



El problema de restricción para la transformada de Fourier

Grado en Matemáticas

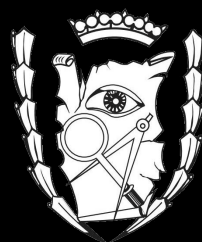
Trabajo Fin de Grado

Autor:

Pablo García Arias

Tutor:

Gustavo Garrigós Aniorte



FACULTAD DE
MATEMÁTICAS

Junio de 2022

El problema de restricción para la transformada de Fourier

Autor

Pablo García Arias

Tutor

Gustavo Garrigós Anierte
Departamento de Matemáticas



FACULTAD DE
MATEMÁTICAS

Grado en Matemáticas

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



Murcia, Junio de 2022

Agradecimientos

Me gustaría dar mi más sincero agradecimiento a los docentes de la Universidad de Murcia, en especial, quiero agradecer al Profesor Gustavo Garrigós su gran ayuda y paciencia durante la realización de este trabajo.

Gracias también a toda mi familia y amigos, que me habéis estado apoyando durante todos estos años. Este trabajo es tan mío como vuestro.

Declaración de originalidad

Pablo García Arias, autor del Trabajo de Fin de Grado "El problema de restricción para la transformada de Fourier", bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 8 de junio de 2022

Fdo.: Pablo García Arias

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Resumen

Este trabajo trata sobre el Problema de Restricción, una famosa conjetura dentro del área del Análisis Armónico cuya solución completa sigue abierta. Más concretamente, el objetivo principal de este trabajo es demostrar el Teorema Tomas-Stein, que da una solución parcial a este problema. Para poder conseguir esto, son necesarios varios resultados de Análisis Complejo y teoría de Integración que se han visto durante el grado. También usaremos otros resultados, que serán contruidos de manera rigurosa en los tres primeros capítulos.

La Transformada de Fourier se estudiará en el primer capítulo. Esta es una herramienta fundamental en el Análisis moderno, con una gran variedad de aplicaciones. La definición es la siguiente.

Definición 1

Transformada de Fourier

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su Transformada de Fourier es la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ determinada mediante la fórmula:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Esto define un operador lineal con muchas propiedades interesantes. En este capítulo exploramos solo las relevantes en este trabajo, principalmente su buena relación con la convolución, el Teorema de Inversión y el Teorema de Plancherel. Para ilustrar mejor la Transformada de Fourier, en la Sección 1.1 se han calculado algunos ejemplos. Uno de ellos será la función gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Este caso es de especial interés porque su Transformada de Fourier es la propia función. A parte de ser una propiedad curiosa, será luego utilizada en varias demostraciones. La convolución es una herramienta muy importante del Análisis, y una de las propiedades relevantes de la Transformada de Fourier es que transforma convoluciones en productos, es decir, que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ para todas las funciones $f, g \in L^1$. Esta identidad se utilizará a menudo en el trabajo, pues muchos operadores se pueden expresar usando convoluciones.

El siguiente resultado importante del primer capítulo es el Teorema de Inversión, que nos permite, dada la Transformada de Fourier de una función, recuperar la función original.

Teorema 1.5**Teorema de Inversión**

Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que \widehat{f} pertenece también a $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces se cumple que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad \text{para casi todo punto } x \in \mathbb{R}^n.$$

De este teorema se sigue como corolario interesante que la Transformada de Fourier es única, en el sentido que si dos funciones tienen la misma Transformada de Fourier, entonces son iguales en casi todo punto.

Otro resultado importante de este capítulo es el Teorema de Plancherel. Este afirma que la Transformada de Fourier conserva la norma L^2 . A continuación se muestra el enunciado exacto.

Teorema 1.7**Teorema de Plancherel**

Dada una función $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Este teorema permite extender la definición de la Transformada de Fourier al espacio L^2 completo. En el capítulo 4, esto será utilizado para extender la Transformada de Fourier a los espacios L^p con $1 \leq p \leq 2$.

Por último, hay un elemento más que introducir en el primer capítulo: la Clase de Schwartz \mathcal{S} . Intuitivamente, es el conjunto de funciones de clase C^∞ tales que tanto la función como sus derivadas decrecen más rápido que cualquier polinomio. Esta clase tiene varias propiedades que la hacen bastante interesante.

- Es un subespacio denso de L^p para $1 \leq p < +\infty$.
- La Transformada de Fourier es una biyección de la Clase de Schwartz sobre sí misma.

Esta clase de funciones será luego fundamental en la definición de ciertos operadores relacionados con el Problema de Restricción.

En el capítulo 2, estudiamos dos resultados sobre Interpolación de Operadores. En primer lugar se enuncia un resultado clásico, el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin. Luego lo generalizamos demostrando que, dada una familia analítica de operadores, definida en una banda del plano complejo, acotada en los bordes, y que cumpla la condición de "crecimiento controlado", entonces se tiene que está acotada también en la parte del eje real contenida en la banda. El enunciado exacto es el siguiente.

Teorema 2.4**Teorema generalizado de Riesz-Thorin**

Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida σ -finitos, y sea T_z una familia analítica de operadores con crecimiento controlado. Dados $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ tales que para todas las funciones finitas simples $f \in \mathcal{SF}(X)$ existen constantes positivas $M_0, M_1 > 0$ y $k \geq 0$ con:

$$\|T_{it}(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|T_{1+it}(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para todo θ con $0 < \theta < 1$ calculamos p, q como:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación:

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \|f\|_{L^p}.$$

Tanto la versión clásica del Teorema de Riesz-Thorin como su versión generalizada serán de utilidad en los capítulos posteriores, ya que la interpolación de operadores es una herramienta muy potente en Análisis.

El tercer capítulo introduce las funciones de Bessel del primer tipo. Son una familia de funciones analíticas definidas como sigue.

Definición 6**Funciones de Bessel**

Dado un número complejo $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v > -1$, la función de Bessel del primer tipo se define como la aplicación $J_v : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$J_v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}.$$

Las funciones de Bessel jugarán un papel importante al estudiar el Problema de Restricción, ya que aparecen de manera natural cuando consideramos la Transformada de Fourier de funciones radiales. Esto significa que luego necesitaremos usar varias de sus propiedades. Por tanto, este capítulo se encarga de recopilar todos los resultados necesarios, para que puedan ser usados fácilmente después. El primer resultado clave es la siguiente acotación.

Teorema 3.7

Dado $s_0 \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, entonces existe una constante positiva C , que depende únicamente de s_0 , tal que

$$|J_{s_0+i\theta}(r)| \leq C(1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Además, si s_0 se mueve en un intervalo compacto K de $[-\frac{1}{2}, +\infty)$, entonces la constante C está acotada en K .

Este teorema nos da una muy buena acotación cuando r no está cerca de cero. Para trabajar con la función de Bessel cerca del origen, usaremos mejor el siguiente resultado.

Teorema 3.9

Dado un número complejo $v = s + i\theta \in \mathbb{C}$ cuya parte real es $s \geq -\frac{1}{2}$, para $0 < r \leq 1$ se tiene que

$$|J_v(r)| \leq C e^{\frac{\pi}{2}|\theta|} r^s,$$

con C una constante que depende de s .

Además, si s lo restringimos a un intervalo compacto K de $[-\frac{1}{2}, +\infty)$, entonces la constante C está acotada en el intervalo K .

Un último resultado sobre las funciones de Bessel que me gustaría resaltar es la siguiente aproximación.

Teorema 3.10

Dado un número complejo $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$, para $r > 0$ se cumple que

$$J_v(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}} + R_v(r).$$

Con R_v una función que cumple que $|R_v(r)| \leq C_v r^{-\frac{3}{2}}$ cuando $r \geq 1$.

Este teorema nos proporciona información precisa sobre el comportamiento cuando r es grande de las funciones de Bessel, permitiendo calcular fácilmente algunas estimaciones.

En el capítulo 4 se explica el Problema de Restricción sobre la esfera. En este problema se pregunta para qué valores de p y q se cumple que restringir la Transformada de Fourier a la esfera es un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^d)$ a $L^q(S^{d-1})$. Usando densidad, es suficiente estudiar las correspondientes desigualdades del

problema restringidas a funciones suficientemente *suaves*. Esto significa que el problema puede ser formulado como sigue.

Definición 9

Problema de Restricción sobre la Esfera

Diremos que se cumple el Problema de Restricción sobre la esfera de L^p a L^q cuando exista una constante positiva $C_{p,q} > 0$ tal que

$$\|\widehat{f}|_{S^{d-1}}\|_{L^q(S^{d-1})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{para todas las funciones } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

En esta situación, diremos que se cumple $R(p, q, S^{d-1})$.

Llamaremos a la siguiente expresión Operador de Restricción

$$R(f)(\xi) := \widehat{f}|_{S^{d-1}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \xi \in S^{d-1}.$$

Este problema admite una formulación equivalente usando el dual del Operador de Restricción: el Operador de Extensión \mathcal{E} . Este toma como entrada una función integrable sobre la esfera y devuelve una función con \mathbb{R}^d como dominio. Este operador está determinado por la siguiente fórmula, muy similar a la que aparece en el Teorema de Inversión.

$$\mathcal{E}(g)(x) := \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) \quad g \in L^1(S^{d-1}), x \in \mathbb{R}^d.$$

Usando esta dualidad, podemos dar algunos contraejemplos al Problema de Restricción para algunos valores de p y q específicos, véase los teoremas 4.4 y 4.5. Una vez más el uso de las funciones de Bessel juega un papel importante.

El capítulo termina con una breve explicación de la, aún sin resolver, Conjetura de Restricción y de los avances relacionados.

En el último capítulo se demostrará el Teorema de Tomas-Stein. Este resultado nos da un rango de valores de p para los que se cumple el Problema de Restricción de $L^p(\mathbb{R}^d)$ a $L^2(S^{d-1})$.

Teorema 5.1

Teorema Tomas-Stein

Si $1 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d+3}$ entonces el Problema de Restricción sobre la esfera se cumple de $L^p(\mathbb{R}^d)$ a $L^2(S^{d-1})$.

A continuación resalto los puntos más importantes de la demostración:

- Sólo es necesario probarlo en el punto final $p = \frac{2(d+1)}{d+3}$ porque usando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin se obtiene el resultado para el resto de valores de p .
- Empezamos considerando el operador R^*R . Este será más fácil de manejar, ya que tanto el dominio como la imagen están formadas por funciones de \mathbb{R}^d

a \mathbb{C} . Es más, usando las funciones de Bessel se puede calcular explícitamente como actúa este operador.

- Vamos a demostrar que R^*R es un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ si y solo si el Operador de Restricción R es también continuo de $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S^{d-1})$. Esto nos permite centrarnos en el operador R^*R , en lugar de trabajar directamente con el Operador de Restricción.
- Vamos a meter el operador R^*R dentro de una familia de operadores, con la intención de aplicar la versión generalizada del Teorema de Riesz-Thorin. Para poder hacer esto, necesitamos verificar que se cumplen las hipótesis del teorema:
 - La familia de operadores está definida en una banda del plano complejo. Hay que acotarla en los extremos de la banda. Esto usará las acotaciones de las funciones de Bessel.
 - Hay que asegurar que la familia de operadores es *suficientemente buena*, esto es, que es una familia analítica de operadores con crecimiento controlado.
- Por último, se aplica el teorema de interpolación en un punto específico, para obtener el resultado de acotación deseado sobre el operador R^*R . Con esto finaliza la prueba.

Respecto a la bibliografía, las principales referencias han sido [3] para el primer capítulo, [7] para los capítulos 2 y 3, y [6] para los capítulos 4 y 5. Para el tercer capítulo también he consultado [1] y [8].

Abstract

This essay is about the Restriction Problem, a famous conjecture in the field of Harmonic Analysis, whose complete answer is still an open question. More specifically, the main objective of this work is to prove the Tomas-Stein theorem, as it gives a partial answer to the problem. In order to achieve this, we will use several results of Complex Analysis and Integration theory seen during the bachelor studies. We will also require some other new theorems, so they will be rigorously built in the first three chapters.

The Fourier Transform is introduced in the first chapter. This is a fundamental tool of modern Analysis, with a vast range of applications. We define it as follows.

Definition 1

Fourier Transform

Given a function $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, its Fourier Transform is the function $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ given by

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \text{for each } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The above formula defines a linear operator, with many interesting properties. In this chapter we explore only the relevant to this essay, mainly its good relationship with the convolution, the Inversion theorem and the Plancherel theorem.

To better illustrate the Fourier Transform, we will calculate some examples. One of them is the gaussian function $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. This case is of special interest because its Fourier Transform is the function itself. Besides being a curious fact, this property will be used later during some proofs of this chapter.

The convolution of functions is an important tool in Analysis, and one of the relevant properties of the Fourier Transform is that it transforms the convolution into a product, that is to say, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ for all functions $f, g \in L^1$. This identity will allow us to easily compute the Fourier Transform of convolutions, something very useful as many operators can be expressed as a convolution.

The next key result of the first chapter is the Inversion Theorem. This theorem allows us to, given the Fourier Transform of a function, retrieve the initial function.

Theorem 1.5**Inversion Theorem**

Given a function $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ such that \widehat{f} is also in $L^1(\mathbb{R}^n)$, then we have that

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad \text{for almost every point } x \in \mathbb{R}^n.$$

This theorem implies an interesting corollary, that the Fourier Transform is unique in the sense that, if two functions have the same Fourier Transform, they are equal almost everywhere.

Another important result of this chapter is the Plancherel Theorem. It states that the Fourier Transform preserves the L^2 norm. The precise statement is as follows.

Theorem 1.7**Plancherel Theorem**

Given a function $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, then $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

This theorem allows to extend the definition of Fourier Transform to the whole L^2 space. In chapter 4, this will be crucial to extend again the definition of the Fourier Transform to L^p spaces when $1 \leq p \leq 2$.

Lastly, there is one more element to be introduced in the first chapter: the Schwartz Class \mathcal{S} . Intuitively, it is the set of functions infinitely derivable such that both the function and its derivatives decay faster than any polynomial. This class has several properties that make it very interesting:

- It is a dense subspace of L^p for all $1 \leq p < +\infty$.
- The Fourier Transform is a bijection of the Schwartz class onto itself.

This class of functions will later play a role in the definition of certain operators related with the Restriction Problem.

Moving on to chapter 2, we change the topic to Operator Interpolation. This chapter presents a classical result, the Riesz-Thorin interpolation theorem. Then, we generalize it to prove that, given a *nice enough* family of operators defined in a strip of the complex plane, and bounded on the edges, then we can conclude that the operators on the real edge of the strip are also bounded.

Theorem 2.4**Generalized Riesz-Thorin Theorem**

Given (X, μ) and (Y, ν) σ -finite measure spaces, and T_z an analytic family of operators with moderate growth. Given $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ such that for every simple finite function $f \in \mathcal{SF}(X)$ there are positive constants $M_0, M_1 > 0$ and $k \geq 0$ with:

$$\|T_{it}(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|T_{1+it}(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_1}}.$$

For each θ with $0 < \theta < 1$, we compute p, q as

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Then we have the following bound:

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \|f\|_{L^p}.$$

Both the classical and the generalized version of the Riesz-Thorin theorem will be useful in later chapters, as the interpolation of operators can be a very powerful tool in Analysis.

The third chapter introduces the Bessel functions of the first kind. They are a family of analytic functions, defined as follows.

Definition 6**Bessel Functions**

Given a complex number $v \in \mathbb{C}$ such that $\operatorname{Re} v > -1$, the Bessel function of the first kind is defined as the application $J_v : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ determined by

$$J_v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}.$$

The Bessel functions will play an important role in the Restriction Problem, as they appear naturally when we consider the Fourier Transform of radial functions. This means that later we will need to use several of its properties. Therefore, this chapter puts together all the needed results, so that they can be easily used afterwards. One key result is the following bound.

Theorem 3.7

Given $s_0 \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$ and $r > 0$, there exists some positive constant C that depends only on s_0 such that

$$|J_{s_0+i\theta}(r)| \leq C(1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Furthermore, if s_0 is restricted to a compact interval K of $[-\frac{1}{2}, +\infty)$, then the constant C is bounded over that interval K .

The previous theorem will give us a very good upper estimate when r is not close to zero, but as r tends to zero its utility will decrease. To deal with the Bessel functions near the origin, we can rather use the bound stated below.

Theorem 3.9

Given a complex number $v = s + i\theta \in \mathbb{C}$ whose real part is $s \geq -\frac{1}{2}$, when $0 < r \leq 1$ it holds that

$$|J_v(r)| \leq C e^{\frac{\pi}{2}|\theta|} r^s,$$

with C a constant that depends only on the real part of v .

In addition, if s is restricted to a compact interval K of $[-\frac{1}{2}, +\infty)$, then the constant C is bounded over that interval K .

One last result about the Bessel functions that I would like to highlight, is the following approximation.

Theorem 3.10

Given a complex number $v \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$, for each $r > 0$ it holds that

$$J_v(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}} + R_v(r).$$

Where R_v is a function that verifies that $|R_v(r)| \leq C_v r^{-\frac{3}{2}}$ when $r \geq 1$.

This result provides precise information about the Bessel functions when r is large, allowing us to easily calculate some estimates.

On chapter 4, we discuss the Restriction Problem over the Sphere. This problem asks when the Fourier Transform restricted to the sphere is a continuous operator from $L^p(\mathbb{R}^d)$ to $L^q(S^{d-1})$. By density, it is only necessary to study the corresponding inequalities restricted to smooth enough functions. This means that the problem can be technically written as:

Definition 9**Restriction Problem over the Sphere**

We will say the restriction problem over the sphere holds from L^p to L^q when there is a positive constant $C_{p,q} > 0$ such that

$$\left\| \widehat{f}|_{S^{d-1}} \right\|_{L^q(S^{d-1})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{for all functions } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

If this is the case, we can denote it by $R(p, q, S^{d-1})$.

We will call the following expression as the Restriction Operator

$$R(f)(\xi) := \widehat{f}|_{S^{d-1}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \xi \in S^{d-1}.$$

There is actually a case where the Restriction Problem is trivially true: the case from $L^1(\mathbb{R}^d)$ to $L^\infty(S^{d-1})$, this means that $R(1, \infty, S^{d-1})$ is fulfilled. This fact will allow us to use some interpolation results later.

The Restriction problem admits an equivalent formulation using the dual of the Restriction Operator: the Extension Operator \mathcal{E} . It takes as input an integrable function over the sphere and returns a function defined over \mathbb{R}^d . This operator is defined by the next formula, very similar to the one in the Inversion Theorem.

$$\mathcal{E}(g)(x) := \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) \quad g \in L^1(S^{d-1}), x \in \mathbb{R}^d.$$

By the use of this duality we are able to give some counter examples to the Restriction Problem with some specific p and q , see theorems 4.4 and 4.5. Again, the use of the Bessel functions plays an important role.

The chapter comes to an end with a brief overview of the, still open, Restriction Conjecture and the existing progress.

The last chapter is a proof of the Tomas-Stein Theorem. This results gives a range of values for p in which the Restriction Problem holds from $L^p(\mathbb{R}^d)$ to $L^2(S^{d-1})$.

Theorem 5.1**Tomas-Stein Theorem**

If $1 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d+3}$ then the restriction problem over the sphere holds from $L^p(\mathbb{R}^d)$ to $L^2(S^{d-1})$. This is, $R(p, 2, S^{d-1})$ is true.

A brief outline of the proof is as follows:

- We only need to prove it at the end point $p = \frac{2(d+1)}{d+3}$ because using the Riesz-Thorin interpolation theorem obtains then the result at the remaining values of p .
- We start by considering the operator R^*R . This will be easier to handle, as both the input and the output are functions with \mathbb{R}^d as their domain. Moreover, we can calculate it explicitly using the Bessel functions.

- We justify that R^*R is a continuous operator from $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ if and only if the restriction operator R is also continuous from $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S^{d-1})$. This allows us to focus on the R^*R operator, rather than working with the Restriction Operator.
- We are going to embed the R^*R operator into a family of operators, with the intention of applying the generalized version of the Riesz-Thorin theorem. In order to do that, we need to verify first that theorem's hypotheses are actually true:
 - This family of operators is defined over a strip of the complex plane. Therefore, we need to bound it on the end lines. This will require the bounds of the Bessel functions that were studied during the third chapter.
 - We need to also make sure that the family of operators is *nice enough*, this is, that is analytic family of operators with moderate growth.
- Lastly, we use apply the interpolation theorem in a specific point, so that we bound the original R^*R operator. This concludes the proof.

The corpus of the eassay ends there. After that, there are several appendices that go over some well known theorems used during the main body of the work.

Regarding the bibliography used, the main sources have been [3] for the first chapter, [7] for the second and third chapters, and [6] for the fourth and fifth chapters. For Chapter 3, [1] and [8] have also been checked. During the essay, further references have been added where necessary.

Simbolos y Notación

\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
S	Banda compleja $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$
S^n	Esfera n -dimensional
$\mathcal{S}(X)$	Funciones simples $X \rightarrow \mathbb{C}$
$\mathcal{SF}(X)$	Funciones simples finitas $X \rightarrow \mathbb{C}$
\mathcal{S}	Clase de Schwartz
C_0^∞	Funciones de clase C^∞ y con soporte compacto
Γ	Función Gamma
B	Función beta
J_ν	Función de Bessel de primer tipo

Notación de multi-índices:

Un multi-índice es un elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es decir, una n -tupla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de elementos enteros con $\alpha_j \geq 0$. Se usará la siguiente notación:

- $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$
- $x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n.$
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$
- $\alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!.$

Índice general

Resumen	ix
Abstract	xv
1 Transformada de Fourier	1
1.1 Definición y propiedades básicas	1
1.2 Teorema de Inversión	6
1.3 Teorema de Plancherel y TF en L^2	8
1.4 Clase de Schwartz	10
2 Interpolación de Operadores	17
2.1 Preliminares y resultados clásicos	17
2.2 Teorema de Riesz-Thorin generalizado	19
3 Funciones de Bessel	27
3.1 Propiedades básicas de la función de Bessel	27
3.2 Acotación de la función de Bessel	30
3.3 Comportamiento cerca del origen	38
3.4 Comportamiento asintótico	39
3.5 Relación con la Transformada de Fourier	42
3.6 Funciones relacionadas con J_ν	44
4 Restricción de la Transformada de Fourier	47
4.1 Transformada de Fourier en L^p	47
4.2 El problema de la Restricción de la TF	48
4.3 Acotaciones para el Problema de Restricción	50
4.4 La conjetura de Restricción	51
5 Teorema de Tomas-Stein	53
Anexos	59
A Propiedades de las funciones Gamma y Beta	59

B Resultados de integración y análisis complejo	61
B.1 Resultados de análisis complejo	61
B.2 Resultados de integración	62
C Medida de la esfera	65
D Espacios L^p	69
E Otras fórmulas utilizadas	73
Bibliografía	75
Índice Alfabético	76

Capítulo 1

Transformada de Fourier

En este capítulo voy a introducir la Transformada de Fourier, así como sus Teoremas más importantes. También se va a definir la Clase de Schwartz, un conjunto de funciones que se relaciona muy bien con la Transformada de Fourier. Como referencia, he seguido en gran medida el libro [3, Capítulo 8].

1.1. Definición y propiedades básicas

Definición 1

Transformada de Fourier

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define su Transformada de Fourier como la función $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la fórmula:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

También se usará la notación $[f]^\wedge$ para denotar la transformada, en especial cuando esto aporte legibilidad.

La primera observación es que la definición tiene sentido ya que la integral es absolutamente convergente. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Es más, se tiene la siguiente acotación:

Proposición 1.1:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es uniformemente continua y cumple

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Demostración. Como $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{|\widehat{f}(\xi)|\}$ se tiene la acotación del enunciado:

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| = \|f\|_{L^1} < +\infty.$$

Para ver la continuidad uniforme,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(e^{-2\pi i x \cdot (\xi+h)} - e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left| e^{-2\pi i x \cdot h} - 1 \right| \cdot \left| e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \left| e^{-2\pi i x \cdot h} - 1 \right| dx. \end{aligned}$$

Como $|f(x)| \cdot |e^{-2\pi i x \cdot h} - 1| \leq 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, y meter el límite dentro:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} |\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)| = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{|h| \rightarrow 0} |f(x)| \cdot |e^{-2\pi i x \cdot h} - 1| dx = 0.$$

Además, como este último límite no depende de ξ , se tiene la convergencia uniforme para $\xi \in \mathbb{R}^n$. \square

Como la transformada es claramente lineal, esta proposición nos dice que podemos verla como un operador $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La convolución se relaciona bien con la transformada, tal como muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.2:

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Demostración. Usando las definiciones de transformada y convolución,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Observamos que se tiene la siguiente acotación

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

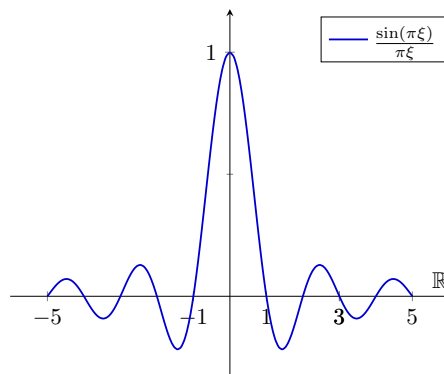
Por tanto se puede aplicar el teorema de Fubini para obtener que

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} dx \right) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i z \cdot \xi} dz \right) dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad \square \\ &\left[\begin{array}{l} z = x - y \\ dx = dz \end{array} \right] \end{aligned}$$

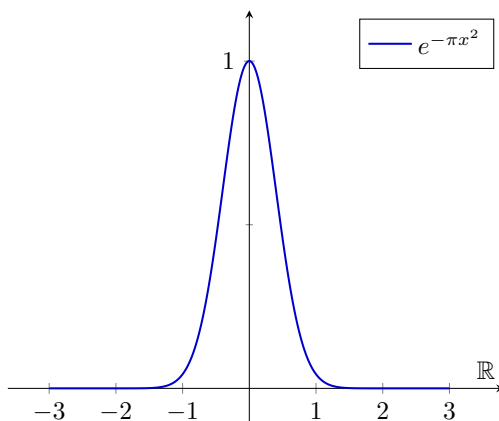
Algunos ejemplos de transformadas de Fourier son los siguientes.

1. La función característica $\chi_{[-A,A]}$ con $A > 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-A,A]}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-A,A]}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-A}^A e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \Big|_{-A}^A \\ &= \frac{e^{-2\pi i A \xi} - e^{2\pi i A \xi}}{-2\pi i \xi} \\ &= \frac{\sin(2\pi A \xi)}{\pi \xi} \end{aligned}$$

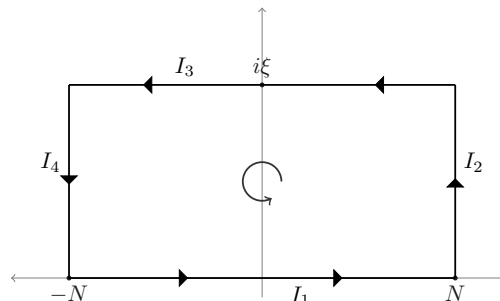


2. La función gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}$:



$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi)} dx = e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

Luego falta calcular el valor de la integral. Para ello considero la siguiente función compleja $f(z) = e^{-\pi z^2}$ que sabemos que es holomorfa. Por tanto, usando el teorema de Cauchy, para cada $N > 0$ su integral en la curva cerrada de la derecha vale cero.



Esto equivale a que $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-\pi t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} - \int_{-N}^N e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt.$$

Para I_2 e I_4 voy a parametrizar por $z = \pm N + it$ con $t \in [0, \xi]$ y $dz = idt$. Quiero probar que estas integrales tienen a cero, cuando $N \rightarrow \infty$, luego voy a acotar su modulo:

$$\begin{aligned} |I_2| = |I_4| &= \left| \int_0^\xi e^{-\pi(N \pm it)^2} i dt \right| = \left| \int_0^\xi e^{-\pi(N^2 - t^2 \pm 2iNt)} i dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^\xi \left| e^{-\pi N^2} e^{\pi t^2} e^{\mp \pi 2iNt} i \right| dt = e^{-\pi N^2} \underbrace{\int_0^\xi e^{\pi t^2} dt}_{K_\xi}. \end{aligned}$$

Y como K_ξ es una constante que depende únicamente de ξ , que está fijo, se tiene que $\lim_{N \rightarrow \infty} |I_2| = \lim_{N \rightarrow \infty} |I_4| = 0$ y por tanto $\lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} I_4 = 0$. Así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (I_1 + I_3) = 0 \Rightarrow 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\xi)^2} dt = 1$$

Y volviendo al valor que habíamos calculado para la transformada:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = e^{-\pi\xi^2} = \varphi(\xi).$$

Vemos que ha salido que la transformada de la gaussiana es la propia gaussiana. Esta interesante propiedad nos será útil por lo que vamos a generalizarlo a n dimensiones en el siguiente resultado:

Proposición 1.3:

Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ entonces $\widehat{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi)$.

Demostración. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \sum_{i=1}^n x_i^2} e^{-2\pi i \sum_{i=1}^n x_i \xi_i} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-\pi x_i^2} e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_i^2} e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\pi \xi_i^2} = e^{-\pi \sum_{i=1}^n \xi_i^2} = e^{-\pi|\xi|^2} = \varphi(\xi), \end{aligned}$$

donde en la segunda línea he separado las variables y en la tercera he usado que cada integral es la transformada de Fourier de una gaussiana en una dimensión. \square

Proposición 1.4: Transformada de Fourier para transformaciones básicas

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

	$g(x)$	$\widehat{g}(x)$
<i>Traslación</i>	$f(x - a) \longrightarrow$	$e^{-2\pi i \xi \cdot a} \widehat{f}(\xi)$
<i>Dilatación</i>	$f\left(\frac{x}{R}\right) \longrightarrow$	$R^n \widehat{f}(R\xi)$
<i>Modulación</i>	$f(x)e^{i\eta x} \longrightarrow$	$\widehat{f}\left(\xi - \frac{\eta}{2\pi}\right)$
<i>Dilatación matricial</i>	$f(Ax) \longrightarrow$	$\frac{1}{ \det(A) } \widehat{f}((A^{-1})^t \xi)$

Donde $a, \eta \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con $\det(A) \neq 0$.

Demostración. En las condiciones de cada transformación, se tiene que:

1. Si $g(x) = f(x - a)$, hago el cambio de variable $y = x - a$.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y+a) \cdot \xi} f(y) dy = e^{-2\pi i a \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$$

2. Si $g(x) = f\left(\frac{x}{R}\right)$, es un caso particular de la dilatación matricial. Tomando $A = \frac{1}{R}I_n$, su determinante es $\frac{1}{R^n}$ y su inversa es $A^{-1} = (A^{-1})^t = RI_n$. Con esto sale directo aplicando el apartado 4.

3. Si $g(x) = f(x)e^{i\eta x}$:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{i\eta x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \left(\xi - \frac{\eta}{2\pi}\right)} f(x) dx = \widehat{f}\left(\xi - \frac{\eta}{2\pi}\right)$$

4. Si $g(x) = f(Ax)$, vamos a hacer el cambio de variable $y = Ax$, que tiene jacobiano $|\det(A^{-1})| = \frac{1}{|\det(A)|}$. También tenemos que recordar que para cualquier matriz $n \times n$ y vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $(Bu) \cdot v = u \cdot (B^t v)$.

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(Ax) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\det(A)|} e^{-2\pi i (A^{-1}y) \cdot \xi} f(y) dy \\ &= \frac{1}{|\det(A)|} \widehat{f}((A^{-1})^t \xi) \end{aligned}$$

□

1.2. Teorema de Inversión

Teorema 1.5

Teorema de Inversión

Si $f \in L^1$ y $\widehat{f} \in L^1$ entonces para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Demostración.

Considero la función gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ y la familia $\{\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$ que por el Lema D.2 es una aproximación regular de la identidad. Observamos por la Proposición 1.4 y la Proposición 1.3 podemos calcular fácilmente la transformada de φ_t :

$$\widehat{\varphi}_t(\xi) = \frac{1}{t^n} \widehat{\varphi}\left(\frac{\cdot}{t}\right)(\xi) = \widehat{\varphi}(t\xi) = \varphi(t\xi)$$

Dada una función f con las condiciones del teorema, quiero ver que la integral anterior vale $f(x)$. Para ello, primero voy a aplicar la integral a $\widehat{f * \varphi}_t$.

$$\begin{aligned} I_t(x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * \varphi}_t(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{\varphi}_t(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) \varphi(t\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \stackrel{Fub.}{=} \\ &\stackrel{Fub.}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t\xi) e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} d\xi \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\widehat{\varphi(t \cdot)}(y-x) \right) dy. \end{aligned} \tag{1.1}$$

El teorema de Fubini lo he podido aplicar porque la integral de los módulos es finita:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) \varphi(t\xi) e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi}| d\xi dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) \varphi(t\xi)| d\xi dy = \|f\|_{L^1} \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx < \infty$$

Para calcular la transformada de Fourier que aparece en (1.1) uso que es la transformada de un cambio de escala:

$$\widehat{\varphi(t \cdot)}(y-x) = \frac{1}{t^n} \widehat{\varphi}\left(\frac{y-x}{t}\right) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{y-x}{t}\right) = \varphi_t(x-y).$$

Y por tanto la integral original se expresa como:

$$I_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\widehat{\varphi(t \cdot)}(y-x) \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi_t(x-y) dy = f * \varphi_t(x).$$

Por ser φ_t una aproximación regular de la identidad, se puede aplicar el Teorema D.3 y se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_t(x) = f(x)$, donde la convergencia es la norma L^1 .

Usando el lema D.8 se tiene que existe una subsucesión (t_j) con $\lim_j t_j = 0$ y $I_{t_j}(x) \rightarrow f(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. Es inmediato que los (t_j) los puedo tomar para que sean una sucesión decreciente hacia cero.

Por otro lado,

$$I_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{\varphi}_t(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \varphi(t\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi |t\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

y como la integral del modulo es acotada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi) \varphi(t\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi}| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi) e^{-\pi |t\xi|^2}| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \|\widehat{f}\|_{L^1} < \infty,$$

se puede aplicar el Teorema de la convergencia dominada para conmutar el limite $t \rightarrow 0$ y la integral:

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi |t\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Por tanto, para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} I_{t_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} I_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

□

Corolario 1.6

Unicidad de la Transformada de Fourier

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ entonces $f = g$ en casi todo punto.

Demostración.

Considero la función $h := f - g$ que tiene transformada $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi) = 0$. Como $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ puedo aplicar el Teorema de Inversión (Teorema 1.5) y se obtiene que:

$$f(x) - g(x) = h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = 0 \quad \text{para casi todo punto } x \in \mathbb{R}^n.$$

□

1.3. Teorema de Plancherel y TF en L^2

Teorema 1.7

Plancherel

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y además se cumple que $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Este resultado es análogo a la identidad de Parseval para Series de Fourier, ya que elevando al cuadrado las normas se tiene la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (1.2)$$

Demostración. Igual que para la demostración del teorema de inversión, considero la función gaussiana $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ y la aproximación regular de la identidad

$$\left\{ \varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right\}_{t>0}$$

que sabemos que tiene Transformada de Fourier $\widehat{\varphi}_t(\xi) = \varphi(t\xi)$.

Una primera observación es que para probar que las normas son iguales me basta probar la Ecuación (1.2). Voy a calcular la segunda integral para $f * \varphi_t$:

$$\begin{aligned} I_t &:= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f * \varphi}_t(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi}_t(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} |\varphi(t\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)} e^{2\pi i y \cdot \xi} dy \right) |\varphi(t\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(y)} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} |\varphi(t\xi)|^2 dy dx d\xi = \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(y)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} |\varphi(t\xi)|^2 d\xi \right) dy dx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

El teorema de Fubini lo he podido aplicar porque la función en valor absoluto es integrable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \overline{f(y)}| \underbrace{e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi}}_{=1} |\varphi(t\xi)|^2 dx dy d\xi = \|f\|_{L^1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi < \infty.$$

Ahora vamos a observar que la integral del paréntesis en (1.3) es la transformada de Fourier de cierta φ_t' y por tanto podemos calcularla fácilmente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} |\varphi(t\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} e^{-\pi|\sqrt{2}t\xi|^2} d\xi \\ &= \left(\varphi(\sqrt{2}t \cdot) \right)^\wedge(x-y) = \frac{1}{(\sqrt{2}t)^n} \widehat{\varphi}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}t}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2}t)^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}t}\right) \\ &= \varphi_{\sqrt{2}t}(y-x). \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor:

$$\begin{aligned} I_t &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\overline{f(y)} \varphi_{\sqrt{2t}}(y-x)}_{\text{Convolución}} dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\overline{f} * \varphi_{\sqrt{2t}}(x)) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{(f * \varphi_{\sqrt{2t}}(x))} dx = \langle f, f * \varphi_{\sqrt{2t}} \rangle. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $f * \varphi_t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f$ en L^2 y deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle f, f * \varphi_{\sqrt{2t}} \rangle = \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} I_t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \underbrace{e^{-2\pi|t\xi|^2}}_{|\widehat{\varphi_t}(\xi)|} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0^+} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-2\pi|t\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

El teorema de Plancherel quiere decir que el operador “transformada de Fourier” es una isometría en:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longrightarrow \mathcal{F}f := \widehat{f} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pero como se tiene que $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2 , este operador se extiende a todo el espacio L^2 conservando sus propiedades.

Proposición 1.8: Transformada de Fourier en L^2

Existe un único operador lineal y continuo $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Además, cumple las siguientes propiedades:

- i) $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
- ii) \mathcal{F} es biyectivo.
- iii) Su operador inverso viene determinado por:

$$(\mathcal{F}^{-1})g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad \forall g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en L^2 y $C_0^\infty \subset L^1 \cap L^2$ entonces $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2 y aplicando el teorema de extensión de operadores en espacios de Banach (Teorema D.1) al operador antes descrito, Ecuación (1.4), se obtiene la existencia y unicidad de este operador. En esta demostración usaré \mathcal{F} para representar el operador de (1.4) y usaré $\tilde{\mathcal{F}}$ para su extensión.

Plancherel nos permite calcular $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ en el denso C_0^∞ , y por continuidad se puede extender a todo L^2 .

Para probar las dos propiedades siguientes defino el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ g &\longmapsto \mathcal{G}g := \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{G}g(x) = \mathcal{F}(g(-x))$ luego es un operador lineal y acotado, al que podemos aplicar el teorema de extensión otra vez y obtenemos un operador $\tilde{\mathcal{G}}$. Para ver que $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ nos basta darnos cuenta que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = f$ y $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})g = g$ para cada $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, y por continuidad tenemos que son la identidad en todo L^2 . \square

Teorema 1.9

Identidad de Parseval

Si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle$.

Demostración. Se demuestra directamente usando la identidad de polarización y que \mathcal{F} es lineal y conserva las normas:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left(\|f + g\|_{L^2}^2 + \|f - g\|_{L^2}^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\|\mathcal{F}f + \mathcal{F}g\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_{L^2}^2 \right) = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle$$

\square

1.4. Clase de Schwartz

Definición 2

Clase de Schwartz

Dado $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice que $f \in \mathcal{S}$ (f pertenece a la clase de Schwartz) si para cada par de multi-índices α, β se cumple que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$ es finito.

Lema 1.10

Dado $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, las siguientes definiciones son equivalentes:

- $f \in \mathcal{S}$.
- Para cada par de multi-índices α, β se cumple $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\partial^\beta (x^\alpha f(x))| < +\infty$.
- Para cada $N \in \mathbb{N}$ y α multi-índice se tiene que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| < +\infty$.
- Para cada $N \in \mathbb{N}$ y α multi-índice se tiene que existe una constante $C_{\alpha, N}$ tal que $|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha, N}}{(1 + |x|)^N}$.

Demostración.

a \Rightarrow b: Dados α, β arbitrarios, usando la Regla de Leibniz podemos poner $\partial^\beta(x^\alpha f(x))$ como combinación lineal de $\{x^{\alpha'} \partial^{\beta'} f(x) : \alpha' \leq \alpha, \beta' \leq \beta\}$. Por tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \partial^\beta(x^\alpha f(x)) \right| \leq \sum_{\beta - \alpha \leq \gamma \leq \beta} C_\gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{\alpha - \beta + \gamma} \partial^\gamma f(x) \right| < +\infty.$$

b \Rightarrow a: Voy a demostrar por inducción sobre el cardinal de $|\beta|$ que

$$\sup \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < +\infty \quad \text{para todo multi-índice } \alpha.$$

Para $|\beta| = 0$, se tiene por la hipótesis b que $\sup |x^\alpha f(x)| < +\infty$ para todo multi-índice α .

Si se cumple para todo $|\beta'| \leq n$, dado β con $|\beta| = n + 1$ y α multi-índice arbitrario, aplicamos la Regla de Leibniz se tiene que

$$\partial^\beta(x^\alpha f(x)) = x^\alpha \partial^\beta f(x) + \sum_{\beta - \alpha \leq \gamma < \beta} C_\gamma x^{\alpha - \beta + \gamma} \partial^\gamma f(x).$$

Luego, si despejamos $x^\alpha \partial^\beta f(x)$, como los términos del sumatorio están acotados por la hipótesis de inducción, se obtiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \partial^\beta(x^\alpha f(x)) \right| + \sum_{\beta - \alpha \leq \gamma < \beta} C_\gamma \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^{\alpha - \beta + \gamma} \partial^\gamma f(x) \right| < +\infty.$$

a \Rightarrow c: Dados $N \in \mathbb{N}$ y β multi-índice arbitrario, consideramos la función continua $\sum_{j=1}^d |x_j|^N$, que es estrictamente positiva en la esfera S^{d-1} . Como este es un compacto, la función alcanza un mínimo $\delta > 0$. Normalizando, esto se extiende a todo el espacio: para todo $x \in \mathbb{R}^d$ $\delta |x|^N \leq \sum_{j=1}^d |x_j|^N$. Por tanto:

$$(1 + |x|)^N \leq 2^{N-1} (1 + |x|^N) \leq 2^{N-1} + 2^{N-1} \delta^{-1} \sum_{j=1}^d |x_j|^N$$

y concluimos que,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N \left| \partial^\beta f(x) \right| \leq 2^{N-1} \sup \left| x^0 \partial^\beta f(x) \right| + 2^{N-1} \delta^{-1} \sum_{j=1}^d \left| x^{N e_j} \partial^\beta f(x) \right| < +\infty.$$

c \Rightarrow a: Dados α, β arbitrarios, observare que para $N = |\alpha|$ se tiene que

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d}| \leq \max |x_i|^N \leq |x|^N \leq (1 + |x|)^N.$$

Se sigue entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^N \left| \partial^\beta f(x) \right| < +\infty.$$

c \Leftrightarrow d: La equivalencia es inmediata. □

Lema 1.11

Si $f \in \mathcal{S}$, entonces para todo multi-índice α se tiene que las funciones $x^\alpha f(x)$ y $\partial^\alpha f(x)$ pertenecen también a \mathcal{S} .

Demostración. Que $x^\alpha f(x)$ pertenece se sigue de la equivalencia b del Lema 1.10. Que $\partial^\alpha f(x)$ pertenece es consecuencia directa de la definición de clase de Schwartz. \square

Proposición 1.12:

Se tiene que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

De aquí se deduce que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p < +\infty$.

Demostración. La primera afirmación se tiene porque para cualquier par de multi-índices, la función $x^\alpha \partial^\beta f$ es continua y con soporte compacto, por lo que está acotada.

Para la segunda afirmación, primero vamos a ver que $\mathcal{S} \subseteq L^p$. Pero esto se tiene porque si $f \in \mathcal{S}$ existe una constante C_N tal que $|f(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}$, y tomando N suficientemente grande ($N > \frac{d}{p}$) la segunda función está en L^p .

Que el contenido es denso es consecuencia directa de que las funciones C_0^∞ son densas (Teorema D.4). \square

Definición 3**Funciones que se desvanecen en el infinito**

Dada una función $f \in C(\mathbb{R}^d)$ se dice que se desvanece en el infinito si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. El conjunto de las funciones lo denoto por $V(\mathbb{R}^d)$.

Una observación inmediata es que esta definición es equivalente a que se cumple el límite $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, lo que explica el nombre de estas funciones.

Lema 1.13

Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $f \in V$.

Demostración.

Recordemos que existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|}$. Dado $\varepsilon > 0$,

sabemos que existe $r > 0$ tal que $\varepsilon = \frac{C}{1+r}$.

Por tanto $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq B(0, r)$ es un conjunto cerrado y acotado, es decir, compacto. \square

Proposición 1.14: Transformada de Fourier y derivadas

a) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$, entonces $\widehat{f} \in C^k$ y

$$\partial^\alpha \widehat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge.$$

b) Si $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ para todo $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in V$ para todo $|\alpha| \leq k-1$, entonces

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Demostración. Para la primera afirmación voy a realizar inducción sobre $|\alpha|$ hasta $|\alpha| \leq k$. La hipótesis de inducción será que

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge.$$

Cuando $|\alpha| = 0$ es inmediato, ya que no estamos derivando.

Si se cumple para todo $|\alpha| \leq n$, dado α' con $|\alpha'| = n+1 \leq k$, observamos que lo podemos escribir como $\alpha' = \alpha + e_j$ para cierto α con $|\alpha| = n$. Entonces se tiene que:

$$\partial^{\alpha'} \widehat{f}(\xi) = \partial^{e_j} \left(\partial^\alpha \widehat{f} \right) (\xi) = \partial^{e_j} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right).$$

Como el resto de ξ_i están fijos, ∂^{e_j} no es más que la derivada de una variable (ξ_j) en \mathbb{R} . Por tanto quiero usar el teorema de derivación de integrales paramétricas (Teorema B.5). Observamos que se cumplen las hipótesis:

$$\begin{aligned} g(x, \xi_j) &= f(x) (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} \\ |g(x, \xi_j)| &= |f(x)| |x^\alpha| \in L^1(\mathbb{R}^d) \\ \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi_j) &= f(x) (-2\pi i x)^\alpha (-2\pi i x_j) e^{-2\pi i x \cdot \xi} = f(x) (-2\pi i x)^{\alpha'} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \\ \left| \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \xi_j) \right| &= |f(x) x^{\alpha'}| (2\pi)^{|\alpha'|} \in L^1(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Luego puedo aplicar el teorema y se tiene que

$$\partial^{\alpha'} \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-2\pi i x)^{\alpha'} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = [(-2\pi i x)^{\alpha'} f(x)]^\wedge.$$

Además, como $\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, \cdot)$ es una función continua, obtenemos que $\partial^{\alpha'} \widehat{f}(\xi)$ también es continua.

Para la segunda afirmación usaremos también inducción sobre $|\alpha|$.

El caso base $|\alpha| = 0$ es inmediato. Si se cumple para todo $|\alpha| \leq n$, dado α' con

$|\alpha'| = n + 1 \leq k$ lo podemos descomponer en $\alpha' = \alpha + e_j$ con $|\alpha| = n$.

$$\begin{aligned} [\partial^{\alpha'} f]^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial^{e_j} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial^{e_j} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx_j \right) \underbrace{dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d}_{dx'} \end{aligned}$$

Hago integración por partes en la variable x_j , y usando que $\partial^\alpha f \in V$ porque $|\alpha| = n \leq k - 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \partial^{e_j} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx_j &= \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \Big|_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} + 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx_j \\ &= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx_j. \end{aligned}$$

Sustituyéndolo y usando la hipótesis de inducción:

$$[\partial^{\alpha'} f]^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = (2\pi i \xi_j) \cdot (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha'} \widehat{f}(\xi).$$

□

Teorema 1.15

Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$f \in \mathcal{S} \iff \widehat{f} \in \mathcal{S}$$

Demostración. Dado $f \in \mathcal{S}$, observamos que para todo multi-índice α se tiene que $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$. Por tanto podemos aplicar la Proposición 1.14.a y obtenemos que $\widehat{f} \in C^\infty$ y que

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} [x^\alpha f(x)]^\wedge(\xi).$$

Aplico ahora 1.14.b a la función $x^\alpha f(x)$ y para calcular la derivada ∂^β . Puedo aplicarlo porque $\partial^\beta(x^\alpha f(x)) \in \mathcal{S} \subseteq L^1 \cap V$. Se tiene entonces que

$$[\partial^\beta(x^\alpha f(x))]^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta [x^\alpha f(x)]^\wedge(\xi).$$

Despejando en la primera ecuación que $[x^\alpha f(x)]^\wedge(\xi) = \partial^\alpha \widehat{f}(\xi) (-2\pi i)^{-|\alpha|}$ y sustituyendo en la segunda se obtiene que:

$$\begin{aligned} [\partial^\beta(x^\alpha f(x))]^\wedge(\xi) &= (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} (-1)^{|\alpha|} \xi^\beta \partial^\alpha \widehat{f}(\xi) \\ \xi^\beta \partial^\alpha \widehat{f}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|} (-1)^{|\alpha|} [\partial^\beta(x^\alpha f(x))]^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Por tanto, si acoto $[\partial^\beta(x^\alpha f(x))]^\wedge(\xi)$ tendré acotado $\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{f}(\xi)$ para multi-índices α, β arbitrarios y por tanto $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

Pero la acotación es inmediata, porque como $\partial^\beta (x^\alpha f(x)) \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene que

$$\left\| \left[\partial^\beta (x^\alpha f(x)) \right]^\wedge (\xi) \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \partial^\beta (x^\alpha f(x)) \right\|_{L^1} < +\infty.$$

Para el recíproco, podemos aplicar el teorema de inversión porque $f \in L^1$, $\hat{f} \in \mathcal{S} \subseteq L^1$. Además, $\hat{f}(-\cdot) \in \mathcal{S}$ de manera evidente. Entonces aplicando el caso anterior:

$$f = (\hat{f})^\vee = (\hat{f}(-\cdot))^\wedge \in \mathcal{S}.$$

□

Capítulo 2

Interpolación de Operadores

2.1. Preliminares y resultados clásicos

En esta sección voy a presentar un resultado clásico de interpolación de operadores, el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin. Introduciré también una generalización de éste, que aplicaremos luego al problema de restricción.

Vamos a manejar dos espacios de medida $(X, \mu), (Y, \nu)$ que serán σ -finitos. Esto en general no será restrictivo ya que tanto \mathbb{R}^n con la medida de Lebesgue como la esfera \mathbb{S}^{n-1} con la medida usual lo son.

También es conveniente recordar que es habitual trabajar con operadores definidos en un subconjunto denso de $L^p(X, \mu)$, en lugar de en todo el espacio. Si un operador está acotado en el conjunto denso, se podrá extender de manera única a un operador acotado en todo el espacio. Esto jugará un papel fundamental en este capítulo, ya que los operadores dados serán de la forma:

$$T : \mathcal{SF}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y),$$

donde el conjunto \mathcal{M} representa a las funciones medibles y $\mathcal{SF}(X)$ son las funciones simples finitas de X . Es decir, $f \in \mathcal{SF}$ si se puede poner como $f = \sum_{j=1}^n z_j \chi_{E_j}$, con $n < +\infty$, $z_j \in \mathbb{C}$ y los conjuntos E_j medibles, disjuntos dos a dos y con medida finita ($\mu(E_j) < +\infty$). Este conjunto sabemos que es denso en L^p si $p < \infty$ por el resultado D.7, que se puede consultar en los anexos.

Durante este capítulo trabajaremos también en la siguiente banda del plano complejo, que representaremos por S .

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Un resultado conocido de análisis complejo es el lema de las 3 líneas:

Teorema 2.1

Lema de las 3 líneas de Hadamard

Si tenemos una función $F : \overline{S} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica en la banda abierta S , continua y acotada en la banda cerrada \overline{S} y acotada en los extremos:

$$\begin{aligned} |F(it)| &\leq B_0 && \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ con } B_0 > 0 \text{ constante.} \\ |F(1+it)| &\leq B_1 && \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \text{ con } B_1 > 0 \text{ constante.} \end{aligned}$$

Entonces para $\theta \in [0, 1]$ se cumple que

$$|F(\theta)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta.$$

El resultado clásico de interpolación al que hacía referencia es el siguiente.

Teorema 2.2

Teorema Riesz-Thorin

Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida σ -finitos, $T : \mathcal{S}\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$ un operador lineal, y sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ tales que para todas las funciones finitas simples $f \in \mathcal{S}\mathcal{F}(X)$ existen constantes positivas $M_0, M_1 > 0$ con:

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para cada θ con $0 < \theta < 1$ calculamos p, q como:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación:

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p}.$$

2.2. Teorema de Riesz-Thorin generalizado

En el Teorema de Riesz-Thorin clásico acotamos un único operador, mientras que en la versión generalizada vamos a acotar una familia de operadores. Para ello, voy a introducir las siguientes definiciones:

Definición 4

Familia analítica de operadores

Sea T_z con $z \in \bar{S}$ una familia de operadores lineales de la forma

$$T_z : \mathcal{SF}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y).$$

Decimos que es una familia analítica si verifica las dos propiedades siguientes:

a) Para todo par de conjuntos medibles $A \subseteq X$ con $\mu(A) < +\infty$ y $B \subseteq Y$ con $\nu(B) < +\infty$ se cumple que:

$$\int_Y |T_z(\chi_A) \cdot \chi_B| \, d\nu < +\infty \quad \text{para todo } z \in \bar{S}.$$

b) Para todo par de funciones $f \in \mathcal{SF}(X)$ y $g \in \mathcal{SF}(Y)$ se cumple que la aplicación $z \mapsto \int_Y T_z(f) \cdot g \, d\nu$ es analítica en S y continua en \bar{S} .

Definición 5

Crecimiento controlado

Sea T_z una familia analítica de operadores, se dice que tiene crecimiento controlado si para cada par de funciones $f \in \mathcal{SF}(X)$ y $g \in \mathcal{SF}(Y)$ existen constantes $C = C(f, g) > 0$ y $K = K(f, g) \geq 0$ tales que

$$\left| \int_Y T_z(f) \cdot g \, d\nu \right| \leq C e^{K \cdot |\operatorname{Im} z|} \quad \text{para todo } z \in \bar{S}.$$

Observamos que en algunas condiciones trabajamos con funciones características y en otras con funciones simples finitas. Sin embargo, gracias a la linealidad basta con probarlo para funciones características únicamente.

Por último, para la demostración del teorema de Riesz-Thorin vamos a usar el siguiente resultado:

Teorema 2.3**Lema de las 3 líneas generalizado**

Sea $F : \bar{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en S , continua en \bar{S} y que cumple las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq B e^{\alpha |\operatorname{Im} z|} && \forall z \in \bar{S}. \\ |F(it)| &\leq B_0 e^{a_0 |t|} && \forall t \in \mathbb{R}. \\ |F(1+it)| &\leq B_1 e^{a_1 |t|} && \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

con B, B_0, B_1, a, a_0, a_1 constantes no negativas.

Entonces para $\theta \in [0, 1]$ se tiene que :

$$|F(\theta)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta e^{\max\{a_0, a_1\} \sqrt{\theta(1-\theta)}}$$

Demostración. Podemos suponer que $B_0, B_1 > 0$. Dado $\alpha > 0$, definimos

$$G_\alpha(z) = \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z} e^{\alpha(z^2-z)}.$$

Esta función es analítica en S , y continua en \bar{S} , ya que F tiene estas propiedades y estamos multiplicando por funciones con las mismas propiedades.

Escribimos z como $z = \theta + it$ y acotamos la función por

$$|G_\alpha(\theta + it)| = \frac{|F(z)|}{B_0^{1-\theta} B_1^\theta} e^{\alpha(\theta^2 - t^2 - \theta)} \leq \frac{B e^{a|t|} e^{-\alpha t^2} e^{-\alpha\theta(1-\theta)}}{\min\{B_0, B_1\}} \leq \frac{B}{\min\{B_0, B_1\}} e^{-\alpha t^2 + a|t|}.$$

Y por tanto, cuando $|t| \rightarrow +\infty$ se tiene que $|G_\alpha(\theta + it)| \rightarrow 0$ uniformemente en θ . Esto quiere decir que podemos acotar la función salvo por un rectángulo.

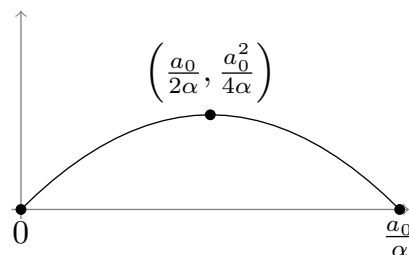
Formalmente, dado $\delta > 0$ existe $T_\delta > 0$ tal que

$$|G_\alpha(\theta + it)| \leq \delta \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall |t| \geq T_\delta.$$

Voy ahora a estudiar la función en los dos extremos de la banda:

$$|G_\alpha(it)| = \frac{|F(it)|}{B_0} e^{-\alpha t^2} \leq e^{a_0 |t| - \alpha t^2} \leq e^{\frac{a_0^2}{4\alpha}}.$$

La última desigualdad se tiene porque $a_0 |t| - \alpha t^2$ es una parábola con raíces 0 y $\frac{a_0}{\alpha}$ y por tanto alcanza su máximo en $\left(\frac{a_0}{2\alpha}, \frac{a_0^2}{4\alpha}\right)$.



Razonando igual para el otro extremo:

$$|G_\alpha(1 + it)| = \frac{|F(1 + it)|}{B_1} e^{-\alpha t^2} \leq e^{a_1|t| - \alpha t^2} \leq e^{\frac{a_1^2}{4\alpha}}.$$

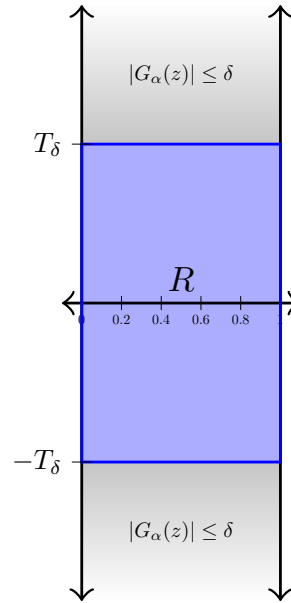
Tomando ahora $\delta = e^{\frac{\max\{a_0^2, a_1^2\}}{4\alpha}}$ observamos que tenemos los extremos acotados por δ también.

Considero el rectángulo $R = [0, 1] + i[-T_\delta, T_\delta]$. Al aplicar el principio del modulo máximo (Teorema B.2) obtenemos que:

$$\max_{z \in R} |G_\alpha(z)| = \max_{z \in \partial R} |G_\alpha(z)| \leq \delta.$$

Pero si $\text{Im } z \geq T_\delta$, tenemos que $|G_\alpha(z)| \leq \delta$ también, así que tenemos la función acotada en toda la banda. Esto es, $\forall z \in \bar{S}$

$$|G_\alpha(z)| = \left| \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z} e^{\alpha(z^2-z)} \right| \leq \delta = e^{\frac{\max\{a_0^2, a_1^2\}}{4\alpha}}.$$

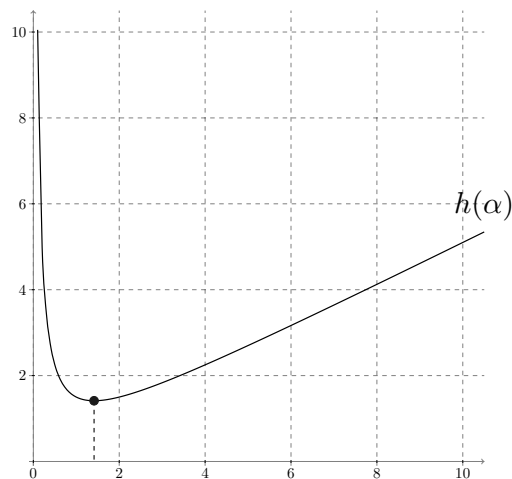


Para $z = \theta \in (0, 1)$ despejo $F(\theta)$:

$$|F(\theta)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta e^{\alpha(\theta^2-\theta)} e^{\frac{\max\{a_0^2, a_1^2\}}{4\alpha}} = B_0^{1-\theta} B_1^\theta e^{h(\alpha)} \quad h(\alpha) = \theta(1-\theta)\alpha + \frac{(\max\{a_0, a_1\})^2}{4\alpha}.$$

Como la acotación se tiene para todo $\alpha > 0$, puedo verlo como una variable e intentar minimizar la función $h(\alpha)$ para así encontrar una cota menor. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} m &= \theta(1-\theta) > 0 \\ n &= \frac{1}{4}(\max\{a_0, a_1\})^2 > 0 \\ h(\alpha) &= m\alpha + \frac{n}{\alpha} \\ h'(\alpha) &= m - \frac{n}{\alpha^2} \\ h''(\alpha) &= \frac{n}{\alpha^3} > 0 \\ h'(\alpha_0) = 0 &\iff \alpha_0 = \sqrt{\frac{n}{m}} \end{aligned}$$



Por tanto el punto mínimo se alcanza en α_0 con el siguiente valor:

$$h\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\right) = 2\sqrt{mn} = \max\{a_0, a_1\} \sqrt{\theta(1-\theta)}.$$

Sustituyéndolo en la acotación se tiene que:

$$|F(\theta)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta e^{\max\{a_0, a_1\} \sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

Nota: aunque la fórmula anterior está probada para $\theta \in (0, 1)$, se cumple también para $\theta \in \{0, 1\}$ porque son las hipótesis de acotación en los extremos de la banda. Para el caso $B_0 = 0$ (ó $B_1 = 0$), se tiene aplicando el resultado con $B'_0 = \varepsilon$ (respectivamente $B'_1 = \varepsilon$) y observando que la acotación tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Demostración del Teorema 2.1 (Lema de las 3 líneas clásico). Se sigue de la versión generalizada de forma directa, ya que las hipótesis de la versión clásica son las de la versión generalizada con $a = a_0 = a_1 = 0$. \square

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el teorema generalizado de Riesz-Thorin. Se ha tomado como referencia un resultado de E. M. Stein, donde el crecimiento controlado se sustituye por otra condición menos restrictiva. Para poder hacer el trabajo más autocontenido, se ha optado por demostrar una versión simplificada. Se puede encontrar más información sobre la versión de mejorada en [7, Sección 1.3.3].

Teorema 2.4

Teorema generalizado de Riesz-Thorin

Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida σ -finitos, y sea T_z una familia analítica de operadores con crecimiento controlado. Dados $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ tales que para todas las funciones finitas simples $f \in \mathcal{SF}(X)$ existen constantes positivas $M_0, M_1 > 0$ y $k \geq 0$ con:

$$\|T_{it}(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|T_{1+it}(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para todo θ con $0 < \theta < 1$ calculamos p, q como:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación:

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \|f\|_{L^p}.$$

Demostración. Dado $f \in \mathcal{SF}(X)$, escribimos la función como

$$f = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\alpha_j} \chi_{A_j} \quad a_j > 0, \alpha_j \in \mathbb{R}, \mu(A_j) < +\infty, \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Usando dualidad (Teorema D.10), podemos escribir la norma que queremos

calcular como:

$$\|T_z(f)\|_{L^q} = \sup \left\{ \left| \int_Y T_z(f)g \, d\nu \right| : g \in \mathcal{SF}(Y) \text{ con } \|g\|_{L^{q'}} \leq 1 \right\}.$$

Donde recordemos que q' es el exponente conjugado de q , es decir, el número que verifica $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Dado $g \in \mathcal{SF}(Y)$ la escribimos también de la forma $g = \sum_{k=1}^m b_k e^{\beta_k i} \chi_{B_k}$ con $b_k \in \mathbb{R}^+$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, y los conjuntos $B_k \subseteq Y$ disjuntos dos a dos y con medida $\nu(B_k) < +\infty$.

Para $z \in \bar{S}$ defino:

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z & Q(z) &= \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z \\ f_z &= \sum_{j=1}^n a_j^{P(z)} e^{\alpha_j i} \chi_{A_j} & g_z &= \sum_{k=1}^m b_k^{Q(z)} e^{\beta_k i} \chi_{B_k} \end{aligned}$$

Observamos lo siguiente:

- $P(\theta) = Q(\theta) = 1$.
- Por tanto se tiene que $f_\theta = f$ y $g_\theta = g$.
- $\operatorname{Re}(P(z)) = P(\operatorname{Re}(z))$ y $\operatorname{Re}(Q(z)) = Q(\operatorname{Re}(z))$.

Definimos ahora la siguiente función $F : \bar{S} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_Y T_z(f_z)g_z \, d\nu = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j^{P(z)} b_k^{Q(z)} e^{\alpha_j i} e^{\beta_k i} \int_Y T_z(\chi_{A_j}) \cdot \chi_{B_k} \, d\nu.$$

- $F(\theta) = \int_Y T_\theta(f)g \, d\nu$.
- F es analítica en la banda S , ya que por la definición de familia de operadores analítica las integrales $\int_Y T_z(\chi_{A_j}) \cdot \chi_{B_k} \, d\nu$ lo son, y las exponenciales $a_j^{P(z)}$, $b_k^{Q(z)}$ lo son también por tener una base real positiva.
- Repitiendo el mismo argumento, F es continua en \bar{S} .

Ahora voy a probar que $\|f_{it}\|_{L^{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{p/p_0}$.

Distingo dos casos, según el valor de p_0 . Si $p_0 < +\infty$:

$$\begin{aligned} \|f_{it}\|_{L^{p_0}} &= \left(\int_X \left| \sum_{j=1}^n a_j^{P(it)} e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \left(\int_X \left| \sum_{j=1}^n a_j^p e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \right|^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p_0}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \\ &= \left(\int_X \left| \sum_{j=1}^n a_j e^{i\alpha_j} \chi_{A_j}(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p_0}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}}. \end{aligned}$$

La igualdad entre las integrales se tiene porque se da punto a punto. Para cada

$x \in X$ fijo, el sumatorio “tiene a lo sumo un termino”, ya que como mucho hay un solo termino no nulo, por ser los A_j conjuntos disjuntos. Para este termino que queda, como hay un valor absoluto, podemos usar que

$$\left| a_j^{P(it)} \right| = a_j^{\operatorname{Re} P(it)} = a_j^{P(0)} = a_j^{p/p_0}.$$

La exponencial puramente imaginaria, como tiene modulo 1, puedo cambiar la parte imaginaria del exponente.

Para el caso $p_0 = +\infty$, observamos que $\operatorname{Re}(P(it)) = \frac{p}{p_0} = 0$ implica que $\left| a_j^{P(it)} e^{i\alpha_j} \right| = 1$. Luego, por el mismo razonamiento de que los A_j son disjuntos, tenemos que $\|f_{it}\|_{L^{p_0}} = \sup\{|f_{it}(x)|\} = 1$. Como $f \in \mathcal{SF}(X) \subseteq L^p(X)$ tenemos que $\|f\|_{L^p} < +\infty$. Por tanto, $\|f\|_{L^p}^{p/p_0} = 1 = \|f_{it}\|_{L^{p_0}}$, que es lo que buscábamos probar.

De manera completamente análoga se prueba que $\|g_{it}\|_{L^{q'_0}} = \|g\|_{L^{q'_0}}^{q'/q'_0}$.

Usando Hölder (Teorema D.6), podemos acotar F en los extremos de la banda:

$$\begin{aligned} |F(it)| &\leq \|T_{it}(f_{it})\|_{L^{q_0}} \cdot \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \leq M_0 e^{k|t|} \|f_{it}\|_{L^{p_0}} \cdot \|g_{it}\|_{L^{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_0}} e^{k|t|}. \\ |F(1+it)| &\leq \|T_{1+it}(f_{1+it})\|_{L^{q_1}} \cdot \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} \leq M_1 e^{k|t|} \|f_{1+it}\|_{L^{p_1}} \cdot \|g_{1+it}\|_{L^{q'_1}} \\ &\leq M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q'_1}} e^{k|t|}. \end{aligned}$$

Voy ahora a acotar F en todo \bar{S} . Para ello observo que:

$$|F(z)| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j^{\operatorname{Re} P(z)} b_k^{\operatorname{Re} Q(z)} \left| e^{\alpha_j i} e^{\beta_k i} \right| \cdot \left| \int_Y T_z(\chi_{A_j}) \cdot \chi_{B_k} d\nu \right|.$$

- Como podía conmutar Re y los polinomios P, Q , y la parte real de z está acotada $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, las exponenciales están acotadas por una constante. Pongamos entonces que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j^{\operatorname{Re} P(z)} b_k^{\operatorname{Re} Q(z)} \leq C.$$

- El modulo de las exponenciales imaginarias es 1.
- Como la familia de operadores T_z tiene crecimiento controlado, para cada par de índices j, k existen constantes positivas $c_{jk}, k_{jk} > 0$ tales que

$$\left| \int_Y T_z(\chi_{A_j}) \cdot \chi_{B_k} d\nu \right| \leq c_{jk} \cdot e^{k_{jk} |\operatorname{Im} z|}.$$

Tomando $\mathcal{K} = \max\{k_{jk}\}$ y $C' = \max\{c_{jk}\}$ se tiene que:

$$|F(z)| \leq CC' e^{\mathcal{K} |\operatorname{Im} z|}.$$

Y por tanto estamos en condiciones de aplicar el lema de las 3 líneas generalizado (Teorema 2.3) con las siguientes constantes:

$$B_0 = M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0}}, \quad B_1 = M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1}}.$$

Al aplicarlo obtenemos:

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \left| \int_Y T_\theta(f) \cdot g \, d\nu \right| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \\ &\leq \left(M_0 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_0}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_0}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}} \cdot \|g\|_{L^{q'}}^{\frac{q'}{q_1}} \right)^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \\ &\leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{q'}} e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo en g con $\|g\|_{L^{q'}} \leq 1$ se tiene la acotación para la norma:

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p} e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}}.$$

□

Demostración del Teorema 2.2 (Teorema de Riesz-Thorin clásico). Para demostrar el teorema clásico a partir del generalizado, observamos que las acotaciones de 2.2 son las del generalizado tomando como familia de operadores al único operador que tenemos:

$$T_z = T \quad \forall z \in \bar{S}.$$

Ahora falta comprobar que es una familia de operadores analítica con crecimiento controlado:

- Para probar la primera propiedad de familia analítica uso la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_Y |T_z(\chi_A) \cdot \chi_B| \, d\nu &= \int_Y |T(\chi_A) \cdot \chi_B| \, d\nu \leq \|T\chi_A\|_{L^{q_0}} \|\chi_B\|_{L^{q'_0}} \\ &\leq M_0 \|\chi_A\|_{L^{p_0}} \|\chi_B\|_{L^{q'_0}} < \infty. \end{aligned}$$

- Para la segunda propiedad, observamos que por el mismo razonamiento anterior $|\int_Y T(\chi_A)\chi_B \, d\nu|$ es una cantidad finita, por lo que la siguiente aplicación es constante y por tanto continua y analítica:

$$z \mapsto F(z) = \int_Y T_z(\chi_A)\chi_B \, d\nu = \int_Y T(\chi_A)\chi_B \, d\nu.$$

- Por último, la definición de crecimiento controlado se obtiene tomando las siguientes constantes:

$$k(A, B) = 0, \quad c(A, B) = \left| \int_Y T(\chi_A)\chi_B \, d\nu \right|.$$

□

2.2.1. Generalización a otros intervalos

Los resultados de este capítulo han hecho referencia a una banda del plano complejo en concreto, la banda $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Sin embargo, esta banda no tiene nada de especial y podemos considerar bandas más generales:

$$S_{(a,b)} = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\} \quad \text{con } a, b \text{ finitos.}$$

Las definiciones de familia analítica de operadores (Definición 4) y de crecimiento controlado (Definición 5) se enuncian de manera evidente, sustituyendo S por $S_{(a,b)}$.

Para el enunciado del teorema de Riesz-Thorin hay que ser un poco más preciso. La idea fundamental es que si tenemos una familia de operadores T_z sobre la banda $S_{(a,b)}$, tomando $z' = \frac{z-a}{b-a}$ podemos verla como una familia de operadores $T_{z'}$ sobre la banda S . Así, se trata de aplicar el teorema que ya hemos enunciado y probado a $T_{z'}$ y ver qué acotación da para la familia T_z original.

Teorema 2.5

Teorema generalizado de Riesz-Thorin

Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida σ -finitos, y sea T_z una familia analítica de operadores sobre la banda $S_{(a,b)}$, con (a, b) un intervalo finito y T_z con crecimiento controlado. Dados $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$ tales que para todas las funciones finitas simples $f \in \mathcal{SF}(X)$ existen constantes positivas $M_0, M_1 > 0$ y $k \geq 0$ con:

$$\|T_{a+it}(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|T_{b+it}(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 e^{k|t|} \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para todo θ con $0 < \theta < 1$ calculamos p, q y z_θ como:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad z_\theta = (1-\theta)a + \theta b.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación:

$$\|T_{z_\theta}(f)\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta e^{k\sqrt{\theta(1-\theta)}} \|f\|_{L^p}.$$

Capítulo 3

Funciones de Bessel

3.1. Propiedades básicas de la función de Bessel

Definición 6

Para $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v > -1$ se define la función de Bessel (de primer tipo) como la aplicación $J_v : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$J_v(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}.$$

La primera observación es que la definición tiene sentido ya que, para cada v con $\operatorname{Re} v > -1$ las funciones Gamma del enunciado están bien definidas (ver Anexos), y por ser $\operatorname{Re} z > 0$ las potencias z^v están bien definidas. Además, la serie es convergente por el test del cociente:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+v+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k+2-v-2k} \right| = \frac{1}{(k+1)|k+v+1|} \frac{|z|^2}{4} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Además, esto nos dice que para cada v fijo, $J_v(z)$ es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Aunque el dominio de las funciones de Bessel lo he definido en todo el semiplano complejo, suele ser habitual restringirlo a los números reales $J_v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposición 3.1: Propiedades de las derivadas

- (i) Para $\operatorname{Re} v > 0$, $\frac{d}{dz} [z^v J_v(z)] = z^v J_{v-1}$.
- (ii) Para $\operatorname{Re} v > -1$, $\frac{d}{dz} [z^{-v} J_v(z)] = -z^{-v} J_{v+1}$.

Demostración. Hay que observar que, como la función es analítica y la serie

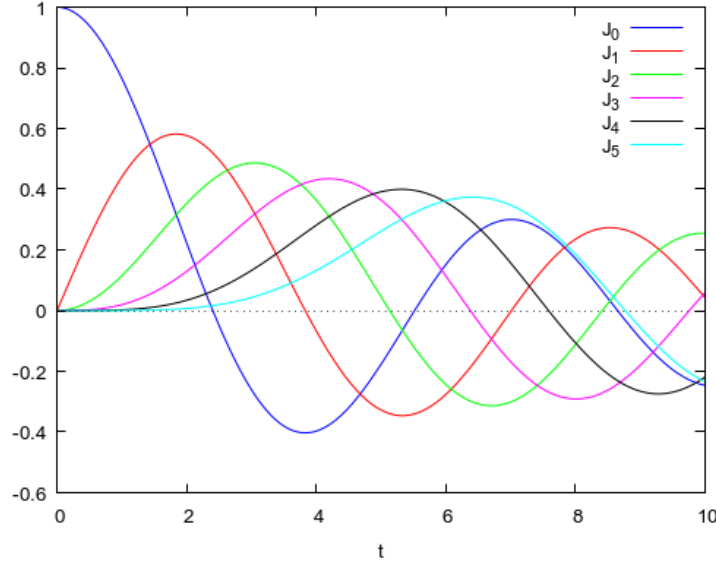


Figura 3.1: Representación de varias funciones de Bessel, para v real.

converge absolutamente, se puede conmutar la serie con la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^v J_v(z)] &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \frac{z^{v+2k+v}}{2^{v+2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2(v+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \frac{z^{2v+2k-1}}{2^{v+2k}} \\ &= z^v \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v)} \frac{z^{v-1+2k}}{2^{v-1+2k}} = z^v J_{v-1}(z). \\ \frac{d}{dz} [z^{-v} J_v(z)] &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \frac{z^{2k}}{2^{v+2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \frac{z^{2k-1}}{2^{v+2k}} \\ &= z^{-v} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k+v+1)} \frac{z^{v-1+2k}}{2^{v-1+2k}} = z^{-v} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+2)} \frac{z^{v+1+2k}}{2^{v+1+2k}} \\ &= -z^{-v} J_{v+1}(z). \end{aligned}$$

Donde estoy usando que la función Gamma cumple que

$$\Gamma(k+v+1) = (k+v)\Gamma(k+v), \quad \Gamma(k+1) = k\Gamma(k).$$

Hay que tener en cuenta que para la primera igualdad, la condición $\operatorname{Re} v > 0$ es necesaria para que esté definida la función de Bessel J_{v-1} , ya que consideramos $\Gamma(k+v)$ cuando $k=0$. \square

Teorema 3.2

Fórmula de recurrencia

Para $\operatorname{Re} v > 0$ se cumple que:

$$J_{v-1}(z) = \frac{2v}{z} J_v(z) - J_{v+1}(z).$$

Demostración. Para probar la fórmula de recurrencia se utilizan las dos fórmulas anteriores, por lo que necesitamos imponer $\operatorname{Re} v > 0$ también. En efecto,

$$\begin{aligned} z^v J_{v-1}(z) &= \frac{d}{dz} [z^v J_v(z)] = v z^{v-1} J_v(z) + z^v J'_v(z) \implies J_{v-1}(z) = \frac{v}{z} J_v(z) + J'_v(z) \\ -z^{-v} J_{v+1}(z) &= \frac{d}{dz} [z^{-v} J_v(z)] = -v z^{-v-1} J_v(z) + z^{-v} J'_v(z) \implies J_{v+1}(z) = \frac{v}{z} J_v(z) - J'_v(z) \end{aligned}$$

Y sumando las dos expresiones obtenemos

$$J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} J_v(z).$$

□

Teorema 3.3

Fórmula integral para la Función de Bessel Fórmula de Representación de Poisson

Para $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$ y $r > 0$ se tiene que:

$$J_v(r) = \frac{r^v}{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{irs} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds.$$

Demostración. Primero observamos que:

$$\begin{aligned} B(k + \frac{1}{2}, v + \frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(v + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + v + 1)} = \int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}} (1-t)^{v-\frac{1}{2}} dt \stackrel{\substack{t=s^2 \\ dt=2s ds}}{=} \int_0^1 s^{2k-1} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} 2s ds \\ &= \int_{-1}^1 s^{2k} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Y despejando, se tiene que

$$\frac{1}{\Gamma(k + v + 1)} = \frac{1}{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 s^{2k} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds \quad \text{si } \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}.$$

Usando la fórmula de duplicación de la función Gamma (Proposición A.2) tenemos también que:

$$2^{2k} \Gamma(k + 1) \Gamma(k + \frac{1}{2}) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2k + 1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (2k)!.$$

Por tanto, sustituyendo en la serie con la que definimos J_v y conmutando la serie y la integral se obtiene que:

$$\begin{aligned} J_v(r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{r}{2}\right)^{v+2k}}{\Gamma(k + 1)} \frac{1}{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 s^{2k} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^v}{\Gamma(v + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k + 1) \Gamma(k + \frac{1}{2})} s^{2k} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^v}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (sr)^{2k}}{(2k)!} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^v}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \cos(rs) (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds \\
&= \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^v}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{irs} (1-s^2)^{v-\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned}$$

□

3.2. Acotación de la función de Bessel

Teorema 3.4

Acotación para la función Γ

Dado $a > 0$ existe una constante $C_a > 0$ tal que para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\frac{1}{|\Gamma(a + i\theta)|} \leq C_a (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}-a} e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}.$$

Además, si K es un intervalo compacto de $(0, +\infty)$, existe $\sup_{a \in K} C_a < +\infty$.

Demostración.

Dado $z = a + i\theta$ fijo, lo sustituimos en la Fórmula de Stirling (Teorema A.3):

$$|\Gamma(a + i\theta)| = \sqrt{2\pi} \left| z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)} \right|.$$

donde $H(z)$ es una función que cumple: $\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Re} z \geq C > 0}} H(z) = 0$ para toda constante positiva C . Pasando a los inversos,

$$\frac{1}{|\Gamma(a + i\theta)|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| z^{\frac{1}{2}-z} e^z e^{-H(z)} \right|.$$

Vamos a acotar cada uno de los términos:

- $\left| z^{\frac{1}{2}-z} \right| = \left| e^{(\frac{1}{2}-z) \operatorname{Log}(z)} \right| = e^{(\frac{1}{2}-a) \log |z|} e^{\theta \operatorname{Arg} z} = |a + i\theta|^{\frac{1}{2}-a} e^{\theta \operatorname{Arg}(z)}$.
Además, como $|\operatorname{Arg} z| \leq \frac{\pi}{2}$ se tiene que $e^{\theta \operatorname{Arg}(z)} \leq e^{|\theta \operatorname{Arg}(z)|} \leq e^{|\theta| \frac{\pi}{2}}$.
- $|e^z| = e^a$.
- Como se tiene que $|H(z)| \xrightarrow[\operatorname{Re} z \geq a]{|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty} 0$, existe $\mathcal{H}_a := \max_{\operatorname{Re} z \geq a} |H(z)| < +\infty$ y por tanto $|e^{-H(z)}| \leq e^{\mathcal{H}_a}$.

Por tanto llegamos a que:

$$\frac{1}{|\Gamma(a + i\theta)|} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^a e^{\mathcal{H}_a} |a + i\theta|^{\frac{1}{2}-a} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}}.$$

Falta ver que se cumple que $|a + i\theta|^{\frac{1}{2}-a} \leq k_a (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}-a}$, pero es inmediato distinguiendo casos:

- Si $0 < a \leq \frac{1}{2}$, el exponente $\frac{1}{2} - a \geq 0$ es no negativo, y la acotación se tiene porque

$$|a + i\theta| \leq a + |\theta| \leq \frac{1}{2} + |\theta| < 1 + |\theta| \quad \Rightarrow \quad |a + i\theta|^{\frac{1}{2}-a} \leq (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}-a}$$

- Si $a > \frac{1}{2}$, el exponente es negativo, luego:

$$\begin{aligned} |a + i\theta| &\geq \max\{a, |\theta|\} \geq \frac{1}{2}(a + |\theta|) > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + |\theta| \right) \geq \frac{1}{4}(1 + |\theta|) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |a + i\theta|^{\frac{1}{2}-a} \leq 2^{2a-1} (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}-a}. \end{aligned}$$

Y por tanto se llega a la acotación

$$\frac{1}{|\Gamma(a + i\theta)|} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^a e^{\mathcal{H}_a} \max\{1, 2^{2a-1}\} (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}-a} e^{|\theta|\frac{\pi}{2}}.$$

Observamos que si $a \in [a_0, a_1]$, $0 < a_0 \leq a_1 < \infty$, se cumple que $\mathcal{H}_{a_0} \geq \mathcal{H}_a$. De aquí se deduce la última afirmación del teorema. \square

Lema 3.5

Si $s > \frac{-1}{2}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $v = s + i\theta$, y $r > 0$ se cumple que:

$$\int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt = ie^{-ir} \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt - ie^{ir} \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt.$$

Demostración. Comienzo considerando la siguiente función:

$$F(z) = e^{irz} (1 - z^2)^{v-\frac{1}{2}} = e^{irz} e^{(v-\frac{1}{2}) \text{Log}(1-z^2)}.$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, ya que:

- Quitando el logaritmo complejo, el resto de funciones son analíticas en \mathbb{C} .
- $\text{Log}(1 - z^2)$ está bien definido y es analítico cuando $(1 - z^2) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Esto ocurre si y solo si $z^2 \notin [1, +\infty) \iff z \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Por tanto, para $R \gg 1$ y $0 < \delta \ll 1$ puedo considerar el ciclo $\gamma_{\delta, R}$ de la Figura 3.2. Como está contenido en el dominio donde la función F es analítica, puedo aplicar el teorema de Cauchy a la integral de línea siguiente:

$$\int_{\gamma_{\delta, R}} F(z) dz = 0.$$

Dividiendo la integral en 6 integrales de la manera de la Figura 3.2, y usando las

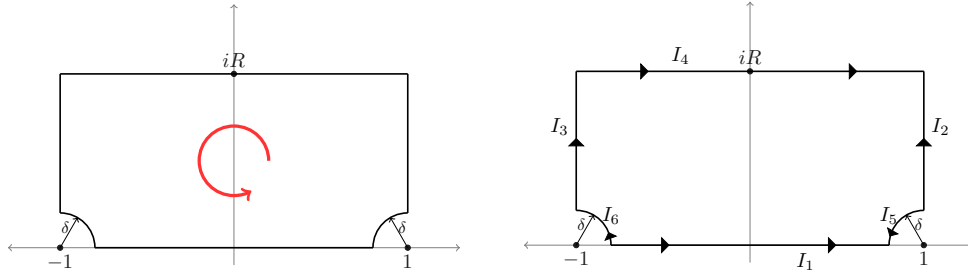


Figura 3.2: Diagrama de la integral sobre el ciclo $\gamma_{\delta, R}$ y su división en varios caminos con sus orientaciones indicadas.

orientaciones allí descritas, se tiene la siguiente igualdad:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

Usando que $|z^w| = |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im} w \cdot \operatorname{Arg} z}$, podemos expresar el modulo de la función como:

$$|F(z)| = e^{-r \operatorname{Im} z} |1 - z^2|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\theta \operatorname{Arg}(1-z^2)} = e^{-r \operatorname{Im} z} e^{|\theta|\pi} (|1 - z| \cdot |1 + z|)^{s-\frac{1}{2}}$$

Esto nos va a permitir acotar las integrales I_5 e I_6 :

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(1 + \delta e^{it}) i \delta e^{it} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |F(1 + \delta e^{it})| \delta dt \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-r \delta \sin t} e^{\pi|\theta|} \delta^{s-\frac{1}{2}} |2 + \delta e^{it}|^{s-\frac{1}{2}} \delta dt \leq \delta^{s+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} e^{\pi|\theta|} C_1, \end{aligned}$$

$$C_1 = \max_{\substack{\delta \in [0,1] \\ t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]}} |2 + \delta e^{it}|^{s-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$$\begin{aligned} |I_6| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(-1 + \delta e^{it}) i \delta e^{it} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(-1 + \delta e^{it})| \delta dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \delta \sin t} e^{\pi|\theta|} |2 - \delta e^{it}|^{s-\frac{1}{2}} \delta^{s-\frac{1}{2}} \delta dt \leq \delta^{s+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} e^{\pi|\theta|} C_2, \end{aligned}$$

$$C_2 = \max_{\substack{\delta \in [0,1] \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]}} |2 - \delta e^{it}|^{s-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Y por tanto, tenemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} |I_5| = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |I_6| = 0.$$

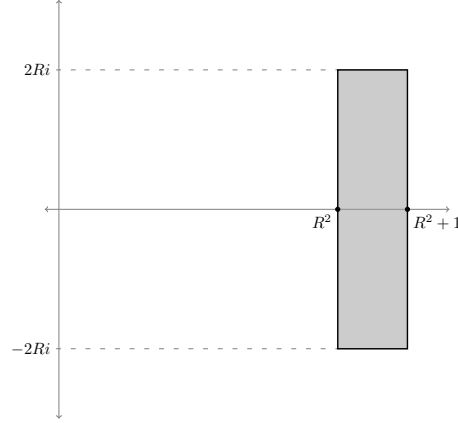
Calculamos ahora I_4 :

$$I_4 = \int_{-1}^1 F(t + iR) dt = \int_{-1}^1 e^{ir(t+iR)} (1 - (t + iR)^2)^{s-\frac{1}{2}} dt,$$

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \int_{-1}^1 \underbrace{\left| e^{ir(t+iR)} \right|}_{e^{-rR}} |1 - (t - iR)^2|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\theta \operatorname{Arg}(1-(t+iR)^2)} dt \\
&\leq \int_{-1}^1 e^{-rR} |1 - t^2 + R^2 + 2itR|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\theta \operatorname{Arg}(1-(t+iR)^2)} dt.
\end{aligned}$$

Observamos que el número complejo del modulo pertenece a la región de la figura, por lo que podemos acotarlo como sigue:

$$\begin{aligned}
R^2 &\leq \operatorname{Re}(1 - t^2 + R^2 + 2itR) \leq R^2 + 1, \\
-2R &\leq \operatorname{Im}(1 - t^2 + R^2 + 2itR) \leq 2R, \\
-\frac{\pi}{2} &\leq \operatorname{Arg}(1 - t^2 + R^2 + 2itR) \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$



Luego su modulo cumple:

$$R^2 \leq |1 - (t - iR)^2| \leq |R^2 + 1 \pm 2Ri| \leq R^2 2\sqrt{2}.$$

Y por tanto,

$$|I_4| \leq \int_{-1}^1 e^{-rR} C (R^2)^{s-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}|\theta|} dt \leq 2C e^{-rR} R^{2s-1} e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}.$$

Donde C es una constante que depende de si mayoramos o si minoramos el modulo, según el signo de $s - \frac{1}{2}$.

$$C = \begin{cases} 1 & s - \frac{1}{2} \geq 0 \\ (2\sqrt{2})^{s-\frac{1}{2}} & s - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$$

Se tiene entonces que $\lim_{R \rightarrow +\infty} |I_4| = 0$.

Para $I_1 = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} F(t) dt = \int_{-1}^1 F(t) \chi_{(-1+\delta, 1-\delta)}(t) dt$ observamos que podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, ya que $F \in L^1(-1, 1)$. En efecto,

$$\int_{-1}^1 |F(t)| dt = \int_{-1}^1 \left| e^{irt} (1 - t^2)^{v-\frac{1}{2}} \right| dt \leq C \int_0^1 (1 - t)^{s-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Y por tanto

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_1 = \int_{-1}^1 F(t) dt = \int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt.$$

Voy ahora a calcular las integrales I_2 e I_3 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\delta}^R F(1+it) i dt = \int_{\delta}^R i e^{ir(1+it)} (1 - 1^2 - 2it + t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{\delta}^R i e^{ir} e^{-rt} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt. \\ I_3 &= \int_{\delta}^R F(-1+it) i dt = \int_{\delta}^R i e^{ir(-1+it)} (1 - (-1)^2 + 2it + t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{\delta}^R i e^{-ir} e^{-rt} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Usando que las funciones que estamos integrando pertenecen a $L^1(0, +\infty)$, podemos volver a usar el teorema de Convergencia Dominada, y por tanto podemos calcular sus límites:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0^+}} I_2 = i e^{ir} \int_0^{+\infty} e^{-rt} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt, \quad \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0^+}} I_3 = i e^{-ir} \int_0^{+\infty} e^{-rt} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt.$$

Juntando los límites de las 6 integrales se obtiene el resultado. \square

Lema 3.6

Para $s \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ se tiene que:

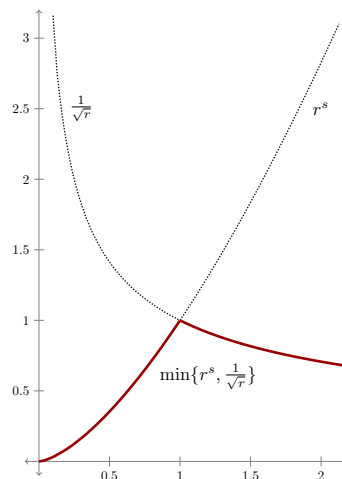
$$|J_{s+i\theta}(r)| \leq C_s (1 + |\theta|)^{-s} e^{\pi|\theta|} \min\left\{r^s, \frac{1}{\sqrt{r}}\right\}.$$

Además, si s está en un intervalo compacto, entonces la constante C_s está acotada en ese intervalo.

Echemos primero un vistazo a la función $\min\{r^s, \frac{1}{\sqrt{r}}\}$, ya que como $s > 0$, tiene un comportamiento bastante sencillo:

- Si $0 < r \leq 1$, se tiene que $r^s \leq \frac{1}{\sqrt{r}}$.
- Si $r \geq 1$, se tiene que $\frac{1}{\sqrt{r}} \leq r^s$.

Esto nos va a dar una idea clave para manejar esta acotación: distinguir casos según $r \in (0, 1]$ o $r > 1$. Esta idea se usará tanto en la demostración del lema como en su aplicación.



Demostración. Recordemos que usando la fórmula integral para la función de Bessel

$$J_{s+i\theta}(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{s+i\theta}}{\Gamma(s+i\theta + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{s+i\theta-\frac{1}{2}} dt.$$

La integral se puede acotar usando la función Beta B :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{s+i\theta-\frac{1}{2}} dt \right| &\leq \int_{-1}^1 \left| e^{irt} (1-t^2)^{s+i\theta-\frac{1}{2}} \right| dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^{s-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 (1-y)^{s-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy = B\left(s + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)}. \\ &\left[\begin{array}{l} t^2 = y \\ dt = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Para el caso $0 < r \leq 1$, está acotación junto con el Teorema 3.4 sirve para obtener el resultado:

$$|J_{s+i\theta}(r)| \leq \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^s}{\left|\Gamma\left(s + \frac{1}{2} + i\theta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right|} \frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} \leq \underbrace{\frac{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{2^s \Gamma(s+1)}}_{C'_s} e^{\frac{\pi}{2}|\theta|} (1+|\theta|)^{-s} \underbrace{r^s}_{\min\{r^s, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}.$$

Para el caso $r \geq 1$, vamos a acotar la integral usando el lema 3.5:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt &= ie^{-irt} \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt - ie^{ir} \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt, \\ \left| \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt \right| &\leq \left| \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt \right| + \left| \int_0^\infty e^{-rt} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} dt \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-rt} \left| (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} \right| dt + \int_0^\infty e^{-rt} \left| (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} \right| dt. \end{aligned}$$

Vamos a acotar los dos módulos que aparecen:

$$\begin{aligned} \left| (t^2 \pm 2it)^{v-\frac{1}{2}} \right| &= \left| e^{(v-\frac{1}{2}) \text{Log}(t^2 \pm 2it)} \right| = e^{(s-\frac{1}{2}) \log|t^2 \pm 2it| - \theta \text{Arg}(t^2 \pm 2it)} = |t^2 \pm 2it|^{s-\frac{1}{2}} e^{-\theta \text{Arg}(t^2 \pm 2it)} \\ &\leq |t^2 + 2it|^{s-\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $|t^2 + 2it| = |t^2 - 2it|$ y que $|\text{Arg}(t^2 \pm 2it)| \leq \frac{\pi}{2}$. Como esta acotación sirve para las dos integrales, usando que para $A, B \geq 0$ y $p > 0$ se cumple $(A+B)^p \leq 2^p(A^p+B^p)$, obtenemos la siguiente cadenas de desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt \right| &\leq 2 \int_0^\infty e^{-rt} |t^2 + 2it|^{s-\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} dt = 2e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-rt} |t^2 + 2it|^{s-\frac{1}{2}} dt \\ &\leq 2^{s+\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-rt} t^{2s-1} dt + \int_0^\infty e^{-rt} (2t)^{s-\frac{1}{2}} dt \right) \quad \left[\begin{array}{l} x = rt \\ dx = r dt \end{array} \right] \\ &\leq 2^{s+\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{2s-1} \frac{1}{r^{2s}} dx + \int_0^\infty e^{-x} \frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{r^{s+\frac{1}{2}}} x^{s-\frac{1}{2}} dx \right) \\ &\leq 2^{s+\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Gamma(2s)}{r^{2s}} + \frac{2^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s + \frac{1}{2})}{r^{s+\frac{1}{2}}} \right) \\ &\leq 2^{s+\frac{1}{2}} e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{s+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Gamma(2s)}{r^{s-\frac{1}{2}}} 2^{s-\frac{1}{2}} + \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \right) \\ &\leq k_s e^{|\theta| \frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{s+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Por tanto, ahora sí puedo acotar la función de Bessel:

$$\begin{aligned} |J_{s+i\theta}(r)| &\leq \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^s}{|\Gamma(s + \frac{1}{2} + i\theta)\Gamma(\frac{1}{2})|} k_s e^{|\theta|\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^{s+\frac{1}{2}}} = k'_s \frac{e^{|\theta|\frac{\pi}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\Gamma(s + \frac{1}{2} + i\theta)|} \\ &\leq C'_s (1 + |\theta|)^{-s} e^{|\theta|\pi} \frac{1}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Si la parte real s está en un intervalo compacto, se tiene que las constante del Teorema 3.4 está acotada. Y como el resto de funciones de s son continuas, también están acotadas. Esto hace que se cumpla la afirmación final. \square

Teorema 3.7

Para $s_0 \in [-\frac{1}{2}, +\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$, y $r > 0$ existe una constante, que depende solo de s_0 , $C = C_{s_0}$ tal que:

$$|J_{s_0+i\theta}(r)| \leq C(1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Además, si s_0 está en un intervalo compacto K , entonces C_{s_0} está acotado en K .

Demostración.

La idea principal es usar la Fórmula de recurrencia con $v - 1 = s_0 + i\theta$:

$$J_{s_0+i\theta}(r) = \frac{2(s_0 + 1 + i\theta)}{r} J_{s_0+1+i\theta}(r) - J_{s_0+2+i\theta}(r).$$

y luego aplicar el Lema 3.6 a la funciones de Bessel de la parte derecha, ya que $s_0 + 1 + i\theta$ y $s_0 + 2 + i\theta$ cumplen que tienen parte real $\geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} |J_{s_0+i\theta}| &\leq \frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{r} k_{s_0} (1 + |\theta|)^{-s_0-1} e^{\pi|\theta|} \min\{r^{s_0+1}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} + k'_{s_0} (1 + |\theta|)^{-s_0-2} e^{\pi|\theta|} \min\{r^{s_0+2}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} \\ &\leq \max\{k_{s_0}, k'_{s_0}\} e^{\pi|\theta|} (1 + |\theta|)^{-s_0} \left(\frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{(1 + |\theta|)} \frac{\min\{r^{s_0+1}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{r} + \frac{\min\{r^{s_0+2}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{(1 + |\theta|)^2} \right) \\ &\leq \max\{k_{s_0}, k'_{s_0}\} e^{\pi|\theta|} (1 + |\theta|)^{-s_0} \left(\frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{(1 + |\theta|)} \frac{\min\{r^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{r} + \frac{\min\{r^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{(1 + |\theta|)^2} \right) \\ &\leq \max\{k_{s_0}, k'_{s_0}\} e^{\pi|\theta|} (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{1 + |\theta|} \frac{\min\{r^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{r} + \frac{\min\{r^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{(1 + |\theta|)^2} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, para probar el resultado quiero ver que lo que hay en el paréntesis es menor o igual que $k \frac{1}{\sqrt{r}}$ para alguna constante $k > 0$. Es decir, quiero probar lo siguiente:

$$(**) = \frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{1 + |\theta|} \frac{\min\{r^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{r} + \frac{\min\{r^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\}}{(1 + |\theta|)^2} \stackrel{??}{\leq} k \frac{1}{\sqrt{r}} \quad k > 0 \text{ constante.}$$

El uso de la función \min nos lleva a distinguir dos casos:

Si $r \geq 1$, entonces $\min\{r^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} = \min\{r^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} = \frac{1}{\sqrt{r}}$ y se tiene que

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{1 + |\theta|} \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{(1 + |\theta|)^2} \frac{1}{\sqrt{r}} \leq \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{|2s_0|}{1 + |\theta|} + \frac{2(1 + |\theta|)}{(1 + |\theta|)} + \frac{1}{(1 + |\theta|)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{r}} (|2s_0| + 3), \end{aligned}$$

donde he usado que $\frac{1}{r} \leq 1$ y que $\frac{1}{1+|\theta|} \leq 1$.

Si $0 < r < 1$, entonces $\min\{r^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} = r^{\frac{1}{2}}$ y $\min\{r^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{r}}\} = r^{\frac{3}{2}}$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{|2s_0 + 2 + 2i\theta|}{1 + |\theta|} r^{\frac{1}{2}} + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{(1 + |\theta|)^2} \leq \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{|2s_0|}{1 + |\theta|} + \frac{2(1 + |\theta|)}{(1 + |\theta|)} + \frac{r^2}{(1 + |\theta|)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{r}} (|2s_0| + 3), \end{aligned}$$

donde ahora he usado que $r \leq 1$ y que $\frac{1}{1+|\theta|} \leq 1$.

Si $s_0 \in K$, con K un intervalo compacto, observamos que la constante del enunciado es $C_{s_0} = \max\{k_{s_0}, k'_{s_0}\} (|2s_0| + 3)$. Pero este valor está acotado por el siguiente razonamiento.

- Los números $s_0 + 1$ y $s_0 + 2$ también se encuentran en intervalos compactos, y como las constantes k_0 y k'_0 vienen del Lema 3.6 están acotadas.
- La función $(|2s_0| + 3)$ es continua en s_0 y por tanto está acotada también.

□

En la propia demostración observamos que hemos usado que

$$(1 + |\theta|)^{-s_0} \leq (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto hace que en la acotación lo único que dependa del punto s_0 elegido sea la constante, y no los elementos que dependen de θ . Esto nos permite obtener una acotación más fácil de usar, ya que hay menos elementos que dependen de s_0 , y será la que se usará posteriormente. Sin embargo, el resultado sin esta mayoración puede ser útil en otros ámbitos.

Teorema 3.8

Para $s_0 \in [\frac{-1}{2}, +\infty)$, $\theta \in \mathbb{R}$, y $r > 0$ existe una constante, que depende solo de s_0 , $C = C_{s_0}$ tal que:

$$|J_{s_0+i\theta}(r)| \leq C(1 + |\theta|)^{-s_0} e^{\pi|\theta|} \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Además, si s_0 está en un intervalo compacto K , entonces C_{s_0} está acotado en K .

3.3. Comportamiento cerca del origen

Teorema 3.9

Dado $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v \geq -\frac{1}{2}$, para $0 < r \leq 1$ se cumple que

$$|J_v(r)| \leq C e^{\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} v|} r^{\operatorname{Re} v}.$$

Donde C es una constante que depende de la parte real de v : $C = C(\operatorname{Re} v)$. Además, si $\operatorname{Re} v$ se encuentra en un intervalo compacto K , entonces C está acotado en K .

Demostración. Descomponiendo $v = s + i\theta$ en las partes reales e imaginarias, por la definición de función de Bessel se tiene que:

$$\begin{aligned} J_v(r) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{v+2k} = \frac{r^v}{2^v} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+v+1)} \\ &= \frac{r^v}{2^v} \left(\frac{1}{\Gamma(v+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k} k! (k+v) \cdot (k+v-1) \cdot \dots \cdot (v+1) \Gamma(v+1)} \right) \\ &= \frac{r^v}{2^v} \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k} k! (k+v) \cdot \dots \cdot (v+1)} \right) \\ |J_v(r)| &\leq \frac{r^s}{2^s} \frac{1}{|\Gamma(v+1)|} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r^{2k}}{2^{2k} k! (k+s) \cdot \dots \cdot (s+1)} \right). \end{aligned}$$

Voy por tanto a acotar la última expresión:

- El término $r^{2k} \leq 1$ lo puedo omitir.
- La función Gamma la podemos acotar con el lema 3.4:

$$\frac{1}{|\Gamma(v+1)|} \leq C_s (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2} - s - 1} e^{\frac{\pi}{2} |\theta|} \leq C_s e^{\frac{\pi}{2} |\theta|}.$$

- Como $s \geq -\frac{1}{2}$, sabemos que $s+1 \geq \frac{1}{2}$ y $s+k \geq 1$ para $k \geq 2$. Por esto, dividir por $s+k$ va decreciendo para todo $k \geq 2$ y se tiene que:

$$\frac{1}{(k+s) \cdot \dots \cdot (s+1)} \leq \frac{1}{s+1}.$$

Juntando todo, se tiene la acotación buscada.

$$|J_v(r)| \leq r^s \frac{C_s}{2^s} e^{\frac{\pi}{2} |\theta|} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(s+1) 2^{2k} k!} \right) \leq r^s \frac{C_s}{2^s} e^{\frac{\pi}{2} |\theta|} \left(1 + \frac{1}{s+1} e^{\frac{1}{4}} \right).$$

Que la constante final está acotado sobre intervalos compactos es inmediato si tenemos en cuenta que C_s lo está. \square

3.4. Comportamiento asintótico

Teorema 3.10

Dado $v \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$, para $r > 0$ se cumple

$$J_v(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}} + R_v(r),$$

con $R_v(r)$ una función que verifica $|R_v(r)| \leq C_v r^{-\frac{3}{2}}$ para $r \geq 1$.

Demostración. Comenzamos usando la Fórmula integral para la función de Bessel, y sustituimos la integral del Lema 3.5.

$$\begin{aligned} J_v(r) &= \frac{r^v}{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{irt} (1-t^2)^{v-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{r^v}{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\int_0^\infty i e^{-rt} e^{-ir} (t^2 + 2ti)^{v-\frac{1}{2}} dt - \int_0^\infty i e^{-rt} e^{ir} (t^2 - 2ti)^{v-\frac{1}{2}} dt \right). \end{aligned}$$

Observamos que se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} i e^{-ir} (t^2 + 2it)^{v-\frac{1}{2}} &= (2t)^{v-\frac{1}{2}} e^{-i(r-\frac{\pi}{2})} \left(\frac{t}{2} + i\right)^{v-\frac{1}{2}} (-i)^{v-\frac{1}{2}} (i)^{v-\frac{1}{2}} \\ &= (2t)^{v-\frac{1}{2}} e^{-i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \left(1 - \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}} \\ -i e^{ir} (t^2 - 2it)^{v-\frac{1}{2}} &= (2t)^{v-\frac{1}{2}} e^{i(r-\frac{\pi}{2})} \left(\frac{t}{2} - i\right)^{v-\frac{1}{2}} (i)^{v-\frac{1}{2}} (-i)^{v-\frac{1}{2}} \\ &= (2t)^{v-\frac{1}{2}} e^{i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \left(1 + \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, sumando y restando 1 a $(1 + \frac{it}{2})^{v-\frac{1}{2}}$ llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} J_v(r) &= \frac{r^v 2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(v + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \left[\int_0^\infty e^{rt} t^{v-\frac{1}{2}} e^{-i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \left(\left(1 - \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}} - 1 \right) dt + \right. \\ &\quad \int_0^\infty e^{rt} t^{v-\frac{1}{2}} e^{i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \left(\left(1 + \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}} - 1 \right) dt + \\ &\quad \left. \int_0^\infty e^{rt} t^{v-\frac{1}{2}} \underbrace{\left(e^{-i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} + e^{i(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} \right)}_{2 \cos(r-\frac{\pi v}{2}-\frac{\pi}{4})} dt \right]. \end{aligned}$$

Observamos que la última integral es la aproximación que buscamos:

$$\begin{aligned} \frac{r^v 2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(v + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{rt} t^{v-\frac{1}{2}} 2 \cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) dt & \underset{[x=rt]}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\Gamma(v + \frac{1}{2})\sqrt{r}} \int_0^\infty e^x x^{v-\frac{1}{2}} dx \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Haciendo las siguientes definiciones se admite la fórmula del enunciado.

$$R_\pm(r) = \frac{r^v}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(v + \frac{1}{2})} e^{\pm i\left(r - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^\infty e^{-rt} t^{v-\frac{1}{2}} \left(\left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}} - 1 \right) dt,$$

$$R_v(r) = R_+(r) + R_-(r).$$

Para acabar la demostración, faltaría probar que para $r \geq 1$, se cumple la acotación $R_v(r) \leq C_v r^{-\frac{3}{2}}$. Descompongamos v en su parte real e imaginaria, $v = s + i\theta$, y comencemos acotando $R_\pm(r)$:

$$|R_\pm(r)| \leq \frac{r^s}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}|\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \int_0^\infty e^{-rt} t^{s-\frac{1}{2}} \left| \left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{v-\frac{1}{2}} - 1 \right| dt. \quad (3.1)$$

Vamos a usar el siguiente resultado. Para $a > -1$ y para $b \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \left| (1 \pm iy)^{a+ib} - 1 \right| & \leq (|a| + |b|) C_{a,b} y & \text{si } 0 \leq y \leq 1. \\ \left| (1 \pm iy)^{a+ib} - 1 \right| & \leq C_{a,b} \cdot y^a + 1 & \text{si } 1 \leq y. \end{aligned}$$

Donde $C_{a,b} = 2^{\frac{|a|+1}{2}} e^{|b|\frac{\pi}{2}}$.

Para probar la primera afirmación, considero la función

$$f(z) = z^{a+ib} = e^{(a+ib) \cdot \text{Log } z},$$

que es analítica siempre que $\text{Re } z > 0$. Además cumple la siguiente cadena de desigualdades:

$$\left| (1 \pm iy)^{a+ib} - 1 \right| = |f(1 \pm iy) - f(1)| = \left| \int_{[1, 1 \pm iy]} f'(z) dz \right| \leq |y| \max_{z \in [1, 1 \pm iy]} |f'(z)|.$$

Luego si probamos que $|f'(z)| \leq C_{a,b}$ para $z \in [1 - i, 1 + i]$ tendremos el resultado. Calculamos esta derivada:

$$|f'(z)| = \left| (a + ib) z^{a+ib-1} \right|.$$

Usando ahora que $|\text{Arg } z| \leq \frac{\pi}{2}$ y $|z| \leq \sqrt{2}$ se obtiene la acotación, ya que

$$|f'(z)| = |a + ib| \cdot |z^{a-1+ib}| = |a + ib| \cdot |z|^{a-1} e^{-b \text{Arg } z} \leq (|a| + |b|) 2^{\frac{|a|+1}{2}} e^{|b|\frac{\pi}{2}}.$$

Para la segunda parte, acotamos directamente con

$$\left| (1 \pm iy)^{a+ib} - 1 \right| \leq \left| (1 \pm iy)^{a+ib} - 1 \right| + 1 \leq (1 + y^2)^{\frac{a}{2}} e^{|b|\frac{\pi}{2}} + 1.$$

Observamos que, distinguiendo casos llegamos a que $(1 + y^2)^{\frac{a}{2}} \leq 2^{\frac{|a|}{2}} y^a$:

- Si $a \geq 0$, $(1 + y^2)^{\frac{a}{2}} \leq 2^{\frac{a}{2}} y^a$.
- Si $a < 0$, $(1 + y^2)^{\frac{a}{2}} \leq y^a \leq 2^{\frac{|a|}{2}} y^a$.

Sustituyendo esta acotación se completa el resultado.

Vamos a evaluar en $y = \frac{t}{2}$, $v - \frac{1}{2} = a + ib$ (es decir, $\theta = b$ y $s - \frac{1}{2} = a$). Sustituyendo en la acotación de la integral de (3.1), obtenemos estas tres integrales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 e^{-rt} t^{s-\frac{1}{2}} (|a| + |b|) C_{a,b} \frac{t}{2} dt & I'_1 &= \int_0^2 e^{-rt} t^{s+\frac{1}{2}} dt \\ I_2 &= \int_2^\infty e^{-rt} t^{s-\frac{1}{2}} C_{a,b} \cdot \frac{t^{s-\frac{1}{2}}}{2^{s-\frac{1}{2}}} dt & I'_2 &= \int_2^\infty e^{-rt} t^{2s-1} dt \\ I_3 &= \int_2^\infty e^{-rt} t^{s-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Vamos a acotar cada una de ellas.

$$\begin{aligned} |I'_1| &= \left| \int_0^2 e^{-rt} t^{s+\frac{1}{2}} dt \right| \leq \frac{\Gamma(s + \frac{3}{2})}{r^{s+\frac{3}{2}}} \\ \frac{r^s}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \cdot |I_1| &\leq \frac{C_{a,b} (|a| + |b|) \Gamma(s + \frac{3}{2})}{2^{\frac{3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para acotar las dos integrales siguientes, usaremos que existen constantes positivas tal que, para todo $t \geq 2$

$$e^{-\frac{rt}{2}} t^{2s-1} \leq k_1, \quad e^{-\frac{rt}{2}} t^{s-\frac{1}{2}} \leq k_2.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |I'_2| &\leq \int_2^\infty e^{-\frac{rt}{2}} k_1 dt = 2k_1 \frac{e^{-r}}{r} \\ \frac{r^s}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \cdot |I_2| &\leq \frac{C_{a,b} k_1}{2^{s-1} \pi^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \frac{r^{s-1}}{e^r} \leq \frac{C_{a,b} k_1}{2^{s-1} \pi^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}} \\ |I_3| &\leq \int_2^\infty e^{-\frac{rt}{2}} k_2 dt = 2k_2 \frac{e^{-r}}{r} \\ \frac{r^s}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \cdot |I_3| &\leq \frac{2k_2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \frac{r^{s-1}}{e^r} \leq \frac{2k_2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Gamma(v + \frac{1}{2})|} \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Juntando las 3 integrales y tomando la mayor de las 3 constantes, se obtiene la acotación buscada: $|R_v(r)| \leq 2|R_\pm(r)| \leq 2Kr^{-\frac{3}{2}}$. \square

3.5. Relación con la Transformada de Fourier

Las funciones de Bessel aparecen de manera natural al considerar ciertas Transformadas de Fourier, tal como vamos a ver en esta sección. Esta realmente es la motivación para introducir esta familia de funciones en este trabajo, ya que en los capítulos posteriores aprovecharemos esta relación.

Definición 7

Transformada de Fourier de una medida

Dada una medida finita μ sobre \mathbb{R}^d , se define su transformada de Fourier como la siguiente función:

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x) \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^d$$

Recordemos que en el Anexo C se define la medida en la esfera y se enuncian sus propiedades más importantes.

Teorema 3.11

Transformada de Fourier de la medida en la esfera

Para $d \geq 2$, la transformada de Fourier de $d\sigma(S^{d-1})$ es

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|\xi|).$$

Demostración. Usando el Teorema C.5 es sencillo calcular la integral.

$$\begin{aligned} \widehat{d\sigma}(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma(x) = \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma(x) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-2\pi i |\xi| s} (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} ds = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_{-1}^1 e^{2\pi i |\xi| s} (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} ds \\ &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{d-2}{2}}}{(\pi|\xi|2)^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|\xi|) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|\xi|) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|\xi|). \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que puedo usar la fórmula integral para la función de Bessel porque $\frac{d-2}{2} > -\frac{1}{2}$, y que en el último paso he utilizado que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. \square

Teorema 3.12 Transformada de Fourier de una función radial

Sea $f(x) = f_0(|x|)$ una función radial en \mathbb{R}^d , entonces su transformada de Fourier se puede expresar como:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}} \int_0^{+\infty} f_0(r) \cdot J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi r|\xi|) \cdot r^{\frac{d}{2}} dr$$

Demostración. Haremos un cambio a polares, y luego usaremos el teorema anterior para sustituir $\widehat{d\sigma}$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0(|x|) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} r^{d-1} f_0(r) e^{-2\pi i r \xi \cdot (\theta)} d\sigma(\theta) dr \\ &= \int_0^\infty r^{d-1} f_0(r) \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i (r\xi) \cdot \theta} d\sigma(\theta) dr = \int_0^\infty r^{d-1} f_0(r) \widehat{d\sigma}(r\xi) dr \\ &= \int_0^\infty r^{d-1} f_0(r) \frac{2\pi}{(r|\xi|)^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi r|\xi|) dr \\ &= \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}} \int_0^\infty f_0(r) J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi r|\xi|) \cdot r^{\frac{d}{2}} dr. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.13

Sea $t > 0$, $\operatorname{Re} \mu > -1$ y $\operatorname{Re} v > -1$, entonces se cumple

$$\int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1} (1-s^2)^v ds = \frac{\Gamma(v+1)2^v}{t^{v+1}} J_{\mu+v+1}(t).$$

Demostración. La idea es usar el desarrollo en serie de la función de Bessel y, como hay convergencia absoluta, conmutar la integral con la serie.

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1} (1-s^2)^v ds &= \int_0^1 \left(\frac{ts}{2}\right)^\mu \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\mu+1)} \left(\frac{ts}{2}\right)^{2k} \right) s^{\mu+1} (1-s^2)^v ds \\ &= \frac{t^\mu}{2^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k! \Gamma(k+\mu+1) 2^{2k}} \int_0^1 s^{2\mu+2k+1} (1-s^2)^v ds \\ &= \frac{t^\mu}{2^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k! \Gamma(k+\mu+1) 2^{2k}} \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\mu+k} (1-u)^v du \\ &= \frac{t^\mu}{2^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k! \Gamma(k+\mu+1) 2^{2k}} \frac{1}{2} B(\mu+k+1, v+1) \\ &= \frac{t^\mu}{2^\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k! \Gamma(k+\mu+1) 2^{2k}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+k+1) \Gamma(v+1)}{\Gamma(\mu+k+v+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^v \Gamma(v+1)}{t^{v+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\mu+v+1}}{k! \Gamma(\mu+k+v+2) 2^{2k+v+\mu+1}} \\
&= \frac{\Gamma(v+1) 2^v}{t^{v+1}} J_{\mu+v+1}(t).
\end{aligned}$$

□

Una aplicación de estos dos resultados es el cálculo de la siguiente Transformada de Fourier.

Proposición 3.14:

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > -1$, definimos la función

$$m_\lambda(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\lambda = \begin{cases} (1 - |\xi|^2)^\lambda & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1 \end{cases}$$

entonces $\widehat{m}_\lambda(x) = m_\lambda^\vee(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\pi^\lambda} \frac{J_{\frac{d}{2}+\lambda}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}+\lambda}}$.

Demostración. Como estamos con una función radial, aplicamos el Teorema 3.12:

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_\lambda(x) &:= \frac{2\pi}{|x|^{\frac{d-2}{2}}} \int_0^\infty (1-r^2)^\lambda \cdot \chi_{[0,1]}(r) J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi r|x|) r^{\frac{d}{2}} dr \\
&= \frac{2\pi}{|x|^{\frac{d-2}{2}}} \int_0^1 (1-r^2)^\lambda J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi r|x|) r^{\frac{d}{2}} dr \\
&= \frac{2\pi}{|x|^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\Gamma(\lambda+1) 2^\lambda}{(2\pi|x|)^{\lambda+1}} J_{\frac{d}{2}+\lambda}(2\pi|x|) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\pi^\lambda} \frac{J_{\frac{d}{2}+\lambda}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}+\lambda}},
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos usado el Teorema 3.13. □

3.6. Funciones relacionadas con J_ν

Teorema 3.15

Dado $r > 0$ fijo, la aplicación $z \mapsto \frac{J_z(r)}{r^z}$ es analítica en $-1 < \operatorname{Re} z$.

Demostración. Desarrollando la serie de potencias de $J_z(r)$ se tiene que

$$\frac{J_z(r)}{r^z} = \frac{1}{2^z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+z+1)} = \frac{1}{2^z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{k! \Gamma(k+z+1)}.$$

Luego hay que probar que la serie es analítica. Llamo $f_k(z) = \frac{(-1)^k r^{2k}}{k! \Gamma(k+z+1)}$ y observo que

$$\left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right| = \frac{r^2}{(k+1)|k+z+1|} \leq \frac{r^2}{(k+1)(k+\operatorname{Re} z+1)} \leq \frac{r^2}{k+1}.$$

Luego la serie converge absolutamente e uniformemente en z . De aquí se deduce que como las funciones f_k son holomorfas la serie también lo es. \square

Teorema 3.16

Dado $\alpha \geq 0$, se cumple que

$$\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d) \iff p > \frac{d}{\alpha + \frac{1}{2}}.$$

Demostración.

\Leftarrow Para $x \in \mathbb{R}^d$ con $|x| \leq 1$ se tiene que $|J_\alpha(|x|)| \leq C_\alpha \cdot |x|^\alpha$ y por tanto

$$\int_{|x| \leq 1} \left(\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \right)^p dx < +\infty.$$

Por otro lado, si $|x| \geq 1$, aplicamos el Teorema 3.7:

$$|J_\alpha(|x|)| \leq \frac{C}{|x|^{\frac{1}{2}}}.$$

Sustituyo esto en la integral:

$$\int_{|x| \geq 1} \left(\frac{|J_\alpha(|x|)|}{|x|^\alpha} \right)^p dx \leq C^p \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} dx < +\infty.$$

Observamos que la integral es finita por $(\alpha + \frac{1}{2})p > d$ y el resultado E.3.

\Rightarrow Supongamos que $\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $p \leq \frac{d}{\alpha + \frac{1}{2}}$ para buscar una contradicción. Distinguiamos dos casos según el valor de p :

- Caso $\frac{d}{\alpha + \frac{3}{2}} < p \leq \frac{d}{\alpha + \frac{1}{2}}$: Usando Teorema el 3.10:

$$\text{Si } |x| \geq 1, \quad \left| \frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \right| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\cos(|x| - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})|}{|x|^{\alpha + \frac{1}{2}}} - \frac{C'_\alpha}{|x|^{\alpha + \frac{3}{2}}}.$$

Y por tanto, se puede acotar la siguiente integral:

$$\int_{|x| \geq 1} \left| \frac{\cos(|x| - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})}{|x|^{\alpha + \frac{1}{2}}} dx \right|^p \leq K \left(\int_{|x| \geq 1} \left| \frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \right|^p dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x|^{(\alpha + \frac{3}{2})p}} dx \right) < +\infty.$$

Haciendo el cambio a polares, se llega a que

$$\int_1^\infty \frac{|\cos(r - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})|^p}{r^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} r^{d-1} dr < +\infty.$$

En particular, se tiene que

$$I = \int_{\pi + \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}}^\infty \frac{|\cos(r - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4})|^p}{r^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} r^{d-1} dr < +\infty.$$

Considero el cambio de variables $s = r - \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}$, que cumple $ds = dr$ y $r = \pi + \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} \iff s = \pi$. Además, cumple las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} s &\leq s + \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} = r \leq s \left(1 + \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{r^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} &\geq C \frac{1}{s^{(\alpha + \frac{1}{2})p}}. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} I &\geq C \int_\pi^\infty \frac{|\cos(s)|^p}{s^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} s^{d-1} ds = C \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(s)|^p}{s^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} s^{d-1} ds \\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\pi)^{d-1}}{((k+1)\pi)^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(s)|^p ds. \end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{aligned} - k + 1 &\leq 2k \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^{(\alpha + \frac{1}{2})p}} \geq 2^{-(\alpha + \frac{1}{2})p} \frac{1}{k^{(\alpha + \frac{1}{2})p}}, \\ - \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(s)|^p ds &= \int_0^\pi |\cos(s)|^p ds \text{ es una constante,} \end{aligned}$$

se llega a que $I \geq C' \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{(\alpha + \frac{1}{2})p - d + 1}}$. Pero esta serie es divergente por

$$p \leq \frac{d}{\alpha + \frac{1}{2}} \Rightarrow p(\alpha + \frac{1}{2}) \leq d \Rightarrow (\alpha + \frac{1}{2})p - d + 1 \leq 1.$$

Sin embargo I era finito, por lo que es una contradicción que $I \geq +\infty$.

• Caso $p \leq \frac{d}{\alpha + \frac{3}{2}}$:

Por la implicación \Leftarrow hemos visto que para algún $p_1 > \frac{d}{\alpha + \frac{1}{2}}$ se tiene que

$$\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d).$$

Si además $\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $p \leq \frac{d}{\alpha + \frac{3}{2}}$ podemos aplicar la Proposición D.9 y obtenemos que

$$\frac{J_\alpha(|x|)}{|x|^\alpha} \in L^q(\mathbb{R}^d) \quad \forall q \in [p, p_1].$$

Esto es una contradicción con el caso anterior. □

Capítulo 4

Restricción de la Transformada de Fourier

4.1. Transformada de Fourier en L^p

En el Capítulo 1 hemos comenzado definiendo la transformada de Fourier para funciones de L^1 . Tras ver el Teorema de Plancherel, se ha generalizado a funciones de L^2 mediante el operador \mathcal{F} . Vamos a ver ahora que podemos extenderlo también a funciones de L^p cuando $1 < p < 2$.

Proposición 4.1:

Si $1 < p < 2$ y $f \in L^p$, entonces existen $f_1 \in L^1$ y $f_2 \in L^2$ tales que $f = f_1 + f_2$.

Demostración. Basta observar que la siguiente descomposición es válida:

$$f_1 = f \cdot \chi_{\{|f| \geq 1\}} \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad f_2 = f \cdot \chi_{\{|f| < 1\}} \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

□

En el lenguaje del análisis funcional, esto se puede expresar como $L^p \hookrightarrow L^1 + L^2$.

Definición 8**Transformada de Fourier en L^p**

Dado $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq 2$, definimos su transformada de Fourier como $\mathcal{F}f = \widehat{f}_1 + \mathcal{F}f_2$, donde $f = f_1 + f_2$ es una descomposición con $f_i \in L^i(\mathbb{R}^d)$.

Hay que justificar que esta definición no depende de la descomposición elegida. En efecto, tengamos $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ dos descomposiciones,

$$g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow [g_1 - f_1]^\wedge = \mathcal{F}(f_2 - g_2) \Rightarrow \widehat{g}_1 + \mathcal{F}g_2 = \widehat{f}_1 + \mathcal{F}f_2.$$

4.2. El problema de la Restricción de la TF

Aunque toda la teoría de la Transformada de Fourier la he desarrollado en \mathbb{R}^d arbitrario, a partir de ahora vamos a suponer $d > 1$. Esto es así porque vamos a trabajar con las funciones restringidas a la esfera S^{d-1} , y $S^0 = \{-1, 1\}$ no tiene las mismas propiedades que las esferas de dimensión mayor.

Definición 9

Problema de Restricción en la esfera

Diremos que se cumple el problema de Restricción de la esfera S^{d-1} para $p \rightarrow q$, abreviado $R(p, q, S^{d-1})$, cuando exista una constante $C_{p,q} > 0$ tal que

$$\left\| \widehat{f}|_{S^{d-1}} \right\|_{L^q(S^{d-1})} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Se llamará operador de Restricción a

$$R(f)(\xi) := \widehat{f}|_{S^{d-1}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \xi \in S^{d-1}.$$

Definición 10

Operador de Extensión

Dado $g \in L^1(S^{d-1})$, se define

$$\mathcal{E}(g)(x) := \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Proposición 4.2:

El operador de extensión es el adjunto del operador de restricción, es decir, se cumple que para todo par de funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(S^{d-1})$ se verifica

$$\langle Rf, g \rangle_{S^{d-1}} = \langle f, \mathcal{E}g \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

Demostración. La idea es conmutar las integrales.

$$\begin{aligned} \langle Rf, g \rangle_{S^{d-1}} &= \int_{S^{d-1}} \widehat{f}(\xi) \overline{g(\xi)} d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) \overline{g(\xi)} d\sigma(\xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) \right) dx = \langle f, \mathcal{E}g \rangle_{\mathbb{R}^d}. \end{aligned}$$

Y se puede aplicar el Teorema de Fubini porque

$$\int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right| \cdot |f(x)| \cdot |g(\xi)| \, d\sigma(\xi) dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^1(S^{d-1})} < +\infty.$$

□

Teorema 4.3

Dados $1 \leq p, q < +\infty$ y una constante $C > 0$, son equivalentes:

1. Para cada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se cumple $\|Rf\|_{L^q(S^{d-1})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.
2. Para cada $g \in L^1(S^{d-1})$ se cumple que $\|\mathcal{E}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})}$.

En caso de que se cumplan estas condiciones, entonces se cumple $R(p, q, S^{d-1})$.

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$ Dado $g \in L^1(S^{d-1})$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} &= \sup \left\{ |\langle \mathcal{E}g, f \rangle_{\mathbb{R}^d}| : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle g, Rf \rangle_{S^{d-1}}| : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})} \cdot \|Rf\|_{L^q(S^{d-1})} : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 1 \right\} \\ &\leq C \cdot \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})}. \end{aligned}$$

Donde en la primera línea he usado el Teorema de dualidad (Teorema D.10), y en la tercera línea he usado Hölder (Teorema D.6).

$2 \Rightarrow 1$ Dado $f \in C_0^\infty$,

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{L^q(S^{d-1})} &= \sup \left\{ |\langle Rf, g \rangle_{S^{d-1}}| : g \in L^{q'}(S^{d-1}), \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\langle f, \mathcal{E}g \rangle_{\mathbb{R}^d}| : g \in L^{q'}(S^{d-1}), \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})} = 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\mathcal{E}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} : g \in L^{q'}(S^{d-1}), \|g\|_{L^{q'}(S^{d-1})} = 1 \right\} \\ &\leq C \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

□

4.3. Acotaciones para el Problema de Restricción

Una vez definido el Problema de Restricción, nos podemos preguntar para qué valores de p y q se cumple. En esta sección vamos a comprobar que no se cumple para cualquier par de valores, si no que hay ciertas limitaciones.

Un primer ejemplo clásico es el siguiente.

Teorema 4.4

Si $1 \leq q \leq +\infty$, el operador $R : C_0^\infty \rightarrow L^q(S^{d-1})$ no se puede extender de manera acotada a $L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^q(S^{d-1})$.

Demostración. La idea es construir una familia de funciones $\psi_\varepsilon \in \mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ que podamos hacer crecer su norma tanto como queramos.

Comencemos con una función $\phi \in C_0^\infty((-1, 1))$ que verifique $\phi(0) = \|\phi\|_{L^\infty} = 1$, por el Lema D.5.

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, defino

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) := \phi\left(\frac{|\xi| - 1}{\varepsilon}\right) \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Su soporte es inmediato de calcular. Efectivamente,

$$\text{Sop } \widehat{\psi}_\varepsilon \subseteq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : \frac{|\xi| - 1}{\varepsilon} \in (-1, 1) \right\} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : 1 - \varepsilon < |\xi| < 1 + \varepsilon \right\}.$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\widehat{\psi}_\varepsilon$ cumple:

- Tiene soporte acotado, y por tanto compacto.
- Es de clase C^∞ siempre que $\xi \neq 0$, por ser $\phi \in C^\infty$.
- En un entorno del 0 la función es idénticamente nula, por tanto también es C^∞ en el origen.

En definitiva, $\widehat{\psi}_\varepsilon \in C_0^\infty \subseteq \mathcal{S}$ y por el Teorema de inversión se tiene que $\psi_\varepsilon := [\widehat{\psi}_\varepsilon]^\vee$ está bien definido y por el Teorema 1.15 se tiene que $\psi_\varepsilon \in \mathcal{S}$.

Voy ahora a calcular las normas:

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sigma(S^{d-1}) \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \left| \phi\left(\frac{r-1}{\varepsilon}\right) \right|^2 r^{d-1} dr \\ &\leq \sigma(S^{d-1}) \cdot 2^{d-1} \cdot 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L^q(S^{d-1})}^q = \int_{S^{d-1}} |\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi)|^q d\sigma(\xi) = \int_{S^{d-1}} d\sigma(\xi) = \sigma(S^{d-1}).$$

Por tanto, si R se pudiera extender de manera acotada existiría $C > 0$ una constante positiva tal que $\|Rf\|_{L^q(S^{d-1})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pero esto es una contradicción con que $\|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L^q(S^{d-1})}$ sea una constante y $\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ tienda a 0 conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

El siguiente resultado muestra un rango más óptimo para p .

Teorema 4.5

Si $1 \leq p, q < +\infty$ cumplen $R(p, q, S^{d-1})$, entonces $p < \frac{2d}{d+1}$.

Demostración. Por el Teorema 4.3, se tiene que

$$\|\mathcal{E}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,q} \|g\|_{L^q(S^{d-1})} \quad \forall g \in L^1(S^{d-1}).$$

Por tanto, haciendo $g \equiv 1$ en S^{d-1} obtenemos que $\|\mathcal{E}g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C'$. Es decir, la norma es finita y por tanto $\mathcal{E}g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

Vamos a calcular $\mathcal{E}g$:

$$\mathcal{E}g = \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(\xi) = \widehat{d\sigma}(\xi) = 2\pi \frac{J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d-2}{2}}}.$$

Se tiene entonces que

$$2\pi \frac{J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d-2}{2}}} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \frac{J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|x|)}{(2\pi|x|)^{\frac{d-2}{2}}} = \frac{J_{\frac{d-2}{2}}(|y|)}{|y|^{\frac{d-2}{2}}} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

Y aplicando el Teorema 3.16 acabamos la demostración.

$$\begin{aligned} p' > \frac{d}{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2d}{d-1} & \Rightarrow \frac{1}{p'} < \frac{d-1}{2d} \\ \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p'} > 1 - \frac{d-1}{2d} = \frac{d+1}{2d} & \Rightarrow p < \frac{2d}{d+1} \end{aligned}$$

□

4.4. La conjetura de Restricción

Los resultados anteriores nos muestran que no para todo p, q se cumple el Problema de Restricción. Surge entonces una pregunta natural: ¿para que valores sí se cumple? Esto ha sido un tema de estudio en análisis desde que fue planteado en la década de 1960. Actualmente, se conjetura los siguientes valores.

Conjetura de Restricción

El Problema de Restricción $R(p, q, S^{d-1})$ se cumple si y solo si $1 \leq p < \frac{2d}{d+1}$ y $q \leq p' \frac{d-1}{d+1}$, con p' el exponente conjugado de p .

Observamos que la acotación para el valor de p es la encontrada en el Teorema 4.5, por lo que hemos visto un argumento de porque esta acotación no se puede

mejorar.

Los primeros avances para el Problema de Restricción fueron el Teorema Tomas-Stein, que será demostrado en el siguiente capítulo. Posteriormente, esta acotación se ha ido mejorando poco a poco, e incluso se ha probado la conjetura para dimensión $d = 2$.

Más información sobre este tema se puede encontrar en [\[10\]](#) ó [\[2\]](#).

Capítulo 5

Teorema de Tomas-Stein

En este capítulo voy a probar el Teorema Tomas-Stein, que nos da una primer rango de valores para los que se cumple el problema de Restricción.

Teorema 5.1

Teorema de Tomas-Stein

Si $1 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d+3}$ entonces se cumple $R(p, 2, S^{d-1})$.

Demostración.

Ya habíamos visto que el operador de extensión \mathcal{E} es el operador adjunto de R , es decir,

$$R^*g = \mathcal{E}g(x) = \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi).$$

Si definimos el operador $T := R^*R$, observamos que se tiene lo siguiente:

$$\|Rf\|_{L^2(S^{d-1})}^2 = \langle Rf, Rf \rangle_{L^2(S^{d-1})} = \langle R^*Rf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \cdot \|R^*Rf\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)},$$

donde la desigualdad se tiene por el Teorema de Hölder (D.6). Normalizando, observamos que si probamos que $T = R^*R$ es un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, tendremos probado que $R : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S^{d-1})$ es acotado también. Esto es, que se cumple $R(p, 2, S^{d-1})$.

Dado $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, como \widehat{f} es continua, podemos calcular explícitamente Tf :

$$\begin{aligned} Tf(x) &:= R^*(\widehat{f}|_{S^{d-1}})(x) = \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\sigma(\xi) = \int_{S^{d-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y \cdot \xi} f(y) dy d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i(y-x) \cdot \xi} d\sigma(\xi) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot \widehat{d\sigma}(y-x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot \widehat{d\sigma}(x-y) dy = f * \widehat{d\sigma}(x) \end{aligned}$$

Donde en la línea 3 hemos usado que por el Teorema 3.11, sabemos que $\widehat{d\sigma}$ es una función radial. En la línea 1, podemos usar Fubini porque

$$\int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y) e^{-2\pi i(y-x) \cdot \xi}| d\sigma(\xi) dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \cdot \sigma(S^{d-1}) < +\infty.$$

En resumen,

$$T(f) = f * \widehat{d\sigma}(x) \quad \text{para } f \in C_0^\infty.$$

Y sabemos que la transformada de Fourier de la medida es

$$\widehat{d\sigma}(x) = \int_{S^{d-1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(\xi) = \frac{2\pi}{|x|^{\frac{d-2}{2}}} J_{\frac{d-2}{2}}(2\pi|x|).$$

La idea clave de la demostración es sustituir el operador T por una familia analítica T_z que cumpla $T = T_0$. Entonces, si aplicáramos el teorema generalizado de Riesz-Thorin tendríamos una acotación sobre T . Para ello, hay que definir esta familia y comprobar todas las hipótesis del teorema de interpolación.

Definimos la siguiente familia de funciones:

$$K_z(y) := 2\pi^{1-z} \frac{J_{\frac{d-2}{2}+z}(2\pi|y|)}{|y|^{\frac{d-2}{2}+z}} \quad \frac{-d+1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 1$$

$$T_z(f) := K_z * f$$

Es inmediato comprobar que $K_0 = \widehat{d\sigma}$ y por tanto $T_0 = T$.

Vamos a acotar las funciones en la línea $\operatorname{Re} z = \frac{-d+1}{2}$. Usando el Teorema 3.7

$$\left| J_{-\frac{1}{2}+i\theta}(|x|) \right| \leq C_0(1+|\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} |x|^{-\frac{1}{2}} \leq C_0 e^{(\pi+\frac{1}{2})|\theta|} |x|^{-\frac{1}{2}}.$$

Además, observamos que $\|f * K_z\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|K_z\|_\infty$ y por tanto

$$\left\| T_{-\frac{d+1}{2}+i\theta} \right\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq \|K_{-\frac{d+1}{2}+i\theta}\|_\infty = 2\pi^{\frac{d+1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \frac{J_{-\frac{1}{2}+i\theta}(2\pi|y|)}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} |y|^{-\frac{1}{2}} |y|^{i\theta}} \right\|_\infty \leq C_0 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{d}{2}} e^{(\pi+\frac{1}{2})|\theta|}.$$

Para la otra banda, $\operatorname{Re} z = 1$, usamos el teorema de Plancherel. Para $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \|T_{1+i\theta}(f)\|_{L^2} &= \|K_{1+i\theta} * f\|_{L^2} = \|[K_{1+i\theta} * f]^\wedge\|_{L^2} = \|\widehat{K}_{1+i\theta} \cdot \widehat{f}\|_{L^2} \\ &\leq \|\widehat{K}_{1+i\theta}\|_{L^\infty} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|\widehat{K}_{1+i\theta}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Luego deducimos que $\|T_{1+i\theta}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|\widehat{K}_{1+i\theta}\|_{L^\infty}$ y queremos acotar $\widehat{K}_{1+i\theta}(\xi)$. Usando la Proposición 3.14 sabemos que:

$$\left[(1 - |\xi|^2)_+^{i\theta} \right]^\vee = \frac{\Gamma(1+i\theta)}{\pi^{i\theta}} \frac{J_{\frac{d}{2}+i\theta}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}+i\theta}}.$$

Y por tanto:

$$\widehat{K}_{1+i\theta}(\xi) = \left[2\pi^{-i\theta} \frac{J_{\frac{d}{2}+i\theta}(2\pi|x|)}{|x|^{\frac{d}{2}+i\theta}} \right]^\wedge = \frac{2}{\Gamma(1+i\theta)} (1 - |\xi|^2)_+^{i\theta}.$$

Tengo entonces la acotación que buscaba.

$$\|T_{1+i\theta}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \left\| \frac{2}{\Gamma(1+i\theta)} (1 - |\xi|^2)_+^{i\theta} \right\|_{L^\infty} = \left| \frac{2}{\Gamma(1+i\theta)} \right| \leq C_1 (1 + |\theta|)^{-\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \leq C_1 e^{(\pi + \frac{1}{2})|\theta|}.$$

Falta ahora ver que T_z es una familia analítica en de crecimiento controlado cuando $\frac{-d+1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

Es conveniente usar la expresión $\alpha = \alpha(z) = \frac{d-2}{2} + z$, ya que entonces podemos escribir algunas expresiones de forma más compacta:

$$K_z = 2\pi^{1-z} \frac{J_\alpha(2\pi|x|)}{|x|^\alpha} \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{d}{2}.$$

La primera observación es que si $f \in \mathcal{SF}$, entonces $T_z f = f * K_z$ es una función medible.

Observamos también que si tenemos un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^d$ y una función medible f , la siguiente convolución se puede expresar como:

$$\chi_A * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x-y) f(y) dy = \int_{x-A} f(y) dy,$$

donde el conjunto $x - A = \{y \in \mathbb{R}^d : \exists a \in A \ y = x - a\}$ es una rotación y una traslación. Como la medida de Lebesgue es invariante por estas transformaciones, se tiene que $\lambda(A) = \lambda(x - A)$.

Para la primera condición de familia analítica, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ conjuntos con medida finita, fijamos $z = s + i\theta$, y denotemos $\alpha = a + i\theta$. Queremos ver que la siguiente integral es finita:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_z(\chi_A)| \cdot \chi_B d\lambda = \int_B \left| \int_{x-A} K_z(y) dy \right| \cdot \chi_B dx \leq 2\pi^{1-s} \int_B \int_{x-A} \left| \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{|y|^\alpha} \right| dy dx.$$

- Si $|y| \leq 1$, usando el teorema 3.9 tenemos que

$$\left| \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{|y|^\alpha} \right| \leq (2\pi)^a C_a e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}.$$

- Si $|y| \geq 1$, usamos el teorema 3.7

$$\left| \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{|y|^\alpha} \right| \leq (2\pi)^a C'_s (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \overbrace{\frac{1}{|y|^{a+\frac{1}{2}}}}^{\leq 1}.$$

Por tanto, como z está fijo, podemos acotar ambos casos por la constante:

$$\mathcal{K} = \max \left\{ (2\pi)^a C_s e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}, (2\pi)^a C'_s (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \right\}.$$

Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |T_z(\chi_A)| \cdot \chi_B d\lambda \leq 2\pi^{1-s} \int_B \mathcal{K} \lambda(x-A) dx = 2\pi^{1-s} \mathcal{K} \lambda(B) \lambda(A) < +\infty.$$

Para probar el crecimiento controlado, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ con medida finita, repetimos la acotación:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} T_z(\chi_A) \cdot \chi_B \, d\lambda \right| \leq 2\pi^{1-s} \int_B \int_{x-A} \left| \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{|y|^\alpha} \right| \, dydx \leq 2\pi^{1-s} \lambda(A)\lambda(B)\mathcal{K}.$$

Tomando $z = s + i\theta$ y fijando s , quiero acotarlo por algo de la forma $Ce^{k|\theta|}$. Pero teniendo en cuenta que \mathcal{K} vale lo siguiente se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \max \left\{ (2\pi)^a C_s e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}, (2\pi)^a C'_s (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \right\} \\ &\leq (2\pi)^a \max \{ C_s, C'_s \} \max \left\{ e^{\frac{\pi}{2}|\theta|}, (1 + |\theta|)^{\frac{1}{2}} e^{\pi|\theta|} \right\} \\ &\leq (2\pi)^{\frac{d-2}{2}+s} \max \{ C_s, C'_s \} e^{(\pi+\frac{1}{2})|\theta|}. \end{aligned}$$

Para la segunda propiedad de familia analíticas, dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ con medida finita, queremos ver que la siguiente función $z \mapsto \int_B K_z * \chi_A \, d\lambda$ es analítica en la banda abierta y continua en la frontera.

$$\begin{aligned} \int_B K_z * \chi_A \, d\lambda &= \int_B \int_{x-A} K_z y \, dydx = 2\pi^{1-z} \int_B \int_{x-A} \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{|y|^\alpha} \, dydx \\ &= 2^\alpha \pi^{1-z+\alpha} \int_B \int_{x-A} \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^\alpha} \, dydx = 2^\alpha \pi^{\frac{d}{2}} \int_B \int_{x-A} \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^\alpha} \, dydx. \end{aligned}$$

Como 2^α es analítica y continua, tengo que ver que la integral lo es también. Una observación inmediata es que como $\alpha = z + \frac{d-2}{2}$, es equivalente probar que es continua/analítica respecto de α que respecto de z (teniendo cuidado con que los dominios sean los adecuados). Por tanto, defino la siguiente función:

$$F(\alpha) := \int_B \int_{x-A} \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^\alpha} \, dydx, \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{d}{2}.$$

Vamos a hacer la observación de que la función F está acotada sobre compactos. Recordemos que la tenemos acotada por

$$|F(\alpha)| \leq \lambda(A)\lambda(B) \max \{ C_s, C'_s \} e^{(\pi+\frac{1}{2})|\operatorname{Im} \alpha|}.$$

La exponencial es continua y por tanto esta acotada sobre compactos. Las constantes C_s y C'_s también lo están por venir de 3.9 y 3.7.

Dado α_0 en $\{-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \alpha \leq \frac{d}{2}\}$, queremos ver que F es continua en α_0 . Para ello podemos restringir la función a una bola cerrada que contenga este punto, o una semibola cerrada si α_0 está en la frontera. Allí la función estará acotada por la observación anterior y usando convergencia dominada se tiene que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F(\alpha) = \int_B \int_{x-A} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{J_\alpha(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^\alpha} \, dydx = \int_B \int_{x-A} \frac{J_{\alpha_0}(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^{\alpha_0}} \, dydx = F(\alpha_0).$$

Usando el Teorema 3.15 en el ultimo paso. Esto prueba que la función es continua. Para ver que es analítica, voy a usar el teorema de Morera. Dado un triangulo Δ

contenido en $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \alpha < \frac{d}{2}$. Observamos que como Δ es un conjunto compacto la función F está acotada en Δ y se tiene que:

$$\int_{\Delta} |F(\alpha)| d\alpha \leq l(\Delta) \sup_{\alpha \in \Delta} |F(\alpha)| < +\infty.$$

Por tanto podemos usar Fubini, y de nuevo por el Lema 3.15 sabemos que la función que estamos integrando es analítica. Esto implica que tiene integral nula sobre el triángulo Δ .

$$\int_{\Delta} F(\alpha) d\alpha = \int_B \int_{x-A} \left(\int_{\Delta} \frac{J_{\alpha}(2\pi|y|)}{(2\pi|y|)^{\alpha}} d\alpha \right) dy dx = \int_B \int_{x-A} 0 dy dx = 0.$$

Ahora podemos aplicar el Teorema de Riesz-Thorin generalizado (Teorema 2.5). Recordemos que tenemos $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$ y $p_1 = q_1 = 2$. Para las cotas en los extremos de la banda, no necesitamos recordar las constantes usadas. Esto es porque realmente no vamos a calcular explícitamente la acotación en T_0 , ya que nos vale con saber que es de la forma

$$\|T_0(f)\|_{L^q} \leq K \|f\|_{L^p}.$$

Recordemos que θ, p, q, z_{θ} deben cumplir estas relaciones.

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad z_{\theta} = (1-\theta) \frac{-d+1}{2} + \theta \cdot 1.$$

En lugar de fijar $\theta \in [0, 1]$ vamos a fijar $z_{\theta} = 0$, para así acotar $T_{z_{\theta}} = T_0 = T$. Tengo por tanto que despejar primero el valor de θ , para luego calcular p y q :

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\theta) \frac{-d+1}{2} + \theta \implies \theta = \frac{d-1}{d+1} \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} \implies p = \frac{2(d+1)}{d+3} \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies q = p'. \end{aligned}$$

Con esto se tiene acotado el operador T de $L^p \rightarrow L^{p'}$ cuando $p = \frac{2(d+1)}{d+3}$.

Una vez probado en el extremo, el caso en el que $1 \leq p < \frac{2(d+1)}{d+3} = p_0$ se obtiene de manera fácil aplicando Riesz-Thorin. En efecto, tenemos el operador acotado en:

$$\begin{aligned} R : L^1(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^{\infty}(S^{d-1}) \subseteq L^2(S^{d-1}) \\ R : L^{p_0}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^2(S^{d-1}) \end{aligned}$$

podemos concluir que se encuentra acotado de $L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S^{d-1})$. \square

Anexo A

Propiedades de las funciones Gamma y Beta

Las funciones Gamma y Beta son de gran importancia en Matemática, y por tanto su estudio se encuentra incluido en los contenidos de los Grados en Matemáticas. Por ello, en este anexo voy a comentar brevemente sus propiedades más relevantes para este trabajo, sin pararme a demostrarlas. Un desarrollo riguroso se puede consultar en [7, Anexo A] o [8, Capítulos 1 y 2].

Definición 11

Función Gamma

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$, se define la función Gamma como

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Proposición A.1: Propiedades básicas

- La función Gamma es analítica en $\operatorname{Re} z > 0$.
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.
- Generaliza el factorial: si $n \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Proposición A.2: Fórmula de duplicación

Para $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$,

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Teorema A.3**Fórmula de Stirling**

$$\Gamma(a + i\theta) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}$$

Con $H(z)$ una función continua que para toda constante positiva $C > 0$ verifica

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Re} z \geq C > 0}} H(z) = 0$$

Este último teorema, se puede consultar en [1, Capítulo 5 Sección 2.5, p. 204]. Otro enunciado similar se encuentra en [7, Sección A.6].

Definición 12**Función Beta**

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$, se define la función Beta como

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$$

Proposición A.4:

Es simétrica, es decir, $B(z, w) = B(w, z)$.

Proposición A.5: Relación entre las funciones Gamma y Beta

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$, entonces se cumple la siguiente igualdad.

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Anexo B

Resultados de integración y análisis complejo

B.1. Resultados de análisis complejo

Teorema B.1

Teorema de Morera

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Son equivalentes:

1. f es holomorfa en Ω .
2. Para todo triángulo $\Delta \subseteq \Omega$, se tiene que $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

Referencia: Teorema 2.19 de [9].

Teorema B.2

Principio del Módulo Máximo

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio acotado y $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se cumple que f alcanza su máximo en la frontera, es decir,

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Referencia: Corolario 3.13.a de [9].

Teorema B.3

Teorema de Cauchy

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, f una función holomorfa en Ω y $\gamma \subseteq \Omega$ un ciclo en Ω . Entonces se tiene que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Referencia: En [9] no aparece este enunciado exacto, pero se tiene que es consecuencia directa 4.13 y 4.20.

B.2. Resultados de integración

Teorema B.4

Teorema de Fubini-Tonelli

Sean (X, \mathcal{M}, μ) y (Y, \mathcal{N}, ν) espacios de medida σ -finitos:

a) (Tonelli) Si $f \in L^+(X \times Y)$, entonces $g(x) = \int f_x \, d\nu \in L^+(X)$,
 $h(y) = \int f^y \, d\mu \in L^+(Y)$ y se cumple la igualdad:

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int \left(\int f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int \left(\int f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) \quad (\text{B.1})$$

b) (Fubini) Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces

- $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo punto $x \in X$.
- $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo punto $y \in Y$.
- Las funciones definidas para casi todo punto $g(x)$ y $h(y)$ pertenecen a $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente.
- La ecuación (B.1) también se cumple.

Referencia: Teorema 2.37 de [3].

Teorema B.5

Derivación de integrales paramétricas

Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) tal que $f(\cdot, t) : X \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable para todo $t \in [a, b]$. Definimos $F(t) = \int_X f(x, t) \, d\mu(x)$.

Si existe $g \in L^1(\mu)$ con $|f(x, t)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $t \in [a, b]$. Entonces, si $f(x, \cdot)$ es continua para todo x , F es continua también.

Si además f es diferenciable respecto de t y existe $g \in L^1(\mu)$ con $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ para todo x y t , entonces F es diferenciable y

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, d\mu(x).$$

Referencia: Teorema 2.27 de [3].

Teorema B.6

Teorema de Convergencia Monotona

Sea f_n una sucesión de funciones en L^+ tal que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo n . Entonces, llamando $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_n f_n$ cumple que $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Referencia: Teorema 2.14 de [3].

Teorema B.7**Teorema de Convergencia Dominada**

Sea f_n una sucesión de funciones de L^1 que verifiquen

a) $f_n \rightarrow f$ para casi todo punto.

b) Existe $g \in L^1$ con $g \geq 0$ y para todo n , $|f_n| \leq g$ en casi todo punto.

Entonces, $f \in L^1$ y $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

Referencia: Teorema 2.24 de [3].

Anexo C

Medida de la esfera

En este anexo voy a introducir brevemente los resultados necesarios para definir la medida en la esfera. Para la bibliografía he utilizado el Anexo D de [7] y el Capítulo 2 de [3]. La segunda referencia es especialmente adecuada para ver una construcción rigurosa de la medida.

Empecemos recordando algunos conceptos básicos:

Definición 13

Una medida sobre X es una función de conjuntos $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple:

- Σ es una σ -álgebra sobre X .
- $\mu(\emptyset) = 0$.
- μ es σ -sumable, es decir, dada una sucesión de conjuntos disjuntos $E_n \in \Sigma$, entonces $\mu(\cup E_n) = \sum \mu(E_n)$.

Una medida se dice finita o de probabilidad si $\mu(X) < +\infty$.

Si X es un espacio topológico, los conjuntos de Borel es la σ -álgebra generada por los abiertos de X . Una medida de Borel es una medida cuyo dominio son los conjuntos de Borel.

A la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n la denotaremos por m ó λ .

Teorema C.1

Medida en la Esfera

Sabemos que $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty) \times S^{n-1}$ definida así

$$\Phi(x) = \left(|x|, \frac{x}{|x|} \right) = (r, x')$$

es una biyección continua con inversa continua también. Por tanto induce una medida de Borel en m_* en $(0, +\infty) \times S^{n-1}$ mediante la fórmula $m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E))$. Si consideramos ρ_n la medida en $(0, +\infty)$ dada por $\rho_n(E) = \int_E r^{n-1} dr$, entonces existe una única medida de Borel $\sigma = \sigma_n$ sobre S^{n-1} tal que $m_* = \rho_n \times \sigma$.

Además, esta medida verifica que si f es medible Borel en \mathbb{R}^n , y cumple que $f \geq 0$ o $f \in L^1$, entonces se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r, x') \cdot r^{n-1} dr d\sigma(x').$$

Esta medida también se puede extender a una medida completa.

Referencia: Sección 2.7 [3], en especial el teorema 2.49.

Teorema C.2

Cambio a coordenadas polares

Si consideramos el difeomorfismo $G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$r > 0, \quad \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi] \quad \phi_{n-1} \in [0, 2\pi)$$

$$x_1 = r \cos \phi_1$$

$$x_2 = r \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2$$

$$x_3 = r \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3$$

$$\vdots$$

$$x_{n-2} = r \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \cos \phi_{n-1}$$

$$x_{n-1} = r \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-2} \cdot \sin \phi_{n-1}$$

Que tiene jacobiano $J(r, \phi) = r^{n-1} (\sin \phi_1)^{n-2} \cdots (\sin \phi_{n-3})^2 (\sin \phi_{n-2})$.

Teniendo $r > 0$ fijo, esto define un sistema de coordenadas en la esfera de radio r , y por tanto permite expresar integrales en ella como

$$\int_{rS^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \int_{\phi_1=0}^{\phi_1=\pi} \int_{\phi_2=0}^{\phi_2=\pi} \cdots \int_{\phi_{n-2}=0}^{\phi_{n-2}=\pi} \int_{\phi_{n-1}=0}^{\phi_{n-1}=2\pi} f(x_1, x_2, \dots, x_n) J(r, \phi) d\phi.$$

Referencia: Ejercicio 52 del capítulo 2 de [3], o sección D.1 de [7].

Corolario C.3

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

En particular, σ es una medida finita.

Referencia: Corolario 2.52 de [3].

Corolario C.4

La medida σ es invariante por rotaciones.

Referencia: Capítulo 2, ejercicio 62 de [3].

Teorema C.5

Sea una función en la recta real $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, para dimensión $d \geq 2$, se tiene que

$$\int_{S^{d-1}} K(x \cdot \theta) d\sigma(\theta) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_{-1}^1 K(s|x|) \cdot (1-s^2)^{\frac{d-3}{2}} ds$$

Referencia: Sección D.3 de [7].

Proposición C.6:

La medida σ en la esfera S^{n-1} se puede ver como una medida en \mathbb{R}^n donde todo el peso está concentrado en la esfera.

Demostración. Para un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos $\tilde{\sigma}(E) = \sigma(E \cap S^{n-1})$.

- El dominio de la medida es una σ -álgebra, los conjuntos medibles Lebesgue.
- $\tilde{\sigma}(\emptyset) = \sigma(\emptyset) = 0$.
- Si $E_n \subseteq \mathbb{R}^n$ son disjuntos dos a dos, entonces $E_n \cap S^{n-1}$ también lo son y se cumple que

$$\tilde{\sigma}(\cup E_n) = \sigma(\cup (E_n \cap S^{n-1})) = \sum \sigma(E_n \cap S^{n-1}) = \sum \tilde{\sigma}(E_n).$$

Esto prueba que es una medida. La última afirmación del teorema es inmediata ya que

$$\tilde{\sigma}(\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}) = \sigma(\emptyset) = 0.$$

□

Anexo D

Espacios L^p

Teorema D.1

Teorema de Extensión de operadores acotados

Sean X e Y Espacios de Banach y $S \subseteq X$ un subespacio vectorial denso, entonces para cada operador lineal acotado $T : S \rightarrow Y$ existe una extensión de T a X lineal y continua. Es decir, existe $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ lineal y continuo con $\tilde{T}|_S = T$. Además, cumple que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Definición 14

Aproximación regular de la identidad

Una familia de funciones $\{\varphi_t\}_{t>0} \subset L^1$ se dice aproximación de la identidad regular (abreviado AIR) o aproximación regular de la identidad si cumple:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1 \quad \forall t > 0$
2. $\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x)| dx < \infty$
3. $\forall \delta > 0$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\delta} |\varphi(x)| dx = 0$

Lema D.2

Función dilatación

Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Se define la familia de dilataciones como $\{\varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$. Esta familia constituye una aproximación regular de identidad.

Teorema D.3

Convergencia de las aproximaciones de la identidad

Sea $\{\varphi_t\}$ una AIR, si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $f * \varphi_t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{L^p} f$.

Referencia: Las ideas clave de los resultados de aproximaciones de la identidad se encuentran en el Teorema 8.14 de [3].

Teorema D.4

C_0^∞ es denso en L^p cuando $1 \leq p < +\infty$.

Referencia: Teorema 8.17 de [3].

Lema D.5**Lemma de Uryson para C_0^∞**

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto con $K \subseteq U$, entonces existe una función $f \in C_0^\infty$ con $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ en K y $\text{Sop}(f) \subseteq U$.

Referencia: Teorema 8.18 de [3].

Teorema D.6**Teorema de Hölder**

Dado $1 < p < +\infty$ y p' su exponente conjugado (es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), entonces dadas dos funciones medibles f, g se tiene que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \quad (\text{D.1})$$

Referencia: Teorema 6.2 de [3].

Teorema D.7

El conjunto de las funciones simples finitas \mathcal{SF} es denso en L^p para $1 \leq p < +\infty$.

Referencia: Teorema 6.6 de [3].

Lema D.8

Si $f_n \xrightarrow{L^1} f$ entonces existe una subsucesión (f_{n_j}) con $f_{n_j}(x) \rightarrow f(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Referencia: Ejercicio 9 del Capítulo 6 de [3].

Teorema D.9

Para $0 < p_0 < q < p_1 \leq +\infty$ se cumple que $L^{p_0} \cap L^{p_1} \subseteq L^q$.

Referencia: Teorema 6.10 de [3].

Teorema D.10

Sean p, p' exponentes conjugados y g una función medible tal que $fg \in L^1$ para toda función $f \in \Sigma$ el conjunto de las funciones simples que se anulan fuera de un conjunto de medida finita. Consideramos que la siguiente cantidad es finita,

$$M_p(g) = \sup \left\{ \left| \int fg \right| : f \in \Sigma, \|f\|_{p'} = 1 \right\}. \quad (\text{D.2})$$

Si el conjunto $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ es σ -finito, entonces $g \in L^p$ y $\|g\|_p = M_p(g)$.

Observaciones:

- En el caso de medidas regulares sobre \mathbb{R}^n , cuando g tenga soporte compacto, la condición de que fg con $f \in \Sigma$ es inmediata.
- Si es espacio entero es σ -finito, entonces S_g también lo es.
- En la cantidad $M_p(g)$, podemos sustituir la condición de pertenecer a Σ por pertenecer a un conjunto denso en $L^{p'}$. En particular, por C_0^∞ .

Referencia: Teorema 6.14 de [3].

Anexo E

Otras fórmulas utilizadas

Teorema E.1

Fórmula de Leibniz

Dado un multi-índice α y funciones $f, g \in C^{|\alpha|}$, entonces se cumple:

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!} (\partial^\gamma f) (\partial^{\alpha - \gamma} g).$$

Demostración. Vamos a probar primero el caso donde derivamos solo una variable, es decir, para todo $\alpha_j \in \mathbb{N}$ y funciones $f, g \in C^{\alpha_j}$,

$$\partial^{\alpha_j} (f \cdot g) = \sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j - \gamma_j} g).$$

Esto es sencillo de comprobar por inducción. El caso base $\alpha_j = 0$ es inmediato. Si se cumple para $\alpha_j \leq n$, para el caso $n + 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial^{(\alpha_j+1)} (f \cdot g) &= \partial [\partial^{\alpha_j} (f \cdot g)] = \partial^{e_j} \left[\sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j - \gamma_j} g) \right] = \\ &= \sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{(\gamma_j+1)} f) (\partial^{\alpha_j - \gamma_j} g) + \sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j - \gamma_j + 1} g) = \\ &= \sum_{1 \leq \gamma_j \leq \alpha_j + 1} \frac{\alpha_j!}{(\gamma_j - 1)!(\alpha_j + 1 - \gamma_j)!} (\partial^{(\gamma_j)} f) (\partial^{\alpha_j + 1 - \gamma_j} g) + \sum_{0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j + 1 - \gamma_j} g) = \\ &= f \partial^{\alpha_j + 1} g + (\partial^{\alpha_j + 1} f) g + \sum_{1 \leq \gamma_j \leq \alpha_j} \left(\frac{\alpha_j!}{(\gamma_j - 1)!(\alpha_j + 1 - \gamma_j)!} + \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} \right) (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j + 1 - \gamma_j} g) = \\ &= \sum_{0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j + 1} \frac{(\alpha_j + 1)}{\gamma_j!(\alpha_j + 1 - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j + 1 - \gamma_j} g). \end{aligned}$$

Una vez probado esto, se trata de aplicarlo para cada una de las variables. Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice y $f, g \in C^{|\alpha|}$ se tiene que

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \frac{\alpha_j!}{\gamma_j!(\alpha_j - \gamma_j)!} (\partial^{\gamma_j} f) (\partial^{\alpha_j - \gamma_j} g)$$

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha_j+\alpha_i}(f \cdot g) &= \sum_{\gamma_j \leq \alpha_j} \sum_{\gamma_i \leq \alpha_i} \frac{\alpha_j! \alpha_i!}{\gamma_j! \gamma_i! (\alpha_j - \gamma_j)! (\alpha_i - \gamma_i)!} (\partial^{\gamma_j+\gamma_i} f) (\partial^{\alpha_j+\alpha_i-\gamma_j-\gamma_i} g) \\ &\vdots \\ \partial^\alpha(f \cdot g) &= \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma! (\alpha - \gamma)!} (\partial^\gamma f) (\partial^{\alpha-\gamma} g).\end{aligned}$$

□

Lema E.2

Dados multi-índices α, β y una función $f \in C^{|\beta|}$, entonces se cumple:

$$\begin{aligned}\partial^\beta(x^\alpha f(x)) &= \sum_{\beta-\alpha \leq \gamma \leq \alpha} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} x^{\alpha-\beta+\gamma} \partial^\gamma f(x) \\ &= x^\alpha \partial^\beta f(x) + \sum_{\beta-\alpha \leq \gamma < \alpha} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} x^{\alpha-\beta+\gamma} \partial^\gamma f(x).\end{aligned}$$

Demostración. Viene de aplicar la fórmula de Leibniz a cuando una función es x^α , haciendo la observación de que $\partial^{\beta-\gamma}(x^\alpha)$ se anula si no ocurre que $\beta - \gamma \leq \alpha$, o equivalentemente que $\beta - \alpha \leq \gamma$. En efecto,

$$\begin{aligned}\partial^\beta(x^\alpha f(x)) &= \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} (\partial^{\beta-\gamma} x^\alpha) (\partial^\gamma f(x)) \\ &= \sum_{\beta-\alpha \leq \gamma \leq \alpha} \frac{\beta!}{\gamma! (\beta - \gamma)!} x^{\alpha-\beta+\gamma} \partial^\gamma f(x).\end{aligned}$$

□

Proposición E.3:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene la siguiente equivalencia,

$$\int_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \geq 1}} \frac{1}{|x|^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha > n$$

Demostración. Comenzamos haciendo un cambio a polares:

$$\int_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \geq 1}} \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \sigma(S^{d-1}) \int_{r \geq 1} \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1} dr = \sigma(S^{d-1}) \int_{r \geq 1} r^{d-1-\alpha} dr.$$

Como sabemos que la última integral es finita si y solo el exponente es menor estricto que -1 , se obtiene la equivalencia buscada. □

Bibliografía

- [1] Lars V Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3 edition, 1978.
- [2] Duván Cardona. *A note on the Stein restriction conjecture and the restriction problem on the torus*, 2019. Disponible en <https://arxiv.org/abs/1812.10641>.
- [3] Gerald B Folland. *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 2 edition, 1999.
- [4] Nahuel Garcia. *Rango óptimo en teoremas de restricción para la transformada de Fourier a conjuntos fractales*. 2018. Tesis de Licenciatura en Ciencias matemáticas, Universidad de Buenos Aires, dirigida por Ezequiel Rela.
- [5] Gustavo Garrigós. *Notas sobre el Problema de Restricción*. Curso 2020-2021.
- [6] Loukas Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. Springer New York, 2009.
- [7] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer New York, 2014.
- [8] N N Lebedev. *Special functions & their applications*. Dover Publications, 1972.
- [9] Francisco Javier Pérez González. *Curso de Análisis Complejo*. Universidad de Granada, disponible en https://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf, 2004.
- [10] Terence Tao. *The Bourgain-Guth argument for proving restriction theorems*. <https://terrytao.wordpress.com/2010/12/28/the-bourgain-guth-argument-for-proving-restriction-theorems>, 2010.

Índice Alfabético

A

Aproximación regular de la identidad, AIR 69

C

Clase de Schwartz 10

Conjetura de Restricción 51

Crecimiento Controlado 19

F

Familia de operadores analítica 19

Funciones de Bessel 27, 29

Funciones que se desvanecen en el infinito 12

L

Lema

de las 3 líneas de Hadamard 18, 22

de las 3 líneas generalizado 20

O

Operador

de Extensión 48

de Restricción 48

P

Problema de Restricción 48, 49

T

Teorema

de Inversión 6

de Plancherel 8

de Riesz-Thorin 18, 25

de Riesz-Thorin generalizado 22, 26

de Tomas-Stein 53

Transformada de Fourier 1, 9, 42, 47