



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE EQUIDISTRIBUCIÓN DE WEYL

DOMINGO ANTONIO MANZANARES SÁNCHEZ

2025-2026

DIRECCIÓN:

PROF. D. GUSTAVO ADOLFO GARRIGÓS ANIORTE

Declaración de originalidad

Domingo Antonio Manzanares Sánchez, autor del Trabajo de Fin de Grado *El teorema de equidistribución de Weyl*, bajo la tutela del profesor Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 25 de mayo de 2026

Fdo.: Domingo Antonio Manzanares Sánchez

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

A mis padres, a mi hermana, a mi tutor, y a todas las personas que me han acompañado —familiares y amigos— durante la carrera.

Abstract

The purpose of this work is to study the concept of uniformly distributed sequences modulo 1 and to prove several criteria that guarantee that a sequence has this property, including Weyl's theorem. A sequence $(x_n)_{n \geq 1}$ modulo 1 consists of observing only the fractional part of its terms $\langle x_n \rangle$. We will analyze how these values are distributed in the interval $[0, 1)$, and in particular, when they are uniformly distributed over this interval. Over the course of this paper, we will develop effective tools to prove this property.

The paper is divided into four chapters. In the first of them, we will introduce the notion of real numbers modulo 1 and the quotient space $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, known as the one-dimensional torus, which can be identified with the interval $[0, 1)$ with its endpoints connected. Next, we will define the concept of an uniformly distributed sequence modulo 1 and prove some fundamental properties, accompanied by illustrative examples. We conclude this chapter by proving Weyl's uniform distribution theorem, which establishes the uniform distribution of the sequence $(n\alpha)$ for every irrational α . To do so, we make use of the approximation of continuous functions by trigonometric polynomials.

The second chapter focuses on developing the main tools to verify the uniform distribution of a sequence. First, we present the functional characterization, which states that a sequence is uniformly distributed modulo 1 if and only if, for any integrable Riemann function, the mean of the function evaluated over the values of the sequence converges to the integral of that function on \mathbb{T} . The second result is Weyl's criterion. This is one of the most important methods, if not the most important, to verify uniform distribution. It reduces the problem to the asymptotic calculation of sums of complex exponentials. As applications, the uniform distribution of $(n\alpha)$ is demonstrated again, and additional examples are studied, including sequences that are not uniformly distributed, $(\sin n)$.

In the third chapter, bounding techniques for sums of exponentials are explored. We will use Euler's summation formula. This formula allows us to express discrete sums in terms of integrals, which can be estimated with precision. Thus, by bounding them, we can verify uniform distribution using Weyl's criterion. We will show that the sequence $(a \log n)$ is not uniformly distributed modulo 1, while sequences of the form (an^σ) with $0 < \sigma < 1$ are. The chapter concludes with the proof of Fejér's theorem, which guarantees the uniform distribution of a sequence $(g(n))$ assuming that the function g and its derivative g' satisfy certain growth, limit, and monotonicity conditions.

To conclude, we study Van der Corput's difference method. This method is based on Van der Corput's inequality, which relates sums of exponentials to their corresponding sums of differences. From this inequality, we demonstrate that a sequence is uniformly distributed if its sequences of differences are also uniformly distributed. As a primary application, we prove that every sequence defined by a polynomial with at least one non-constant irrational coefficient is uniformly distributed modulo 1. Furthermore, Van der Corput's difference method allows us to extend Fejér's theorem to more general functions, provided that their higher-order derivatives satisfy the appropriate growth conditions.

Resumen

El propósito de este trabajo es estudiar el concepto de sucesión equidistribuida módulo 1 y probar algunos criterios que garantizan que una sucesión tiene esta propiedad, entre ellos el teorema de Weyl. Una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ módulo 1 consiste en observar solamente la parte fraccionaria de sus términos $\langle x_n \rangle$. Analizaremos cómo se distribuyen estos valores en el intervalo $[0, 1)$, y en particular, cuando se distribuyen uniformemente en dicho intervalo. A lo largo de la memoria, desarrollaremos herramientas eficaces para demostrar esta propiedad.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primero de ellos, introduciremos la noción de los números reales módulo 1 y el espacio cociente $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, conocido como el toro unidimensional, y que se identifica con el intervalo $[0, 1)$ con sus extremos conectados. A continuación, definiremos el concepto de sucesión equidistribuida modulo 1 y demostraremos algunas propiedades fundamentales, acompañadas de ejemplos ilustrativos. Cerraremos este capítulo demostrando el teorema de equidistribución de Weyl, que establece la equidistribución de la sucesión $(n\alpha)$ para todo α irracional. Para ello, haremos uso de la aproximación de funciones continuas mediante polinomios trigonométricos.

El segundo capítulo se centra en desarrollar las principales herramientas para verificar la equidistribución de una sucesión. En primer lugar, presentamos la caracterización funcional, según la cual una sucesión es equidistribuida módulo 1 si y solo si, para cualquier función Riemann integrable la media de la función evaluada sobre los valores de la sucesión converge a la integral de dicha función en \mathbb{T} . La segunda es el criterio de Weyl. Este es uno de los métodos más importante, por no decir el más importante, para comprobar la equidistribución. Reduce el problema al cálculo asintótico de sumas de exponenciales complejas. Como aplicaciones se demuestra nuevamente la equidistribución de $(n\alpha)$ y se estudian ejemplos adicionales incluyendo sucesiones que no son uniformemente distribuidas $(\sin n)$.

En el tercer capítulo, se exploran técnicas de acotación para las sumas de exponenciales. Utilizaremos la fórmula de sumación de Euler. Esta nos permite reescribir las sumas discretas en términos de integrales las cuales pueden ser estimadas con precisión. De este modo, al acotarlas, podremos verificar la equidistribución mediante el criterio de Weyl. Demostraremos que la sucesión $(a \log n)$ no es equidistribuida módulo 1, mientras que sucesiones de la forma (an^σ) con $0 < \sigma < 1$, sí lo son. El capítulo termina con la demostración del teorema de Fejér, que garantiza la equidistribución de una sucesión $(g(n))$ siempre que la función g y su derivada g' cumplan ciertas condiciones de crecimiento, límite y monotonía.

Para finalizar, estudiamos el método de las diferencias de Van der Corput. Este método se basa en la desigualdad de Van der Corput, que relaciona las sumas de exponenciales con las correspondientes sumas de sus diferencias. A partir de esta desigualdad, demostramos que una sucesión es equidistribuida si también lo son sus sucesiones de diferencias. Como aplicación principal, probamos que toda sucesión definida por un polinomio con al menos un coeficiente irracional no constante es equidistribuida modulo 1. Además, el método de las diferencias de Van der Corput permite extender el teorema de Fejér a funciones más generales, siempre que sus derivadas de orden superior cumplan las condiciones de crecimiento adecuadas.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
1. Equidistribución módulo 1	1
1.1. Números reales módulo 1	1
1.2. Equidistribución de sucesiones	2
1.3. Sucesión $n\alpha$	7
2. Caracterizaciones de la equidistribución	11
2.1. Caracterización funcional	11
2.2. Criterio de Weyl	15
3. Método de Euler	17
3.1. Fórmula de Euler y teorema de Fejér	17
4. Método de Van der Corput	25
4.1. Desigualdad de Van der Corput	25
4.2. Teorema de las diferencias de Van der Corput	27
4.3. Aplicaciones del teorema de las diferencias	29
Bibliografía	36
A. Demostraciones técnicas	37
B. Resultados de análisis	43

Índice de figuras

1.1. Gráfico de las funciones $\mathbf{1}_{(a+\varepsilon, b-\varepsilon)}$, f_ε^- , $\mathbf{1}_{(a, b)}$, f_ε^+ y $\mathbf{1}_{(a-\varepsilon, b+\varepsilon)}$ para el caso $(a, b) = (0.3, 0.7)$, $\varepsilon = 0.1$	10
--	----

Equidistribución módulo 1

Durante años, el estudio de las sucesiones ha sido fundamental en la teoría de números y en el análisis. Una de las sucesiones más relevantes es la sucesión formada por las partes fraccionarias de los múltiplos de un número real α ,

$$\langle \alpha \rangle, \langle 2\alpha \rangle, \langle 3\alpha \rangle, \dots, \langle n\alpha \rangle, \dots$$

donde $\langle x \rangle$ es la parte fraccionaria de x .

El comportamiento de esta sucesión depende de α . Si es racional, la sucesión es periódica y toma un número finito de valores. Sin embargo, cuando α es irracional, la sucesión deja de ser periódica y no se repite. En este caso, surge la pregunta de cómo se distribuyen los valores.

En el siglo XIX, Kronecker demostró que si α es irracional, entonces la sucesión es densa en el intervalo $[0, 1)$. Más tarde, entre 1909 y 1910, Bohl, Sierpiński y Weyl demostraron de manera independiente que esta sucesión no solo es densa, sino que también es equidistribuida. Este último, Weyl, desarrolló una teoría general para el estudio de la distribución de sucesiones en $[0, 1)$.

Este capítulo se basa principalmente en el libro de Stein y Shakarchi [6, Capítulo 4, Sección 2]. Exploraremos los conceptos básicos para estudiar este tipo de problemas y los usaremos para demostrar el resultado Weyl, la equidistribución de la sucesión $\langle n\alpha \rangle$ cuando α es un número irracional.

1.1 — Números reales módulo 1

Definición 1.1 *Se define la parte entera de un número $x \in \mathbb{R}$ como*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Definición 1.2 *Se define la parte fraccionaria de un número $x \in \mathbb{R}$ como*

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor.$$

Por definición, se tiene que $\langle x \rangle \in [0, 1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora, en \mathbb{R} , consideramos la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Es decir, dos números son congruentes módulo \mathbb{Z} o módulo 1 si difieren por un número entero. Lo indicamos con

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{o} \quad x \equiv y \pmod{1}.$$

Cada clase de equivalencia tiene un representante único en el intervalo $[0, 1)$ que es justamente la parte fraccionaria $\langle x \rangle$. Podemos pensar en el conjunto cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} como el intervalo $[0, 1)$ al identificar sus extremos 0 y 1. Este espacio se denota por \mathbb{T} , el toro unidimensional o la circunferencia unitaria.

A lo largo del trabajo, utilizaremos \mathbb{T} para referirnos al intervalo $[0, 1)$ con la identificación de sus extremos.

Observación 1.3 *Las funciones en \mathbb{T} son funciones 1-periódicas en \mathbb{R} . Es decir, si $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces podemos extender $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante*

$$f(x + 1) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

y viceversa. Debido a esta periodicidad, tenemos que $f(x) = f(\langle x \rangle)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que podemos considerar a f como una función definida en $\mathbb{T} = [0, 1)$.

1.2 — Equidistribución de sucesiones

Definición 1.4 *Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Decimos que (x_n) es equidistribuida módulo 1 si para cada intervalo $(a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$ se cumple que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} = b - a \quad (1.1)$$

donde

$$A_N((a, b), x) = \text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle \in (a, b)\}.$$

Observación 1.5 *Si consideramos la función característica $\mathbf{1}_{(a,b)}$ en \mathbb{T} , entonces la condición de equidistribución se puede reescribir como*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(a,b)}(x_n) = \int_0^1 \mathbf{1}_{(a,b)}(x) dx = b - a.$$

Podemos pensar que, cuando una sucesión es equidistribuida módulo 1, sus términos se distribuyen de manera equitativa a lo largo de \mathbb{T} . En particular, la proporción de términos que pertenecen a un subintervalo es igual a la longitud de dicho intervalo.

La siguiente proposición permite utilizar cualquier tipo de intervalo para verificar la equidistribución de una sucesión.

Proposición 1.6 *Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (x_n) es equidistribuida módulo 1.
2. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo (a, b) con $0 \leq a < b \leq 1$.
3. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$.
4. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $[0, b)$ con $0 \leq b \leq 1$.
5. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $(a, 1)$ con $0 \leq a \leq 1$.
6. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo (a, b) con $a, b \in D$, donde $D \subseteq \mathbb{T}$ es un conjunto denso.

Demostración. La demostración es técnica y se incluye en el Apéndice A.1. □

Proposición 1.7 *Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión equidistribuida módulo 1. Si eliminamos un número finito de términos, la sucesión resultante sigue siendo equidistribuida módulo 1.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que eliminamos los primeros M términos de la sucesión y sea $y = (y_n)_{n \geq 1}$, definimos $y_n = x_{n+M}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $(a, b) \subset \mathbb{T}$,

$$A_N((a, b), y) = \text{Card} \{M + 1 \leq n \leq N + M : \langle x_n \rangle \in (a, b)\},$$

por lo que,

$$A_N((a, b), y) = A_{N+M}((a, b), x) - A_M((a, b), x).$$

Como $0 \leq A_M((a, b), x) \leq M$ y la sucesión (x_n) es equidistribuida,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), y)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N + M}{N} \frac{A_{N+M}((a, b), x)}{N + M} - \frac{A_M((a, b), x)}{N} \right) = b - a.$$

Por lo tanto, la sucesión (y_n) es equidistribuida módulo 1. □

Proposición 1.8 *Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión equidistribuida módulo 1 y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $y = (y_n)_{n \geq 1}$ dada por $y_n = x_n + \alpha$ también es equidistribuida módulo 1.*

Demostración. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$, definimos $J = I - \alpha \pmod{1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\langle y_n \rangle \in I \iff \langle x_n + \alpha \rangle \in I \iff \langle x_n \rangle \in J,$$

luego

$$A_N(I, y) = A_N(J, x).$$

Como (x_n) es equidistribuida módulo 1 y la medida es invariante por traslaciones, se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N(I, y)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N(J, x)}{N} = |J| = |I|,$$

demostrando que (y_n) es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 1.9 Sea $r = (r_n)_{n \geq 1}$ una sucesión cualquiera. Definimos la sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ por

$$x_n = \begin{cases} r_{n/2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces (x_n) no es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Consideramos el intervalo $[0, b)$ con $b < 1/2$. Si la sucesión fuese equidistribuida módulo 1, debería cumplirse que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N([0, b), x)}{N} = b.$$

Sin embargo, para $N = 2M$,

$$A_{2M}([0, b), x) = M + R \quad \text{donde } R = A_M([0, b), r).$$

Los índices impares de la sucesión (x_n) son iguales a 0 y contribuyen con M términos.

Por consiguiente,

$$\frac{A_{2M}([0, b), x)}{2M} = \frac{M + R}{2M} \geq \frac{M}{2M} = \frac{1}{2}.$$

Debido a que $b < 1/2$, el límite anterior no puede ser igual a b y por tanto (x_n) no es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 1.10 La sucesión $x = (x_n)_{n \geq 1}$ dada por

$$0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, \dots$$

es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos $A_k = \{\frac{i}{k} : i = 0, 1, 2, \dots, k-1\}$. La sucesión se puede escribir como la concatenación de estos conjuntos,

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$$

Sea (a, b) con $a, b \notin \mathbb{Q}$, sea k fijo, estudiamos cuántos elementos de A_k pertenecen al intervalo,

$$P_k = \text{Card} \left\{ \frac{i}{k} \in A_k : \frac{i}{k} \in (a, b) \right\} = \text{Card} \left\{ \frac{i}{k} \in A_k : i \in (ka, kb) \right\}.$$

Contando el número de enteros en el intervalo (ka, kb) , obtenemos que

$$P_k = \lfloor kb \rfloor - \lfloor ka + 1 \rfloor + 1 = \lfloor kb \rfloor - \lfloor ka \rfloor.$$

Tomando la sucesión hasta el conjunto A_M , inclusive. El número de total de términos y la cantidad de términos que están en el intervalo (a, b) es

$$T_M = \sum_{k=1}^M k = \frac{M(M+1)}{2}, \quad S_M = \sum_{k=1}^M P_k = \sum_{k=1}^M (\lfloor kb \rfloor - \lfloor ka \rfloor).$$

Veamos que, contando por conjuntos, se cumple la definición de equidistribución, es decir,

$$\left| \frac{S_M}{T_M} - (b - a) \right| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } M \rightarrow \infty.$$

Para ello, tratamos de acotarlo usando que $\langle x \rangle \in [0, 1)$ para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_M}{T_M} - (b - a) \right| &= \left| \frac{S_M - T_M(b - a)}{T_M} \right| = \frac{1}{T_M} \left| \sum_{k=1}^M (\lfloor kb \rfloor - \lfloor ka \rfloor) - \sum_{k=1}^M k(b - a) \right| \\ &= \frac{1}{T_M} \left| \sum_{k=1}^M (\lfloor kb \rfloor - \lfloor ka \rfloor - kb + ka) \right| \\ &\leq \frac{1}{T_M} \sum_{k=1}^M |\langle ka \rangle - \langle kb \rangle| \leq \frac{1}{T_M} \sum_{k=1}^M 1 = \frac{M}{T_M}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left| \frac{S_M}{T_M} - (b - a) \right| \leq \frac{M}{T_M} = \frac{2}{M+1} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } M \rightarrow \infty.$$

Esto demuestra que, al contar por conjuntos, la sucesión es equidistribuida para $N = T_M$. Falta comprobar que también lo es para cualquier N .

Sea N tal que $T_M \leq N \leq T_{M+1}$,

$$A_N((a, b), x) = S_M + R \quad \text{con } 0 \leq R \leq P_{M+1}.$$

Tenemos las siguientes desigualdades,

$$S_M \leq S_M + R \leq S_{M+1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{T_{M+1}} \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{T_M}.$$

Al multiplicarlas,

$$\frac{S_M}{T_{M+1}} \leq \frac{S_M + R}{N} \leq \frac{S_{M+1}}{T_M}.$$

Al tomar límites cuando $M \rightarrow \infty$, y por lo tanto $N \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{T_M}{T_{M+1}} \frac{S_M}{T_M} &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_M + R}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_M + R}{N} \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{T_{M+1}}{T_M} \frac{S_{M+1}}{T_{M+1}} \\ b - a &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_M + R}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_M + R}{N} \leq b - a. \end{aligned}$$

Por lo que, el límite existe y es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_M + R}{N} = b - a.$$

□

Ejemplo 1.11 Sean $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones equidistribuidas módulo 1. Entonces la sucesión $z = (z_n)_{n \geq 1}$ dada por

$$z_n = \begin{cases} x_k & \text{si } n = 2k - 1, \\ y_k & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

también es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Sea un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$. Consideremos $2N$ términos de la sucesión (z_n) ,

$$A_{2N}((a, b), z) = A_N((a, b), x) + A_N((a, b), y).$$

Teniendo en cuenta que (x_n) e (y_n) son equidistribuidas módulo 1, al dividir por $2N$ y pasar al límite, obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_{2N}((a, b), z)}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{A_N((a, b), x)}{N} + \frac{A_N((a, b), y)}{N} \right) = b - a.$$

Por otra parte, si tomamos $2N + 1$ términos de la sucesión (z_n) ,

$$A_{2N+1}((a, b), z) = A_{2N}((a, b), z) + \mathbf{1}_{(a,b)}(x_{N+1}).$$

Como $0 \leq \mathbf{1}_{(a,b)}(x_{N+1}) \leq 1$, al dividir por $2N + 1$ y tomando límites,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_{2N+1}((a,b), z)}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2N}{2N+1} \frac{A_{2N}((a,b), z)}{2N} + \frac{\mathbf{1}_{(a,b)}(x_{N+1})}{2N+1} \right) = b - a.$$

Por lo tanto, (z_n) es equidistribuida módulo 1. □

1.3 — Sucesión $n\alpha$

Como cierre a este capítulo, estudiaremos la sucesión $(n\alpha)_{n \geq 1}$. Analizaremos su comportamiento módulo 1 en función del α , distinguiendo si es racional o irracional. En particular, para el caso irracional demostraremos que es equidistribuida módulo 1.

Proposición 1.12 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces la sucesión $(\langle n\alpha \rangle)_{n \geq 1}$ es periódica y tiene un número finito de términos distintos.*
2. *Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces la sucesión $(\langle n\alpha \rangle)_{n \geq 1}$ tiene infinitos términos distintos.*

Demostración. 1. Sea $\alpha = p/q$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Entonces,

$$\langle p/q \rangle, \langle 2p/q \rangle, \dots, \langle (q-1)p/q \rangle, \langle qp/q \rangle = \langle p \rangle = 0.$$

A partir de aquí, la sucesión se repite,

$$\langle (q+1)p/q \rangle = \langle 1 + p/q \rangle = \langle p/q \rangle.$$

2. Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$ y supongamos que $\langle n\alpha \rangle = \langle m\alpha \rangle$ para ciertos $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle n\alpha \rangle = \langle m\alpha \rangle &\iff n\alpha - [n\alpha] = m\alpha - [m\alpha] \\ &\iff (n-m)\alpha = [n\alpha] - [m\alpha] \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

lo que implicaría que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Contradicción $\#$. □

Consideramos ahora el caso en el que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En esta situación, la sucesión $(n\alpha)_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1. Para demostrar este resultado, haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.13 *Sea $f \in C(\mathbb{T})$ y sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces,*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) \longrightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Demostración. La prueba la vamos a dividir en 4 pasos.

Paso 1. Sea $f \equiv 1$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Paso 2. Sea $f(x) = e^{2\pi i k x}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Si $k = 0$ estamos en el paso 1, por lo tanto, sea $k \neq 0$ y sea $r = e^{2\pi i k \alpha}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r^n = \frac{1}{N} \frac{r - r^{N+1}}{1 - r},$$

como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces $k\alpha \notin \mathbb{Z}$ y $r \neq 1$, luego $|1 - r| > 0$. Obteniendo la cota,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r^n \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{r - r^{N+1}}{1 - r} \right| \leq \frac{2}{N|1 - r|}.$$

De este modo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} = 0.$$

Por otro lado, calculando la integral,

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = \left[\frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} \right]_0^1 = \frac{e^{2\pi i k} - 1}{2\pi i k} = 0,$$

obtenemos que se cumple el lema para las exponenciales complejas.

Paso 3. Sea $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ un polinomio trigonométrico, $P = \sum_{k=-M}^M c_k e^{2\pi i k x}$ con $c_k \in \mathbb{C}$ y $M \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple el lema para P ,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=-M}^M c_k e^{2\pi i k n \alpha} = \sum_{k=-M}^M c_k \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} \right).$$

Por el paso 2, cada término de la suma converge a $\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx$, luego

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M c_k \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} \right) &= \sum_{k=-M}^M c_k \cdot \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} \right) \\ &= \sum_{k=-M}^M c_k \cdot \int_0^1 e^{2\pi i k x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=-M}^M c_k e^{2\pi i k x} dx = \int_0^1 P(x) dx. \end{aligned}$$

Se cumple el lema para polinomios trigonométricos.

Paso 4. Sea $f \in C(\mathbb{T})$, sea $\varepsilon > 0$, por el Teorema de Weierstrass, B.2, existe un polinomio trigonométrico P tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

Por el paso 3, sabemos que para ese $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$ se cumple que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\alpha) - \int_0^1 P(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, para $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\alpha) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\alpha) - P(n\alpha)| \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\alpha) - \int_0^1 P(x) dx \right| \\ &\quad + \int_0^1 |f(x) - P(x)| dx \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, queda demostrado el lema. \square

Teorema 1.14 *Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$ entonces la sucesión $(n\alpha)_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1.*

Demostración. La demostración se basa en la Observación 1.5.

Sea $(a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$, sea $\varepsilon > 0$ que cumpla que $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a, 1 - b, b - a\}$ y sean $f_\varepsilon^-, f_\varepsilon^+ \in C(\mathbb{T})$ funciones tales que

$$0 \leq \mathbf{1}_{(a+\varepsilon, b-\varepsilon)} \leq f_\varepsilon^- \leq \mathbf{1}_{(a, b)} \leq f_\varepsilon^+ \leq \mathbf{1}_{(a-\varepsilon, b+\varepsilon)} \leq 1.$$

Sea $S_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(a, b)}(n\alpha)$, entonces,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\alpha) \leq \frac{S_N}{N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\alpha).$$

Tomando límites cuando $N \rightarrow \infty$, por el lema anterior, se tiene que

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon.$$

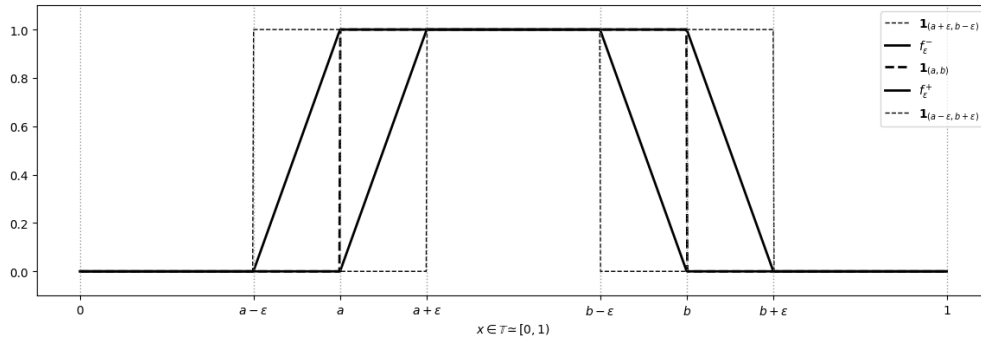


Figura 1.1. Gráfico de las funciones $\mathbf{1}_{(a+\epsilon, b-\epsilon)}$, f_ϵ^- , $\mathbf{1}_{(a,b)}$, f_ϵ^+ y $\mathbf{1}_{(a-\epsilon, b+\epsilon)}$ para el caso $(a, b) = (0.3, 0.7)$, $\epsilon = 0.1$.

Finalmente, tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene,

$$b - a \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq b - a.$$

Por lo tanto, el límite existe y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(a,b)}(n\alpha) = b - a.$$

□

Caracterizaciones de la equidistribución

En el capítulo anterior, definimos el concepto de equidistribución de sucesiones módulo 1 y estudiamos el ejemplo de la sucesión $(n\alpha)_{n \geq 1}$. A continuación, presentamos dos herramientas fundamentales para el estudio de la equidistribución de sucesiones, siguiendo el libro de Kuipers y Niederreiter [4, Capítulos 1–2]

La primera es la caracterización funcional. Esta establece que una sucesión es equidistribuida módulo 1 si y solo si, para toda función Riemann integrable, la media de la función evaluada en los términos de la sucesión converge a la integral de la función sobre \mathbb{T} .

La segunda caracterización es el criterio de Weyl, que proporciona una condición sobre sumas de exponenciales para determinar la equidistribución de una sucesión.

2.1 — Caracterización funcional

Teorema 2.1 *Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales, entonces son equivalentes:*

1. (x_n) es equidistribuida módulo 1.
2. Para toda función $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, Riemann integrable, se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Demostración. $1 \implies 2$ Sea (x_n) una sucesión equidistribuida módulo 1.

Consideremos la partición $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ de \mathbb{T} . Sea f una función escalonada tal que $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x)$ con $c_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Entonces,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) = \sum_{i=1}^k c_i \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) \right),$$

como (x_n) es equidistribuida, por la Observación 1.5,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k c_i \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) \right) &= \sum_{i=1}^k c_i \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_0^1 \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

Ahora, sea $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Como f es integrable Riemann, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P = \{0 = a_0 < \dots < a_k = 1\}$ tal que, si definimos

$$L(x) = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x), \quad U(x) = \sum_{i=1}^k M_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x),$$

donde $m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)$ y $M_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)$ se tiene

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \quad \int_0^1 U(x) dx - \int_0^1 L(x) dx \leq \varepsilon.$$

Sea $S_N = \sum_{n=1}^N f(x_n)$. Tenemos

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L(x_n) \leq \frac{S_N}{N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U(x_n),$$

como L y U son funciones escalonadas, al tomar límites,

$$\int_0^1 f(x) dx - \varepsilon \leq \int_0^1 L(x) dx \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \int_0^1 U(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

2 \implies 1 Sea un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$ y sea $f(x) = \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$, dado que f es

Riemann integrable,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(a,b)}(x_n) = \int_0^1 \mathbf{1}_{(a,b)}(x) dx = b - a,$$

lo que demuestra que (x_n) es equidistribuida módulo 1. \square

Corolario 2.2 Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales, entonces son equivalentes:

1. (x_n) es equidistribuida módulo 1.
2. Para toda función $f \in C(\mathbb{T})$, se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Demostración. $1 \implies 2$ Es inmediato por el Teorema 2.1 ya que $C(\mathbb{T}) \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

$2 \implies 1$ La demostración es análoga a la del Teorema 1.14. \square

Ejemplo 2.3 Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales en \mathbb{T} . Para un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$, definimos la suma de los términos de la sucesión que caen dentro del intervalo $[a, b]$ como $S([a, b], N) = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{1}_{[a,b]}(x_n)$. Entonces, la sucesión (x_n) es equidistribuida módulo 1 si y solo si para cada intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S([a, b], N)}{N} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

Demostración. \implies Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$ con $0 \leq a < b \leq 1$ y sea $f(x) = x \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$.

Como (x_n) es equidistribuida y $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S([a, b], N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

\Leftarrow Sea $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i x \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]}(x)$ una función lineal a trozos, cada segmento es de la forma $y = kx$, y la partición $P = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1\}$ de \mathbb{T} .

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^k c_i x_n \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]}(x_n) = \sum_{i=1}^k c_i \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i]}(x_n) \right),$$

como cada término es de la forma $S([a, b], N)$, al tomar límites,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k c_i \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) \right) &= \sum_{i=1}^k c_i \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_0^1 x \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^k c_i x \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

Dado $a > 0$ y $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in [0, a)$. En virtud del Teorema A.2, para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones lineales a trozos L, U tales que

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \quad \int_0^1 U(x) dx - \int_0^1 L(x) dx \leq \varepsilon.$$

Luego si $S_N = \sum_{n=1}^N f(x_n)$, entonces,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N L(x_n) \leq \frac{S_N}{N} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U(x_n),$$

como L y U son funciones lineales a trozos de la forma anterior, al tomar límites,

$$\int_0^1 f(x) dx - \varepsilon \leq \int_0^1 L(x) dx \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} \leq \int_0^1 U(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

cuando $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ y $f(x) = 0$ para $x \in [0, a)$ con $a > 0$.

En particular, aplicando el resultado a $f(x) = \mathbf{1}_{(a,1)}(x)$, con $0 < a < 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{(a,1)}(x_n) = \int_0^1 \mathbf{1}_{(a,1)}(x) dx = 1 - a,$$

lo que demuestra, por la Proposición 1.6, que (x_n) es equidistribuida módulo 1 □

2.2 — Criterio de Weyl

La caracterización funcional es una herramienta de gran utilidad, aunque a menudo resulta difícil de aplicar. El criterio de Weyl nos proporciona un método más concreto para verificar la equidistribución de una sucesión.

El criterio se basa en el hecho de que las funciones $f(x) = e^{2\pi ikx}$, con $k \in \mathbb{Z}$, son continuas y satisfacen las condiciones del Corolario 2.2. Por otra parte, esta familia de funciones es lo suficientemente rica como para determinar la equidistribución de una sucesión.

Teorema 2.4 (Criterio de Weyl) *Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales, entonces son equivalentes:*

1. (x_n) es equidistribuida módulo 1.
2. Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi ikx_n} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Demostración. $1 \implies 2$ Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y sea $f(x) = e^{2\pi ikx}$, $f \in C(\mathbb{T})$ y por el Corolario 2.2, se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi ikx_n} = \int_0^1 e^{2\pi ikx} dx = 0.$$

$2 \implies 1$ La hipótesis es el paso 2 del Lema 1.13. Reproduciendo la prueba, se concluye que para cada función $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

y por el Corolario 2.2, la sucesión (x_n) es equidistribuida módulo 1. □

Ejemplo 2.5 *La sucesión $(n\alpha)_{n \geq 1}$ con $\alpha \notin \mathbb{Q}$ es equidistribuida módulo 1.*

Resolución. Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi ikn\alpha} \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{2\pi ik\alpha}(1 - e^{2\pi ikN\alpha})}{1 - e^{2\pi ik\alpha}} \right| \leq \frac{2}{N|e^{2\pi ik\alpha} - 1|}.$$

Como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, se tiene $k\alpha \notin \mathbb{Z}$ y por tanto $e^{2\pi ik\alpha} \neq 1$

Al tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$ se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \alpha} = 0$$

y por el criterio de Weyl, la sucesión $(n\alpha)$ es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 2.6 Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión equidistribuida módulo 1, sea $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y sea $b \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $(ax_n + b)_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Definimos $y_n = ax_n + b$. Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k y_n} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k (ax_n + b)} \right| = \left| \frac{1}{N} e^{2\pi i k b} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (ka)x_n} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (ka)x_n} \right|.$$

Dado que $ka \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y (x_n) es equidistribuida, el criterio de Weyl implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (ka)x_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k y_n} = 0$$

y por este mismo criterio, la sucesión (y_n) es equidistribuida módulo 1. \square

Como consecuencia, la Proposición 1.8 es un corolario de este resultado.

Ejemplo 2.7 La sucesión $(\sin n)_{n \geq 1}$ no es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Observemos que, como $\frac{1}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, la sucesión $(\frac{n}{2\pi})$ es equidistribuida módulo 1.

Sea $f(x) = e^{2\pi i \sin(2\pi x)}$, $f \in C(\mathbb{T})$. Por el Corolario 2.2 aplicado a $x_n = \frac{n}{2\pi}$, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \sin n} = \int_0^1 e^{2\pi i \sin(2\pi x)} dx.$$

El término de la izquierda coincide con la suma del criterio de Weyl para $k = 1$ aplicada a la sucesión $(\sin n)$.

Si $(\sin n)$ fuera equidistribuida módulo 1, el criterio de Weyl implicaría que el límite es 0.

Pero al calcular la integral con el cambio de variable $t = 2\pi x$ obtenemos,

$$\int_0^1 e^{2\pi i \sin(2\pi x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\pi i \sin t} dt = J_0(2\pi) \simeq 0,22$$

donde J_0 es la función de Bessel $v = 0$. Consultar B.3.

Por lo tanto, el criterio de Weyl no se cumple para $k = 1$, y $(\sin n)$ no es equidistribuida. \square

Método de Euler

Mediante el criterio de Weyl, podemos demostrar fácilmente que una sucesión es equidistribuida. En este capítulo presentamos un método, inspirado en los ejercicios de Kuipers [4, Ejercicios 2.21–2.22], para verificar dicha propiedad apoyándose en la fórmula de sumación de Euler.

Esta fórmula nos permite expresar sumas de exponenciales en términos de integrales, las cuales podemos acotar de forma precisa.

3.1 — Fórmula de Euler y teorema de Fejér

Proposición 3.1 (Fórmula de sumación de Euler) *Sea $N \in \mathbb{N}$ y sea $f : [1, N] \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f' \in C([1, N])$. Entonces se cumple la siguiente igualdad:*

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx + \frac{f(1) + f(N)}{2} + \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx. \quad (3.1)$$

Demostración. Dividimos el intervalo $[1, N]$ en subintervalos $[n, n+1]$ con $n = 1, \dots, N-1$.

Para cada intervalo $[n, n+1]$ se tiene que $\langle x \rangle = x - n$, al integrar por partes,

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \left[\left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) f(x) \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_n^{n+1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Sumando sobre $n = 1, 2, \dots, N-1$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} f(n) \right) - \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

Luego,

$$\int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{n=1}^N f(n) - \frac{1}{2} f(N) - \frac{1}{2} f(1) - \int_1^N f(x) dx.$$

Reordenando los términos se obtiene la igualdad deseada. \square

Ejemplo 3.2 La sucesión $(a \log n)_{n \geq 1}$ con $a \in \mathbb{R}$ no es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Si $a = 0$, la secuencia es constante e igual a 0, por lo que no es equidistribuida.

Supongamos que $a \neq 0$. Verificaremos que no se cumple el criterio de Weyl para $k = 1$. Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \log n} \neq 0.$$

Sea $f(x) = e^{2\pi i a \log x}$. Aplicando la fórmula (3.1)

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i a \log n} = \int_1^N e^{2\pi i a \log x} dx + \frac{1}{2} (e^{2\pi i a \log N} + 1) + \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i a}{x} e^{2\pi i a \log x} dx.$$

Calculamos la primera integral mediante el cambio de variable $u = \log x$, $x = e^u$ y $dx = e^u du$. Cuando $x = 1$, $u = 0$ y cuando $x = N$, $u = \log N$.

$$\begin{aligned} \int_1^N e^{2\pi i a \log x} dx &= \int_0^{\log N} e^{(2\pi i a + 1)u} du = \left[\frac{e^{(2\pi i a + 1)u}}{2\pi i a + 1} \right]_0^{\log N} \\ &= \frac{e^{(2\pi i a + 1)\log N} - 1}{2\pi i a + 1} = \frac{N e^{2\pi i a \log N} - 1}{2\pi i a + 1}. \end{aligned}$$

Dividiendo por N ,

$$\frac{N e^{2\pi i a \log N} - 1}{N(2\pi i a + 1)} = \frac{e^{2\pi i a \log N}}{2\pi i a + 1} - \frac{1}{N(2\pi i a + 1)}.$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, el segundo término se anula, mientras que el primero no puede converger a 0, ya que oscila sobre una circunferencia de radio positivo.

El término central se puede acotar por

$$\left| \frac{1}{2} (e^{2\pi i a \log N} + 1) \right| \leq 1,$$

luego, tras dividir por N , también tiende a 0.

Para la segunda integral, usamos que $|\langle x \rangle - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ y que $|e^{2\pi i a \log x}| = 1$,

$$\left| \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi i a}{x} e^{2\pi i a \log x} dx \right| \leq \pi |a| \int_1^N \frac{1}{x} dx = \pi |a| \log N.$$

En consecuencia,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi ia}{x} e^{2\pi ia \log x} dx = 0.$$

Como la primera integral no converge a 0, no se verifica el criterio de Weyl para $k = 1$.

Por tanto, la sucesión $(a \log n)$ no es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 3.3 La sucesión $(an^\sigma)_{n \geq 1}$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $\sigma \in (0, 1)$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Para demostrarlo utilizaremos el criterio de Weyl.

Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, como $a \neq 0$, entonces $b = ak \neq 0$. Basta comprobar que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i bn^\sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Aplicando la fórmula (3.1) a la función $f(x) = e^{2\pi i bx^\sigma}$,

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i bn^\sigma} = \int_1^N e^{2\pi i bx^\sigma} dx + \frac{1}{2} (e^{2\pi i bN^\sigma} + e^{2\pi i b}) + \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) 2\pi i b \sigma x^{\sigma-1} e^{2\pi i bx^\sigma} dx.$$

Calculamos la primera integral usando integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_1^N e^{2\pi i bx^\sigma} dx &= \int_1^N \frac{(e^{2\pi i bx^\sigma})'}{2\pi i b \sigma x^{\sigma-1}} dx = \frac{1}{2\pi i b \sigma} \int_1^N (e^{2\pi i bx^\sigma})' x^{1-\sigma} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i b \sigma} \left([e^{2\pi i bx^\sigma} x^{1-\sigma}]_1^N - (1-\sigma) \int_1^N e^{2\pi i bx^\sigma} x^{-\sigma} dx \right). \end{aligned}$$

Acotando cada uno de los términos anteriores,

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i bN^\sigma} N^{1-\sigma} - e^{2\pi i b}| &\leq N^{1-\sigma} + 1, \\ \left| \int_1^N e^{2\pi i bx^\sigma} x^{-\sigma} dx \right| &\leq \int_1^N x^{-\sigma} dx = \frac{N^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \end{aligned}$$

Ambos crecen del orden de $N^{1-\sigma}$, por lo que la primera integral es $O(N^{1-\sigma})$.

El término central se acota por

$$\left| \frac{1}{2} (e^{2\pi i bN^\sigma} + e^{2\pi i b}) \right| \leq 1,$$

por lo que es $O(1)$.

Para la segunda integral, usando que $|\langle x \rangle - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$, y que $|e^{2\pi i b x^\sigma}| = 1$, se tiene

$$\left| \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) 2\pi i b \sigma x^{\sigma-1} e^{2\pi i b x^\sigma} dx \right| \leq \pi |b| \int_1^N \sigma x^{\sigma-1} dx = \pi |b| (N^\sigma - 1),$$

por lo que esta integral es $O(N^\sigma)$.

Reuniendo las estimaciones anteriores, y teniendo en cuenta que $\sigma \in (0, 1)$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma} = O(N^{1-\sigma}) + O(1) + O(N^\sigma) = O(N^{\max\{\sigma, 1-\sigma\}}) = o(N).$$

De este modo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma} = 0$$

y por tanto la sucesión (a_n^σ) es equidistribuida módulo 1. \square

La idea del ejemplo anterior se puede extender a funciones más generales que cumplan ciertas condiciones de crecimiento. El siguiente resultado, el teorema de Fejér, nos dice con precisión cuáles son estas condiciones.

Teorema 3.4 (Teorema de Fejér) *Sea $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g' \in C([1, \infty))$ y $g'(x)$ es monótona para $x \geq x_0$ para algún $x_0 \geq 1$. Si se cumplen las siguientes condiciones,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x |g'(x)| = \infty, \quad (3.2)$$

entonces la sucesión $(g(n))_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1.

Demostración. Sea $N > x_0$ y sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aplicando la fórmula (3.1) a $f(x) = e^{2\pi i k g(x)}$,

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i k g(n)} = \int_1^N e^{2\pi i k g(x)} dx + \frac{1}{2} (e^{2\pi i k g(N)} + e^{2\pi i k g(1)}) + \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) 2\pi i k g'(x) e^{2\pi i k g(x)} dx.$$

La primera integral la separamos en los dos intervalos $[1, x_0]$ y $[x_0, N]$,

$$\int_1^N e^{2\pi i k g(x)} dx = \int_1^{x_0} e^{2\pi i k g(x)} dx + \int_{x_0}^N e^{2\pi i k g(x)} dx.$$

El primer intervalo se acota por

$$\left| \int_1^{x_0} e^{2\pi i k g(x)} dx \right| \leq x_0 - 1,$$

y al dividir por N , se anula cuando $N \rightarrow \infty$.

Para el segundo, aplicamos integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^N e^{2\pi i k g(x)} dx &= \int_{x_0}^N \frac{(e^{2\pi i k g(x)})'}{2\pi i k g'(x)} dx = \frac{1}{2\pi i k} \int_{x_0}^N \frac{(e^{2\pi i k g(x)})'}{g'(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i k} \left(\left[\frac{e^{2\pi i k g(x)}}{g'(x)} \right]_{x_0}^N - \int_{x_0}^N e^{2\pi i k g(x)} \left(\frac{1}{g'(x)} \right)' dx \right). \end{aligned}$$

Vamos a acotar cada uno de los sumandos. En el primero,

$$\left| \frac{e^{2\pi i k g(N)}}{g'(N)} - \frac{e^{2\pi i k g(x_0)}}{g'(x_0)} \right| \leq \frac{1}{|g'(N)|} + \frac{1}{|g'(x_0)|}.$$

Dividiendo por N y usando la hipótesis (3.2), se tiene que

$$\frac{1}{N|g'(N)|} + \frac{1}{N|g'(x_0)|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty.$$

Para el segundo, tenemos

$$\left| \int_{x_0}^N e^{2\pi i k g(x)} \left(\frac{1}{g'(x)} \right)' dx \right| \leq \int_{x_0}^N \left| \left(\frac{1}{g'(x)} \right)' \right| dx.$$

Como $g'(x)$ es monótona a partir de x_0 y $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$, entonces $g'(x)$ no cambia de signo para $x \geq x_0$. Además, no puede ser que $g'(x) = 0$ para algún $x \geq x_0$, ya que entonces, por ser monótona, $g'(x) = 0$ a partir de ahí, lo que contradice la condición $\lim_{x \rightarrow \infty} x|g'(x)| = \infty$.

Por lo tanto, $1/g'(x)$ es monótona para $x \geq x_0$, luego $(1/g'(x))'$ es de signo constante para $x \geq x_0$.

$$\int_{x_0}^N \left| \left(\frac{1}{g'(x)} \right)' \right| dx = \left| \int_{x_0}^N \left(\frac{1}{g'(x)} \right)' dx \right| = \left| \frac{1}{g'(N)} - \frac{1}{g'(x_0)} \right| \leq \frac{1}{|g'(N)|} + \frac{1}{|g'(x_0)|},$$

y al igual que antes, al dividir por N se anula cuando $N \rightarrow \infty$.

Todo esto muestra que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^N e^{2\pi i k g(x)} dx = 0.$$

El término central se acota por

$$\left| \frac{1}{2} (e^{2\pi i k g(N)} + e^{2\pi i k g(1)}) \right| \leq 1,$$

por lo que, tras dividir por N , también tiende a 0.

Por último, la segunda integral, usando que $|\langle x \rangle - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ y que $|e^{2\pi i k g(x)}| = 1$, se tiene

$$\left| \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) 2\pi i k g'(x) e^{2\pi i k g(x)} dx \right| \leq \pi |k| \int_1^N |g'(x)| dx.$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_1 > 0$ tal que $|g'(x)| < \varepsilon$ para $x > x_1$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo y sea $N > x_1$, como $g'(x)$ es continua para $x \geq 1$, entonces es integrable en $[1, x_1]$, por lo que existe $M > 0$ tal que $\int_1^{x_1} |g'(x)| dx \leq M$.

Por lo tanto,

$$\int_1^N |g'(x)| dx = \int_1^{x_1} |g'(x)| dx + \int_{x_1}^N |g'(x)| dx \leq M + \varepsilon(N - x_1) \leq M + N\varepsilon.$$

Luego,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^N |g'(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, y que el integrando es positivo, se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^N |g'(x)| dx = 0,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_1^N \left(\langle x \rangle - \frac{1}{2} \right) 2\pi i k g'(x) e^{2\pi i k g(x)} dx = 0.$$

Todos los términos divididos por N tienden a 0 cuando $N \rightarrow \infty$, por lo tanto se cumple el criterio de Weyl y la sucesión $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 3.5 Las sucesiones $(an^\sigma \log^\tau n)_{n \geq 2}$ con $a \neq 0$, $\sigma \in (0, 1)$ y $\tau \in \mathbb{R}$ son equidistribuidas módulo 1.

Resolución. Sea $x_n = an^\sigma \log^\tau n$ para cada $n \geq 2$. Definimos $g(x) = a(x+1)^\sigma \log^\tau(x+1)$ en $[1, \infty)$, entonces $g(n) = x_{n+1}$ para cada $n \geq 1$, y su derivada es

$$g'(x) = a(x+1)^{\sigma-1} \log^{\tau-1}(x+1) (\sigma \log(x+1) + \tau),$$

que es continua en $[1, \infty)$ por ser composición de continuas. Puesto que $\sigma \in (0, 1)$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x|g'(x)| = \infty.$$

Para estudiar la monotonía, calculamos la segunda derivada de g :

$$g''(x) = a(x+1)^{\sigma-2} \log^{\tau-2}(x+1) (\sigma(\sigma-1) \log^2(x+1) + \tau(2\sigma-1) \log(x+1) + \tau(\tau-1)).$$

El término $(x+1)^{\sigma-2} \log^{\tau-2}(x+1)$ es positivo para cada $x \geq 1$. Por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sigma(\sigma-1) \log^2(x+1) + \tau(2\sigma-1) \log(x+1) + \tau(\tau-1)) = -\infty,$$

ya que $\sigma < 1$. Por tanto, existe $x_0 \geq 1$ tal que este término es negativo para todo $x \geq x_0$, y en consecuencia $g''(x)$ tiene signo constante para $x \geq x_0$. Esto implica que $g'(x)$ es monótona para $x \geq x_0$.

Por el Teorema 3.4, $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1 y por lo tanto, (x_n) también lo es. \square

Ejemplo 3.6 Las sucesiones $(a \log^\tau n)_{n \geq 1}$ con $a \neq 0$ y $\tau > 1$ son equidistribuidas módulo 1.

Resolución. Sea $g(x) = a \log^\tau(x)$ en $[1, \infty)$, su derivada es

$$g'(x) = \frac{a\tau \log^{\tau-1}(x)}{x},$$

como $\tau > 1$, es continua en $[1, \infty)$ por ser composición de continuas. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x|g'(x)| = \infty.$$

Para ver la monotonía de $g'(x)$, calculamos $g''(x)$:

$$g''(x) = a\tau \frac{\log^{\tau-2}(x)}{x^2} (\tau - 1 - \log(x)).$$

Obtenemos que $g''(x) = 0$ en $x = e^{\tau-1}$. Luego para $x > e^{\tau-1}$ la función $g''(x)$ es de signo constante. Por tanto, $g'(x)$ es monótona a partir de $x_0 = e^{\tau-1}$.

Por el Teorema 3.4, la sucesión $(a \log^\tau(n))$ es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 3.7 Las sucesiones $(an \log^\tau n)_{n \geq 2}$ con $a \neq 0$ y $\tau < 0$ son equidistribuidas módulo 1.

Resolución. Sea $x_n = an \log^\tau n$ para cada $n \geq 2$. Definimos $g(x) = a(x+1) \log^\tau(x+1)$ en $[1, \infty)$, entonces $g(n) = x_{n+1}$ para cada $n \geq 1$, y su derivada es

$$g'(x) = a \log^\tau(x+1) + a\tau \log^{\tau-1}(x+1),$$

que es continua en $[1, \infty)$ por ser composición de continuas. Además, como $\tau < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x|g'(x)| = \infty.$$

Para comprobar la monotonía de $g'(x)$, calculamos su derivada,

$$g''(x) = a\tau \frac{\log^{\tau-2}(x+1)}{x+1} (\log(x+1) + \tau - 1).$$

Como $g''(x) = 0$ en $x = e^{1-\tau} - 1$, entonces para $x \geq e^{1-\tau} - 1$ se tiene que $g''(x)$ es de signo constante. En consecuencia, $g'(x)$ es monótona a partir de $x_0 = e^{1-\tau} - 1$.

Por el Teorema 3.4, $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1 y por lo tanto, (x_n) también lo es. \square

Método de Van der Corput

Finalmente, desarrollaremos uno de los métodos más potentes para el estudio de la equidistribución de sucesiones, el método de las diferencias de Van der Corput. Seguiremos principalmente la exposición de Kuipers [4, Capítulo 3] y los ejercicios de Stein y Shakarchi [6, Problema 4.6.2].

Este método nos permitirá demostrar la equidistribución de las sucesiones dadas por polinomios con al menos un coeficiente irracional, y extender el teorema de Fejér a funciones más generales.

4.1 — Desigualdad de Van der Corput

El teorema de las diferencias de Van der Corput se basa en la siguiente desigualdad:

Lema 4.1 (Desigualdad de Van der Corput) Sean $H, N \in \mathbb{N}$ con $1 \leq H \leq N$, entonces

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right|^2 \leq 4 \frac{N}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h) - f(n))} \right|. \quad (4.1)$$

Demostración. Sea $u_n \in \mathbb{C}$ con $n = 1, \dots, N$. Definimos $u_n = 0$ para $n > N$ y para $n \leq 0$. Entonces,

$$H \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^H \sum_{n=1}^N u_n.$$

Sea k fijo, consideramos el cambio de variable $p = n + k$. Luego, $n = p - k$ y $p = 1 + k, \dots, N + k$

$$\sum_{k=1}^H \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^H \sum_{p=k+1}^{N+k} u_{p-k}.$$

Por lo tanto, gracias a la extensión de ceros de los u_n ,

$$H \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^H \sum_{p=2}^{N+H} u_{p-k} = \sum_{p=2}^{N+H} \sum_{k=1}^H u_{p-k}.$$

Ahora, elevamos al cuadrado ambos lados y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, B.4:

$$\left| H \sum_{n=1}^N u_n \right|^2 \leq (N + H - 1) \sum_{p=2}^{N+H} \left| \sum_{k=1}^H u_{p-k} \right|^2.$$

Fijado p , desarrollamos el sumatorio de dentro del término de la derecha:

$$\left| \sum_{k=1}^H u_{p-k} \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^H u_{p-k} \right) \left(\sum_{s=1}^H \overline{u_{p-s}} \right) = \sum_{k=1}^H \sum_{s=1}^H u_{p-k} \overline{u_{p-s}}.$$

Este doble sumatorio se descompone en tres partes: la parte diagonal, correspondiente a $k = s$; la parte inferior, correspondiente a $k < s$; y la parte superior $k > s$,

$$\sum_{k=1}^H \sum_{s=1}^H u_{p-k} \overline{u_{p-s}} = \sum_{k=1}^H |u_{p-k}|^2 + \sum_{1 \leq k < s \leq H} u_{p-k} \overline{u_{p-s}} + \sum_{1 \leq s < k \leq H} u_{p-k} \overline{u_{p-s}}.$$

Gracias a la simetría de los sumatorios de la parte inferior e superior, se pueden juntar ambos sumatorios y se obtiene

$$\sum_{k=1}^H \sum_{s=1}^H u_{p-k} \overline{u_{p-s}} = \sum_{k=1}^H |u_{p-k}|^2 + \sum_{1 \leq k < s \leq H} 2 \operatorname{Re}(u_{p-k} \overline{u_{p-s}}).$$

De momento tenemos la siguiente cota:

$$\begin{aligned} H^2 \left| \sum_{n=1}^N u_n \right|^2 &\leq (N + H - 1) \sum_{p=2}^{N+H} \sum_{k=1}^H |u_{p-k}|^2 + 2(N + H - 1) \sum_{p=2}^{N+H} \sum_{1 \leq k < s \leq H} \operatorname{Re}(u_{p-k} \overline{u_{p-s}}) \\ &\leq (N + H - 1) H \sum_{n=1}^N |u_n|^2 + 2(N + H - 1) \operatorname{Re} \left(\sum_{p=2}^{N+H} \sum_{1 \leq k < s \leq H} u_{p-k} \overline{u_{p-s}} \right). \end{aligned}$$

Estudiamos el sumatorio del segundo término. Hacemos el cambio de variable $n = p - s$, notando que $u_n = 0$ salvo para $n = 1, \dots, N$. Además, como la suma es finita podemos cambiar el orden de los sumatorios,

$$\sum_{p=2}^{N+H} \sum_{1 \leq k < s \leq H} u_{p-k} \overline{u_{p-s}} = \sum_{1 \leq k < s \leq H} \sum_{n=1}^N u_{n+s-k} \overline{u_n}.$$

Sea k fijo, hacemos el cambio de variable $h = s - k$. Como $k < s$ entonces $s = k + 1, \dots, H$ y $h = 1, \dots, H - k$. Obtenemos

$$\sum_{1 \leq k < s \leq H} \sum_{n=1}^N u_{n+s-k} \overline{u_n} = \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{h=1}^{H-k} \sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n}.$$

Sabemos que $1 \leq h \leq H - k$ entonces $2 \leq h + k \leq H$ y $1 \leq k \leq H - h$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{H-1} \sum_{h=1}^{H-k} \sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n} &= \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{h=1}^{H-1} \mathbf{1}_{[2,H]}(h+k) \left(\sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{k=1}^{H-1} \mathbf{1}_{[2,H]}(h+k) \left(\sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{k=1}^{H-h} \left(\sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right) \\
&= \sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \left(\sum_{n=1}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right).
\end{aligned}$$

La cota anterior se simplifica como

$$\begin{aligned}
H^2 \left| \sum_{n=1}^N u_n \right|^2 &\leq (N+H-1)H \sum_{n=1}^N |u_n|^2 + 2(N+H-1) \operatorname{Re} \left(\sum_{h=1}^{H-1} (H-h) \left(\sum_{n=0}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right) \right) \\
&\leq 2(N+H-1) \operatorname{Re} \left(\sum_{h=0}^{H-1} (H-h) \left(\sum_{n=0}^N u_{n+h} \overline{u_n} \right) \right).
\end{aligned}$$

Considerando las siguientes acotaciones: $N+H-1 \leq 2N$, $H-h \leq H$ y $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y teniendo en cuenta que $u_n = 0$ salvo para $n = 1, \dots, N$ obtenemos

$$H^2 \left| \sum_{n=1}^N u_n \right|^2 \leq 4NH \sum_{h=0}^{H-1} \left| \sum_{n=1}^{N-h} u_{n+h} \overline{u_n} \right|.$$

Finalmente, dividiendo ambos lados por H^2 y aplicando $u_n = e^{2\pi i f(n)}$, obtenemos la fórmula deseada

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right|^2 \leq 4 \frac{N}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h) - f(n))} \right|.$$

□

4.2 — Teorema de las diferencias de Van der Corput

La desigualdad de Van der Corput nos permite estudiar las sumas de exponenciales de una función a partir de las correspondientes sumas de sus diferencias. Ahora veremos cómo podemos aplicar esta desigualdad al caso de la sucesión $(n^2\alpha)$.

Ejemplo 4.2 La sucesión $(n^2\alpha)_{n \geq 1}$ con $\alpha \notin \mathbb{Q}$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y sea $f(n) = kn^2\alpha$,

$$f(n+h) - f(n) = k((n+h)^2\alpha - n^2\alpha) = k(2hn\alpha + h^2\alpha).$$

Usando la estimación (4.1), y como para $h = 0$ se tiene $e^{2\pi i 0} = 1$,

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kn^2\alpha} \right|^2 \leq 4 \frac{N^2}{H} + 4 \frac{N}{H} \sum_{h=1}^{H-1} \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i k(2hn\alpha + h^2\alpha)} \right|.$$

Sabemos que $(n\alpha)$ es equidistribuida módulo 1. Para cada $h \neq 0$, por el Ejemplo 2.6, se tiene que $(2hn\alpha + h^2\alpha)$ es equidistribuida módulo 1.

Al dividir por N^2 ,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kn^2\alpha} \right|^2 \leq \frac{4}{H} + \frac{4}{H} \sum_{h=1}^{H-1} \frac{N-h}{N} \left| \frac{1}{N-h} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i k(2hn\alpha + h^2\alpha)} \right|.$$

Fijado H , por el criterio de Weyl, para cada $h \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-h} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i k(2hn\alpha + h^2\alpha)} = 0.$$

Por tanto,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kn^2\alpha} \right|^2 \leq \frac{4}{H}.$$

Dado que es cierto para cada $H \in \mathbb{N}$, haciendo $H \rightarrow \infty$ se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i kn^2\alpha} \right|^2 = 0.$$

Por lo tanto, por el criterio de Weyl, la sucesión $(n^2\alpha)$ es equidistribuida módulo 1. \square

Esta idea de relacionar la sucesión original con sus diferencias la podemos extender a un resultado más general, el teorema de las diferencias de Van der Corput.

Teorema 4.3 (Teorema de las diferencias de Van der Corput) *Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Si para cada $h = 1, 2, \dots$, la sucesión $(x_{n+h} - x_n)$ es equidistribuida módulo 1, entonces la sucesión (x_n) es equidistribuida módulo 1.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y sea $f(n) = kx_n$. Usando la estimación (4.1), y teniendo en

cuenta que para $h = 0$ se tiene $e^{2\pi i 0} = 1$, obtenemos

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k x_n} \right|^2 \leq \frac{4}{H} + \frac{4}{H} \sum_{h=1}^{H-1} \frac{N-h}{N} \left| \frac{1}{N-h} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i k (x_{n+h} - x_n)} \right|.$$

Dado que para cada $h = 1, 2, \dots$ la sucesión $(x_{n+h} - x_n)$ es equidistribuida módulo 1, por el criterio de Weyl se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-h} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i k (x_{n+h} - x_n)} = 0.$$

Por tanto,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k x_n} \right|^2 \leq \frac{4}{H}.$$

Dado que es cierto para cada $H \in \mathbb{N}$, haciendo $H \rightarrow \infty$ se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k x_n} \right|^2 = 0.$$

Por lo tanto, por el criterio de Weyl, la sucesión (x_n) es equidistribuida módulo 1. \square

4.3 — Aplicaciones del teorema de las diferencias

El teorema de las diferencias de Van der Corput tiene varias aplicaciones, entre ellas podemos destacar la equidistribución de las sucesiones dadas por polinomios con al menos un coeficiente irracional.

Teorema 4.4 *Sea $p(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$ un polinomio con coeficientes reales. Si al menos uno de $c_j \notin \mathbb{Q}$ con $j > 0$, entonces la sucesión $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1.*

Demostración. Primero comprobaremos el caso especial en el que $c_1 \notin \mathbb{Q}$ y los demás coeficientes son racionales. Expresamos el polinomio de la siguiente forma:

$$p(x) = P(x) + c_1 x + c_0$$

con $P(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_2 x^2$.

Como $c_2, \dots, c_m \in \mathbb{Q}$, se pueden escribir de la forma $c_j = p_j/q_j$, con $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ y $q_j > 0$ para $j = 2, \dots, m$. Sea $D = \text{mcm}(q_2, \dots, q_m)$, entonces

$$c_j = \frac{a_j}{D} \quad \text{con } a_j \in \mathbb{Z} \text{ para cada } j = 2, \dots, m.$$

Sea un $n \geq 1$. Podemos expresarlo como $n = Dl + d$ con $l \geq 0$ y $1 \leq d \leq D$. Comparando $P(Dl + d)$ con $P(d)$, se tiene que

$$P(Dl + d) - P(d) = \sum_{j=2}^m c_j ((Dl + d)^j - d^j).$$

Para cada $j = 2, \dots, m$, desarrollando el binomio,

$$(Dl + d)^j - d^j = \sum_{i=1}^j \binom{j}{i} d^{j-i} (Dl)^i.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(Dl + d) - P(d) &= \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^j c_j \binom{j}{i} d^{j-i} (Dl)^i \\ &= \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^j \frac{a_j}{D} \binom{j}{i} d^{j-i} (Dl)^i \\ &= \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^j a_j \binom{j}{i} d^{j-i} D^{i-1} l^i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Es decir, $P(Dl + d)$ y $P(d)$ difieren en un número entero. Por tanto,

$$\langle P(Dl + d) \rangle = \langle P(d) \rangle \quad \text{y, en consecuencia,} \quad e^{2\pi i P(Dl+d)} = e^{2\pi i P(d)}.$$

Veamos ahora que, para el caso $c_1 \notin \mathbb{Q}$, la sucesión $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1.

Por el criterio de Weyl, sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dado $N \geq 1$, escribimos $N = DL + R$ con $L \geq 0$ y $1 \leq R \leq D$. Para cada $n = 1, 2, \dots, DL$ lo expresamos como $n = Dl + d$ con $0 \leq l \leq L - 1$ y $1 \leq d \leq D$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k p(n)} \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{d=1}^D \sum_{l=0}^{L-1} e^{2\pi i k (P(Dl+d) + c_1 Dl + c_0)} + \frac{1}{N} \sum_{n=DL+1}^N e^{2\pi i k p(n)} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{d=1}^D e^{2\pi i k (P(d) + c_0)} \sum_{l=0}^{L-1} e^{2\pi i k (c_1 Dl)} \right| + \frac{1}{N} \sum_{n=DL+1}^N |e^{2\pi i k p(n)}| \\ &\leq \left| \frac{D}{N} \sum_{l=0}^{L-1} e^{2\pi i k (c_1 Dl)} \right| + \frac{D}{N}. \end{aligned}$$

Como $N = DL + R$ con $1 \leq R \leq D$, se tiene que $\frac{D}{N} \leq \frac{D}{DL} = \frac{1}{L}$. Entonces

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k p(n)} \right| \leq \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{2\pi i k (c_1 Dl)} \right| + \frac{1}{L}.$$

Como $c_1 \notin \mathbb{Q}$, la sucesión $(c_1 D_l)$ es equidistribuida módulo 1. Tomando límite cuando $N \rightarrow \infty$, y por lo tanto $L \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k p(n)} \right| \leq \lim_{L \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{2\pi i k (c_1 D_l)} \right| + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} = 0.$$

Por lo tanto, por el criterio de Weyl, la sucesión $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1 cuando $c_1 \notin \mathbb{Q}$ y los demás coeficientes son racionales.

Para el caso general, sea

$$p(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

y sea $s = \max\{j \geq 1 : c_j \notin \mathbb{Q}\}$. Es decir, s es el grado del coeficiente irracional de mayor grado.

Queremos demostrar que, si $s \geq 1$, entonces la sucesión $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1. Procedemos por inducción sobre s . El caso $s = 1$ ya ha sido demostrado. Supongamos que el resultado es cierto para $s - 1$ y probemos el caso s .

Para cada $h = 1, 2, \dots$, definimos la función $p_h(x) = p(x + h) - p(x)$. De esta forma,

$$p_h(x) = \sum_{j=1}^m c_j ((x + h)^j - x^j).$$

Desarrollando el binomio para cada $j = 1, \dots, m$,

$$(x + h)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i h^{j-i}.$$

Bajamos un grado a cada término, entonces

$$p_h(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{j-1} c_j \binom{j}{i} x^i h^{j-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^m c_j \binom{j}{i} h^{j-i} \right) x^i = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^i.$$

Los coeficientes $\alpha_s, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{Q}$, ya que son combinaciones lineales en \mathbb{Z} de los términos $c_{s+1}, \dots, c_m \in \mathbb{Q}$. Sin embargo, la combinación lineal de α_{s-1} contiene a $c_s \notin \mathbb{Q}$, por lo que $\alpha_{s-1} \notin \mathbb{Q}$. Por la hipótesis de inducción, la sucesión $(p_h(n))$ es equidistribuida módulo 1.

Aplicando el Teorema 4.3, concluimos que $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1 para $s \geq 1$.

Esto demuestra que, si existe un coeficiente irracional que no sea el término independiente, entonces la sucesión $(p(n))$ es equidistribuida módulo 1. \square

Por otro lado, el teorema de las diferencias de Van der Corput también nos permite extender el teorema de Fejér a funciones más generales.

Teorema 4.5 Sea $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, y sea $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función k -veces derivable tal que

$g^{(k)} \in C([1, \infty))$ y $g^{(k)}(x)$ es monótona para $x \geq x_0$ para algún $x_0 \geq 1$. Si se cumplen las siguientes condiciones,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x |g^{(k)}(x)| = \infty, \quad (4.2)$$

entonces la sucesión $(g(n))_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Para $k = 1$, el resultado es el Teorema 3.4.

Supongamos que el resultado es cierto para $k - 1$ y sea g una función que cumple las hipótesis del teorema para k .

Para cada $h = 1, 2, \dots$, definimos la función

$$f_h(x) = g(x + h) - g(x) = \int_x^{x+h} g'(t) dt = \int_0^1 g'(x + sh) h ds.$$

De esta forma, f_h es $k - 1$ -veces derivable y $f_h^{(k-1)}$ es continua en $[1, \infty)$, ya que lo es $g^{(k)}$.

Comprobemos que $f_h^{(k-1)}(x)$ es monótona para $x \geq x_0$. A partir de la expresión integral anterior obtenemos

$$f_h^{(k-1)}(x) = \int_0^1 g^{(k)}(x + sh) h ds.$$

Como $g^{(k)}(x)$ es monótona para $x \geq x_0$, entonces también lo es $f_h^{(k-1)}(x)$. Por tanto, $f_h^{(k-1)}(x)$ es monótona para $x \geq x_0$.

Para verificar el primer límite, expresamos $f_h^{(k-1)}(x)$ de la siguiente manera,

$$f_h^{(k-1)}(x) = \int_x^{x+h} g^{(k)}(t) dt.$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_1 > 1$ tal que $|g^{(k)}(t)| < \frac{\varepsilon}{h}$ para todo $t \geq x_1$.

Sea ahora $x \geq x_1$. Entonces, para todo $t \in (x, x + h)$ se tiene $t \geq x_1$,

$$\left| f_h^{(k-1)}(x) \right| = \left| \int_x^{x+h} g^{(k)}(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |g^{(k)}(t)| dt < \int_x^{x+h} \frac{\varepsilon}{h} dt = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_h^{(k-1)}(x) = 0.$$

Para la segunda condición, como $g^{(k)}(x)$ es monótona para $x \geq x_0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0$, entonces $g^{(k)}(x)$ es de signo constante para $x \geq x_0$. Por tanto,

$$\left| f_h^{(k-1)}(x) \right| = \left| \int_x^{x+h} g^{(k)}(t) dt \right| = \int_x^{x+h} |g^{(k)}(t)| dt.$$

Además, $|g^{(k)}(x)|$ también es monótona para $x \geq x_0$ y como $\lim_{x \rightarrow \infty} |g^{(k)}(x)| = 0$, en concreto, es decreciente.

Por lo tanto, para $t \in (x, x+h)$ se tiene $|g^{(k)}(t)| \geq |g^{(k)}(x+h)|$. Entonces

$$\left| f_h^{(k-1)}(x) \right| \geq \int_x^{x+h} |g^{(k)}(x+h)| dt = h |g^{(k)}(x+h)|.$$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left| f_h^{(k-1)}(x) \right| \geq \lim_{x \rightarrow \infty} xh |g^{(k)}(x+h)|.$$

Usando las hipótesis 4.2 obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xh |g^{(k)}(x+h)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xh}{x+h} (x+h) |g^{(k)}(x+h)| = h \cdot \infty = \infty.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left| f_h^{(k-1)}(x) \right| = \infty$$

Hemos demostrado que f_h satisface las hipótesis del teorema para $k-1$. Por hipótesis de inducción, la sucesión $(f_h(n))$ es equidistribuida módulo 1 para cada $h = 1, 2, \dots$. Aplicando el Teorema 4.3, concluimos que la sucesión $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 4.6 Sea $a \neq 0$ y sea $\sigma > 0$ tal que $\sigma \notin \mathbb{Z}$. Entonces, la sucesión $(an^\sigma)_{n \geq 1}$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Sea $g(x) = ax^\sigma$ y sea $k = \lfloor \sigma \rfloor + 1$. La derivada de orden k de g es

$$g^{(k)}(x) = a\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-k+1)x^{\sigma-k}.$$

Como $\sigma - k < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0.$$

Para el otro límite, observemos que $\sigma - k + 1 = \sigma - \lfloor \sigma \rfloor > 0$, y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x |g^{(k)}(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |a\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-k+1)x^{\sigma-k+1}| = \infty.$$

Para verificar la monotonía de $g^{(k)}(x)$, calculamos su derivada,

$$g^{(k+1)}(x) = a\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-k)x^{\sigma-k-1}$$

Como $x^{\sigma-k-1}$ es positivo para todo $x \geq 1$, entonces $g^{(k+1)}(x)$ es de signo constante para todo $x \geq 1$. En consecuencia, $g^{(k)}(x)$ es monótona a partir de $x_0 = 1$.

Por el Teorema 4.5, la sucesión (an^σ) es equidistribuida módulo 1. \square

Ejemplo 4.7 Sea $a \neq 0$, sea $\tau \in \mathbb{R}$ y sea $\sigma > 0$ tal que $\sigma \notin \mathbb{Z}$. Entonces, la sucesión $(an^\sigma \log^\tau n)_{n \geq 2}$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Sea $x_n = an^\sigma \log^\tau n$ para cada $n \geq 2$. Definimos $g(x) = a(x+1)^\sigma \log^\tau(x+1)$ en $[1, \infty)$, entonces $g(n) = x_{n+1}$ para cada $n \geq 1$.

Sea $k = \lfloor \sigma \rfloor + 1$, la derivada k -ésima de $g(x)$ es

$$g^{(k)}(x) = a(x+1)^{\sigma-k} \log^{\tau-k}(x+1) (P(\log(x+1))).$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado k con coeficientes que dependen de σ y τ .

Además, como $\sigma - k < 0$ y $\sigma - k + 1 = \sigma - \lfloor \sigma \rfloor > 0$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x |g^{(k)}(x)| = \infty.$$

Para estudiar la monotonía, calculamos $g^{(k+1)}$:

$$g^{(k+1)}(x) = a(x+1)^{\sigma-k-1} \log^{\tau-k-1}(x+1) (Q(\log(x+1))),$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $k+1$ con coeficientes que dependen de σ y τ .

Dado que $(x+1)^{\sigma-k-1} \log^{\tau-k-1}(x+1)$ es positivo para cada $x \geq 1$ y que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = -\infty,$$

porque el coeficiente del término de mayor grado es $\sigma(\sigma-1) \cdots (\sigma-k) < 0$, existe $x_0 \geq 1$ tal que $Q(\log(x+1)) < 0$ para cada $x \geq x_0$. Por tanto, $g^{(k+1)}(x)$ es de signo constante para $x \geq x_0$ y $g^{(k)}(x)$ es monótona para cada $x \geq x_0$.

Por el Teorema 4.5, $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1. En consecuencia, (x_n) también lo es. \square

Ejemplo 4.8 Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq 1$, sea $a \neq 0$ y sea $\tau < 0$. Entonces, la sucesión $(an^k \log^\tau n)_{n \geq 2}$ es equidistribuida módulo 1.

Resolución. Sea $x_n = an^k \log^\tau n$ para cada $n \geq 2$. Definimos $g(x) = a(x+1)^k \log^\tau(x+1)$ en $[1, \infty)$, entonces $g(n) = x_{n+1}$ para cada $n \geq 1$.

La derivada de orden k de g es

$$g^{(k)}(x) = a \log^{\tau-k}(x+1) (P(\log(x+1))),$$

donde P es un polinomio de grado k con coeficiente principal $k!$.

Debido a que $\tau < 0$, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g^{(k)}(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x |g^{(k)}(x)| = \infty.$$

Para comprobar la monotonía de $g^{(k)}$, calculamos $g^{(k+1)}$:

$$g^{(k+1)}(x) = a \frac{\log^{\tau-k-1}(x+1)}{(x+1)} (Q(\log(x+1))),$$

donde Q es un polinomio de grado $k+1$ cuyo coeficiente principal es $\tau k!$.

Dado que $\frac{\log^{\tau-k-1}(x+1)}{(x+1)} > 0$ para cada $x \geq 1$ y que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = -\infty,$$

debido a que el coeficiente del término de mayor grado es $\tau k! < 0$, existe $x_0 \geq 1$ tal que $Q(\log(x+1)) < 0$ para cada $x \geq x_0$. En consecuencia, $g^{(k+1)}(x)$ es de signo constante para cada $x \geq x_0$ y, por tanto, $g^{(k)}(x)$ es monótona para cada $x \geq x_0$.

Por el Teorema 4.5, $(g(n))$ es equidistribuida módulo 1 y (x_n) también lo es. □

Bibliografía

- [1] Y. Bugeaud. *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation*. Cambridge University Press, 2012.
- [2] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Springer, 2014.
- [3] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [4] L. Kuipers y H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Wiley, 1974.
- [5] G. Polya y G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis I. Series. Integral Calculus. Theory of Functions*. Springer, 1997.
- [6] E. M. Stein y R. Shakarchi. *Fourier Analysis. An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

Demostraciones técnicas

El siguiente resultado es un ejercicio en el libro [4, Ejercicios 1.1-1.5], cuya demostración incluimos aquí por completitud.

Proposición A.1 *Sea $x = (x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (x_n) es equidistribuida módulo 1.
2. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo (a, b) con $0 \leq a < b \leq 1$.
3. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$.
4. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $[0, b)$ con $0 \leq b \leq 1$.
5. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo $(a, 1)$ con $0 \leq a \leq 1$.
6. La igualdad (1.1) se cumple para todo intervalo (a, b) con $a, b \in D$, donde $D \subseteq \mathbb{T}$ es un conjunto denso.

Demostración. $1 \implies 2$ Supongamos que (x_n) es equidistribuida módulo 1, es decir, que (1.1) se cumple para todo intervalo $(a, b) \subset \mathbb{T}$ con $0 < a < b < 1$.

Basta probar que también se cumple para intervalos que contienen los extremos.

Caso $(0, b)$: Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$A_N((\varepsilon, b), x) \leq A_N((0, b), x) \quad \text{y} \quad A_N((0, b), x) + A_N((b, 1 - \varepsilon), x) \leq N.$$

Dividiendo por N y tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$,

$$b - \varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((0, b), x)}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((0, b), x)}{N} \leq 1 - (1 - b - \varepsilon) = b + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que el límite existe y es igual a b .

Caso $(a, 1)$: Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$A_N((a, 1 - \varepsilon), x) \leq A_N((a, 1), x) \quad \text{y} \quad A_N((\varepsilon, a), x) + A_N((a, 1), x) \leq N.$$

Dividiendo por N y tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$,

$$1 - a - \varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, 1), x)}{N} \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, 1), x)}{N} \leq 1 - (a - \varepsilon) = 1 - a + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que el límite existe y es igual a $1 - a$.

2 \implies 1 Es obvio.

2 \implies 3 Veamos que para $0 \leq c \leq 1$ se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = c\}}{N} = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, si $c \in (0, 1)$, entonces

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = c\}}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((c - \varepsilon, c + \varepsilon), x)}{N} = 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el límite existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$, si $c = 0$, entonces

$$0 \leq \text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = 0\} + A_N((\varepsilon, 1), x) \leq N.$$

Por tanto,

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = 0\}}{N} \leq 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el límite existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$, si $c = 1$, entonces

$$0 \leq \text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = 1\} + A_N((0, 1 - \varepsilon), x) \leq N.$$

Por tanto,

$$0 \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = 1\}}{N} \leq 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el límite existe y es igual a 0.

Por lo tanto, para los conjuntos unipuntuales tenemos que su límite es 0. Como los intervalos $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ se descomponen de la forma

$$[a, b] = (a, b) \cup \{a\} \cup \{b\} \quad [a, b) = (a, b) \cup \{a\} \quad (a, b] = (a, b) \cup \{b\}.$$

En consecuencia, la igualdad (1.1) se cumple para estos intervalos.

3 \implies 2 Usando el mismo argumento para cada uno de los tipos de intervalos se puede demostrar que para $0 \leq c \leq 1$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq n \leq N : \langle x_n \rangle = c\}}{N} = 0.$$

Teniendo en cuenta la descomposición se obtiene la igualdad para intervalos de la forma (a, b) .

De hecho, los diferentes intervalos $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ son equivalentes entre sí, es decir, que si la igualdad (1.1) se cumple para un tipo de intervalo entonces se cumple para los otros tipos.

3 \implies 4 Es obvio.

4 \implies 3 Sea $[a, b)$ fijo, como $[a, b) = [0, b) \setminus [0, a)$ entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N([a, b), x)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{A_N([0, b), x)}{N} - \frac{A_N([0, a), x)}{N} \right) = b - a.$$

Como es cierto para todo $[a, b)$, entonces también es cierto para todo $[a, b]$, $(a, b]$.

2 \implies 5 Es obvio.

5 \implies 3 Sea $(a, b]$ fijo, como $(a, b] = (a, 1) \setminus (b, 1)$, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b], x)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{A_N((a, 1), x)}{N} - \frac{A_N((b, 1), x)}{N} \right) = b - a.$$

Como es cierto para todo $(a, b]$, entonces también es cierto para todo $[a, b]$, $[a, b)$.

2 \implies 6 Es obvio.

6 \implies 1 Sea (a, b) fijo y sea $\varepsilon > 0$. Por densidad de D , existen $\alpha, \beta \in D$ tales que $a - \varepsilon < \alpha < a$ y $b < \beta < b + \varepsilon$. Entonces

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((\alpha, \beta), x)}{N} = \beta - \alpha < b - a + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} \leq b - a.$$

De forma análoga, se obtiene que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} \geq b - a.$$

En consecuencia,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N((a, b), x)}{N} = b - a.$$

Por lo tanto, todas las afirmaciones son equivalentes entre sí. \square

El siguiente resultado sobre integración Riemann lo hemos utilizado en el Ejemplo 2.3, que es a su vez un ejercicio en [4, Exer 1.14]. De nuevo, incluimos su prueba por completitud.

Teorema A.2 *Sea $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in [0, a)$ con $a > 0$.*

Dado $\varepsilon > 0$, existen funciones lineales a trozos L, U tales que las extensiones de sus segmentos de recta pasan por el origen ($y = kx$), y

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \quad \int_0^1 U(x) dx - \int_0^1 L(x) dx \leq \varepsilon.$$

Demostración. Separamos $\mathbb{T} \simeq [0, 1)$ en dos partes, $[0, a)$ y $[a, 1)$.

Como en $[0, a)$, $f(x) = 0$, definimos $L(x) = U(x) = 0$ para $x \in [0, a)$. Basta trabajar con f en el intervalo $[a, 1)$.

Para el intervalo $[a, 1)$, al ser f Riemann integrable en $[a, 1]$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que para toda partición $P' = \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1\}$ con $\max_{1 \leq i \leq k} (a_i - a_{i-1}) < \delta'$, si definimos

$$u(x) = \sum_{i=1}^k M_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x), \quad l(x) = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{1}_{[a_{i-1}, a_i)}(x),$$

con $m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)$ y $M_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)$, entonces

$$l(x) \leq f(x) \leq u(x), \quad \int_a^1 u(x) dx - \int_a^1 l(x) dx < \varepsilon.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, definimos funciones lineales a trozos L y U en $[a, 1)$ de la siguiente forma.

Para cada intervalo $[a_{i-1}, a_i)$,

$$L(x) = \frac{m_i}{a_i} x, \quad U(x) = \frac{M_i}{a_{i-1}} x.$$

De este modo, para cada $x \in [a_{i-1}, a_i)$, se tiene que

$$\frac{x}{a_i} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{a_{i-1}} \geq 1.$$

Por tanto,

$$L(x) \leq m_i \leq f(x) \leq M_i \leq U(x),$$

Ahora calculemos las integrales de L y U

$$\int_a^1 U(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{M_i}{a_{i-1}} x dx = \sum_{i=1}^k \left(\frac{M_i}{a_{i-1}} \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^k \left(M_i (a_i - a_{i-1}) \frac{(a_i + a_{i-1})}{2a_{i-1}} \right),$$

$$\int_a^1 L(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{m_i}{a_i} x dx = \sum_{i=1}^k \left(\frac{m_i}{a_i} \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^k \left(m_i (a_i - a_{i-1}) \frac{(a_i + a_{i-1})}{2a_i} \right),$$

y su diferencia es

$$\int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx = \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1}) \frac{(a_i + a_{i-1})}{2} \left(\frac{M_i}{a_{i-1}} - \frac{m_i}{a_i} \right).$$

Como $a_{i-1} < a_i$, se tiene que

$$\frac{M_i}{a_{i-1}} - \frac{m_i}{a_i} < \frac{M_i}{a_{i-1}} - \frac{m_i}{a_{i-1}} = \frac{M_i - m_i}{a_{i-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx < \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) (a_i - a_{i-1}) \frac{(a_i + a_{i-1})}{2a_{i-1}}.$$

Ahora, observamos que $a_{i-1} \geq a$,

$$\frac{(a_i + a_{i-1})}{2a_{i-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i-1}} + 2 \right) < 1 + \frac{a_i - a_{i-1}}{2a}.$$

Luego,

$$\int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx < \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) (a_i - a_{i-1}) + \sum_{i=1}^k \frac{M_i - m_i}{2a} (a_i - a_{i-1})^2.$$

Como f es acotada, existe $B > 0$ tal que $|f(x)| < B$ luego $M_i - m_i < 2B$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Además, como $\max_{1 \leq i \leq k} (a_i - a_{i-1}) < \delta'$

$$\sum_{i=1}^k \frac{M_i - m_i}{2a} (a_i - a_{i-1})^2 < \sum_{i=1}^k \delta' \frac{B}{a} (a_i - a_{i-1}) = \delta' \frac{B}{a} (1 - a) = \delta' K,$$

siendo $K = \frac{B}{a}(1 - a)$ una constante que no depende de la partición.

Por lo tanto,

$$\int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx < \int_a^1 u(x) dx - \int_a^1 l(x) dx + \delta' K.$$

Sea ahora $\delta > 0$ tal que $\delta < \delta'$ y que cumpla $\delta K < \varepsilon$. Si tomamos una partición P con $\max_{1 \leq i \leq k} (a_i - a_{i-1}) < \delta$, tendríamos que

$$\int_a^1 u(x) dx - \int_a^1 l(x) dx < \varepsilon \quad \text{y} \quad \delta K < \varepsilon.$$

La diferencia de las integrales de L y U en $[a, 1)$ se puede acotar por

$$\int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx < 2\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 U(x) dx - \int_0^1 L(x) dx = \int_a^1 U(x) dx - \int_a^1 L(x) dx < 2\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que existen funciones lineales a trozos L y U como las anteriores, tales que

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \quad \int_0^1 U(x) dx - \int_0^1 L(x) dx < \varepsilon.$$

□

Apéndice **B**

Resultados de análisis

En este Apéndice incluimos algunas definiciones o resultados auxiliares que son conocidos del grado, y que se han utilizado durante el trabajo.

Definición B.1 *Se define un polinomio trigonométrico como una función $P : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma*

$$P(x) = \sum_{k=-M}^M c_k e^{2\pi i k x}$$

con $c_k \in \mathbb{C}$ y $M \in \mathbb{N}$.

Teorema B.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass) *Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio trigonométrico P tal que*

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$$

La demostración y desarrollo puede leerse en [3].

Definición B.3 *La función de Bessel de orden $v \in \mathbb{Z}$, denotada por $J_v(x)$, se define como el v -ésimo coeficiente de Fourier de la función $e^{ix \sin(\theta)}$, es decir,*

$$J_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin(\theta)} e^{-in\theta} d\theta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta función la utilizamos en el Ejemplo 2.7, con los valores $v = 0$ y $x = 2\pi$.

Para más información sobre la función de Bessel, consultar el Apéndice B de [2].

Teorema B.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sean a_1, a_2, \dots, a_n y $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)$$

