



UNIVERSIDAD DE MURCIA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Grado

La Transformada de Laplace

Autor: José Manuel Hitar Martínez

Tutor: Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte

Curso 2025-2026

Declaración de originalidad

José Manuel Hitar Martínez, autor del Trabajo de Fin de Grado “La Transformada de Laplace”, bajo la tutela del profesor Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 25 de mayo de 2026

Fdo.: José Manuel Hitar Martínez.

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

A mis padres y a mi hermano por apoyarme, por confiar en mí y por haber estado a mi lado todos estos años.

A mis abuelos, por sus consejos, su amor infinito y por procurar que nunca nos falte de nada.

A Bea, por su amor incondicional, por estar a mi lado siempre y por todos los buenos momentos que pasamos juntos.

A mis amigos por todos los recuerdos bonitos que me llevo de esta etapa.

Al resto de mi familia, a los padres de Bea, a Encarna y a Francis.

A Gustavo, por su tiempo, su dedicación, su implicación y por todo lo que he aprendido gracias a él durante estos meses.

Índice general

Abstract	III
Resumen	VII
1. Transformada de Laplace: Definición y primeras propiedades	1
1.1. Definición y Convergencia	1
1.2. Funciones de Orden Exponencial	4
1.3. Ejemplos	6
1.4. Holomorfía	11
1.5. Teorema de Unicidad	13
2. Propiedades de la transformada de Laplace	17
2.1. Transformada de la derivada y de funciones integrales	17
2.2. El Teorema de Convolución	20
3. El Teorema de Inversión	23
3.1. La Fórmula de Inversión Compleja	23
3.2. Fórmula de Heaviside	28
4. Aplicaciones de la transformada de Laplace	29
4.1. Resolución de circuitos eléctricos	29
4.1.1. Circuito RC	29
4.1.2. Circuito LCR	31
4.2. El problema de la curva tautócrona	33
A. Resultados auxiliares	37
A.1. Integración y Teoría de la Medida	37
A.2. Análisis Complejo	39
A.3. Análisis Funcional	45

B. Ampliación de ejemplos	47
Bibliografía	51

Abstract

The Laplace transform owes its name to the French mathematician Pierre-Simon Laplace (1749–1827). This project aims to carry out a detailed study of the Laplace transform, its most essential analytical properties, such as the holomorphy, uniqueness, and inversion theorems, and to provide examples of its most relevant applications to prove its utility. The work is divided into four chapters and primarily follows the reference of J.M. Mazón [6]; also, authors such as D. V. Widder [11] and G.B. Folland [3, 4] have been essential to complete the study.

In Chapter 1, we begin by defining the **Laplace transform** of a function f , locally integrable on the interval $[0, \infty)$, as the formal integral

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

and we establish the notions of pointwise, absolute, and uniform convergence (see Definition 1.1.2). Next, we study Theorem 1.1.5, which establishes the convergence of the Laplace transform of a function f in the half-plane $\Re(z) > \Re(z_0)$, in case it converges at the point $z_0 \in \mathbb{C}$, doing so uniformly within the sectors

$$S_{\theta}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - z_0)| \leq \theta\}, \quad \theta \in [0, \pi/2).$$

Afterwards, we define the class of functions of exponential order, which will be fundamental for the development of this work. We say that a function $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ is of **exponential order** if there exist constants $A > 0$ and $\beta \in \mathbb{R}$ such that:

$$|f(t)| \leq Ae^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Furthermore, if $f \in Exp$, we define the *order of f* as

$$\rho(f) := \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ae^{\beta t}, \forall t \geq 0 \right\};$$

(see Definition 1.2.6). In turn, we establish the notions of the **abscissa of convergence**, $\sigma(f)$, and the **half-plane of convergence**, $H_{\sigma(f)}$ (see Definition 1.2.8). The concept of the order of a function of exponential order proves to be highly useful; Proposition 1.2.9 states that $\sigma(f) \leq \rho(f)$ for any function of exponential order, and additionally ensures that the Laplace transform of such a function converges absolutely in the half-plane $\Re(z) > \rho(f)$. In order to give practical support for these definitions, Section 1.3 includes three examples where we compute the abscissa of convergence and we study the regions of convergence of three different functions. Finally, the chapter concludes with the study of the following holomorphy and uniqueness theorems:

Teorema 0.0.1 (Holomorphy of the Laplace Transform) *Let $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, then the following hold:*

1. $\mathcal{L}f \in \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$.
2. $\frac{d}{dz}\mathcal{L}f(z) = -\int_0^{\infty} te^{-zt}f(t)dt = -\mathcal{L}(tf)(z) \quad \forall z \in H_{\sigma(f)}$ (0.0.1)

Teorema 0.0.2 (Uniqueness Theorem) *Let $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ such that $\sigma(f) < \infty$. If there exists $x_0 > \sigma(f)$ such that:*

$$\mathcal{L}f(z) = 0, \quad \text{for all } z \in \mathbb{C} \text{ such that } \Re(z) > x_0. \quad (0.0.2)$$

Then $f \equiv 0$ almost everywhere on $[0, \infty)$.

In Chapter 2, we examine the main operational results that allow us to transform differential equations into algebraic equations. We begin by studying how the Laplace transform interacts with the differentiation and integration operators (see Theorems 2.1.1 and 2.1.3), and we analyze the duality between the translation of a function and its multiplication by an exponential factor under the action of the Laplace transform (see Theorem 2.1.4). The chapter concludes by adapting the classical definition of the convolution of functions to the space of functions defined on $[0, \infty)$ (see Definition 2.2.6), and with the proof of the Convolution Theorem, a result of special relevance since it helps us to compute inverse Laplace transforms (see Theorem 2.2.8).

For its part, in Chapter 3, we prove the Complex Inversion Formula and Bromwich's Formula (Theorem 3.1.1 and Corollary 3.1.2, respectively), which will enable us to prove the Heaviside Expansion Theorem stated below.

Teorema 0.0.3 (Heaviside Expansion Formula) *Let $F(z) = P(z)/Q(z)$ be a rational function, where P and Q are polynomials such that $\deg(P) < \deg(Q)$, and $\{a_1, \dots, a_p\}$ are simple zeros of the polynomial Q such that $P(a_j) \neq 0$ for all $j \in \{1, \dots, p\}$. Then, the inverse Laplace transform of F , denoted by $f(t)$ as defined in Theorem 3.1.1, can be expressed as*

$$f(t) = \sum_{j=1}^p e^{a_j t} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}. \quad (0.0.3)$$

This theorem is of vital importance, since it provides an algorithmic procedure to find the inverse Laplace transform of any rational function satisfying these hypotheses.

By using the results established in Chapters 1, 2, and 3, we obtain the following method for solving ordinary differential equations: first, we take the Laplace transform on both sides of the equation and, by applying Theorem 2.1.1, we convert the differential equation into an algebraic equation; next, we solve the equation to obtain a rational expression to which the Heaviside Expansion Theorem can be applied; finally, we use the uniqueness of the Laplace transform along with results such as the Convolution Theorem to recover the exact solution of the differential equation.

The study of the Laplace transform concludes with Chapter 4, where we present two of its applications. First, we verify how the aforementioned method is applied to solve the ordinary differential equations that model series RC and LCR circuits (see Section 4.1). In order to

conclude the project, we address the tautochrone curve problem, a classical challenge in physics where we use the Laplace transform to solve the integral equation:

$$T = \int_0^h |\varphi'(u)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(h-u)}} du = (|\varphi'| \star \frac{1}{\sqrt{2gx}})(h), \quad h > 0, \quad (0.0.4)$$

in order to find the function $|\varphi|$ (see Section 4.2).

Finally, Appendix A compiles the core theoretical results required to fully understand this work, and it is divided into three sections: the first gathers results from Integration and Measure Theory, the second covers Complex Analysis, and the third addresses Functional Analysis. Additionally, Appendix B presents several examples of computing abscissas of convergence and half-planes of convergence which, due to constraints of length and relevance, have not been included in the main body of the text.

Resumen

La transformada de Laplace debe su nombre al matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo realizar un estudio detallado de la transformada de Laplace, sus propiedades más importantes, como los teoremas de holomorfía, unicidad e inversión, y dar ejemplos de algunas de sus aplicaciones más relevantes para mostrar su utilidad. El trabajo se divide en cuatro capítulos y sigue principalmente la referencia de J.M. Mazón [6], aunque también nos hemos apoyado en autores como D. V. Widder [11] o G.B. Folland [3, 4].

En el Capítulo 1, comenzamos definiendo la **transformada de Laplace** de una función f , localmente integrable en el intervalo $[0, \infty)$, como la integral formal

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

y establecemos las nociones de convergencia puntual, absoluta y uniforme, véase la Definición 1.1.2. A continuación, estudiamos el Teorema 1.1.5, que establece la convergencia de la transformada de Laplace de una función f en el semiplano $\Re(z) > \Re(z_0)$, siempre que converja en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$, y además lo hace uniformemente en los sectores

$$S_{\theta}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - z_0)| \leq \theta\}, \quad \theta \in [0, \pi/2).$$

Después, definimos la clase de funciones de orden exponencial, que resultará fundamental para el desarrollo del trabajo. Diremos que una función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es de **orden exponencial** si existen constantes $A > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|f(t)| \leq Ae^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, si $f \in \text{Exp}$, definimos el *orden de f* como

$$\rho(f) := \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ae^{\beta t}, \forall t \geq 0 \right\};$$

véase la Definición 1.2.6. A su vez, fijamos las nociones de **abscisa de convergencia**, $\sigma(f)$, y de **semiplano de convergencia**, $H_{\sigma(f)}$ (consúltese la Definición 1.2.8). El concepto de orden de una función de orden exponencial resulta de gran utilidad, la Proposición 1.2.9 establece que $\sigma(f) \leq \rho(f)$ para toda función de orden exponencial, y además, asegura que la transformada de Laplace de una función de orden exponencial converge absolutamente en el semiplano $\Re(z) > \rho(f)$. Para dar soporte práctico a estas definiciones, en la Sección 1.3 se incluyen tres ejemplos donde se calcula la abscisa de convergencia y se estudian las regiones de convergencia de tres funciones. Finalmente, el capítulo concluye con el estudio de los teoremas de holomorfía y unicidad siguientes

Teorema 0.0.4 (Holomorfía de la Transformada de Laplace) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, se cumplen:

1. $\mathcal{L}f \in \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$.
2. $\frac{d}{dz} \mathcal{L}f(z) = - \int_0^{\infty} t e^{-zt} f(t) dt = -\mathcal{L}(tf)(z) \quad \forall z \in H_{\sigma(f)}$ (0.0.5)

Teorema 0.0.5 (Teorema de Unicidad) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ tal que $\sigma(f) < \infty$. Si existe $x_0 > \sigma(f)$ tal que:

$$\mathcal{L}f(z) = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \Re(z) > x_0. \quad (0.0.6)$$

Entonces $f \equiv 0$ en casi todo punto $t \in [0, \infty)$.

En el Capítulo 2, estudiamos los principales resultados que nos permiten transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Comenzamos viendo cómo se relaciona la transformada de Laplace con los operadores de derivación e integración (véanse los Teoremas 2.1.1 y 2.1.3), y analizamos la dualidad existente entre la traslación de una función y su multiplicación por un factor exponencial bajo la acción de la transformada de Laplace (véase el Teorema 2.1.4). El capítulo concluye adaptando la definición clásica de convolución de funciones al espacio de funciones definidas en $[0, \infty)$ (véase la Definición 2.2.6), y con la demostración del Teorema de Convolución, un resultado de especial relevancia, ya que nos ayuda a calcular la transformada de Laplace inversa de una función (véase el Teorema 2.2.8).

Por su parte, en el Capítulo 3, demostramos la Fórmula de Inversión Compleja y la Fórmula de Bromwich (Teorema 3.1.1 y Corolario 3.1.2, respectivamente), que nos permitirán probar el Teorema de Expansión de Heaviside enunciado a continuación.

Teorema 0.0.6 (Fórmula de Expansión de Heaviside) Sea $F(z) = P(z)/Q(z)$ una función racional, donde P y Q son polinomios y tales que $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$, y $\{a_1, \dots, a_p\}$ son ceros simples del polinomio Q y tales que $P(a_j) \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Entonces, la transformada inversa de Laplace de F , $f(t)$, definida en el Teorema 3.1.1 se puede expresar como

$$f(t) = \sum_{j=1}^p e^{a_j t} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}. \quad (0.0.7)$$

Este teorema resulta de vital importancia, ya que gracias a él podremos hallar la transformada de Laplace inversa de cualquier función racional que cumpla las hipótesis.

Utilizando los resultados vistos en los capítulos 1, 2 y 3, obtenemos el siguiente método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias: en primer lugar, tomamos transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación y utilizando el Teorema 2.1.1, convertimos la ecuación diferencial en una ecuación algebraica; a continuación, despejamos la ecuación para obtener una función racional a la que aplicar el Teorema de Expansión de Heaviside; finalmente utilizamos la unicidad de la transformada de Laplace junto con resultados como el Teorema de Convolución para obtener la solución de la ecuación diferencial.

El estudio de la transformada de Laplace concluye con el Capítulo 4, donde mostramos dos de sus aplicaciones. En primer lugar, comprobamos cómo se aplica el método descrito anteriormente para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan los circuitos RC y LCR en serie (véase la Sección 4.1). Como cierre del Trabajo de Fin de Grado, abordamos

el problema de la curva tautócrona, un problema clásico de la Física en el que utilizamos la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral:

$$T = \int_0^h |\varphi'(u)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(h-u)}} du = (|\varphi'| \star \frac{1}{\sqrt{2gx}})(h), \quad h > 0, \quad (0.0.8)$$

para hallar la función $|\varphi|$ (consúltese la Sección 4.2).

Finalmente, en el Apéndice A, se recogen los principales resultados necesarios para comprender el trabajo, se divide en tres partes: en la primera parte se recogen resultados de Integración y Teoría de la Medida, en la segunda, se encuentran los resultados de Análisis Complejo, y en la tercera los resultados de Análisis Funcional. Por otro lado, en el Apéndice B, se muestran algunos ejemplos de cálculo de abscisas de convergencia y semiplanos de convergencia, que por cuestiones de extensión y relevancia no se han incluido en el cuerpo del trabajo.

Transformada de Laplace: Definición y primeras propiedades

A lo largo de este capítulo, definiremos la transformada de Laplace, veremos en qué región del plano complejo está definida y estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes, como la unicidad y la holomorfía. En este capítulo seguimos principalmente la referencia de J.M. Mazón [6, Cap. 12.1], ampliada con algunos detalles adicionales. Algunos ejemplos de la sección 1.3 están adaptados de [11, Chapter 5.3].

1.1. Definición y Convergencia

En lo sucesivo utilizaremos la siguiente clase de funciones.

Definición 1.1.1 Diremos que $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es **localmente integrable**, y lo denotamos $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, si es medible Lebesgue y cumple:

$$\int_0^R |f(t)| dt < \infty, \quad \text{para todo } R > 0.$$

Definición 1.1.2 Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$. Llamamos **Transformada de Laplace** de f a la integral formal:

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Diremos que la integral anterior **converge** en el punto $z \in \mathbb{C}$ si existe el límite:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} f(t) dt,$$

y en ese caso escribimos:

$$\mathcal{L}f(z) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt. \quad (1.1.1)$$

Diremos que $\mathcal{L}f(z)$ **converge absolutamente** en $z \in \mathbb{C}$ si además se tiene:

$$\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt < \infty.$$

Por último, si $S \subseteq \mathbb{C}$, diremos que $\mathcal{L}f$ **converge uniformemente** en S cuando el límite en (1.1.1) existe uniformemente para todo $z \in S$.

Una vez definida la transformada y fijadas las nociones de convergencia, nuestro objetivo es determinar bajo qué condiciones y en qué región del plano complejo existe y es holomorfa la transformada de Laplace de una función f . El estudio detallado de estas cuestiones se desarrollará en la sección siguiente. No obstante, para abordarlo, necesitaremos establecer un primer criterio de convergencia cuya prueba se apoya en el siguiente criterio de Cauchy.

Proposición 1.1.3 (Criterio de Cauchy) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ y sea $S \subseteq \mathbb{C}$, son equivalentes:

1. $\mathcal{L}f$ converge uniformemente en S .
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 > 0$ tal que $\forall t_1, t_2 > t_0$ se tiene $\sup_{z \in S} \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t) dt \right| < \varepsilon$.

Observación 1.1.4 Sea $\theta \in [0, 2\pi]$, dado $z_0 \in \mathbb{C}$, definimos el sector:

$$S_\theta(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - z_0)| \leq \theta\}.$$

En la Figura 1.1 podemos ver una representación gráfica de este sector cuando $\theta \in [0, \pi/2)$.

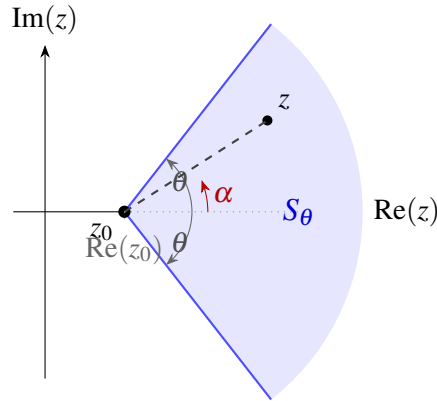


Figura 1.1: Sector $S_\theta(z_0)$ para $\theta \in [0, \pi/2)$.

Gracias al criterio de Cauchy, podemos probar el siguiente resultado, que nos permitirá demostrar más adelante la holomorfía de la transformada de Laplace.

Teorema 1.1.5 (Convergencia uniforme de la Transformada de Laplace) Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ tal que $\mathcal{L}f$ converge en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\mathcal{L}f(z) \text{ converge para todo } z \text{ con } \Re z > \Re z_0.$$

Es más, si $\theta \in [0, \pi/2)$, entonces $\mathcal{L}f$ converge uniformemente en $S_\theta(z_0)$.

Demostración. Basta probar la última afirmación, pues

$$\bigcup_{0 \leq \theta < \pi/2} S_\theta(z_0) = \{\Re z > \Re z_0\} \cup \{z_0\}.$$

Para ello aplicaremos el Criterio de Cauchy de la Proposición 1.1.3: debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que, para cualesquiera $t_1, t_2 \geq t_0$ y todo $z \in S_\theta$,

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t) dt \right| < \varepsilon. \quad (1.1.2)$$

Comenzamos definiendo la función:

$$h(x) := \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt, \quad x > 0.$$

Por hipótesis, $\mathcal{L}f(z_0) = \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge, con lo cual existe también el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt = 0$$

Por otro lado, por el Teorema Fundamental del Cálculo, ver Teorema A.1.10, tenemos que h es derivable en ctp $x > 0$ y:

$$h'(x) = e^{-z_0 x} f(x)$$

Para $0 < t_1 < t < t_2$, reescribimos el integrando añadiendo el factor $e^{\pm z_0 t}$:

$$e^{-zt} f(t) = e^{-(z-z_0)t} \cdot e^{-z_0 t} f(t) = e^{-(z-z_0)t} h'(t)$$

Integramos por partes con $F(t) = e^{-(z-z_0)t}$ y $G(t) = h(t)$, ver Teorema A.1.11:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} h'(t) dt \\ &= \left[e^{-(z-z_0)t} h(t) \right]_{t_1}^{t_2} + (z-z_0) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} h(t) dt \\ &= e^{-(z-z_0)t_2} h(t_2) - e^{-(z-z_0)t_1} h(t_1) + (z-z_0) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} h(t) dt. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$, existe $t_0 = t_0(\varepsilon, \theta) > 0$ tal que:

$$|h(t)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon \cos \theta}{3}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Dado $z \in S_\theta(z_0)$ con $z \neq z_0$, sea $\alpha := \text{Arg}(z - z_0)$, entonces $|\alpha| \leq \theta$. Como podemos ver en la Figura 1.1, esto implica que $\Re(z) > \Re(z_0)$, en efecto,

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\alpha} = |z - z_0|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \implies \Re(z - z_0) = |z - z_0| \cos \alpha.$$

Como $|\alpha| \leq \theta < \pi/2$, se cumple $\cos \alpha \geq \cos \theta > 0$, de donde deducimos: $\Re(z) > \Re(z_0)$.

Finalmente, acotaremos los sumandos de (1.1.3) para $t_1, t_2 \geq t_0$ y $z \in S_\theta$ y veremos que se cumple (1.1.2). Denotamos:

$$r := |z - z_0| > 0 \quad \text{y} \quad \kappa := \Re(z - z_0) = r \cos \alpha > 0.$$

Sean $t_1, t_2 \geq t_0$ y $z \in S_\theta$, $z \neq z_0$.

■ **Primer término.** Como $\kappa > 0$, se tiene $|e^{-(z-z_0)t_1}| = e^{-\kappa t_1} \leq 1$, luego:

$$|e^{-(z-z_0)t_1} h(t_1)| \leq |h(t_1)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon \cos \theta}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- **Segundo término.** Análogamente,

$$|e^{-(z-z_0)t_2} h(t_2)| \leq |h(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

- **Término integral.** Dado $t \in [t_1, t_2]$ con $t_1 \geq t_0$ se tiene $|h(t)| < \varepsilon'$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \left| (z - z_0) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} h(t) dt \right| &\leq r \int_{t_1}^{t_2} e^{-\kappa t} |h(t)| dt \\ &< r \varepsilon' \int_{t_1}^{t_2} e^{-\kappa t} dt \\ &= r \varepsilon' \cdot \frac{e^{-\kappa t_1} - e^{-\kappa t_2}}{\kappa} \leq \frac{r \varepsilon'}{\kappa} \\ &= \frac{\varepsilon'}{\cos \alpha} \leq \frac{\varepsilon'}{\cos \theta} = \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $|\alpha| \leq \theta$ implica $\cos \alpha \geq \cos \theta$.

Reuniendo las tres acotaciones para $z \neq z_0$:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \underbrace{\frac{\varepsilon \cos \theta}{3}}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{\frac{\varepsilon \cos \theta}{3}}_{\leq \varepsilon/3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

El caso $z = z_0$ es inmediato a partir del Paso 1:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-z_0 t} f(t) dt \right| = |h(t_2) - h(t_1)| \leq |h(t_1)| + |h(t_2)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Dado que t_0 depende únicamente de ε y θ , pero no de $z \in S_\theta(z_0)$, la Proposición 1.1.3 garantiza que $\mathcal{L}f(z)$ converge *uniformemente* en $S_\theta(z_0)$. \square

1.2. Funciones de Orden Exponencial

En la sección anterior definimos la transformada de Laplace y establecimos un primer criterio de convergencia. En esta sección, ampliamos el estudio de la convergencia, considerando la clase de funciones de orden exponencial, que constituye un contexto natural para la transformada de Laplace. Comenzamos definiendo esta nueva clase de funciones.

Definición 1.2.6 Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, diremos que f es de **orden exponencial**, $f \in \text{Exp}$, si existen constantes $A > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$|f(t)| \leq A e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Además, si $f \in \text{Exp}$, definimos el *orden de f* como

$$\rho(f) := \inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq A e^{\beta t}, \forall t \geq 0 \right\}. \quad (1.2.4)$$

Veamos algunos ejemplos de funciones de orden exponencial.

Ejemplo 1.2.7

1. $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Sea $\beta > 0$ cualquiera, definamos la función:

$$g(t) := t^n e^{-\beta t}, \quad t \geq 0,$$

y veamos que existe $A > 0$ tal que: $g(t) \leq A$. Distingamos los dos casos siguientes: En efecto, por un lado, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, con lo cual, existe $t_0 > 0$ tal que $|g(t)| \leq 1$, para todo $t > t_0$. Por otro lado, sea $M = \max_{t \in [0, t_0]} |g(t)|$, que es finito ya que g es continua en el compacto $[0, t_0]$. Combinando ambas expresiones se tiene:

$$|g(t)| \leq \max\{1, M\} =: A, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

luego $t^n \in \text{Exp}$.

Nótese que, como consecuencia de este ejemplo, deducimos que los polinomios son funciones de orden exponencial, con orden $\rho(f) = 0$.

2. $f(t) = e^{\alpha t}$:

En este caso es claro que $f \in \text{Exp}$ con $\rho(f) = \alpha$.

3. (Ejemplo de función que *no* es de orden exponencial) $f(t) = e^{e^t}$.

Si f fuera de orden exponencial, entonces existirían $A > 0$ y $\beta > 0$ tales que:

$$e^{e^t} \leq A e^{\beta t} \quad \forall t \geq 0, \quad (1.2.5)$$

Tomando logaritmos en la desigualdad (1.2.5), se cumple:

$$e^t \leq \log A + \beta t \quad \forall t \geq 0.$$

de donde deducimos la siguiente acotación:

$$\frac{e^t}{\log A + \beta t} \leq 1 \quad \forall t \geq 0. \quad (1.2.6)$$

No obstante, si tomamos el siguiente límite en la desigualdad (1.2.6)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{\log A + \beta t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{\beta} = +\infty,$$

llegamos a una contradicción. Con lo cual, la acotación (1.2.6) no puede ser cierta, y por ello: $f \notin \text{Exp}$.

Una vez hemos definido la clase de funciones de orden exponencial y visto algunos ejemplos, podemos demostrar la holomorfía de la transformada de Laplace. Para ello, es necesario definir primero los conceptos de **abscisa de convergencia** y **semiplano de convergencia**.

Definición 1.2.8 Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, llamamos **abscisa de convergencia** de f a:

$$\sigma(f) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \mathcal{L}f(z) \text{ converge para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \Re(z) > \sigma\}.$$

Nótese, por el Teorema 1.1.5, que si $\mathcal{L}f(z_0)$ converge, entonces $\sigma(f) \leq \Re(z_0)$. Por convenio, si $\mathcal{L}f(z)$ no converge para ningún $z \in \mathbb{C}$, entonces escribimos $\sigma(f) = +\infty$; por el contrario, si $\mathcal{L}f(z)$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $\sigma(f) = -\infty$. Finalmente, llamaremos **semiplano de convergencia** de f al semiplano:

$$H_{\sigma(f)} := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \sigma(f)\}.$$

Notar, por el Teorema 1.1.5, que $\mathcal{L}f(z)$ no puede converger si $\Re(z) < \sigma(f)$. Como veremos en ejemplos posteriores, el comportamiento en la frontera $\Re z = \sigma(f)$, dependerá de la función f .

En la práctica, el cálculo exacto de la abscisa de convergencia $\sigma(f)$ puede ser complicado. El siguiente resultado nos da una cota superior para $\sigma(f)$ en el caso de funciones de orden exponencial.

Proposición 1.2.9 *Sea $f \in Exp$, con orden $\rho(f) < \infty$ definido en (1.2.4). Entonces*

$$\sigma(f) \leq \rho(f).$$

Es más, $\mathcal{L}f(z)$ converge absolutamente en el semiplano $\Re z > \rho(f)$.

Demostración. En primer lugar, definimos el conjunto:

$$\Omega := \{b \in \mathbb{R} : \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq Me^{bt}, \forall t \geq 0\}$$

Como $f \in Exp$, sabemos que $\Omega \neq \emptyset$. Tomemos un $b \in \Omega$ arbitrario. Vamos a probar que si $\Re(z) > b$, entonces $\mathcal{L}f(z)$ converge (de hecho, absolutamente). En efecto:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |e^{-zt} f(t)| dt &= \int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} e^{bt} dt \\ &= M \int_0^{\infty} e^{-(\Re(z)-b)t} dt \end{aligned}$$

Como $\Re(z) > b$, el exponente es estrictamente negativo y la integral converge a $\frac{M}{\Re(z)-b}$. Por tanto, $\mathcal{L}f(z)$ converge absolutamente. Entonces, si $\Re(z) > \rho(f)$, por las propiedades del ínfimo, existe $b \in \Omega$ tal que $\rho(f) \leq b < \Re(z)$, luego $\mathcal{L}f(z)$ converge.

De este modo, al converger para todo z con $\Re(z) > \rho(f)$, de la definición de $\sigma(f)$ (ver Definición 1.2.8) concluimos:

$$\sigma(f) \leq \rho(f).$$

□

1.3. Ejemplos

Antes de continuar con el estudio de la holomorfía, vamos a ver algunos ejemplos de cálculo de la abscisa de convergencia y de semiplanos de convergencia.

Ejemplo 1.3.10

1. $f(t) = \chi_{[0, \infty)}(t)$.

Vamos a distinguir los siguientes casos:

■ $\Re(z) > 0$:

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{-1}{z} \cdot [e^{-zt}]_0^{\infty} = \frac{1}{z}.$$

■ $\Re(z) = 0$: En este caso, $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$; si $y \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(iy) &= \int_0^{\infty} e^{-iyt} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-iyt} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{iy} \cdot [e^{-iyt}]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-iyR}}{iy} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\frac{iyR}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{yR}{2}\right)}{y}. \end{aligned}$$

No obstante, el límite anterior no existe, pues las sucesiones: $(R_n)_n := \frac{2\pi n}{y}$ y $(R_n)_n := \frac{(2n+1)\pi}{y}$ dan límites diferentes. Por otro lado, es inmediato que $\mathcal{L}f(0) = \int_0^{\infty} 1 dt = +\infty$.

De este modo tendremos que $\sigma(f) = 0$ y $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. En la Figura 1.2 podemos ver el semiplano y la abscisa de convergencia de esta función.

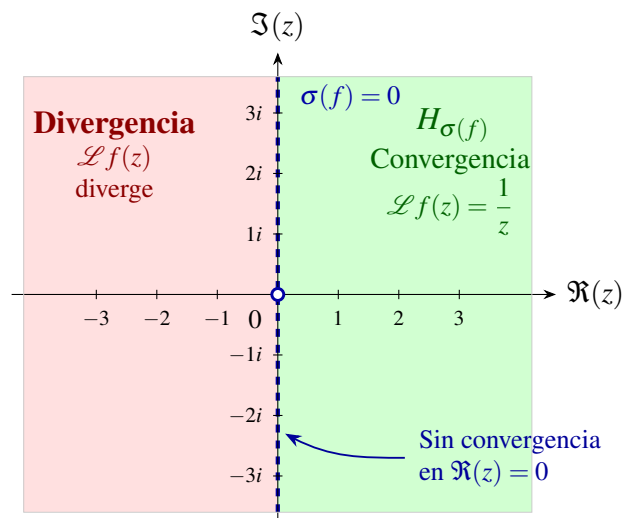


Figura 1.2: Región de convergencia de $\mathcal{L}f$ para $f(t) = \chi_{[0, \infty)}(t)$. La abscisa de convergencia es $\sigma(f) = 0$ y el semiplano de convergencia es $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

2. $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \geq 0$.

Sea $z \in \mathbb{C}$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq \int_0^{\infty} \left| e^{-zt} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right| dt = \int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Distinguiamos los siguientes casos:

- $\Re(z) \geq 0$: Como $e^{-\Re(z)t} \leq 1$, para todo $t \geq 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty.$$

- $\Re(z) < 0$: Sea $s \in \mathbb{R}$ con $s < 0$. Para $R > 0$, usando que $t \leq R \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+R^2}$ y que $t \geq \frac{R}{2}$ junto con $-s > 0$ implican $e^{-st} \geq e^{-sR/2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt &\geq \int_{R/2}^R e^{-st} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\geq \int_{R/2}^R e^{-sR/2} \cdot \frac{1}{1+R^2} dt = \frac{R}{2} \cdot \frac{e^{-sR/2}}{1+R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} +\infty, \end{aligned}$$

pues $-s/2 > 0$.

Concluimos que $\mathcal{L}f(z)$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) \geq 0$ y diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) < 0$. Por consiguiente, $\sigma(f) = 0$ y $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. En la Figura 1.3 podemos ver el semiplano de convergencia de esta función.

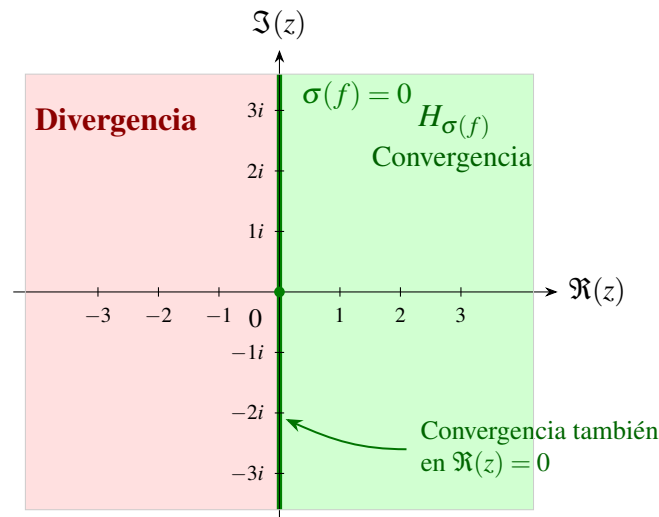


Figura 1.3: Región de convergencia de $\mathcal{L}f$ para $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. La abscisa de convergencia es $\sigma(f) = 0$, el semiplano de convergencia es $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$, y la región de convergencia es el semiplano cerrado $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$.

3. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t \geq 0$.

En primer lugar, veamos qué sucede si $z = 0$:

$$\mathcal{L}f(0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^{\infty} = +\infty,$$

por lo que $\mathcal{L}f$ no converge en $z = 0$. En particular, por el Teorema 1.1.5, $\mathcal{L}f(z)$ también diverge cuando $\Re(z) < 0$.

Sea ahora $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq \int_0^{\infty} \left| e^{-zt} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \right| dt = \int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

Distinguiamos los siguientes casos:

- $\Re(z) = 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = +\infty,$$

luego no hay convergencia *absoluta* cuando $\Re(z) = 0$.

- $\Re(z) > 0$: Dividimos la integral en dos partes:

$$\int_0^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-\Re(z)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt}_{I_2}.$$

Para I_1 , como $e^{-\Re(z)t} \leq 1$ para $t \in [0, 1]$:

$$I_1 \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 = 2 < +\infty.$$

Para I_2 , como $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq 1$ para $t \geq 1$:

$$I_2 \leq \int_1^{\infty} e^{-\Re(z)t} dt = \frac{e^{-\Re(z)}}{\Re(z)} < +\infty.$$

Por tanto, $\mathcal{L}f(z)$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > 0$.

Nos falta ver qué ocurre en el eje imaginario:

Sea $z = is$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Escribimos:

$$\mathcal{L}f(is) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ist}}{\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-ist}}{\sqrt{t}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{e^{-ist}}{\sqrt{t}} dt}_{I_2}.$$

Para I_1 :

$$|I_1| \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 = 2 < +\infty.$$

Para I_2 , integramos por partes usando que $e^{-ist} = \left(-\frac{e^{-ist}}{is} \right)'$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^{\infty} \left(-\frac{e^{-ist}}{is} \right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{e^{-ist}}{is} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \left(-\frac{e^{-ist}}{is} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} \right) dt \\ &= \frac{e^{-is}}{is} - \frac{1}{2is} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ist}}{t^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

La integral restante converge absolutamente, ya que:

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{e^{-ist}}{t^{3/2}} \right| dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{\Re(-ist)}}{t^{3/2}} dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt < +\infty,$$

pues $3/2 > 1$. Por tanto, I_2 converge, y con ello $\mathcal{L}f(is)$ converge para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En conclusión, $\sigma(f) = 0$ y $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. La transformada $\mathcal{L}f$ converge absolutamente en todo el semiplano abierto $\Re(z) > 0$, y converge (pero no absolutamente)

en $\{\Re(z) = 0\} \setminus \{0\}$. En la Figura 1.4 podemos ver el semiplano de convergencia de esta función.

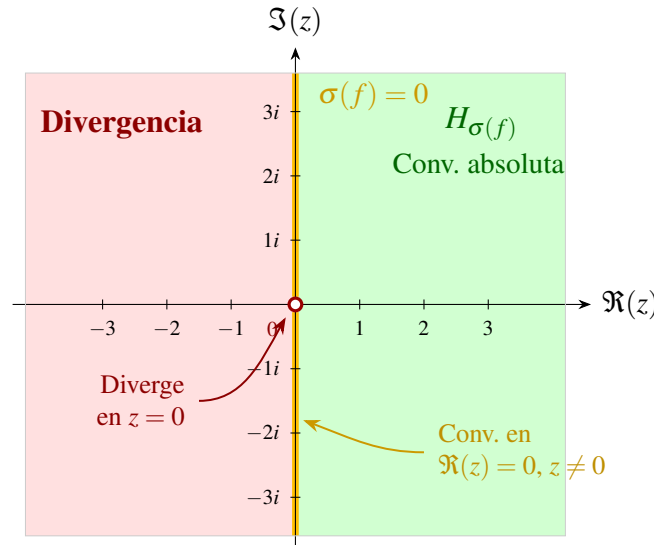


Figura 1.4: Región de convergencia de $\mathcal{L}f$ para $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. La abscisa de convergencia es $\sigma(f) = 0$ y el semiplano de convergencia es $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. La transformada converge absolutamente en $\Re(z) > 0$ y de forma no absoluta en $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$

El ejemplo anterior admite un cálculo explícito de $\mathcal{L}f(z)$ que nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.3.11 Sea $f(t) = 1/\sqrt{t}$, si $t > 0$. Entonces $\sigma(f) = 0$ y además

$$\mathcal{L}f(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}, \quad \Re(z) > 0. \quad (1.3.7)$$

Demostración. Ya sabemos que $\sigma(f) = 0$. Probamos primero (1.3.7) para $z = x > 0$. El cambio de variable $xt = s^2$ da

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{x}},$$

donde la última igualdad es consecuencia de $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$.

Para extender la fórmula (1.3.7) a $\Re z > 0$ usaremos el Principio de Prolongación Analítica (Corolario A.2.23). Por un lado, sabemos que la función $G(z) = \sqrt{\pi/z}$, definida con la parte principal de la raíz, es holomorfa en $\Re(z) > 0$. Por otro lado, del Teorema 1.4.13 que veremos después, también $\mathcal{L}f(z)$ es holomorfa en $\Re(z) > 0$. Como ambas funciones coinciden en $(0, \infty)$, que tiene puntos de acumulación, deben ser idénticas en el abierto conexo $\Re(z) > 0$. \square

La definición de abscisa de convergencia nos garantiza la convergencia puntual en el semiplano abierto $H_{\sigma(f)}$. Sin embargo, la convergencia no tiene por qué ser uniforme, como mostramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3.12 Sea $f(t) = \chi_{[0, \infty)}(t)$. En el Ejemplo 1.3.10.1 vimos que:

- $\sigma(f) = 0$.
- $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.

Sabemos que hay convergencia puntual en $H_{\sigma(f)}$. Para analizar si esta convergencia es uniforme en todo el semiplano, veamos la convergencia de la integral: $I_R(z) = \int_0^R e^{-zt} dt$. La convergencia será uniforme en $H_{\sigma(f)}$ si y solo si:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\sup_{z \in H_{\sigma(f)}} |I_R(z) - \mathcal{L}f(z)| \right) = 0$$

Veamos cuánto vale esa diferencia:

$$|I_R(z) - \mathcal{L}f(z)| = \left| \int_0^R e^{-zt} dt - \int_0^\infty e^{-zt} dt \right| = \left| - \int_R^\infty e^{-zt} dt \right| = \left| \frac{-e^{-zR}}{z} \right| = \frac{e^{-R\Re(z)}}{|z|}$$

Como $\frac{e^{-R\Re(z)}}{|z|} \in \mathbb{R}^+$, podemos restringirnos al eje real positivo, entonces, tomamos $z = x$ con $x > 0$ y evaluamos el supremo cuando $x > 0$:

$$\sup_{x > 0} \frac{e^{-Rx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-Rx}}{x} = +\infty$$

Por lo tanto:

$$\sup_{\Re(z) > 0} \frac{e^{-R\Re(z)}}{|z|} = +\infty \quad \forall R > 0$$

Como el supremo no tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$, hemos probado que la convergencia no tiene por qué ser uniforme en el semiplano de convergencia.

1.4. Holomorfía

El siguiente teorema establece la holomorfía de la transformada y nos permite calcular su derivada.

Teorema 1.4.13 (Holomorfía de la Transformada de Laplace) *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, se cumplen:*

1. $\mathcal{L}f \in \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$.
2. $\frac{d}{dz} \mathcal{L}f(z) = - \int_0^\infty t e^{-zt} f(t) dt = - \mathcal{L}(tf)(z) \quad \forall z \in H_{\sigma(f)}$ (1.4.8)

Demostración. Supondremos que $\sigma(f) < \infty$, pues de otro modo $H_{\sigma(f)} = \emptyset$ y no habría nada que probar. En primer lugar, fijamos $z \in H_{\sigma(f)}$ y definimos la sucesión de funciones $(g_n)_n$ del modo siguiente:

$$g_n(z) := \int_0^n e^{-zt} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $z \in H_{\sigma(f)}$, la transformada $\mathcal{L}f(z)$ converge y, por ende, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = \mathcal{L}f(z)$.

A continuación, consideramos el arco $\gamma: [0, n] \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $\gamma(s) = s$. Entonces, se verifican:

- $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, n])$.
- Para todo $t \in \gamma^* = [0, n]$, la función $h(z) = e^{-zt} f(t)$ es holomorfa respecto de z en todo \mathbb{C} .

Entonces, por el Lema A.2.19, deducimos que $g_n \in \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con derivada:

$$g'_n(z) = \int_0^n (-t) e^{-zt} f(t) dt.$$

Ahora vamos a ver que la convergencia es uniforme sobre compactos de $H_{\sigma(f)}$. Sea $K \subset H_{\sigma(f)}$ compacto, queremos probar que existe un ángulo $\theta_K \in [0, \pi/2)$ y un vértice $z_0 \in H_{\sigma(f)}$ tal que $K \subset S_{\theta_K}(z_0)$. Suponemos por simplicidad que $\sigma(f) \neq -\infty$.

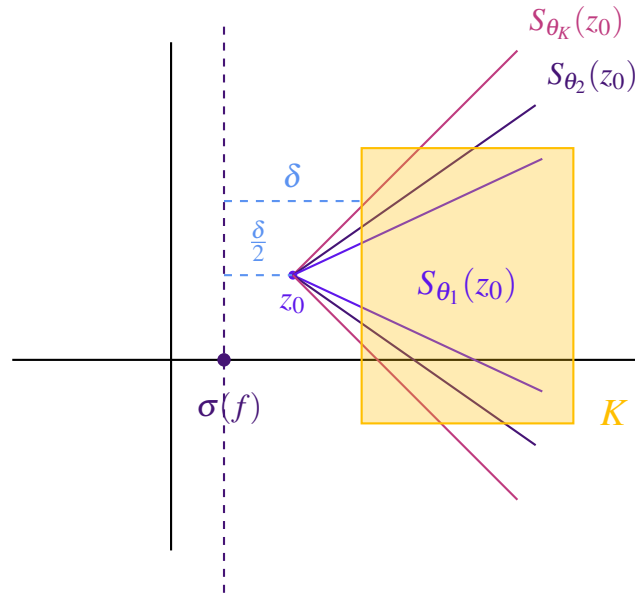


Figura 1.5: Construcción de la región $S_{\theta_K}(z_0)$ que contiene al compacto K .

Como $H_{\sigma(f)}$ es abierto, podemos tomar $\delta := d(K, \partial(H_{\sigma(f)})) > 0$ y elegimos $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\Re(z_0) = \sigma(f) + \frac{\delta}{2},$$

luego $z_0 \in H_{\sigma(f)}$, y por el Teorema 1.1.5, $\mathcal{L}f$ converge uniformemente en $S_{\theta}(z_0)$, para todo $\theta \in [0, \pi/2)$. Definimos entonces:

$$\Omega := \bigcup_{\theta \in [0, \pi/2)} (\overset{\circ}{S}_{\theta}(z_0)),$$

y probamos que $K \subset \Omega$.

Sea $\omega \in K$, en particular, $\Re(\omega) \geq \delta + \sigma(f)$. Escribimos $\omega - z_0 = \rho e^{i\varphi}$ con $\rho = |\omega - z_0| > 0$, de modo que:

$$\rho \cos \varphi = \Re(\omega - z_0) = \Re(\omega) - \Re(z_0) \geq \delta + \sigma(f) - \left(\sigma(f) + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta}{2} > 0$$

Al ser $\rho > 0$, la desigualdad anterior implica que $\cos \varphi > 0$, de donde deducimos que:

$$|\text{Arg}(\omega - z_0)| = |\varphi| < \pi/2,$$

entonces, existe θ tal que $|\varphi| < \theta < \frac{\pi}{2}$, luego $\omega \in \mathring{S}_\theta(z_0) \subset \Omega$, y por ende $K \subset \Omega$.

Como K es compacto, admite un subcubrimiento finito, es decir, existen $\theta_1, \dots, \theta_m < \pi/2$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^m (\mathring{S}_{\theta_i}(z_0))$, así, $K \subset \mathring{S}_{\theta_K}(z_0)$, donde $\theta_K := \max\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, ya que, si $\theta_j > \theta_i$ entonces $\mathring{S}_{\theta_i}(z_0) \subset \mathring{S}_{\theta_j}(z_0)$. Por tanto, usando el Teorema 1.1.5 podemos concluir que $g_n(z) \rightarrow \mathcal{L}f(z)$ uniformemente en $z \in K$.

Finalmente, como $(g_n)_n \subset \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$ y $g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(z)$ sobre compactos de $H_{\sigma(f)}$, entonces, por el Teorema de Weierstrass, A.2.20, se cumplen:

- $\mathcal{L}f \in \mathcal{H}(H_{\sigma(f)})$.
- La sucesión de derivadas $(g'_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos de $H_{\sigma(f)}$ a $(\mathcal{L}f)'(z)$.

De este modo, obtenemos la fórmula (1.4.8) para la derivada de la transformada de Laplace:

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (-t) e^{-zt} f(t) dt = - \int_0^\infty t e^{-zt} f(t) dt = -\mathcal{L}(tf)(z)$$

□

1.5. Teorema de Unicidad

En esta sección probaremos el Teorema de unicidad de la transformada de Laplace.

Lema 1.5.14 Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, continua. Si $\int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = 0$.

Demostración. Como la integral es un operador lineal, podemos extender la hipótesis de modo que $\int_0^1 P(t)f(t) dt = 0$ para cualquier polinomio P .

Ahora, tomamos una función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, A.3.39, existe una sucesión de polinomios, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que converge uniformemente a la función g en el intervalo $[0, 1]$. Además, como $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, entonces está acotada, luego la sucesión $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a gf en $[0, 1]$. De modo que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(t)f(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)f(t) dt = \int_0^1 g(t)f(t) dt,$$

donde en la primera igualdad hemos utilizado que $\int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0$.

Si ahora tomamos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, separando en parte real e imaginaria y razonando análogamente, podemos extender el resultado a funciones continuas que toman valores complejos.

Finalmente, como el resultado es cierto para toda función continua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, particularmente se cumple para $g = \overline{f}$, entonces:

$$\int_0^1 f(t) \overline{f(t)} dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0,$$

y puesto que $|f(t)|^2$ es una función real, no negativa y continua concluimos que $|f(t)|^2 = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. De aquí concluimos que $f(t) = 0$, para todo $t \in [0, 1]$. \square

Finalmente, veamos el siguiente teorema, que establece que si la transformada de Laplace de una función f es idénticamente nula en un cierto semiplano, entonces la función f es nula en casi todo punto en $[0, \infty)$.

Teorema 1.5.15 (Teorema de Unicidad) *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ tal que $\sigma(f) < \infty$. Si existe $x_0 > \sigma(f)$ tal que:*

$$\mathcal{L}f(z) = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \Re(z) > x_0. \quad (1.5.9)$$

Entonces $f \equiv 0$ en casi todo punto $t \in [0, \infty)$.

Demostración. Sea $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 > x_0 > \sigma(f)$, definimos la función:

$$F_1(t) = \int_0^t e^{-x_1 s} f(s) ds \quad t \geq 0$$

Claramente, $F_1 \in \mathcal{C}([0, \infty))$. Además, como $x_1 > x_0 > \sigma(f)$, por el Teorema 1.1.5, se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = \mathcal{L}f(x_1) = 0 \quad (1.5.10)$$

Dado que se cumplen las siguientes condiciones:

- El integrando: $g(s) = e^{-x_1 s} f(s) \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$
- $F_1(x) - F_1(0) = \int_0^x g(t) dt$,

podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue, A.1.10, con lo cual:

- $F_1(x)$ es diferenciable p.c.t. $x \in [0, \infty)$

$$F_1'(t) = e^{-x_1 t} f(t) \quad \text{p.c.t. } t \in [0, \infty)$$

Ahora, tomemos $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > x_1$. Reescribimos la transformada de Laplace integrando por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(z-x_1)t} e^{-x_1 t} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(z-x_1)t} F_1'(t) dt \\ &= \left[e^{-(z-x_1)t} F_1(t) \right]_0^\infty + (z-x_1) \int_0^\infty e^{-(z-x_1)t} F_1(t) dt. \end{aligned}$$

Estudiamos el primer sumando:

■ En $t = 0$ se tiene $F_1(0) = 0 \implies e^{-(z-x_1) \cdot 0} F_1(0) = 0$.

■ Acotando el módulo cuando t tiende a infinito, obtenemos:

$$\left| e^{-(z-x_1)t} F_1(t) \right| = e^{-(\Re(z)-x_1)t} |F_1(t)|.$$

Como $\Re(z) > x_1$, la exponencial tiende a cero, y por el límite (1.5.10), deducimos que $\left[e^{-(z-x_1)t} F_1(t) \right]_0^\infty = 0$.

Así, obtenemos:

$$\mathcal{L}f(z) = (z-x_1) \int_0^\infty e^{-(z-x_1)t} F_1(t) dt. \quad (1.5.11)$$

Consideremos ahora la sucesión de puntos $z_n = x_1 + n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\Re(z_n) = x_1 + n + 1 > x_1 > x_0$. Por hipótesis, sabemos que $\mathcal{L}f(z_n) = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación (1.5.11) y dividiendo por el factor no nulo $(z_n - x_1) = n + 1$, obtenemos:

$$\int_0^\infty e^{-(n+1)t} F_1(t) dt = \int_0^\infty (e^{-t})^n e^{-t} F_1(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.5.12)$$

Realizamos el cambio de variable $s = e^{-t}$. Entonces $ds = -e^{-t} dt$, y los límites de integración cambian de $t \in (0, \infty)$ a $s \in (1, 0)$ (lo que equivale a $t = -\log s$). Sustituyendo en la igualdad (1.5.12), obtenemos:

$$-\int_1^0 s^n F_1(-\log s) ds = \int_0^1 s^n F_1(-\log s) ds = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos entonces la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ del modo siguiente:

$$h(s) := \begin{cases} F_1(-\log s) & s \in (0, 1], \\ 0 & s = 0. \end{cases}$$

Como $F_1 \in \mathcal{C}([0, \infty))$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = 0$, deducimos:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} h(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = 0 = h(0),$$

con lo cual, $h \in \mathcal{C}([0, 1])$, luego por el Lema 1.5.14, se concluye que $h(s) \equiv 0$ para todo $s \in [0, 1]$. Entonces, $F_1(-\log s) = 0$ para todo $s \in (0, 1]$, lo que implica que $F_1(t) = 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Finalmente, al ser F_1 idénticamente nula, su derivada también lo será en casi todo punto en $[0, \infty)$, luego:

$$F_1'(t) = e^{-x_1 t} f(t) \equiv 0 \quad \text{p.c.t. } t \in [0, \infty),$$

y como la exponencial nunca se anula, deducimos que $f \equiv 0$ para casi todo $t \in [0, \infty)$. \square

Observación 1.5.16 El teorema sigue siendo cierto si sustituimos la hipótesis (1.5.9) por la siguiente:

$$\mathcal{L}f(x) = 0, \quad \forall x > x_0. \quad (1.5.13)$$

En efecto, como $\mathcal{L}f(z)$ es holomorfa en $\Omega = \{\Re(z) > x_0\}$, por el principio de identidad, ver Proposición A.2.22, la condición (1.5.13) implica $\mathcal{L}f(z) \equiv 0$ en Ω , es decir, (1.5.9).

La inyectividad de la transformada se deduce como corolario del teorema anterior.

Para ello utilizamos la linealidad de la transformada de Laplace, que probamos a continuación.

Lema 1.5.17 Sean $f, g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{L}(af + bg)(z) = a\mathcal{L}f(z) + b\mathcal{L}g(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

Demostración. La linealidad es consecuencia de que la integral es un operador lineal. Por otro lado, por definición de abscisa de convergencia, $\mathcal{L}f(z)$ y $\mathcal{L}g(z)$ convergen simultáneamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$, luego $\mathcal{L}(af + bg)(z)$ también converge para todo z con $\Re(z) > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$. \square

Corolario 1.5.18 Sean $f, g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ tales que $\exists y_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > y_0$, entonces $f = g$ en casi todo punto $t \in [0, \infty)$.

Demostración. Se sigue de la linealidad de la transformada, ver Lema 1.5.17, y del Teorema 1.5.15 \square

Propiedades de la transformada de Laplace

En este capítulo, estudiaremos cómo se relaciona la transformada de Laplace con los operadores de derivación e integración. Además, analizaremos la dualidad existente entre la traslación de una función y su multiplicación por un factor exponencial bajo la acción de la transformada de Laplace. Finalmente, abordaremos el teorema que relaciona la transformada de Laplace con la convolución de funciones. A lo largo del capítulo seguiremos la referencia de J.M. Mazón [6, Cap. 12.2].

2.1. Transformada de la derivada y de funciones integrales

El siguiente resultado nos permitirá calcular la transformada de Laplace de la derivada de una función.

Teorema 2.1.1 *Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^1 y de orden exponencial. Entonces, se verifica:*

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0), \quad (2.1.1)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \rho(f)$.

Demostración. Dado $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \rho(f)$ y $R > 0$, consideramos el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} \frac{df}{dt}(t) dt; \quad (2.1.2)$$

nótese que $\frac{df}{dt} \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ ya que es continua en $[0, \infty)$.

Integrando por partes obtenemos

$$\int_0^R e^{-zt} \frac{df}{dt}(t) dt = e^{-zR} f(R) - f(0) + z \int_0^R e^{-zt} f(t) dt. \quad (2.1.3)$$

Por la hipótesis $f \in \text{Exp}$, si escogemos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Re(z) > \lambda > \rho(f)$ existirá $M_\lambda > 0$ tal que $|f(t)| \leq M_\lambda e^{\lambda t}$, para todo $t \geq 0$, y entonces

$$|e^{-zR} f(R)| \leq e^{-\Re(z)R} M_\lambda e^{\lambda R} = M_\lambda e^{-R(\Re(z) - \lambda)}.$$

Como $\Re(z) > \lambda$, se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_\lambda e^{-R(\Re(z) - \lambda)} = 0, \quad (2.1.4)$$

y por el Lema del Sándwich, $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-zR} f(R) = 0$.

Finalmente, la convergencia del término integral de (2.1.3), se sigue como consecuencia de $\Re(z) > \rho(f) \geq \sigma(f)$, por la Proposición 1.2.9.

□

Observación 2.1.2 Notemos que, siempre que la función f sea suficientemente derivable (con f, f' , etc... de orden exponencial), podemos aplicar el Teorema 2.1.1 de forma iterada para obtener la transformada de las derivadas sucesivas de la función f . Por ejemplo, si $f \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ con $f, f' \in \text{Exp}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right)(z) &= z\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)(z) - f'(0) \\ &= z^2 \mathcal{L}f(z) - zf(0) - f'(0), \quad \forall \Re(z) > \max\{\rho(f), \rho(f')\}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

El siguiente resultado nos permite calcular la transformada de Laplace de funciones primitivas.

Teorema 2.1.3 Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable y de orden exponencial. Si $g(t) = \int_0^t f(s)ds$, entonces, se cumple

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}f(z), \quad (2.1.6)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > \max\{\rho(f), 0\}$.

Demostración. En primer lugar, notemos que $g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$ por ser continua.

Dado $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \max\{\rho(f), 0\}$ y $R > 0$, consideramos el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} g(t) dt. \quad (2.1.7)$$

Por el Teorema A.1.11 de Integración por Partes,

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-zt} g(t) dt &= \int_0^R \left(\frac{-e^{-zt}}{z}\right)' g(t) dt = \left[\frac{-e^{-zt}}{z} g(t)\right]_0^R + \int_0^R \frac{e^{-zt}}{z} g'(t) dt \\ &= \frac{1}{z} (-e^{-zR} \int_0^R f(s) ds + \int_0^R e^{-zt} f(t) dt), \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

usando que $g(0) = 0$ y que $g'(t) = f(t)$ en ctp $t \geq 0$, por el Teorema A.1.10.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\Re(z) > \lambda > \max\{0, \rho(f)\}$, estudiamos los dos sumandos de (2.1.8) por separado. Tomamos módulo en el primer sumando, de forma que

$$\begin{aligned} \left| e^{-zR} \int_0^R f(s) ds \right| &\leq e^{-\Re(z)R} \int_0^R |f(s)| ds \leq e^{-\Re(z)R} \int_0^R M_\lambda e^{\lambda s} ds \\ &= e^{-\Re(z)R} \frac{M_\lambda}{\lambda} (e^{\lambda R} - 1) \leq \frac{M_\lambda}{\lambda} e^{-R(\Re(z) - \lambda)}. \end{aligned}$$

Como $\Re(z) > \lambda$, se concluye que $e^{-zR} \int_0^R f(s) ds \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$, del mismo modo que en la prueba del Teorema 2.1.1 (ver límite (2.1.4)).

Para el segundo sumando, razonando de forma análoga al Teorema 2.1.1, la integral $\int_0^R e^{-zt} f(t) dt$ converge a $\mathcal{L}f(z)$ cuando $R \rightarrow \infty$. Por lo tanto, se concluye que $\mathcal{L}g(z)$ converge y se verifica la igualdad (2.1.6). \square

El siguiente resultado ilustra la dualidad existente entre la traslación de una función y su multiplicación por un factor exponencial bajo la acción de la transformada de Laplace.

Teorema 2.1.4 Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Sea $a \in \mathbb{C}$, si $g(t) = e^{-at} f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}f(z+a), \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } \Re(z) > \sigma(f) - \Re(a). \quad (2.1.9)$$

2. Sea $a > 0$. Si la función h se define como

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ f(t-a), & \text{si } t > a \end{cases}$$

entonces se verifica

$$\mathcal{L}h(z) = e^{-az} \mathcal{L}f(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } \Re(z) > \sigma(f). \quad (2.1.10)$$

Demostración. Supondremos que $\sigma(f) < \infty$, ya que en caso contrario, $H_{\sigma(f)} = \emptyset$, con lo cual, las identidades (2.1.9) y (2.1.10) se verifican trivialmente.

(1) Tomamos $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \sigma(f) - \Re(a)$ (notemos que esto es equivalente a $a+z \in H_{\sigma(f)}$), y calculamos la transformada de Laplace de la función g :

$$\mathcal{L}g(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} e^{-at} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-(z+a)t} f(t) dt.$$

Puesto que $a+z \in H_{\sigma(f)}$, el límite anterior existe y su valor es $\mathcal{L}f(z+a)$, y como consecuencia, se verifica la igualdad (2.1.9).

(2) Tomamos $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \sigma(f)$ y dado $R > a$, calculamos la transformada de Laplace de la función h :

$$\mathcal{L}h(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-zt} h(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R e^{-zt} f(t-a) dt. \quad (2.1.11)$$

Si $R > a$, aplicando el cambio de variable $s = t - a$ en la integral (2.1.11), resulta

$$\int_a^R e^{-zt} f(t-a) dt = \int_0^{R-a} e^{-z(s+a)} f(s) ds = e^{-az} \int_0^{R-a} e^{-zs} f(s) ds.$$

Finalmente, al tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$, se tiene que $R-a \rightarrow \infty$. Como por hipótesis $\Re(z) > \sigma(f)$, la integral $\int_0^{R-a} e^{-zs} f(s) ds$ converge a la transformada $\mathcal{L}f(z)$, luego:

$$\mathcal{L}h(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-az} \int_0^{R-a} e^{-zs} f(s) ds = e^{-az} \mathcal{L}f(z),$$

y por lo tanto se verifica la igualdad (2.1.10). \square

2.2. El Teorema de Convolución

En este apartado, estudiaremos el teorema que relaciona la transformada de Laplace con la convolución de funciones. Primero definimos el operador de convolución para funciones en $[0, \infty)$, construido a partir de la definición clásica (véase la Definición A.3.40).

Definición 2.2.5 Sea $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, definimos su extensión a \mathbb{R} como la función $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ f(t), & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Definición 2.2.6 Sean $f, g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$. Definimos su convolución, denotada por $f \star g$, como la función dada por la expresión:

$$(f \star g)(t) := (\tilde{f} * \tilde{g})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t-s)\tilde{g}(s) ds = \int_0^t f(t-s)g(s) ds,$$

en aquellos puntos $t \geq 0$ en los que la integral sea absolutamente convergente.

Observación 2.2.7 Notemos que $f \star g(t)$ está definida en ctp $t \geq 0$ y que $f \star g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. En efecto, si tomamos $T > 0$, tendremos

$$\begin{aligned} \int_0^T |(f \star g)(t)| dt &\leq \int_0^T \int_0^t |f(t-s)g(s)| ds dt \\ &= \int_0^T \int_s^T |f(t-s)||g(s)| dt ds \\ &= \int_0^T |g(s)| \int_0^{T-s} |f(u)| du ds \\ &\leq \int_0^T |g(s)| \int_0^T |f(u)| du ds = \left(\int_0^T |f(u)| du \right) \left(\int_0^T |g(s)| ds \right) < \infty, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el Teorema de Tonelli (Teorema A.1.8), ya que el integrando es una función no negativa. El producto de integrales es finito porque f y g son funciones localmente integrables en $[0, \infty)$.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Convólución) Sean $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funciones localmente integrables y de orden exponencial. Entonces, se verifica:

$$\mathcal{L}(f \star g)(z) = \mathcal{L}f(z) \cdot \mathcal{L}g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } \Re(z) > \max\{\rho(f), \rho(g)\}. \quad (2.2.12)$$

Demostración. Sea $R > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-zt} (f \star g)(t) dt &= \int_0^R \int_0^t e^{-zt} f(t-s)g(s) ds dt \\ &= \int_0^R \int_0^t e^{-z(t-s)} f(t-s)e^{-zs} g(s) ds dt. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Usando que $f, g \in Exp$, y escogiendo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Re(z) > \lambda > \max\{\rho(f), \rho(g)\}$, entonces, tendremos

$$\begin{aligned} |e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s)| &\leq M_\lambda \cdot e^{-\Re(z)(t-s)} e^{\lambda(t-s)} e^{-\Re(z)s} \tilde{M}_\lambda \cdot e^{\lambda s} \\ &= \bar{M}_\lambda e^{-(\Re(z)-\lambda)(t-s)} e^{-(\Re(z)-\lambda)s} \\ &= \bar{M}_\lambda e^{-(\Re(z)-\lambda)t}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Puesto que el integrando de (2.2.13) está acotado por una función continua en el compacto $\Delta_R = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq R\}$, deducimos que $e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s) \in L^1(\Delta_R)$. De este modo, por el Teorema de Fubini (Teorema A.1.8), podemos intercambiar el orden de integración, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^t e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s) ds dt &= \int_0^R \int_s^R e^{-z(t-s)} f(t-s) e^{-zs} g(s) dt ds \\ &= \int_0^R \int_0^{R-s} e^{-zs} g(s) e^{-zu} f(u) du ds, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el cambio de variable $u = t - s$.

Notemos ahora que la integral (2.2.15) se puede reescribir como

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zs} g(s) e^{-zu} f(u) \chi_{\{u+s \leq R\}}(u, s) du ds. \quad (2.2.16)$$

Tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ como en (2.2.14), para todo $R > 0$, podemos dominar el integrando de (2.2.16)

$$|e^{-zs} g(s) e^{-zu} f(u) \chi_{\{u+s \leq R\}}(u, s)| \leq \bar{M}_\lambda e^{-s(\Re(z)-\lambda)} e^{-u(\Re(z)-\lambda)}.$$

Dado que $\Re(z) - \lambda > 0$, la función mayorante pertenece a $L^1([0, \infty) \times [0, \infty), du ds)$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada (Teorema A.1.9), deducimos que la integral (2.2.16) converge, siendo su límite

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{R-s} e^{-zs} g(s) e^{-zu} f(u) du ds &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zs} g(s) e^{-zu} f(u) du ds \\ &= \int_0^\infty e^{-zs} g(s) ds \cdot \int_0^\infty e^{-zu} f(u) du = \mathcal{L}f(z) \cdot \mathcal{L}g(z). \end{aligned}$$

De este modo, concluimos que $\mathcal{L}(f \star g)(z)$ converge y se verifica la igualdad (2.2.12). \square

El Teorema de Inversión

A lo largo de este capítulo, demostraremos la Fórmula de Inversión Compleja (Teorema 3.1.1) y deduciremos como consecuencia la Fórmula de Bromwich (Corolario 3.1.2). Finalizaremos con el Teorema de Expansión de Heaviside (Teorema 3.2.3) para la inversión de funciones racionales. Seguiremos a J.M. Mazón [6, Cap. 12.3].

3.1. La Fórmula de Inversión Compleja

En esta sección probaremos la fórmula de inversión compleja, a través de la cual podremos demostrar el Teorema de Expansión de Heaviside.

Teorema 3.1.1 (Fórmula de Inversión Compleja) *Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus S$, donde $S = \{a_1, \dots, a_p\}$ es un conjunto finito de singularidades aisladas en el plano complejo. Definimos $\sigma := \max\{\Re(a_1), \dots, \Re(a_p)\}$. Supongamos que F verifica*

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta}, \quad \text{con } |z| \geq R, \quad (3.1.1)$$

donde M, R y β son constantes positivas. Si definimos la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la suma de los residuos

$$f(t) := \sum_{j=1}^p \text{Res}(e^{\omega t} F(\omega); a_j), \quad (3.1.2)$$

entonces $\mathcal{L}f(z) = F(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \sigma$.

Demostración. Supondremos por simplicidad que las singularidades $S = \{a_1, \dots, a_p\}$ de la función F no son evitables. En ese caso, (3.1.1) implica que $S \subset D_R(0)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > \sigma$, para cada $N > \max\{R, \alpha\}$ consideramos el cuadrado $\Gamma_N := \partial([-N, N]^2)$, y sobre él, definimos las curvas

$$\gamma_1 := \partial([\alpha, N] \times [-N, N]) \quad \text{y} \quad \gamma_2 := \partial([-N, \alpha] \times [-N, N]);$$

ver Figura 3.1. Nótese que S está contenido en el interior de la curva γ_2 , y que F es holomorfa en el semiplano $\{\Re z > \sigma\}$, que contiene a la curva γ_1 . En lo sucesivo, supondremos que todas las curvas están orientadas positivamente, como podemos observar en la Figura 3.1.

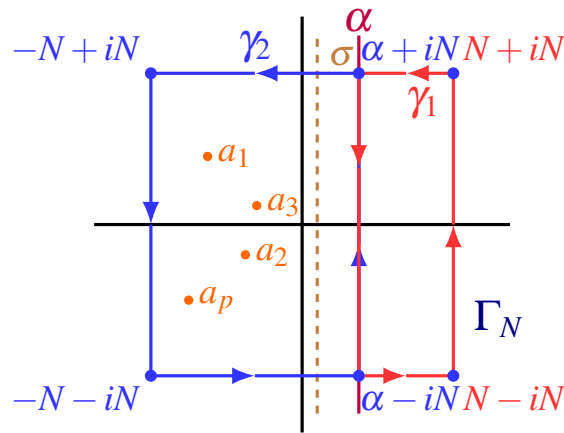


Figura 3.1: Curvas γ_1 y γ_2 sobre el cuadrado Γ_N .

Sea $t > 0$, dado que la función F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus S$ y $\gamma_2 \sim 0$ (resp \mathbb{C}), aplicamos el Teorema de los Residuos (véase el Teorema A.2.35) a la función $e^{zt}F(z)$ sobre el recinto delimitado por γ_2 , obteniendo

$$\int_{\gamma_2} e^{\omega t} F(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{j=1}^p \text{Res}(e^{\omega t} F(\omega); a_j) = 2\pi i f(t), \quad (3.1.3)$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la definición (3.1.2). Nótese que esta representación integral de $f(t)$ es válida para toda curva γ_2 definida como arriba (y en particular, para todo N suficientemente grande).

A continuación, fijamos $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \alpha$ y calculamos $\mathcal{L}f(z)$:

$$2\pi i \mathcal{L}f(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-zt} 2\pi i f(t) dt. \quad (3.1.4)$$

Sustituyendo el valor de $f(t)$ por la integral obtenida en la identidad (3.1.3) resulta

$$\int_0^r e^{-zt} 2\pi i f(t) dt = \int_0^r e^{-zt} \int_{\gamma_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega dt. \quad (3.1.5)$$

Como $F \in \mathcal{C}(\gamma_2^*)$ y el conjunto $[0, r] \times \gamma_2^*$ es compacto, podemos aplicar el Teorema de Fubini (Teorema A.1.8) para intercambiar el orden de integración en (3.1.5), obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^r e^{-zt} \int_{\gamma_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega dt &= \int_{\gamma_2} F(\omega) \int_0^r e^{t(\omega-z)} dt d\omega \\ &= \int_{\gamma_2} \frac{F(\omega)}{\omega-z} e^{r(\omega-z)} d\omega - \int_{\gamma_2} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega = I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

es importante observar que, $\omega - z \neq 0$, ya que $\Re(z) > \alpha \geq \Re(\omega)$ para todo $\omega \in \gamma_2^*$. Estudiamos por separado las integrales I_1 e I_2 :

- I_1 : Evaluando el módulo del integrando, observamos que

$$\left| \frac{F(\omega)}{\omega-z} e^{(\omega-z)r} \right| \leq \left| \frac{F(\omega)}{\omega-z} \right| e^{(\Re(\omega)-\Re(z))r} \leq \left| \frac{F(\omega)}{\omega-z} \right| \quad \forall r > 0.$$

Como el denominador no se anula, la función $\frac{F(\omega)}{\omega-z}$ pertenece a $L^1(\gamma_2^*, d\omega)$, luego podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada (Teorema A.1.9) a la integral I_1 :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_1 = \int_{\gamma_2} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega-z} e^{r(\omega-z)} d\omega = 0. \quad (3.1.7)$$

Nótese que, por (3.1.4), (3.1.5) y (3.1.6), esto implica que $\mathcal{L}f(z)$ converge y se tiene

$$\mathcal{L}f(z) = -I_2 = - \int_{\gamma_2} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega.$$

- I_2 : En primer lugar, notemos que $\Gamma_N = \gamma_1 \cup \gamma_2$, y que las parametrizaciones de γ_1 y γ_2 se recorren en sentidos contrarios sobre el segmento vertical común, como se muestra en la Figura 3.1. Por lo tanto, podemos reescribir la integral I_2 como sigue:

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega = \int_{\Gamma_N} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega - \int_{\gamma_1} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega = I_4 - I_3.$$

Nuevamente, estudiaremos las dos integrales por separado:

- I_3 : Puesto que la función F es holomorfa en el semiplano $\Omega = \{\Re(\omega) > \alpha\}$, y este es simplemente conexo y contiene a la curva γ_1^* , tomando N suficientemente grande, tal que $|z| < N$, tendremos que $\text{Ind}(\gamma_1, z) = 1$, y por el Teorema Homológico de Cauchy (véase el Teorema A.2.30) se cumple que

$$\int_{\gamma_1} \frac{F(\omega)}{\omega-z} d\omega = 2\pi i F(z).$$

- I_4 : Observemos que no podemos aplicar el Teorema Homológico de Cauchy a I_4 porque $\Gamma_N \approx 0$ (resp $\mathbb{C} \setminus S$), ya que $S \subset \text{int}(\Gamma_N)$. Acotamos el integrando mediante la hipótesis (3.1.1):

$$\left| \frac{F(\omega)}{\omega-z} \right| \leq \frac{M}{|\omega|^\beta (|\omega| - |z|)} \leq \frac{M}{N^\beta (N - |z|)}, \quad \text{para todo } \omega \in \Gamma_N^*.$$

Entonces:

$$\int_{\Gamma_N} \left| \frac{F(\omega)}{\omega-z} \right| |d\omega| \leq \frac{M}{(N - |z|)N^\beta} \cdot \text{Long}(\Gamma_N) = \frac{8MN}{(N - |z|)N^\beta}.$$

Puesto que $\beta > 0$, el límite de esta última expresión cuando $N \rightarrow \infty$ es cero, con lo cual $\lim_{N \rightarrow \infty} I_4 = 0$.

De este modo, hemos probado que $2\pi i \mathcal{L}f(z) = 2\pi i F(z)$, o equivalentemente $\mathcal{L}f(z) = F(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \alpha > \sigma$.

Finalmente, dado un $z \in \mathbb{C}$ arbitrario con $\Re(z) > \sigma$, por la densidad de los números reales podemos elegir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma < \alpha < \Re(z)$. Aplicando la construcción previa para dicho α , se verifica la igualdad en z . Al ser z arbitrario en el semiplano, se concluye que $\mathcal{L}f(z) = F(z)$ para todo $\Re(z) > \sigma$, completando así la demostración del teorema. □

Como consecuencia directa de la Fórmula de Inversión Compleja, deducimos la Fórmula de Bromwich.

Corolario 3.1.2 (Fórmula de Bromwich) Sea F una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus S$, donde $S = \{a_1, \dots, a_p\}$ es un conjunto finito de singularidades aisladas (esenciales o polos) de la función F . Tomando $\sigma := \max\{\Re(a_1), \dots, \Re(a_p)\}$, y asumiendo que existen constantes positivas M, R y β en las condiciones del Teorema 3.1.1. Si definimos la función $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mediante la suma de residuos de la expresión (3.1.2), entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. La abscisa de convergencia de f es exactamente $\sigma(f) = \sigma$.
2. Para todo $t > 0$ y todo $\alpha > \sigma$, se cumple:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iy)t} F(\alpha+iy) dy. \quad (3.1.8)$$

Demostración. Para la primera parte, notemos que la función F satisface las condiciones del Teorema 3.1.1, con lo cual, $\mathcal{L}f(z)$ converge a $F(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) > \sigma$. De este modo, por la definición de abscisa de convergencia (véase la Definición 1.2.8), se concluye que $\sigma(f) \leq \sigma$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\sigma(f) < \sigma$. Como $\mathcal{L}f$ es holomorfa en su semiplano de convergencia $H_{\sigma(f)}$ (Teorema 1.4.13) y coincide con F en el abierto $H_\sigma := \{\Re(z) > \sigma\}$, por el Principio de Prolongación Analítica (Proposición A.2.22) ambas coinciden en $H_{\sigma(f)} \setminus S$. En tal caso, existe una singularidad $a_{k_0} \in S$ con $\Re(a_{k_0}) = \sigma$ que admite un entorno contenido en $H_{\sigma(f)}$ donde $\mathcal{L}f$ es holomorfa porque $\sigma(f) < \sigma$. De este modo, a_{k_0} sería una singularidad evitable de F , lo cual contradice la definición del conjunto S .

Para probar la segunda propiedad, tomaremos las curvas Γ_N y γ_2 definidas en la demostración del Teorema 3.1.1 y descomponemos γ_2 en los segmentos S_i , orientados tal y como se muestra en la Figura 3.2.

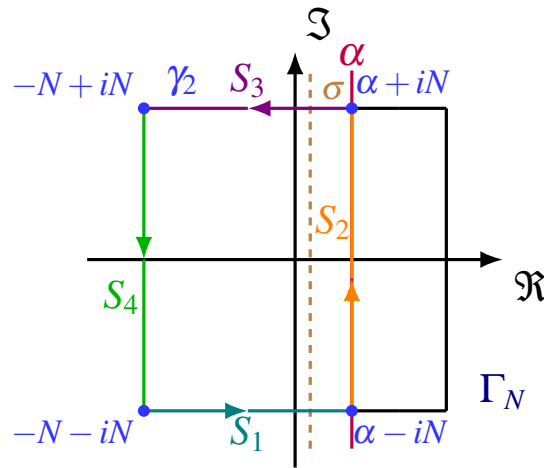


Figura 3.2: Contornos de integración γ_1 y γ_2 con los subsegmentos S_i especificados.

En (3.1.3) demostramos que

$$\int_{\gamma_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega = 2\pi i f(t), \quad (3.1.9)$$

considerando la integral en cada segmento S_i para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, se obtiene:

$$\int_{\gamma_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} e^{t\omega} F(\omega) d\omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.1.10)$$

Estudiamos cada integral por separado:

- I_1 : Tomando módulo obtenemos y aplicando la parametrización $\omega = x - iN$, obtenemos:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{S_1} |e^{t\omega} F(\omega)| |d\omega| \leq \int_{S_1} e^{t\Re(\omega)} \frac{M}{|\omega|^\beta} |d\omega| \leq \frac{M}{N^\beta} \int_{S_1} e^{t\Re(\omega)} |d\omega| \\ &= \frac{M}{N^\beta} \int_{-N}^{\alpha} e^{tx} dx = \frac{M}{tN^\beta} (e^{t\alpha} - e^{-tN}), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que $\omega \in \Gamma_N^*$, con lo cual $|\omega| \geq N$.

Como $t, \beta > 0$, al tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$ se sigue que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{tN^\beta} (e^{t\alpha} - e^{-tN}) = 0$, luego $\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

- I_3 : Este caso es simétrico al caso de I_1 , con lo cual, aplicando el mismo razonamiento, se concluye que $\lim_{N \rightarrow \infty} I_3 = 0$.

- I_4 : Tomando módulo, obtenemos:

$$|I_4| \leq \int_{S_4} e^{t\Re(\omega)} \frac{M}{|\omega|^\beta} |d\omega| \leq e^{-Nt} \frac{M}{N^\beta} \cdot \text{Long}(S_4) = e^{-Nt} \frac{M}{N^\beta} \cdot 2N,$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado que $\omega \in S_4$, luego $\Re(\omega) = -N$. Nuevamente, al ser $t, \beta > 0$, y puesto que la exponencial domina a N^β , tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ se sigue que $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-Nt} \frac{M}{N^\beta} \cdot 2N = 0$, con lo cual $\lim_{N \rightarrow \infty} I_4 = 0$.

- I_2 : Aplicando la parametrización $\omega = \alpha + iy$ tenemos que

$$\int_{S_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega = i \int_{-N}^N e^{t(\alpha+iy)} F(\alpha+iy) dy = i \int_{-N}^N e^{(\alpha+iy)t} F(\alpha+iy) dy,$$

tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iy)t} F(\alpha+iy) dy.$$

Finalmente, como I_1, I_3 e I_4 tienden a cero, tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$ en (3.1.9), concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi i f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{t\omega} F(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^4 \lim_{N \rightarrow \infty} I_i = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iy)t} F(\alpha+iy) dy,$$

con lo cual

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iy)t} F(\alpha+iy) dy.$$

□

3.2. Fórmula de Heaviside

Por último, veremos la conocida como Fórmula de Expansión de Heaviside, que nos permitirá hallar la transformada inversa de Laplace de funciones racionales.

Teorema 3.2.3 (Fórmula de Expansión de Heaviside) *Sea $F(z) = P(z)/Q(z)$ una función racional, donde P y Q son polinomios y tales que $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$, y $\{a_1, \dots, a_p\}$ son ceros simples del polinomio Q y tales que $P(a_j) \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Entonces, la transformada inversa de Laplace de F , $f(t)$, definida en el Teorema 3.1.1 se puede expresar como*

$$f(t) = \sum_{j=1}^p e^{a_j t} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}. \quad (3.2.11)$$

Demostración. Por hipótesis, $S = \{a_1, \dots, a_p\}$ es un conjunto finito de singularidades aisladas de $F(z) = P(z)/Q(z)$, que coinciden con los ceros del polinomio Q , entonces, la función F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus S$.

Tomamos $\sigma := \max\{\Re(a_j) : j = 1, \dots, p\}$ y escribimos los polinomios como $P(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n$ y $Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_m z^m$, donde, por hipótesis, $n < m$ (y $q_m \neq 0$). Reescribimos el módulo de $F(z)$ como

$$|F(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{z^n}{z^m} \frac{|p_0/z^n + \dots + p_{n-1}/z + p_n|}{|q_0/z^m + \dots + q_{m-1}/z + q_m|} \right|$$

Definimos entonces las funciones auxiliares $g_1(z) := p_0/z^n + \dots + p_{n-1}/z$ y $g_2(z) := q_0/z^m + \dots + q_{m-1}/z$. Puesto que $\lim_{z \rightarrow \infty} g_1(z) = 0$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} g_2(z) = 0$, deducimos que:

- Existe $R_1 > 0$ tal que si $|z| > R_1$, entonces $|g_1(z)| \leq |p_n|$.
- Existe $R_2 > 0$ tal que si $|z| > R_2$, entonces $|g_2(z)| \leq \frac{1}{2}|q_m|$.

Tomando $R > \max\{R_1, R_2\}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq R$ tendremos

$$\begin{aligned} |g_1(z) + p_n| &\leq |g_1(z)| + |p_n| \leq 2|p_n|, \\ |g_2(z) + q_m| &\geq |q_m| - |g_2(z)| \geq |q_m| - \frac{1}{2}|q_m| = \frac{1}{2}|q_m|. \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos acotar $|F(z)|$ superiormente de la siguiente forma:

$$|F(z)| \leq \left| \frac{z^n}{z^m} \right| \frac{2|p_n|}{\frac{1}{2}|q_m|} = \frac{4|p_n|}{|q_m||z|^{m-n}}. \quad (3.2.12)$$

Llamando $M := \frac{4|p_n|}{|q_m|}$ y $\beta := m - n$, al ser $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$ se tiene que $\beta \geq 1$. Por lo tanto, se verifica $|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^\beta}$ para todo $|z| > R$, luego F cumple las condiciones del Teorema 3.1.1.

Como los puntos a_j son ceros simples del polinomio Q , entonces a_j son polos de F de orden 1, para todo $j \in \{1, \dots, p\}$. Aplicando la Proposición A.2.34, obtenemos:

$$\text{Res}(e^{tz}F(z); a_j) = \lim_{z \rightarrow a_j} (z - a_j) e^{tz} \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow a_j} e^{tz} P(z) \frac{z - a_j}{Q(z) - Q(a_j)} = e^{a_j t} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}.$$

Finalmente, utilizando la Fórmula de Inversión Compleja (3.1.2), concluimos:

$$f(t) = \sum_{j=1}^p \text{Res}(e^{tz}F(z); a_j) = \sum_{j=1}^p e^{a_j t} \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)},$$

□

Aplicaciones de la transformada de Laplace

A lo largo de este capítulo, estudiaremos dos aplicaciones de la transformada de Laplace. En primer lugar, veremos cómo se relaciona la transformada de Laplace con el modelado de circuitos eléctricos y cómo podemos utilizarla para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias transformándolas mediante los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Para cerrar el Trabajo de Fin de Grado, estudiaremos el problema de la curva tautócrona, un problema clásico de la Física que se puede resolver utilizando la transformada de Laplace.

4.1. Resolución de circuitos eléctricos

En este apartado veremos dos ejemplos que ilustran cómo se puede aplicar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan circuitos eléctricos. En el primer ejemplo, estudiaremos un circuito RC, mientras que en el segundo ejemplo abordaremos un circuito LCR. A la hora de realizar las deducciones de las ecuaciones diferenciales, nos hemos apoyado en la referencia [7] y hemos adaptado los ejemplos de J.M. Mazón [6, Cap. 12.4]

4.1.1. Circuito RC

Estudiamos un circuito RC en serie como el de la Figura 4.1.

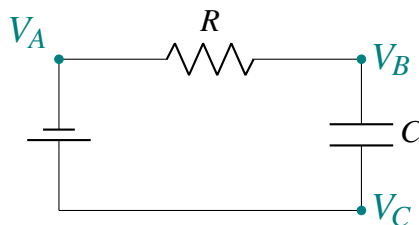


Figura 4.1: Esquema del circuito RC.

Denotamos por $I(t)$ la intensidad de corriente en el circuito, por $Q(t)$ la carga almacenada en el condensador, y por $V(t)$ el voltaje en la batería. Aplicando la Ley de Ohm, deducimos que la caída de potencial en la resistencia es $V_A - V_B = I(t) \cdot R$. Por otro lado, la caída de potencial en el condensador es $V_B - V_C = Q(t)/C$, donde C es la capacidad del condensador. Por último,

aplicando la Ley conservación de energía de Kirchhoff, obtenemos:

$$V(t) = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C}. \quad (4.1.1)$$

Puesto que la intensidad de corriente, $I(t)$, es la variación de carga acumulada en el condensador, $Q(t)$, respecto al tiempo, es decir, $I(t) = Q'(t)$, podemos reescribir la ecuación (4.1.1) como la ecuación diferencial ordinaria:

$$V(t) = R \cdot Q'(t) + \frac{Q(t)}{C}. \quad (4.1.2)$$

Resolvemos entonces el problema asumiendo $R = 1$, $C = 1$ y carga inicial $Q(0) = 0$. Suponemos también que el voltaje en la batería es igual a 1, pero que esta se conecta sólo para $t > 1$. Es decir, $V(t) = H(t - 1)$, donde la función de Heaviside, está definida por $H(t - 1) = 0$ si $t \leq 1$ y $H(t - 1) = 1$ si $t > 1$. La ecuación diferencial ordinaria a resolver será:

$$\begin{cases} Q'(t) + Q(t) = H(t - 1) \\ Q(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Notar que el ejemplo modela un circuito eléctrico en el que inicialmente no hay corriente, $V(t) = H(t - 1)$, pero al pasar un cierto tiempo el circuito comienza a ser alimentado, de modo que empieza a cargarse el condensador. En la Figura 4.2 podemos visualizar esta situación.

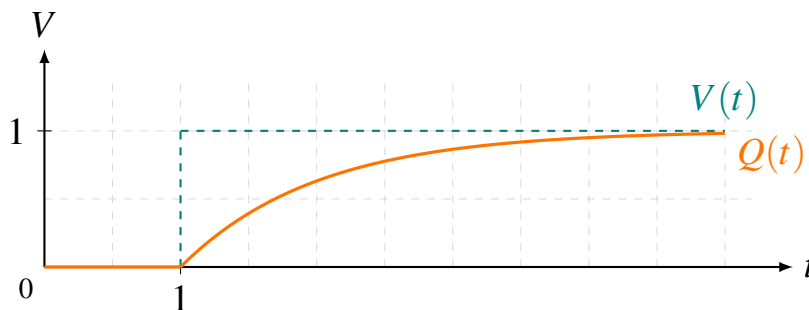


Figura 4.2: Carga almacenada en el condensador a lo largo del tiempo.

Como podemos ver, en los instantes iniciales no hay carga almacenada en el condensador, pero a partir de $t = 1$, se aplica tensión en el circuito y el condensador comienza a cargarse hasta llegar a su carga máxima ($Q = 1$).

Resolvemos la EDO utilizando la transformada de Laplace. Tomando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial y usando que $\mathcal{L}(H(t - 1))(z) = \frac{e^{-z}}{z}$, ver Ejemplo 1.3.10.1 y fórmula (2.1.10), obtenemos:

$$\mathcal{L}Q'(z) + \mathcal{L}Q(z) = \mathcal{L}(H(t - 1))(z) = \frac{e^{-z}}{z},$$

Por el Teorema 2.1.1 y la hipótesis $Q(0) = 0$ tenemos

$$\mathcal{L}Q'(z) = z\mathcal{L}Q(z) - Q(0) = z\mathcal{L}Q(z).$$

Despejando $\mathcal{L}Q(z)$ deducimos que

$$\mathcal{L}Q(z) = e^{-z} \frac{1}{z(z+1)}, \quad (4.1.4)$$

donde los ceros del denominador son $a_1 = 0$ y $a_2 = -1$. Aplicando el Teorema 3.2.3 al cociente $\frac{1}{z(z+1)}$ deducimos que se corresponde con la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \sum_{j=1}^2 e^{a_j t} \frac{1}{2a_j + 1} = e^{0t} \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} + e^{-t} \frac{1}{2 \cdot (-1) + 1} = 1 - e^{-t}. \quad (4.1.5)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.1.4) deducimos que

$$\mathcal{L}Q(z) = e^{-z} \mathcal{L}f(z).$$

Finalmente tomamos la función $g(t)$ definida del modo siguiente:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ f(t-1) & t > 1, \end{cases} \quad (4.1.6)$$

donde f es la función (4.1.5). Por el Teorema 2.1.4 se verifica:

$$\mathcal{L}g(z) = e^{-z} \mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}Q(z),$$

con lo cual, por la inyectividad de la transformada de Laplace (véase el Corolario 1.5.18) deducimos que $Q(t) = g(t)$. Por tanto, la solución al problema es

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 1 - e^{-(t-1)} & t > 1, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

que concuerda con la gráfica en la Figura 4.2.

4.1.2. Circuito LCR

Estudiamos un circuito LCR en serie como el de la Figura 4.3.

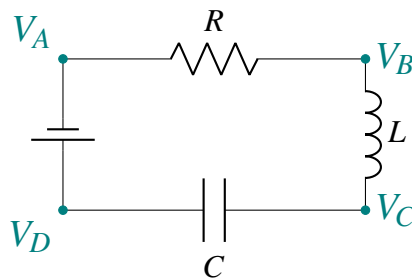


Figura 4.3: Esquema del circuito LCR.

Al igual que en el circuito RC, la caída de potencial en la resistencia es $V_A - V_B = I(t) \cdot R$. Por otro lado, la caída de potencial en el inductor es $V_B - V_C = L \cdot I'(t)$, donde L es la inductancia

de la bobina. Por último, la caída de potencial en el condensador es $V_D - V_C = Q(t)/C$, donde C es la capacidad del condensador. Aplicando la Ley conservación de energía de Kirchhoff, obtenemos:

$$V(t) = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_D - V_C) = R \cdot I(t) + L \cdot I'(t) + \frac{Q(t)}{C}. \quad (4.1.8)$$

Recordando que $I'(t) = Q(t)$, podemos hallar la variación de carga acumulada en el condensador a lo largo del tiempo resolviendo la ecuación diferencial ordinaria:

$$V(t) = L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{Q(t)}{C}. \quad (4.1.9)$$

Resolveremos entonces el problema asumiendo $L = 1$, $R = 2$, $C = 1/2$, carga inicial $Q(0) = 0$ e intensidad inicial $I(0) = 0$. En el caso de los circuitos LCR al ser de corriente alterna, el voltaje vendrá dado por una cierta función dada en términos de senos y cosenos, en nuestro caso asumiremos que es una función $V(t)$ cualquiera. La ecuación diferencial ordinaria a resolver será:

$$\begin{cases} Q''(t) + 2Q'(t) + 2Q(t) = V(t) \\ Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Tomando transformada de Laplace y utilizando el Teorema 2.1.1, obtenemos:

$$\mathcal{L}(Q'')(z) + 2\mathcal{L}(Q')(z) + 2\mathcal{L}Q(z) = \mathcal{L}V(z),$$

de donde aplicando (2.1.1) y (2.1.5) se sigue $\mathcal{L}(Q'')(z) = z^2 \mathcal{L}Q(z)$ y $\mathcal{L}(Q')(z) = z \mathcal{L}Q(z)$, y por tanto:

$$\mathcal{L}Q(z) = \frac{\mathcal{L}V(z)}{z^2 + 2z + 2}. \quad (4.1.11)$$

Aplicando el Teorema 3.2.3 a la función $G(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$, donde los ceros del denominador son $z = -1 \pm i$, obtenemos que su transformada inversa de Laplace viene dada por la función

$$g(t) = \frac{e^{(i-1)t}}{2i} - \frac{e^{(-1-i)t}}{2i} = e^{-t} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) = e^{-t} \sin(t).$$

Sustituyendo en la ecuación (4.1.11) deducimos que

$$\mathcal{L}Q(z) = \mathcal{L}V(z) \cdot \mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}(V \star g)(z),$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el Teorema 2.2.8. Finalmente, por la inyectividad de la transformada de Laplace (véase el Corolario 1.5.18) concluimos que la solución de (4.1.10) viene dada por

$$Q(t) = (V \star g)(t) = \int_0^t V(t-s) e^{-s} \sin(s) ds.$$

4.2. El problema de la curva tautócrona

Para abordar el problema de la curva tautócrona, seguiremos el texto de Folland [3, pp. 289-291]. Buscamos una curva $C \subset \mathbb{R}^2$ desde el origen, $P = (0,0)$, hasta un punto $Q = (x_0, y_0)$ del primer cuadrante, de modo que el tiempo de caída de un objeto sea una constante T prefijada, y que no dependa del punto de partida sobre la curva C .

Dado $T > 0$ fijo, debemos encontrar un punto $Q = (x_0, y_0)$ con $x_0, y_0 > 0$ y una curva C desde $P = (0,0)$ hasta Q con la propiedad mencionada anteriormente. De este modo, parametrizaremos la curva C del modo siguiente:

$$C = \{\varphi(y) = (x(y), y) : y \in [0, y_0]\}, \quad (4.2.12)$$

para una cierta función $x(y)$ a determinar bajo la condición inicial $x(0) = 0$ y $x(y_0) = x_0$. La Figura 4.4 ilustra el planteamiento de nuestro problema.

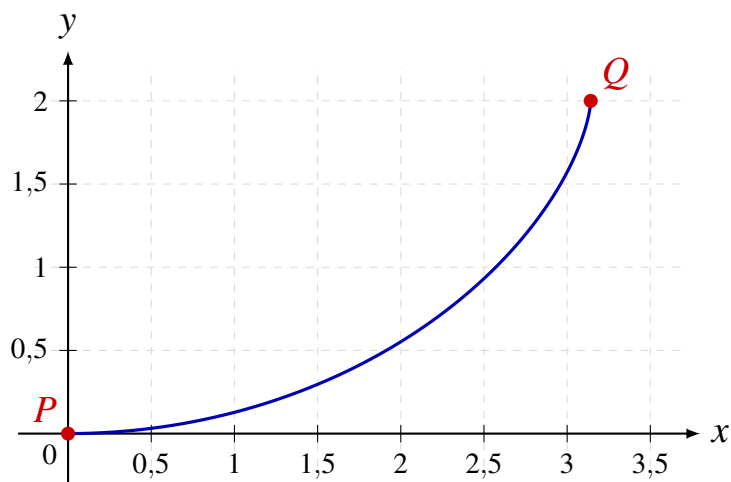


Figura 4.4: Curva tautócrona entre el origen P y un punto Q .

Colocamos entonces un objeto de masa m sobre un punto de la curva C , situado a altura h , y denotamos por $\gamma(t) = \gamma(t; h)$ la posición del objeto en tiempo t . Al caer el objeto por la curva C , podemos escribir la posición del objeto como:

$$\gamma(t) = \varphi(y(t)) = (x(y(t)), y(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.2.13)$$

donde la función $y(t)$ indica la altura del objeto. Notemos que debe cumplirse

$$y(0) = h, \quad y(T) = 0.$$

Por la ley de conservación de la energía, las energías potencial y cinética del objeto deben ser iguales en cada punto $\gamma(t)$, es decir,

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m|\gamma'(t)|^2 = E_{pot} = mg(y(0) - y(t)).$$

Despejando $|\gamma'(t)|$ y sustituyendo $y(0) = h$ obtenemos

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2g(h - y(t))}, \quad (4.2.14)$$

y aplicando la regla de la cadena en $\gamma = \varphi \circ y$, se tiene $\gamma'(t) = \varphi'(y(t)) \cdot y'(t)$, luego podemos reescribir la velocidad del objeto como

$$1 = \frac{|\varphi'(y(t))y'(t)|}{\sqrt{2g(h-y(t))}}, \quad t \in [0, T]. \quad (4.2.15)$$

Integrando ambos lados de la expresión (4.2.15) entre 0 y T y aplicando el cambio de variable $u = y(t)$, obtenemos

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^h \frac{|\varphi'(u)|}{\sqrt{2g(h-u)}} du. \quad (4.2.16)$$

En esta ecuación integral queremos despejar la función $|\varphi'(u)|$. Para ello, reescribimos la ecuación (4.2.16) utilizando convoluciones:

$$T = \int_0^h |\varphi'(u)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2g(h-u)}} du = (|\varphi'| \star \frac{1}{\sqrt{2gx}})(h), \quad h > 0. \quad (4.2.17)$$

Dado que T es constante, utilizando las fórmulas:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \quad (\text{Lema 1.3.11}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(1)(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{para } \Re(z) > 0,$$

y tomando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (4.2.17) deducimos

$$\frac{T}{z} = \mathcal{L}|\varphi'| (z) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \iff \mathcal{L}|\varphi'| (z) = T \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \sqrt{z}. \quad (4.2.18)$$

Tomando $A = T \sqrt{\frac{2g}{\pi}}$, reescribimos la ecuación (4.2.18) como

$$\mathcal{L}(|\varphi'|)(z) = A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{z}} = A \cdot \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(z).$$

Por la unicidad de la transformada de Laplace (véase el Corolario 1.5.18) concluimos

$$|\varphi'(u)| = \frac{A}{\sqrt{u}}, \quad u > 0.$$

Recordando la parametrización de la curva C dada por la ecuación (4.2.12), deducimos que $|\varphi'(u)| = \sqrt{1 + (x'(u))^2}$. Entonces, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$|x'(u)|^2 + 1 = \frac{A^2}{u},$$

y dado que $x(u)$ es una función creciente (y por ende, $x'(u) > 0$), podemos despejar $x'(u)$, de modo que

$$x'(u) = \sqrt{\frac{B}{u} - 1}, \quad \text{con } B = A^2 = \frac{2gT^2}{\pi^2}. \quad (4.2.19)$$

Para poder integrar esta expresión, aplicaremos el cambio de variable

$$u(\theta) = B \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = B \frac{1 - \cos(\theta)}{2}, \quad u'(\theta) = \frac{B}{2} \sin(\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad (4.2.20)$$

de modo que

$$\begin{aligned}(x \circ u)'(\theta) &= \sqrt{\frac{B}{u(\theta)} - 1} \cdot u'(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - 1} \cdot \frac{B \sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \cdot B \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) = B \cos^2(\theta/2) \\ &= B \frac{1 + \cos \theta}{2}.\end{aligned}$$

Integrando esta expresión obtenemos

$$x \circ u(\theta) - x \circ u(0) = \int (x \circ u)'(\theta) d\theta = \int B \frac{1 + \cos \theta}{2} d\theta = \frac{B}{2} (\theta + \sin \theta) + D, \quad D \in \mathbb{R},$$

y utilizando la condición inicial $x \circ u(0) = x(0) = 0$ deducimos que $D = 0$, de donde se sigue:

$$x \circ u(\theta) = \frac{B}{2} (\theta + \sin \theta), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (4.2.21)$$

De este modo, de las ecuaciones (4.2.20) y (4.2.21) deducimos que la curva C que resuelve el problema de la curva tautócrona es la cicloide dada por la parametrización

$$\psi(\theta) := \varphi(u(\theta)) = (x \circ u(\theta), u(\theta)) = \frac{B}{2} (\theta + \sin \theta, 1 - \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Notar finalmente que, a partir de (4.2.19), necesariamente debemos tener $u \leq B$, es decir, la altura máxima y_0 que puede tener el punto Q para admitir una curva tautócrona en tiempo T es $y_0 = B = \frac{2gT^2}{\pi^2}$, en cuyo caso $x_0 = \frac{\pi B}{2} = \frac{gT^2}{\pi}$. En la Figura 4.5 podemos ver una representación de la cicloide.

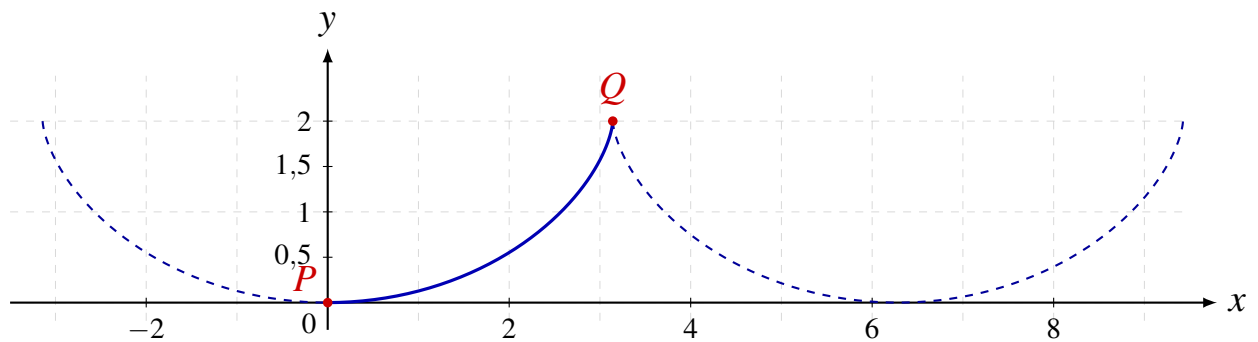


Figura 4.5: Curva tautócrona entre los puntos P y Q sobre la cicloide.

Como podemos ver en la Figura 4.5, aparece destacada la curva tautócrona entre los puntos P y Q , así como la extensión de la cicloide más allá del punto Q .

Resultados auxiliares

A lo largo de este apéndice, enunciaremos los principales resultados que resultan necesarios para el desarrollo y comprensión de los contenidos abordados a lo largo de este trabajo. Dividimos el apéndice en tres partes: **Integración y Teoría de la Medida, Análisis Complejo y Análisis Funcional**.

A.1. Integración y Teoría de la Medida

Comenzaremos este apartado del apéndice recordando los conceptos de σ -álgebra, medida, conjunto medible y función medible, así como los espacios de funciones integrables L^1 y de funciones medibles no negativas L^+ . Para realizar estas definiciones hemos seguido la referencia de Folland [4, Cap 1 y 2]. Notar que pese a que definiremos los conceptos en su forma más general, a lo largo del trabajo solo los aplicaremos al caso particular de la medida de Lebesgue y la σ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en \mathbb{R} o \mathbb{R}^n .

Definición A.1.1 Sea X un conjunto no vacío. Una σ -álgebra sobre X es una colección \mathcal{M} de subconjuntos de X que es cerrada para uniones numerables y complementarios.

Definición A.1.2 Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{M} una σ -álgebra sobre X . Una **medida** sobre (X, \mathcal{M}) es una función $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en \mathcal{M} , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición A.1.3 Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ una σ -álgebra. Llamaremos **espacio medible** al par (X, \mathcal{M}) , y llamaremos **conjuntos medibles** a los conjuntos de \mathcal{M} . Si μ es una medida en (X, \mathcal{M}) , diremos que (X, \mathcal{M}, μ) es un **espacio de medida**.

Una vez hemos fijado los conceptos de espacio medible y medida, podemos definir el concepto de función medible.

Definición A.1.4 Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación y (X, \mathcal{M}) un espacio de medida. Diremos que f es **medible** si para todo abierto $E \subset \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

Análogamente se definen las funciones medibles que toman valores en el plano complejo.

Definición A.1.5 Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es medible si y sólo si sus partes real e imaginaria son medibles.

Demostración. Consultar [4, Cap 2], pág 44. \square

Una vez hemos recordado el concepto de función medible y hemos extendido la noción a funciones que toman valores en el plano complejo, podemos definir los espacios de funciones integrables L^1 y de funciones medibles no negativas L^+ .

Definición A.1.6 Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, definimos el espacio de las funciones medibles no negativas, como:

$$L^+ := \left\{ f : X \rightarrow [0, \infty] \mid f \text{ medible} \right\}.$$

Definición A.1.7 Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, definimos:

$$L^1(\mu) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_X |f| d\mu < \infty \right\},$$

este espacio podrá denotarse también como $L^1(X, \mu)$, o $L^1(X)$, o simplemente L^1 en función del contexto.

Una vez hemos definido los espacios de funciones integrables L^1 y de funciones medibles no negativas L^+ , enunciamos los siguientes resultados, que serán necesarios para el desarrollo de los contenidos abordados en este trabajo.

Teorema A.1.8 (Teorema de Fubini-Tonelli) Sean (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, ν) espacios de medida σ -finitos.

1. **(Tonelli)** Si $f \in L^+(X \times Y)$, entonces las funciones $g(x) = \int_Y f(x, \cdot) d\nu$ y $h(y) = \int_X f(\cdot, y) d\mu$ pertenecen a $L^+(X)$ y $L^+(Y)$, respectivamente, y

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y). \quad (\text{A.1.1})$$

2. **(Fubini)** Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f_x \in L^1(\nu)$ para c.t.p. $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para c.t.p. $y \in Y$, las funciones definidas c.t.p. $g(x) = \int f_x d\nu$ y $h(y) = \int f^y d\mu$ pertenecen a $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$, respectivamente, y se cumple (A.1.1).

Demostración. Podemos encontrar la demostración en [4, Cap. 2], Teorema 2.37. \square

Teorema A.1.9 (Teorema de la Convergencia Dominada) Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones en el espacio $L^1(X, \mu)$ que cumplen:

- a) $f_n \rightarrow f$ ctp.
- b) Existe una función $g \in L^1$ no negativa tal que $|f_n| \leq g$ ctp para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in L^1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$.

Demostración. Podemos encontrar la demostración de este resultado en [4, Cap. 2], Teorema 2.24. \square

El Teorema Fundamental del Cálculo es bien conocido cuando f es integrable Riemann en $[a, b]$; ver [8, Cap 14, Teorema 1]. Para dar mayor generalidad al trabajo hemos preferido considerar funciones f integrables Lebesgue, por lo que enunciamos a continuación la versión correspondiente de dicho teorema, que es la que se ha utilizado durante el trabajo.

Teorema A.1.10 (Teorema Fundamental del Cálculo para la Integral de Lebesgue)

Sea $f \in L^1[a, b]$ y

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces F es derivable en ctp $x \in (a, b)$ y se cumple $F'(x) = f(x)$.

Demostración. Consultar [4, Cap. 3], Corolario 3.33. \square

Con la notación anterior, tenemos también la siguiente fórmula de integración por partes.

Teorema A.1.11 (Fórmula de integración por partes para la Integral de Lebesgue)

Sean $f, g \in L^1[a, b]$ y sean

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad y \quad G(x) := \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces se cumple

$$\int_a^b F(t)G'(t) dt = [F(t)G(t)]_a^b - \int_a^b F'(t)G(t) dt.$$

Demostración. Ver [4, Cap. 3], Teorema 3.36. \square

A.2. Análisis Complejo

Recordamos algunas nociones y resultados del curso de Variable Compleja, extraídas de los apuntes [5] o de los libros de texto usuales. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición A.2.12 Sea $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ a la **clase de funciones holomorfas** en Ω .

Definición A.2.13 Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$:

- Si γ es continua, diremos que γ es una **curva**.
- Si además $\gamma(a) = \gamma(b)$, diremos que γ es una **curva cerrada**.
- Si γ es inyectiva, diremos que γ es una **curva simple**; si $\gamma|_{[a, b]}$ es inyectiva y además $\gamma(a) = \gamma(b)$, diremos que γ es una **curva cerrada simple**.

Definimos el rango de una curva como $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

Definición A.2.14 Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva, diremos que:

- γ es **regular** si $\exists \gamma'(t)$ para todo $t \in [a, b]$, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $\gamma' \in \mathcal{C}([a, b])$.
- γ es **regular a trozos** si $\exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es regular para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definiremos un **arco** como una curva regular a trozos.

Observación A.2.15 En la definición de curva regular, cuando hablamos de derivabilidad en los extremos, nos referimos a los límites laterales:

$$\gamma'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \quad \text{y} \quad \gamma'(b) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h}.$$

Lema A.2.16 (Derivación de Integral Paramétrica) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, γ un arco y $f : \Omega \times \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Sea

$$F(z) := \int_{\gamma} f(z, \xi) d\xi, \quad z \in \Omega.$$

Supongamos que:

1. $\forall \xi_0 \in \gamma^*$, la función $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto f(z, \xi_0)$ es holomorfa.
2. $\frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi) \in C(\Omega \times \gamma^*)$.

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \left[\int_{\gamma} f(z, \xi) d\xi \right] = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi) d\xi, \quad \forall z \in \Omega.$$

Además fijaremos la siguiente notación:

Definición A.2.17 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$, denotaremos por $D_R(z_0)$ al disco abierto de radio R centrado en z_0 , es decir, $D_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. A su vez, denotaremos por $D'_R(z_0)$ al disco perforado $D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Teorema A.2.18 (Fórmula de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

1. f es infinitamente diferenciable en Ω .
2. Si $\Delta = \overline{D_R(z_0)} \subseteq \Omega$, entonces:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

para todo z en el interior de Δ .

Demostración. Podemos encontrar la demostración en [9, Cap. 4], Corolario 4.2. □

Para probar la holomorfía de la transformada de Laplace, necesitaremos el siguiente resultado, el cual constituye una versión más general del Lema de Derivación de Integrales Paramétricas, A.2.16. Este lema no exige como hipótesis la continuidad de las derivadas parciales de la función f , ya que esta propiedad se deduce del Lema A.2.16 y de la Fórmula de Cauchy para Derivadas, ver Teorema A.2.18.

Lema A.2.19 Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco \mathcal{C}^1 a trozos, y $f: \Omega \times \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Si $z \rightarrow f(z, \omega)$ es holomorfa en A para todo $\omega \in \gamma^*$, entonces:

1. $F(z) = \int_{\gamma} f(z, \omega) d\omega$ es holomorfa en A .
2. $F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \omega) d\omega$, $z \in A$.

Demostración.

- (1) Sea $z_0 \in A$, como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $\overline{D_{2r}(z_0)} \subset A$. Definimos entonces los discos:

$$\Delta_1 := \overline{D_r(z_0)}, \quad \Delta_2 := \overline{D_{2r}(z_0)}.$$

En la Figura A.1 podemos ver una representación de los discos dentro del abierto A .

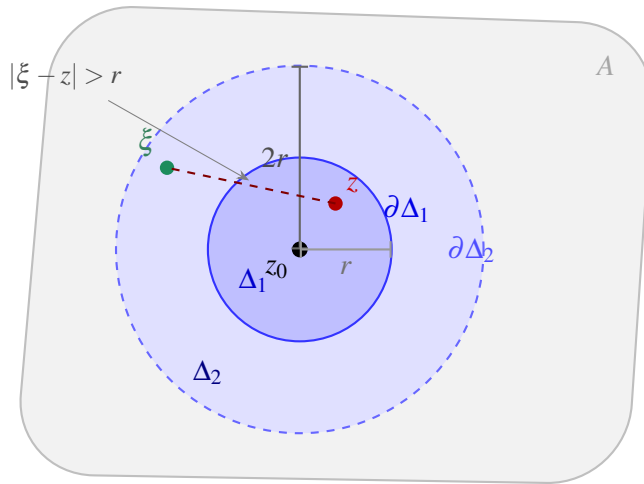


Figura A.1: Discos $\Delta_1 = \overline{D_r(z_0)} \subset \Delta_2 = \overline{D_{2r}(z_0)} \subset A$.

Sea $\omega \in \gamma^*$, como $f(\cdot, \omega) \in \mathcal{H}(A)$, por la Fórmula de Cauchy (Teorema A.2.18), aplicada en el disco Δ_2 , se cumple:

$$f(z, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{f(\xi, \omega)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \in \overset{\circ}{\Delta}_1 \tag{A.2.2}$$

Integramos entonces ambos miembros de (A.2.2) respecto de ω a lo largo de γ :

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z, \omega) d\omega = \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{f(\xi, \omega)}{\xi - z} d\xi d\omega \tag{A.2.3}$$

Dado $z \in \overset{\circ}{\Delta}_1$ y $\xi \in \partial\Delta_2$, tenemos:

$$|\xi - z| = |(\xi - z_0) - (z - z_0)| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| > 2r - r = r > 0,$$

luego el integrando en (A.2.3) es continuo, por ser cociente de funciones continuas con denominador no nulo, y por ende está acotado en el compacto $\partial\Delta_2 \times \gamma^*$, luego:

$$\int_{\partial\Delta_2} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi, \omega)|}{|\xi - z|} |d\omega| |d\xi| < \infty.$$

Entonces, por el Teorema de Fubini, A.1.8, podemos intercambiar el orden de integración:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{1}{\xi - z} \underbrace{\int_{\gamma} f(\xi, \omega) d\omega}_{=F(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \forall z \in \mathring{\Delta}_1 \quad (\text{A.2.4})$$

Finalmente, como el integrando de (A.2.4) es holomorfo en $\mathring{\Delta}_1$ para todo $\xi \in \gamma^*$ y $\frac{\partial}{\partial z} \frac{F(\xi)}{\xi - z} \in \mathcal{C}(\Delta_1 \times \partial\Delta_2)$, por el Lema DIP A.2.16, aplicado a (A.2.4), se tiene que $F \in \mathcal{H}(A)$.

(2) Como consecuencia del Lema A.2.16 aplicado a (A.2.4), la derivada de F en $\mathring{\Delta}_1$ es:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{1}{(\xi - z)^2} \int_{\gamma} f(\xi, \omega) d\omega d\xi. \quad (\text{A.2.5})$$

Procediendo como en la parte 1, deducimos:

$$|\xi - z|^2 = |\xi - z_0 - (z_0 - z)|^2 > (2r - r)^2 = r^2 > 0,$$

luego el integrando de (A.2.5) es continuo y acotado en $\partial\Delta_2 \times \gamma^*$, por lo que podemos aplicar de nuevo el Teorema de Fubini, A.1.8, para intercambiar el orden de integración:

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{f(\xi, \omega)}{(\xi - z)^2} d\xi d\omega \quad (\text{A.2.6})$$

Finalmente, como $f(\cdot, \omega) \in \mathcal{H}(A)$, por la Fórmula de Cauchy (Teorema A.2.18), se verifica:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_2} \frac{f(\xi, \omega)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{\partial f}{\partial z}(z, \omega).$$

y sustituyendo en (A.2.6) concluimos:

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, \omega) d\omega$$

□

Teorema A.2.20 (Teorema de Weierstrass) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, que converge uniformemente sobre compactos hacia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en Ω y la sucesión de derivadas f'_n converge uniformemente sobre compactos a la derivada, f' .

Demostración. Consultar Teoremas 5.2 y 5.3 de [9, Cap. 5].

□

Para referirnos al conjunto de puntos donde una función se anula, utilizaremos la siguiente notación:

Definición A.2.21 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Denotamos el conjunto de ceros de f como $Z_f(\Omega) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

Proposición A.2.22 (Principio de Identidad o de Prolongación Analítica) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f \equiv 0$.

2. Existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(m)}(z_0) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.
3. $f \equiv 0$ en algún subconjunto abierto de Ω .
4. El conjunto de ceros $Z_f(\Omega)$ tiene al menos un punto de acumulación en Ω .

Demostración. Las tres primeras implicaciones se pueden consultar en [10, Cap. 4], Teorema 4.1.1.

La implicación 4) \implies 1) es el contrarrecíproco del Corolario 4.1.2 de [10, Cap. 4].

Finalmente, la implicación 1) \implies 4) es clara, pues si $f \equiv 0$, entonces $Z_f(\Omega) = \Omega$, y por ser Ω abierto, cada punto de Ω es un punto de acumulación de $Z_f(\Omega)$. \square

Corolario A.2.23 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que el conjunto $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ tiene al menos un punto de acumulación en Ω . Entonces

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Demostración. Aplicar la Proposición A.2.22 a la función $f - g$. \square

Definimos ahora los conceptos de argumento de un número complejo y determinación continua del argumento, los cuales nos permitirán definir posteriormente el índice de una curva alrededor de un punto.

Definición A.2.24 Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, llamamos:

1. **Argumento principal** de z al único número real $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|e^{i\theta}$. Lo denotaremos por $Arg(z)$.
2. **Argumento** de z al conjunto de todos los posibles argumentos de z . Lo denotaremos por $arg(z)$.

$$arg(z) := \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\}. \quad (\text{A.2.7})$$

Observación A.2.25 Notar que $arg(z) = \{\theta + 2\pi k : \theta \in Arg(z), k \in \mathbb{Z}\}$.

Definición A.2.26 Una determinación continua del argumento en $S \subseteq \mathbb{C}$ es una aplicación $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $z = |z|e^{i\theta(z)}$ para todo $z \in S$.

A continuación, introducimos el concepto de índice de una curva alrededor de un punto, así como algunas propiedades que nos permitirán enunciar el Teorema Homológico de Cauchy y desarrollar los resultados del Capítulo 3. Geométricamente, el índice de una curva alrededor de un punto se define como sigue:

Definición A.2.27 1. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una curva cerrada, se define el **índice** de γ alrededor del origen como:

$$I(\gamma, 0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}, \quad \text{donde } \theta \in \mathcal{C}([a, b]) \text{ es como en la Definición A.2.26.} \quad (\text{A.2.8})$$

2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \notin \gamma^*$, se define el **índice** de γ alrededor de z_0 como:

$$I(\gamma, z_0) := I(\gamma - z_0, 0) \quad (\text{A.2.9})$$

Definición A.2.28 Llamamos ciclo cerrado a un conjunto arcos cerrados, $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$.

Definición A.2.29 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sean Γ, Δ ciclos. Diremos que son Ω – homólogos y se denota $\Gamma \sim \Delta \text{ resp}(\Omega)$ si $I(\Gamma, z) = I(\Delta, z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Además, diremos que Γ es Ω -homólogo a cero y se denota $\Gamma \sim 0 \text{ resp}(\Omega)$ si $I(\Gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

A continuación, enunciamos el Teorema Homológico de Cauchy. Este teorema generaliza el Teorema A.2.18 a ciclos generales que son homólogos a cero y se aplica a puntos que no están en el rango de la curva (antes solo podíamos aplicar la fórmula a puntos interiores al disco).

Teorema A.2.30 (Teorema Homológico de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea Γ un ciclo regular a trozos y homólogo a cero respecto de Ω . Entonces, para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ se cumple:

$$I(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (\text{A.2.10})$$

Demostración. Podemos encontrar la demostración de este resultado en [10, Cap. 5], Teorema 5.2.3. \square

Para finalizar esta sección del Apéndice, recordaremos las definiciones de singularidad aislada de una función holomorfa y de residuo. También enunciaremos una caracterización para las singularidades evitables y cerraremos la sección con el Teorema de los Residuos (A.2.35), el cual es una herramienta fundamental para el desarrollo de los resultados del Capítulo 3.

Definición A.2.31 Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto no discreto y sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$. Diremos que f tiene una **singularidad aislada** en $a \in A$ si existe $R > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D'_R(a))$. Distinguiamos tres tipos de singularidades aisladas:

1. a es una singularidad **evitable** si f existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$.
2. a es un **polo** si existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. El conjunto de polos de una función f se denota por \mathcal{P}_f . Además, si $R(z)$ es una función racional, denotaremos el orden del polo a , como $\sigma(a; R)$ y será el único $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m R(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. a es una singularidad **esencial** si no existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de las singularidades evitables:

Proposición A.2.32 Si $a \notin \Omega$ es una singularidad aislada de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, son equivalentes:

- a) a es singularidad evitable de f ;
- b) f está acotada en algún disco $D'_r(a) \subset \Omega$;
- c) f admite una extensión holomorfa al abierto $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$.

Demostración. Véase [10, Cap. 4], Proposición 4.3.2. \square

Definición A.2.33 Sea $a \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función f . Definimos el **residuo** de f en a como:

$$\text{Res}(f, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(a)} f(\xi) d\xi, \quad 0 < r < R. \quad (\text{A.2.11})$$

Proposición A.2.34 Si $a \in \mathcal{P}_f$ es un polo de f de orden N , entonces:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{[(z-a)^N f(z)]^{(N-1)}}{(N-1)!}.$$

Notar que $^{(N-1)}$ denota la derivada de orden $N-1$.

Demostración. Podemos encontrar la demostración en [2, Cap. 7], Teorema 7.18. □

Finalmente se enuncia el Teorema de los Residuos:

Teorema A.2.35 (Teorema de los Residuos de Cauchy) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$, donde A es un conjunto de singularidades aisladas no esenciales de $f \in \Omega$. Si Γ es un ciclo tal que $\Gamma^* \subseteq \Omega \setminus A$ y $\Gamma \sim 0$ (resp Ω), entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi = \sum_{a \in A} I(\Gamma, a) \text{Res}(f, a). \tag{A.2.12}$$

Demostración. Este resultado se puede encontrar en [9, Cap. 2], Corolario 2.3. La demostración es consecuencia del Teorema 2.1 y del Corolario 2.2 de dicha referencia. □

A continuación, presentamos una serie de resultados que nos permiten extender la conocida función Γ al plano complejo. Para desarrollar esta parte seguiremos la referencia de Stein Sakarchi [9, Cap. 6].

Definición A.2.36 Sea $s > 0$. La función Γ se define como:

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{A.2.13}$$

Proposición A.2.37 La función Γ es holomorfa en el semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$ y viene dada por la fórmula (A.2.13).

Demostración. Véase [9, Cap. 6], Proposición 1.1. □

Teorema A.2.38 Para cada $s \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Demostración. Consultar [9, Cap. 6], Lema 1.5 y Teorema 1.4. □

Tomando $s = 1/2$ en el Teorema A.2.38, deducimos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

A.3. Análisis Funcional

Teorema A.3.39 (Teorema de Aproximación de Weierstrass) El conjunto de los polinomios en una variable es denso en el espacio $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$.

Demostración. Podemos encontrar la prueba de este resultado en [1, Cap. 1], Teorema 1.12.30. □

Definición A.3.40 Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones localmente integrables en \mathbb{R} . La convolución de f y g se define como:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

para aquellos $t \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral converge absolutamente.

Ampliación de ejemplos

Dedicaremos este Anexo para ampliar los ejemplos vistos en el Capítulo 1. Los ejemplos aquí expuestos fueron incluidos en un principio en dicho capítulo, no obstante, para podernos adaptar a las restricciones de espacio, seleccionamos aquellos ejemplos que consideramos más relevantes y dejamos el resto para este Anexo.

Ejemplo B.0.1

1. $f(t) = e^{e^t}$.

Sea $z_0 = s > 0$, entonces:

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{e^t} dt \geq \int_0^R e^{-st} e^{e^t} dt \geq e^{-sR} \int_0^R e^{e^t} dt \geq e^{-sR} \int_{\frac{R}{2}}^R e^{e^t} dt \geq e^{-sR} e^{e^{\frac{R}{2}}} (R - \frac{R}{2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} +\infty$$

Luego $\sigma(f) = +\infty$ y $H_{\sigma(f)} = \emptyset$.

2. $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$.

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^1 e^{-zt} dt = \frac{1 - e^{-z}}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Si $z = 0$, entonces:

$$\mathcal{L}f(0) = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Con lo cual $\sigma(f) = -\infty$ y $H_{\sigma(f)} = \mathbb{C}$.

3. $f(t) = e^t \cdot \text{sen}(e^t)$, $t \geq 0$.

Este ejemplo está adaptado de [11, p. 97]. En primer lugar, veremos la convergencia absoluta. Sea $z \in \mathbb{C}$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq \int_0^\infty |e^{-zt} \cdot e^t \cdot \text{sen}(e^t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-(\Re(z)-1)t} dt,$$

que converge si y solo si $\Re(z) - 1 > 0$. Luego hay convergencia absoluta en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1\}$.

Ahora, veamos dónde hay convergencia (no necesariamente absoluta).

Realizamos el cambio de variable $x = e^t$ (con $t = \log x$, $dt = dx/x$):

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-(z-1)t} \cdot \text{sen}(e^t) dt = \int_1^\infty x^{-(z-1)} \cdot \text{sen}(x) \cdot \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^z} dx$$

Integramos por partes usando $\text{sen}(x) = (-\cos x)'$:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^z} dx &= \left[-\frac{\cos x}{x^z} \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} (-\cos x) \cdot \left(\frac{-z}{x^{z+1}} \right) dx \\ &= \cos(1) - z \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{z+1}} dx}_I, \quad \text{si } \Re(z) > 0 \end{aligned}$$

Para la convergencia de I :

$$|I| \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{|x^{z+1}|} dx \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\Re(z)+1}} dx,$$

que converge si $\Re(z) > 0$. Por tanto, I converge para todo $\Re(z) > 0$ y, en consecuencia, $\mathcal{L}f(z)$ converge (aunque no absolutamente) cuando $\Re(z) \in (0, 1]$.

Para el caso $\Re(z) \leq 0$:

Sea $s \in \mathbb{R}$, $s < 0$, con el cambio anterior:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_1^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x^s} dx = \int_1^{\infty} \text{sen}(x) \cdot x^{|s|} dx.$$

Si $\mathcal{L}f(s)$ fuera convergente, por el Criterio de Cauchy, se debería tener:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi/4+2\pi n}^{\pi/2+2\pi n} \text{sen}(x) x^{|s|} dx = 0, \quad (\text{B.0.1})$$

sin embargo, en ese intervalo de integración se tiene $\text{sen}(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego:

$$\int_{\pi/4+2\pi n}^{\pi/2+2\pi n} \text{sen}(x) \cdot x^{|s|} dx \geq \int_{\pi/4+2\pi n}^{\pi/2+2\pi n} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x^{|s|} dx \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2\pi n + \frac{\pi}{4} \right)^{|s|} \cdot \frac{\pi}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

que sería una contradicción.

Con lo cual, $\mathcal{L}f(z)$ diverge para todo z con $\Re(z) < 0$.

Nos queda ver qué sucede en el eje imaginario. Sea $z = is$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si $\mathcal{L}f(is)$ fuese convergente, por el Criterio de Cauchy se debería tener:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} \text{sen}(x) \cdot x^{-is} dx = 0.$$

Sin embargo, integrando por partes y usando que $|x^{-is}| = 1$ para todo $x > 0$, vemos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} \text{sen}(x) \cdot x^{-is} dx \right| &= \left| \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} (-\cos x)' \cdot x^{-is} dx \right| \\ &= \left| [x^{-is} \cos x]_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} + is \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} \cos x \cdot x^{-is-1} dx \right| \\ &\geq 1 - |s| \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} |\cos x \cdot x^{-is-1}| dx \\ &\geq 1 - |s| \int_{2\pi n + \pi/2}^{2\pi n + \pi} x^{-1} dx = 1 - |s| \log \frac{2\pi n + \pi}{2\pi n + \pi/2}, \end{aligned}$$

y tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se contradice (B.0.1).

Finalmente, en el punto $z = 0$ tenemos

$$\mathcal{L}f(0) = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

que es una conocida integral convergente.

En conclusión, $\sigma(f) = 0$ y $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. La transformada converge absolutamente en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 1\}$, converge no absolutamente en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) \leq 1\} \cup \{z = 0\}$, y diverge en el resto. En la Figura B.1 podemos ver el semiplano de convergencia de esta función.

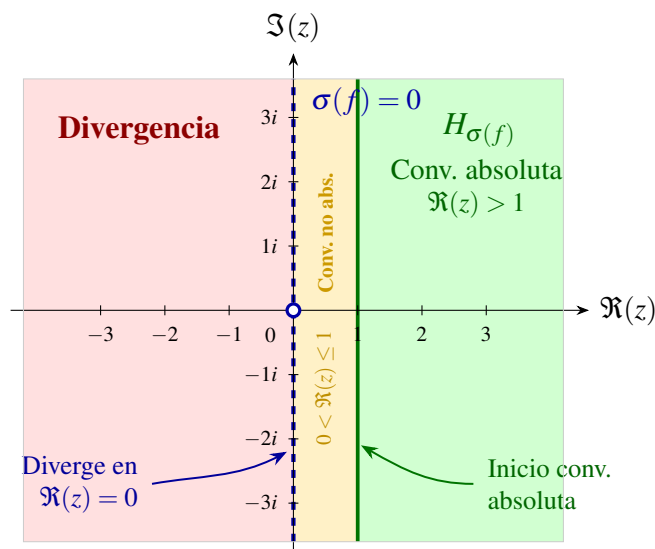


Figura B.1: Región de convergencia de $\mathcal{L}f$ para $f(t) = e^t \operatorname{sen}(e^t)$. La abscisa de convergencia es $\sigma(f) = 0$ y $H_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. La transformada converge absolutamente en $\Re(z) > 1$, no absolutamente en la franja $0 < \Re(z) \leq 1$, y diverge en $\Re(z) \leq 0$.

Bibliografía

- [1] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela y M. Raja. *Análisis Funcional*. 1.^a edición, Electrolibris, 2012.
- [2] V. Eiderman. *An Introduction to Complex Analysis and the Laplace Transform*. CRC Press, 2022.
- [3] G. B. Folland. *Fourier Analysis and its Applications*. Wadsworth & Brooks, 1992.
- [4] G. B. Folland. *Real Analysis*, 2nd Ed. John Wiley & Sons, 1999.
- [5] G. Garrigós. Apuntes de *Funciones de Variable Compleja*. Curso 2023-2024.
- [6] J.M. Mazón Ruiz. *Funciones de Variable Compleja. Teoría y Problemas*. 2021.
- [7] R.K. Nagle, E.B. Saff & A.D. Snider. *Fundamentals of Differential Equations*. 9th ed. Pearson, 2018.
- [8] M. Spivak. *Calculus*, 3rd ed. Cambridge Univ Press, 2006.
- [9] E.M. Stein & R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis, No. 2, 2003.
- [10] G. Vera Botí. *Lecciones de Análisis Complejo*. Disponible en <https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC%282013%29.pdf>. Accedido: 4 de mayo de 2026.
- [11] D. V. Widder. *An introduction to transform theory*. Academic Press, 1971