  a  $\pi$ . Haciendo el cambio de variable  $r = \sin \theta$ , encontramos, después de un cambio final a polares, que

$$M_t(H)(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} h(x - ty) (1 - |y|^2)^{-1/2} dy = \widetilde{M}_t(h)(x_1, x_2).$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} h(x_1 - t \sin \theta \cos \varphi, x_2 - t \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta \right) d\varphi \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_{\pi/2}^\pi h(x_1 - t \sin \theta \cos \varphi, x_2 - t \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta \right) d\varphi = \end{aligned}$$

haciendo el cambio  $r = \sin \theta$  y por tanto  $\theta = \arcsin r$ ,  $d\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 \left( \int_0^1 h(x_1 - tr \cos \varphi, x_2 - tr \sin \varphi) r \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\varphi =$$

haciendo el cambio a polares  $y_1 = r \cos \varphi$ ,  $y_2 = r \sin \varphi$  con  $(y_1, y_2) \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 \int_0^1 h(x_1 - ty_1, x_2 - ty_2) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\varphi \\ & = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} h(x_1 - ty_1, x_2 - ty_2) (1 - |y|^2)^{-1/2} dy \\ & = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} h(x - ty) (1 - |y|^2)^{-1/2} dy. \end{aligned}$$

Aplicando ésto a  $H = \tilde{f}^b$ ,  $h = f$  y  $H = \tilde{g}^b$ ,  $h = g$ , vemos que  $u$  viene dada por la fórmula 5.7, y la demostración del teorema 5.3.10 está completa.

*Nota.* En el caso de un  $d$  general, la solución de la ecuación de ondas comparte muchas de las propiedades que hemos comentado en los casos  $d = 1, 2$  y  $3$ .

- En un tiempo dado  $t$ , la condición inicial en un punto  $x$  sólo afecta a la solución  $u$  en una región específica. Cuando  $d > 1$  es impar, la condición inicial influye sólo en los puntos de la frontera del cono de centro  $x$ , mientras que cuando  $d = 1$  ó  $d$  es par, afecta a todos los puntos del interior del cono. Alternativamente, la solución en un punto  $(x, t)$  depende sólo del dato de la base del cono centrado en  $(x, t)$  (ver Figura 1.2). De hecho, cuando  $d > 1$  es impar, sólo los datos muy cercanos a la frontera de la base influirán en  $u(x, t)$ . Este hecho es conocido como *Principio de Huygens*.
- Las ondas se propagan con velocidad finita: si la condición inicial se da en un conjunto acotado, el soporte de la solución  $u$  se propaga con velocidad 1 (ó más en general  $c$ , si la ecuación de ondas no está normalizada).

Podemos ilustrar algunos de estos factores con la siguiente observación sobre el diferente comportamiento de la propagación de las ondas en dos y tres dimensiones.

Como la propagación de la luz se rige por la ecuación de ondas en 3 dimensiones, si en  $t = 0$  una luz se enciende en el origen, ocurre lo siguiente: cualquier observador verá la luz (después de una cantidad finita de tiempo) sólo por un instante.

Al contrario, consideramos lo que ocurre en dimensión 2. Si dejamos caer una piedra en un lago, cualquier punto de la superficie empezará (después de un tiempo) a ondular; aunque la amplitud de la oscilación decrecerá con el tiempo, las ondulaciones continuarán (en principio) indefinidamente.

El carácter diferente de las fórmulas de la solución de la ecuación de ondas cuando  $d = 1$  y  $d = 3$  por un lado, y  $d = 2$  por otro lado, ilustra un principio general en el análisis de Fourier  $d$ -dimensional: un número significativo de las fórmulas que se plantean son más simples en el caso de dimensiones impares que en dimensiones pares.

# Apéndice A

## Resultados auxiliares.

**Proposición A.1 (Desigualdad integral de Minkowski).** Sean  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  dos espacios de medida. Si  $p \geq 1$ ,

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{p, d\mu} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{p, d\mu} d\nu(y).$$

Para más información, ver [6], resultado 6.19.

**Lema A.2 (Lema de derivación de integrales paramétricas).** Sea  $(X, \mu)$  espacio de medida y

$$f : X \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f(\cdot, t) \in L^1(d\mu) \quad \forall t \in (a, b)$$

verificando:

i) Existe  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \quad \forall x \in X \text{ y } \forall t \in (a, b)$

ii)  $\exists h \in L^1(X) : \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x) \quad \forall x, t.$

Definimos  $F(t) := \int_X f(x, t) d\mu(x)$ . Entonces:

$$F \text{ es derivable en } (a, b) \text{ y } F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

(Ver [6], Lema 2.27).

**Definición A.3.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión. Se define el **límite inferior** de la sucesión como:

$$\sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} x_k = \sup \{ \inf \{x_k : k \geq n\} : n \geq 0 \}$$

o también como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k)$  y se denota como  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Se define el **límite superior** como:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} x_k \right).$$

Análogamente, si  $a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ :

$$\liminf_{t \rightarrow 0} a(t) = \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < t < \delta} a(t) \text{ y } \limsup_{t \rightarrow 0} a(t) = \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < t < \delta} a(t).$$

**Proposición A.4.** Sean  $\{a_t\}_{t>0}$  y  $\{b_t\}_{t>0}$ , se verifica

$$\limsup_{t \rightarrow 0} (a_t + b_t) \leq \limsup_{t \rightarrow 0} a_t + \limsup_{t \rightarrow 0} b_t.$$

**Proposición A.5.** Sean  $F, G$  dos funciones definidas en  $\mathbb{R}^d$  tales que  $|F(x)| \leq |G(x)|$ , entonces:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d : |F(x)| > k \right\} \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |G(x)| > \lambda \right\}$$

con  $k, \lambda > 0$ .

**Teorema A.6.** Sean  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$  espacios de Banach y  $\mathcal{D}$  un subespacio denso en  $\mathbb{X}_1$ . Sea  $T : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2$  un operador lineal acotado. Entonces existe una única extensión  $\bar{T} : \mathbb{X}_1 \rightarrow \mathbb{X}_2$  lineal acotada con la misma norma.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{X}_1$ . Para cada  $x \in \mathbb{X}_1$   $\exists \{x_n\} \subseteq \mathcal{D}$  tal que  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{X}_1}} x$ .

Como  $\{x_n\}$  converge, es de Cauchy, por tanto, para cada  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $N$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces  $\|x_n - x_m\|_{\mathbb{X}_1} \leq \epsilon$ .

Así,  $\|Tx_n - Tx_m\|_{\mathbb{X}_2} \leq \|T\| \|x_n - x_m\|_{\mathbb{X}_1} < \epsilon$ , para  $n, m \geq N$ .

Esto prueba que  $\{Tx_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{X}_2$ , y por ser  $\mathbb{X}_2$  completo,  $\exists y \in \mathbb{X}_2$  tal que  $Tx_n \rightarrow y$ . Definimos  $\bar{T}x = y$ . Esta definición resulta independiente de la elección de la sucesión  $\{x_n\}$  puesto que si  $\tilde{x}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{X}_1}} x$  implica que  $x_n - \tilde{x}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{X}_1}} 0$  y por tanto

$$\left\| \lim_n T(x_n - \tilde{x}_n) \right\|_{\mathbb{X}_2} = \lim_n \|T(x_n - \tilde{x}_n)\|_{\mathbb{X}_2} \leq \|T\| \lim_n \|x_n - \tilde{x}_n\|_{\mathbb{X}_1} \rightarrow_n 0$$

lo cual implica que  $\lim Tx_n = \lim T\tilde{x}_n$ .

Para probar que  $\bar{T}$  es acotado, necesitamos la desigualdad

$$\|\bar{T}x\|_{\mathbb{X}_2} = \lim_n \|Tx_n\|_{\mathbb{X}_2} \leq \|T\| \lim_n \|x_n\|_{\mathbb{X}_1}$$

que es equivalente a

$$\|\bar{T}x\|_{\mathbb{X}_2} \leq \|T\| \|x\|_{\mathbb{X}_1}.$$

Ésto prueba además que  $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$ . Pero por otro lado, al ser  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{X}_1$ , nos dice que tomar supremos sobre  $\mathcal{D}$  es más restringido que tomarlos sobre  $\mathbb{X}_1$ , y entonces:

$$\|\bar{T}\| = \sup_{\substack{\|x\|_{\mathbb{X}_1}=1 \\ x \in \mathbb{X}_1}} \|\bar{T}x\|_{\mathbb{X}_2} \geq \sup_{\substack{\|x\|_{\mathbb{X}_1}=1 \\ x \in \mathcal{D}}} \|Tx\|_{\mathbb{X}_2} = \|T\|.$$

Por tanto,  $\|\bar{T}\| = \|T\|$  como queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema A.7.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  si y sólo si  $\forall \{a_n\} \subset \text{dom}(f)$  tal que  $a_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  cumple  $f(a_n) \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Lema A.8.** Sea  $\mathbb{H}$  un espacio de Hilbert. Si  $\|Tx\| = \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{H}$  entonces,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\|Tx + Ty\|^2 &= \langle Tx + Ty, Tx + Ty \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Ty, Ty \rangle + \langle Ty, Tx \rangle + \langle Tx, Ty \rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\Re\langle Tx, Ty \rangle\end{aligned}$$

por hipótesis. Por otra parte

$$\|Tx + Ty\|^2 = \|T(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle$$

lo cual implica que  $\Re\langle Tx, Ty \rangle = \Re\langle x, y \rangle$ .

Quedaría así probado para la parte real. Veámoslo ahora en general:

$$\begin{aligned}\|Tx + iTy\|^2 &= \langle Tx + iTy, Tx + iTy \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle iTy, iTy \rangle + \langle Tx, iTy \rangle + \langle iTy, Tx \rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\Re\langle Tx, iTy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle Tx, iy \rangle.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\|Tx + iTy\|^2 = \|T(x + iy)\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, iy \rangle.$$

Igualando ambas y usando el resultado que dice que  $\Im\langle x, y \rangle = \Re\langle x, iy \rangle$  llegamos a que

$$\Im\langle Tx, Ty \rangle = \Im\langle x, y \rangle,$$

con lo cual llegamos a que  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  como queríamos probar.  $\square$

**Teorema A.9 (Teorema de la Convergencia Monótona).** *Sea  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida y  $L^+$  = espacio de funciones medibles de  $X$  a  $[0, \infty)$ .*

*Sea  $\{f_n\}$  una sucesión en  $L^+$  tal que  $f_j \leq f_{j+1} \quad \forall j$  y  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , entonces*

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

(Ver [6], Teorema 2.14).

**Teorema A.10 (Teorema de la Convergencia Dominada).** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión en  $L^1$  tal que:*

- a)  $f_n \rightarrow f$  c.t.p.
- b)  $\exists g \in L^1$  no negativa tal que  $|f_n| \leq g$  c.t.p  $\forall n$ .

*Entonces  $f \in L^1$  y  $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ .*

(Ver [6], Teorema 2.24).

Una variante del Teorema de la Convergencia Dominada para familias es:

**Corolario A.11.** *Si  $\{f_t\}_{t>0} \subseteq L^1(X)$  tal que*

- a)  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = f(x)$  c.t.p.x.
- b)  $\exists g \in L^1$  tal que  $\sup_{t>0} |f_t(x)| \leq g(x)$  c.t.p.x.

Entonces  $f \in L^1(X)$  y

$$\int f = \lim_{t \rightarrow 0} \int f_t(x) \quad (*).$$

*Demostración.* Tomo  $t_n \rightarrow 0$ . Por el TCD aplicado a  $f_n = f_{t_n}$ ,

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{t_n}.$$

Como ésto es válido  $\forall t_n \rightarrow 0$ , entonces (\*) es cierto. □

**Teorema A.12 (Desigualdad de Hölder).** Sean  $p$  y  $q$  números reales tales que

$$1 \leq p, q \leq \infty \quad y \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si  $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$  y  $g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ , entonces  $fg \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$  y

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

(Ver [6], Proposición 6.2).

**Corolario A.13.** Si  $f \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$  y  $q_0 < q < q_1$ , entonces  $f \in L^q$  y se tiene

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^{q_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L^{q_1}}^{\theta}$$

donde  $\theta \in (0, 1)$  cumple  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ .

(Ver [6], Proposición 6.10).

**Lema A.14 (Principio del módulo máximo).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  acotado y  $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Supongamos que existe una constante  $M$  tal que  $\max_{\partial\Omega} |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \partial\Omega$ . Entonces  $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega$ .

(Ver [5], Capítulo 3, Corolario 4.6).

**Teorema A.15 (Teorema de Tonelli-Fubini).** Sea  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  medible en  $X \times Y$ . Si

$$\int_X \left( \int_Y |f(x, y)| dy \right) dx < \infty$$

o bien

$$\int_Y \left( \int_X |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

o bien

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| dx dy < \infty.$$

Entonces

$$\int_X \left( \int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left( \int_X f(x, y) dx \right) dy = \int_{X \times Y} f(x, y) dx dy$$

y todas las integrales son absolutamente convergentes.

(Ver [6], Teorema 2.37).

**Teorema A.0.11 (Teorema de la Divergencia en el plano).** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\partial D$  su frontera y  $n$  la normal unitaria exterior a  $\partial D$ . Sea  $F$  un campo vectorial  $C^1$  en  $D$ . Entonces:

$$\int_{\partial D} F \cdot n ds = \int_D \nabla \cdot F dA.$$

(Ver [9], Capítulo 8, Teorema 4).



# Bibliografía

- [1] Antonio Cañada Villar y Jose Luis Gámez Ruíz , *Apuntes del curso Análisis de Fourier*, 2015.
- [2] Bernardo Cascales, José M. Mira, José Orihuela y Matías Raja, *Análisis Funcional*, Ediciones Electolibris S.L., 2012.
- [3] Elias M. Stein y Rami Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [4] Elias M. Stein y Rami Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, 2011.
- [5] Elias M. Stein y Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.
- [6] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1999.
- [7] Gustavo Garrigós, *Apuntes del curso Análisis de Fourier*, 2013.
- [8] Javier Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison-Wesley, 1995.
- [9] Jerrold E.Marsden y Anthony J. Tromba, *Vector Calculus*, W.H.Freeman and Company, 1988.