UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

PRINCIPIOS DE INCERTIDUMBRE PARA LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Daniel Monserrate Ruiz Belmonte

2024

Declaración de originalidad

D. Daniel Monserrate Ruiz Belmonte, con DNI 48734443L, declaro que el Trabajo Fin de Máster presentado en la asignatura con el mismo nombre conducente a obtener el Título de Máster Universitario en Matemática Avanzada es un trabajo original mío, así como que su elaboración es consecuencia de mi trabajo personal.

En Murcia, a 2 de septiembre de 2024

Fdo.: Daniel Monserrate Ruiz Belmonte

A todos los que han estado ahí en este camino que han sido mis estudios. Desde el grado hasta el máster. Gracias.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

Para poder definir qué es un principio de incertidumbre, en primer lugar vamos a observar cómo se comporta la transformada de la dilatación de una función arbitraria f con $R > 0$:

$$f\left(\frac{x}{R}\right) \xrightarrow{\wedge} R^n \widehat{f}(R \cdot \xi)$$

Aquí podemos observar que cuando el soporte de la función f se hace más grande (R tiende a 0) nos encontramos con que el soporte de la transformada se hace más pequeño, es decir, se localiza más, y viceversa. La pregunta que aparece de manera natural es la siguiente:

¿Podemos cuantificar de alguna manera este hecho?

Es aquí donde aparecen los llamados principios de incertidumbre para la transformada de Fourier. Un principio de incertidumbre no es más que un resultado que relaciona la localización de una función y la de su transformada. De entre todos ellos destaca el mas clásico, debido a Heisenberg. Tal y como aparece en [10], se define el principio clásico de incertidumbre como el resultado que establece que una función no idénticamente cero y su transformada no pueden localizarse con precisión arbitraria.

A lo largo de este trabajo estudiaremos este y algunos otros de los principales principios que se conocen para la transformada de Fourier. El artículo de Folland y Sitaram que acabamos de citar constituirá la principal guía que seguiremos en los primeros capítulos. El resto de bibliografía se detallará en cada uno de los capítulos que ahora describimos.

El segundo capítulo del trabajo está dedicado por completo a la desigualdad clásica de Heisenberg, que ahora presentamos:

Teorema 1.0.1. *Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi}||f||_2^2$$

El objetivo será probarla de dos formas distintas en la clase de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, que previamente definiremos. La primera de estas demostraciones la realizaremos por el método directo, obteniendo el resultado utilizando básicamente técnicas de integración y propiedades de la función utilizada. Para la segunda prueba plantearemos la desigualdad en función de ciertos operadores definidos en espacios de Hilbert, y obtendremos el resultado de manera sorprendentemente sencilla, lo cual nos llevará a establecer algunas puntualizaciones posteriormente. Sin embargo, el Teorema más importante de esta sección será la extensión de esta desigualdad a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Para ello, utilizaremos un argumento de densidad: probaremos que un subconjunto de las funciones de la clase de Schwartz (donde ya sabemos que la desigualdad es cierta) es denso dentro de otro subespacio de la clase $L^2(\mathbb{R})$ donde la desigualdad no es trivial. Haciendo esto, conseguiremos extender las propiedades de la desigualdad probada a este nuevo espacio. Finalmente, concluiremos el capítulo con una aplicación de la desigualdad en el campo de la mecánica cuántica, donde el principio de incertidumbre tiene su principal y más conocida aplicación.

En el tercer capítulo el objetivo será esencialmente el mismo, de nuevo probar la desigualdad de Heisenberg pero desde un nuevo enfoque, la teoría de las funciones de Hermite, lo que nos llevará a desarrollar sus propiedades previamente para poder demostrarla posteriormente. La propiedad fundamental de estas funciones, que involucran también a los polinomios de Hermite, es que forman una base del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Probaremos este resultado mediante un desarrollo detallado paso a paso del mismo. El uso de estas técnicas nos permitirá probar varios corolarios interesantes. Por ejemplo, obtendremos la forma que debe tener la función f utilizada para que se tenga la igualdad en la desigualdad clásica y algunos resultados donde conseguiremos mejorar la desigualdad en caso de que la función sea impar u ortogonal a un subconjunto de funciones de Hermite. El último Teorema, que probaremos como Corolario, constituirá una nueva desigualdad que se establecerá en base a la distancia en norma $L^2(\mathbb{R})$ de la función inicial hasta el conjunto de funciones que establecen la igualdad en la desigualdad clásica, tal y como explicaremos detalladamente:

Teorema 1.0.2. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $||f||_2 = 1$. Sea δ un número no negativo con la propiedad de que para cada $c > 0$ y para cada número complejo λ con $|\lambda| = 1$ se tiene que*

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\Big|f(t) - \lambda c^{-1/2}\mathfrak{h}_0\Big(\frac{t}{c}\Big)\Big|^2 dt\Big]^{1/2} \geqslant \delta.$$

Entonces, se cumple que

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt\Big]^{1/2} \cdot \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d t\Big]^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi}\Big[3 - 2\Big(1 - \frac{1}{2}\delta^2\Big)^2\Big]$$

En el cuarto capítulo del trabajo, probaremos resultados similares a la desigualdad clásica, pero esta vez en sus versiones L^p en primer lugar y luego algunas versiones locales de la misma. Las versiones L^p consisten en resultados donde aparece involucrada la norma $L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p \leqslant 2$. Para las pruebas, necesitaremos de ciertas proposiciones y Lemas que introduciremos de nuevo en una sección previa. Después de esto, probaremos dos resultados relativos a las versiones locales de la desigualdad de Heisenberg, ambas probadas por Faris. El más conocido de ellos es el siguiente:

Teorema 1.0.3. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible Borel. Entonces se cumple que, $\forall f \in S(\mathbb{R})$,*

$$\int_E |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 2\pi|E| \cdot ||tf(t)||_2 \cdot ||f||_2$$

El quinto capítulo del trabajo, que se titula principios de incertidumbre cualitativos, está dedicado a algunos principios de incertidumbre diferentes a los habituales, utilizando para ello los conceptos conocidos como Annihilating pairs, que describiremos y estudiaremos como principios de incertidumbre. Son dos los Teoremas principales que probaremos. El primero de ellos será el Teorema de Benedicks:

Teorema 1.0.4. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sean además $S_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ y $S_{\widehat{f}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \widehat{f}(\xi) \neq 0\}$. Entonces:*

$$|S_f| < \infty \;\; y \;\; |S_{\widehat{f}}| < \infty \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0.$$

La prueba se basará en una reducción del caso general al caso periódico de una determinada función, buscando utilizar las propiedades de los polinomios trigonométricos para acabar concluyendo la nulidad de la función con la que trabajaremos. Después de esto, probaremos el conocido como Teorema de Amrein-Berthier, que obtendremos como corolario del Teorema de Benedicks:

Teorema 1.0.5. *Si $S, E \subseteq \mathbb{R}^n$son tales que $|S|, |E| < \infty$, entonces existe $C_{S,E} > 0$ tal que*

$$||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{S,E}[||f||_{L^2(S^c)} + ||\widehat{f}||_{L^2(E^c)}], \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Para la demostración del resultado necesitaremos de algunas técnicas y conceptos propios del análisis funcional, que definiremos y trabajaremos previamente.

En el último capítulo hablaremos de los conocidos como principios de incertidumbre del tipo Hardy, donde en esencia probaremos tres Teoremas que se irán obteniendo cada uno como corolario del anterior. La primera sección está dedicada al primero de ellos, el más general, conocido como Teorema de Beurling:

Teorema 1.0.6. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y suponer que*

$$\int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x)||\widehat{f}(y)|e^{2\pi|\langle x,y\rangle|}dxdy < +\infty.$$

Entonces $f = 0$ en ctp.

Este resultado constituye un caso particular de otro Teorema que no probaremos dada la complejidad de su prueba. La demostración se basará en el uso de técnicas de variable compleja, buscando aplicar el Teorema de Liouville a una cierta función que nos permita concluir que la función inicial con la que trabajamos, bajo las condiciones impuestas debe de ser necesariamente nula. La segunda sección está dedicada a los Teoremas conocidos como de Cowling-Price. La demostración la obtendremos de una forma elemental, trabajando con las hipótesis impuestas para acabar concluyendo que la función debe ser de nuevo nula, mediante la aplicación del Teorema de Beurling que ahora ya podemos utilizar. Finalmente, en la última sección probaremos el Teorema de Hardy, el más clásico de esta sección y que se obtiene de nuevo de manera elemental como corolario del Teorema de Beurling.

CAPÍTULO 2

Desigualdad clásica de Heisenberg

En este capítulo, el objetivo será dar diferentes demostraciones para la desigualdad clásica de Heisenberg. En concreto, daremos dos demostraciones para la desigualdad cuando la función está en la clase de Schwartz y una más elaborada de cuando la función está en la clase $L^2(\mathbb{R})$. Previo a esto, en la primera sección introduciremos algunos resultados necesarios para el desarrollo de los Teoremas, y en una última sección desarrollaremos la interpretación como principio de incertidumbre en la mecánica cuántica.

2.1. Resultados previos

Dado que el resultado involucra a la transformada de Fourier, definimos primero en qué consiste esta.

Definición 2.1.1. *Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como la función $\widehat{f}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

Veamos algunas propiedades de la transformada que utilizaremos recurrentemente. La primera de ellas es el conocido como Teorema de inversión.

Teorema 2.1.2 (Folland [9], Th. 8.26)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces se cumple que*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi,$$

en ctp $x \in \mathbb{R}^n$.

El Teorema de Plancherel aparece naturalmente para relacionar a una función con su transformada y es uno de los resultados fundamentales que usaremos en el capítulo (y en el resto del trabajo).

Teorema 2.1.3 (Folland [9], Th. 8.29)**.** *Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y además*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$$

Otra definición fundamental que utilizaremos será la de función de la clase de Schwartz, y dentro de ella, la clase de las funciones infinitamente derivables con soporte compacto.

Definición 2.1.4 (Folland [9], Def. 8.8.3)**.** *Una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se dirá de la clase de* ***Schwartz en*** $\mathbb{R}^n$ *(que se denotará en adelante como $S(\mathbb{R}^n)$) si cumple que $x^{\alpha} f^{(\beta)}(x)$ está acotado para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Aquí usamos la notación*

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad y \quad f^{(\beta)} = \partial_{x_1}^{\beta_1} \partial_{x_2}^{\beta_2} \ldots \partial_{x_n}^{\beta_n}(f)$$

Definición 2.1.5. *Denotamos con C_c^{∞} al conjunto de las funciones infinitamente derivables que tienen derivada continua con soporte compacto.*

A lo largo del trabajo se usará a menudo la siguiente propiedad, ver [9, Th. 8.22.e]: si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi),$$

que en dimensión $n = 1$ toma la forma

$$\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \, \hat{f}(\xi).$$

Finalmente, necesitaremos de las aproximaciones de la identidad para poder probar el resultado.

Definición 2.1.6. *Una familia $\{\phi_t\}_{t>0}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ se dice que es una familia de aproximaciones de la identidad en $\mathbb{R}^n$ cuando cumple las siguientes propiedades:*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) dy = 1, \ \forall t > 0$
2. $\forall t > 0, \ \int |\phi_t(y)| dy \leqslant C < \infty$
3. *Si* $\delta > 0, \ \int_{|y|>\delta} |\phi_t(y)| \, dy \xrightarrow{t \longrightarrow 0^+} 0$

Además, si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$, entonces la familia

$$\left\{ \phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x}{t}\right) \right\}_{t>0} \tag{2.1.1}$$

es una familia de aproximaciones de la identidad.

2.2. Desigualdad de Heisenberg en la clase de Schwartz

En esta sección desarrollaremos la desigualdad clásica de Heisenberg en la clase de Schwartz, tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{R}^n$, las cuales pueden encontrarse en el artículo de Benedetto [2], en concreto en el Teorema 1.1.1.

Teorema 2.2.7 (Heisenberg)**.** *Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi} ||f||_2^2 \tag{2.2.2}$$

Demostración. Tenemos que

$$0 \leqslant ||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Integrando por partes aquí, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = [|f(x)|^2 x]_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{d}{dx}(|f(x)|^2) x dx$$

Aquí, debemos notar que

$$\frac{d}{dx}[f(x)\overline{f(x)}] = \frac{d}{dx}[|f(x)|^2] = f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}$$

$$= 2Re[f'(x)\overline{f(x)}].$$

Además, si $f \in S(\mathbb{R})$, se tiene que$[|f(x)|^2 x]_{-\infty}^{\infty} = 0$. Esto se debe a que la definición de función de dicha clase implica que f esté acotada y que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |xf(x)| < \infty,$$

lo que fuerza a que $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} |f(x)| = 0$ y que $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} |xf(x)| \leqslant K < \infty$. Finalmente, esto provoca que

$$0 \leqslant \lim_{x \longrightarrow \infty} x|f(x)|^2 = \lim_{x \longrightarrow \infty} |xf(x)| \cdot |f(x)| \leqslant \lim_{x \longrightarrow \infty} K \cdot |f(x)| = 0$$

y que

$$0 \geqslant \lim_{x \longrightarrow -\infty} x|f(x)|^2 = \lim_{x \longrightarrow -\infty} -|xf(x)| \cdot |f(x)| \geqslant \lim_{x \longrightarrow -\infty} -K \cdot |f(x)| = 0$$

Por tanto, obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -2Re\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\overline{f(x)} x dx\Big] \leqslant 2\Big|\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\overline{f(x)} x dx\Big| = 2|\langle f', xf(x)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}|$$

$$\leqslant 2||f'||_2 \cdot ||xf||_2 = 2||\widehat{f'}||_2 \cdot ||xf||_2 = 2||2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)||_2 \cdot ||xf||_2$$

$$= 4\pi ||\xi \widehat{f}(\xi)||_2 \cdot ||xf||_2$$

Podemos notar que se han utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Teorema de Plancherel para poder completar la demostración. □

La misma prueba funciona también en el caso multidimensional, es decir, si $f \in S(\mathbb{R}^n)$. La única diferencia entre ambas es que aparece un factor dimensional en la constante de la desigualdad, es decir,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leqslant \frac{4\pi}{n} ||\xi \widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot ||xf||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Veamos:

Demostración. Integrando por partes en la integral de x_1 obtenemos lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} -\partial_{x_1}(|f(x)|^2) x_1 dx_1 \dots dx_n$$

Este argumento vale intercambiando x_1 por cualquier x_j. Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} -\partial_{x_j}(|f(x)|^2)x_j\, dx \quad \forall j \in 1,\dots,n$$

Al darse la igualdad con cada una de estas integrales, se dará la igualdad también con su media:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{-\sum_{j=1}\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_j}(|f(x)|^2)x_j\, dx}{n}$$
$$= \frac{-\int_{\mathbb{R}} \nabla(|f(x)|^2)\cdot x\, dx}{n}$$

Entonces, tendremos que

$$n\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 = -\int_{\mathbb{R}} \nabla(|f(x)|^2)\cdot xdx = -2\Re\Big(\int_{\mathbb{R}} \langle \nabla f(x), x\overline{f(x)}\rangle dx\Big)$$
$$\leqslant 2\Big|\int_{\mathbb{R}} \langle \nabla f(x), x\overline{f(x)}\rangle dx\Big| \leqslant 2||\nabla f||_2 \cdot ||xf||_2 = 4\pi||\xi\widehat{f}||_2\cdot||xf||_2$$

□

Corolario 2.2.8. *Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\forall x_0,\ \xi_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2|f(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi-\xi_0)^2|\widehat{f(\xi)}|^2d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{4\pi}||f||_2^2$$

Demostración. Podemos aplicar la desigualdad de Heisenberg a la función

$$F_{x_0,\xi_0}(x) = e^{-2\pi i x\xi_0} f(x+x_0)$$

que también cumple que $F \in S(\mathbb{R})$. Vemos fácilmente utilizando el Apéndice A.0.2 que $\widehat{F}_{x_0,\xi_0}(\xi) = e^{2\pi i x_0(\xi+\xi_0)}\widehat{f}(\xi+\xi_0)$. □

2.3. Demostración de la desigualdad de Heisenberg en $L^2(\mathbb{R})$

Nuestro objetivo ahora va a ser extender lo probado en el apartado anterior al espacio de las funciones de cuadrado integrable, $L^2(\mathbb{R})$. Seguiremos para ello el resultado descrito en el Teorema A.1.2 del artículo de Benedetto [2].

Para poder extenderlo utilizaremos un argumento de densidad: cogeremos un subconjunto concreto de funciones de $S(\mathbb{R})$, las funciones de clase C_c^∞ y comprobaremos su densidad dentro de otro subconjunto concreto de $L^2(\mathbb{R})$ donde la desigualdad no es inmediata.

El conjunto que utilizaremos lo denotaremos por $\mathbb{X}$ y será el siguiente:

$$\mathbb{X} = \{f \in L^2(\mathbb{R}):\ xf(x), \xi\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

dotado con la norma

$$||f||_{\mathbb{X}} = ||f||_2 + ||xf||_2 + ||\xi\widehat{f}||_2$$

Notar que si $f \in \mathbb{X}$ entonces existe la derivada débil f' que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ pues se tiene

$$\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Del mismo modo, existe $(\hat{f})'(\xi) = -2\pi i \widehat{(xf)}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$.

Nótese que fuera de este conjunto, la desigualdad de Heisenberg es trivial, ya que el lado mayor de la desigualdad no sería finito. Es decir, probando que la desigualdad se cumple en este conjunto, podremos extenderla a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Ahora bien, para poder probar que las funciones C_c^∞ son densas en este espacio, vamos a probar que si $f \in \mathbb{X}$, existe $f_n \in C_c^\infty$ tal que $||f_n - f||_{\mathbb{X}} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

El objetivo ahora va a ser buscar una sucesión de funciones f_n de clase C_c^∞ que cumpla lo que acabamos de pedir. Para ello, vamos a buscarla del estilo que aparece en el Apéndice A.0.3 con el objetivo de utilizarlo. Es decir, buscamos una función de la forma $g_n = \phi_{\frac{1}{n}} * f$, donde $\phi_{\frac{1}{n}}$ es una aproximación de la identidad asociada a una cierta función $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, como en (2.1.1). El problema es que este candidato g_n, aunque es C^∞, en general no tiene soporte compacto (si f no lo tiene). Es por ello que la estrategia que vamos a utilizar consistirá en el **truncamiento** de esta función g_n de modo que sí que sea una función de clase C_c^∞. Para ello, nuestro candidato final será la función

$$f_n = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot g_n = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \left(\phi_{\frac{1}{n}} * f\right) \tag{2.3.3}$$

donde $\chi(x)$ será una función meseta tal que $\chi \in C_c^\infty(-2,2),\ 0 \leqslant \chi \leqslant 1,\ \chi_{[-1,1]} = 1$.

Así pues, esta nueva función f_n sí que cumple que es de clase C_c^∞.

Con todo esto, vamos ya con el resultado.

Teorema 2.3.9 (Benedetto)**.** *El conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbb{X}$. Es más, si $f \in \mathbb{X}$ y f_n se define como en* (2.3.3)*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Demostración. Definimos f_n como en (2.3.3) y tenemos que ver que $||f_n - f||_{\mathbb{X}} \to 0$, donde

$$||f_n - f||_{\mathbb{X}} = ||f_n - f||_2 + ||x(f_n - f)||_2 + ||\xi\,\widehat{(f_n - f)}||_2$$

Vamos a analizar cada uno de los sumandos.

1.

$$||f_n - f||_2 = ||\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}} * f) - f||_2 = ||\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}} * f) - f + \chi\left(\frac{x}{n}\right)f - \chi\left(\frac{x}{n}\right)f||_2$$

$$= ||\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}} * f - f) + f\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)||_2$$

$$\leqslant ||\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}} * f - f)||_2 + ||f\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)||_2.$$

Aquí, podemos observar que en el segundo sumando, $|(\chi(\frac{x}{n}) - 1)f|^2 \leqslant |2f|^2$, que es integrable ya que $f \in L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int \left|\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)f\right|^2 = \int \lim_{n\to\infty} \left|\left(\chi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)f\right|^2 = \int |(1-1)f|^2 = 0,$$

utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada.

Por otro lado, para el primer sumando, $||\chi(\frac{x}{n})(\phi_{\frac{1}{n}} * f - f)||_2$, podemos aplicar la proposición A.0.3 para observar que

$$||\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}} * f - f)||_2 \leqslant ||(\phi_{\frac{1}{n}} * f - f)||_2 \to 0$$

ya que $\chi \leqslant 1$. Finalmente, tras estas consideraciones, se tiene que $||f_n - f||_2 \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$.

2.
$$||x(f - f_n)||_2 = ||x\Big(f - \chi\left(\frac{x}{n}\right)(f * \phi_{\frac{1}{n}})\Big)||_2.$$

Se tiene que $||xf||_2 = ||\widehat{xf}||_2 = ||\frac{-1}{2\pi i}(\widehat{f})'||_2 = \frac{1}{2\pi}||(\widehat{f})'||_2$. Por tanto:

$$||x\Big(f - \chi\left(\frac{x}{n}\right)(f * \phi_{\frac{1}{n}})\Big)||_2 = ||x\Big(f - \chi\left(\frac{x}{n}\right)(f * \phi_{\frac{1}{n}}) + \chi\left(\frac{x}{n}\right)f - \chi\left(\frac{x}{n}\right)f\Big)||_2$$

Separando sumandos con la desigualdad triangular obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\leqslant ||x \cdot \chi\left(\frac{x}{n}\right)(f - \phi_{\frac{1}{n}} * f)||_2 + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2 \\
&\leqslant ||x \cdot (f - \phi_{\frac{1}{n}} * f)||_2 + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2 \\
&= ||\frac{-1}{2\pi i} \cdot \Big(\widehat{f - \phi_{\frac{1}{n}} * f}\Big)'||_2 + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2 \\
&= ||\frac{-1}{2\pi i} \cdot \Big((\widehat{f})' - (\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}} \cdot \widehat{f})'\Big)||_2 + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2 \\
&= \frac{1}{2\pi}||(\widehat{f})' - (\widehat{f})' \cdot \widehat{\phi}_{\frac{1}{n}} + \widehat{f} \cdot (\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})'||_2 + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2 \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}(||(\widehat{f})'(1 - \widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})||_2 + ||\widehat{f} \cdot (\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})'||_2) + ||xf\Big(1 - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\Big)||_2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, resultado del Apéndice A.0.1 Aquí, veamos cada uno de los sumandos.

a) $||\widehat{f} \cdot (\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})'||_2$. Aquí, debemos notar que $\phi_{\frac{1}{n}}(x) := n\phi(nx)$ y por tanto

$$\widehat{\phi_{\frac{1}{n}}}(\xi) = \widehat{\phi}(\tfrac{\xi}{n}) \quad \text{y} \quad (\widehat{\phi_{\frac{1}{n}}})'(\xi) = \tfrac{1}{n}(\widehat{\phi})'(\tfrac{\xi}{n}).$$

Por tanto,
$$|(\widehat{\phi_{\frac{1}{n}}})'(\xi)| \leqslant \frac{1}{n}||(\widehat{\phi})'||_\infty = \frac{c}{n},$$

para una constante $c > 0$. Vemos que

$$||\widehat{f} \cdot (\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})'||_2 \leqslant \frac{c||f||_2}{n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$$

b) $||(\widehat{f})'(1-\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}})||_2 = \int |(\widehat{f})'(\xi)|^2\, |(1-\hat{\phi}(\frac{\xi}{n}))|^2 d\xi.$
Aquí, como $|\widehat{\phi_{\frac{1}{n}}}(\xi)| = |\widehat{\phi}(\frac{\xi}{n})| \leqslant \|\widehat{\phi}\|_\infty \leqslant \|\phi\|_1$, se tiene

$$|(\widehat{f})'(\xi)\cdot(1-\widehat{\phi_{\frac{1}{n}}})|^2 \leqslant |(\widehat{f})'(\xi)|^2\cdot(1+\|\phi\|_1)^2 \in L^1(\mathbb{R}).$$

Usando el TCD, vemos que finalmente que

$$\lim_{n\to\infty} ||(\widehat{f})'\cdot(1-\widehat{\phi}_{\frac{1}{n}}(\xi))||_2^2 = \lim_{n\to\infty}\int |(\widehat{f})'(\xi)\cdot(1-\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{n}\right))|^2 d\xi$$

$$= \int \lim_{n\to\infty} |(\widehat{f})'(\xi)\cdot(1-\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{n}\right))|^2 d\xi = \int |(\widehat{f})'(\xi)\cdot(1-\hat{\phi}(0))|^2 d\xi$$

$$= \int |(\widehat{f})'(\xi)\cdot(1-1)|^2 d\xi = 0$$

donde en el último paso se usa que $\hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$.

c) Por un argumento similar al usado en el punto anterior y teniendo en cuenta que $xf \in L^2(\mathbb{R})$, también se tiene que

$$||xf\left(1-\chi\left(\frac{x}{n}\right)\right)||_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Así pues, todo el término tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

3. $||\xi\widehat{(f-f_n)}||_2 = \frac{1}{2\pi}||(f-f_n)'||_2 = \frac{1}{2\pi}||f'-f_n'||_2$. Veamos como se comporta este término. Sustituyendo $f_n(x) = \chi(\frac{x}{n})\big(f*\phi_{\frac{1}{n}}\big)(x)$ y derivando se tiene

$$||f'-f_n'||_2 = ||f' - \frac{\chi'(\frac{x}{n})}{n}\cdot(\phi_{\frac{1}{n}}*f) - \chi\left(\frac{x}{n}\right)\cdot(\phi_{\frac{1}{n}}*f')||_2$$

$$\leqslant ||f'-\chi\left(\frac{x}{n}\right)\cdot(\phi_{\frac{1}{n}}*f')||_2 + \frac{1}{n}||\chi'\left(\frac{x}{n}\right)\cdot(\phi_{\frac{1}{n}}*f)||_2.$$

Ahora bien, como $f \in \mathbb{X}$ y $2\pi i\xi\widehat{f} = \widehat{f'} \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $f' \in L^2(\mathbb{R})$, y utilizando un argumento similar al usado en el primer sumando de la norma, también se tiene que

$$||f'-\chi\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}}*f')||_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{n}||\chi'\left(\frac{x}{n}\right)(\phi_{\frac{1}{n}}*f)||_2 \leqslant \frac{1}{n}||\chi'||_\infty||(\phi_{\frac{1}{n}}*f)||_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty}||(\phi_{\frac{1}{n}}*f)||_2 = \lim_{n\to\infty}||(\phi_{\frac{1}{n}}*f)+f-f||_2 \leqslant \lim_{n\to\infty}(||(\phi_{\frac{1}{n}}*f)-f||_2 + ||f||_2)$$

$$= ||f||_2 < \infty$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty}||f'-f_n'||_2 \to 0$

$\square$

Finalmente, tras ver que las funciones C_c^∞ son densas en el espacio $\mathbb{X}$, y como $C_c^\infty \subset S(\mathbb{R})$, dado que la desigualdad de Heisenberg se cumplía en este espacio, también se va a cumplir si $f \in \mathbb{X}$. Esto, sumado a que la desigualdad es trivialmente cierta si $f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \notin \mathbb{X}$ nos permite extender la desigualdad a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Enunciamos pues el resultado final como Corolario.

Corolario 2.3.10. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple*

$$\|f\|_2^2 \leqslant 4\pi\,||\xi\widehat{f}||_2 \cdot ||xf||_2.$$

2.4. Segunda demostración de la desigualdad de Heisenberg en $S(\mathbb{R})$

La desigualdad de Heisenberg admite otras demostraciones con interés e importancia. Una de ellas es la que se lleva a cabo utilizando operadores entre espacios de Hilbert. Para ello, volveremos a seguir el artículo de Folland y Sitaram, [10], esta vez el Theorem 2.1.

Veremos primero la desigualdad para dos operadores autoadjuntos cualesquiera para posteriormente concretarlo en los que definen la desigualdad.

En esta sección supondremos que los operadores $A : D(A) \to H$ son lineales y densamente definidos, es decir el dominio $D(A)$ es un subespacio denso en el espacio de Hilbert H. En este trabajo diremos que un operador A es autoadjunto si cumple que

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle, \quad \forall\, f, g \in D(A). \tag{2.4.4}$$

Vamos a trabajar con estos operadores autoadjuntos utilizando el conmutador de ambos, el cual definimos ahora.

Definición 2.4.11. *Sean Q, P dos operadores en un espacio de Hilbert H. Se define el conmutador de Q y P como el operador $[Q,P] = QP - PQ$.*

Naturalmente, cabe preguntarse cómo trabajamos con los dominios de definición de los operadores involucrados.

Si denotamos como $D(A)$ y $D(B)$ los dominios de definición de ambos operadores, vamos a definir $D(AB)$ como

$$D(AB) = \{f \in D(B) : Bf \in D(A)\}$$

Ahora bien, el dominio de definición del conmutador será por tanto

$$D([A,B]) = D(AB) \cap D(BA) = \{f \in D(A) \cap D(B) : Bf \in D(A),\ Af \in D(B)\}$$

Un resultado general que necesitaremos para demostrar la desigualdad de Heisenberg es el siguiente.

Teorema 2.4.12. *Sean dos operadores autoadjuntos A y B en un espacio de Hilbert H. Entonces se tiene que*

$$|\langle [A,B]f, f\rangle| \leqslant 2||Af|| \cdot ||Bf|| \quad \forall f \in D([A,B])$$

Demostración.

$$\langle [A,B]f,f\rangle = \langle ABf - BAf, f\rangle = \langle ABf,f\rangle - \langle BAf,f\rangle = \langle Bf,Af\rangle - \langle Af,Bf\rangle =$$

$$\langle Bf,Af\rangle - \overline{\langle Bf,Af\rangle} = 2i\Im(\langle Bf,Af\rangle)$$

Entonces, se tiene que $|\langle [A,B]f,f\rangle| \leqslant 2|\langle Bf,Af\rangle| \leqslant 2||Bf||\cdot||Af||$ □

Nótese aquí que la desigualdad se transforma en igualdad si y solo si $Af = ikBf$ o $Bf = ikAf$ para algún $k \in \mathbb{R}$. De hecho, para que se tenga la igualdad $|\langle [A,B]f,f\rangle| = 2|\langle Bf,Af\rangle|$ debe cumplirse, para dos vectores $u = Bf, v = Af$, que

$$|i\Im(\langle u,v\rangle)| = |\langle u,v\rangle| \Leftrightarrow \Re\langle u,v\rangle = 0.$$

Además, la igualdad en $2|\langle Bf,Af\rangle| = 2||Bf||\cdot||Af||$ se tendrá si y solo si

$$|\langle u,v\rangle| = ||u||\cdot||v|| \Leftrightarrow u = \lambda v \ o \ v = \lambda u \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Utilizando este resultado podemos probar la desigualdad de Heisenberg utilizando los operadores autoadjuntos

$$Qf(x) = xf(x) \quad \text{y} \quad Pf(x) = \frac{1}{2\pi i}f'(x),$$

tomando como dominio de ambos la clase de Schwartz, es decir con $f \in S(\mathbb{R})$.

Teorema 2.4.13. *Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces, utilizando los operadores definidos previamente y el conmutador entre ellos también se demuestra el resultado* (2.2.2).

Demostración. Sean Q, P los dos operadores descritos previamente. Podemos aplicárselos a nuestra función f:

$$[Q,P]f = x\frac{1}{2\pi i}f'(x) - \frac{1}{2\pi i}(xf(x))' = \frac{-1}{2\pi i}f(x)$$

Entonces, se tiene que

$$\frac{-1}{2\pi i}||f||_2^2 = \langle [Q,P]f,f\rangle = \langle (QP-PQ)f,f\rangle = \langle QPf,f\rangle - \langle PQf,f\rangle = \langle Pf,Qf\rangle - \langle Qf,Pf\rangle$$

$$= \langle Pf,Qf\rangle - \overline{\langle Pf,Qf\rangle} = 2i\Im(\langle Pf,Qf\rangle)$$

Por tanto:

$$|2i\Im(\langle Pf,Qf\rangle)| \leqslant 2|\langle Pf,Qf\rangle| \leqslant 2||Pf||\cdot||Qf|| = 2||\tfrac{1}{2\pi i}f'||_2\cdot||xf||_2$$

Usando Plancherel se tiene $\|f'\|_2 = \|\widehat{(f')}\|_2 = \|2\pi i\xi\hat{f}\|_2$. Hemos pues obtenido que

$$\left|\frac{-1}{2\pi i}||f||_2^2\right| = \frac{1}{2\pi}||f||_2^2 = |\langle [Q,P]f,f\rangle| \leqslant 2|\langle Pf,Qf\rangle| \leqslant 2||Pf||\cdot||Qf||$$

$$= 2||\xi\hat{f}||_2\cdot||xf||_2,$$

que era lo que se buscaba. □

El resultado anterior se puede mejorar con la siguiente observación.

Corolario 2.4.14. *Si A y B son los operadores autoadjuntos definidos previamente con los mismos dominios, sean A' = A-aI, B' = B-bI, para constantes $a, b \in \mathbb{C}$. Se tiene que*

$$|\langle [A,B]f, f\rangle| \leqslant 2 \inf_{a,b\in\mathbb{C}} ||(A-a)f|| \cdot ||(B-b)f|| \quad \forall f \in D([A,B])$$

Demostración. Observando que $[A-aI, B-bI] = (A-aI)(B-bI) - (B-bI)(A-aI) = [A,B]$, se obtiene el resultado. □

La sencillez de la prueba del Teorema 2.4.12 podría hacer sospechar al lector de su validez. Una Observación importante puede ser hecha relativa al dominio $D([A,B])$. Dada que la prueba es válida para cualquier operador, podríamos utilizar dos operadores con dominios disjuntos y que provocasen que $D([A,B]) = \{0\}$, en cuyo caso el resultado sería trivial. Incluso evitando este caso trivial, podría ocurrir que $D([A,B])$ no fuera denso en H, o que $[A,B]$ no fuera un operador cerrado con ese dominio. Si denotamos a la clausura del operador como $\overline{[A,B]}$, la desigualdad

$$|\langle \overline{[A,B]}f, f\rangle| \leqslant 2||Af|| \cdot ||Bf||, \ \forall f \in D(\overline{[A,B]}) \tag{2.4.5}$$

¿sería también cierta? La respuesta es en general que no. Veamos un contraejemplo:

Ejemplo 2.4.15. *Sea $H = L^2([0,1])$, $Af = if'$ con*

$$D(A) = \{f \in AC([0,1]) : f' \in L^2([0,1]), \ f(0) = f(1)\}$$

y $Bf = xf(x)$ con $D(B) = L^2([0,1])$ (aquí, AC es el conjunto de las funciones absolutamente continuas al cual le pedimos además que $f(0) = f(1)$ en $[0,1]$; notar que $D(A)$ coincide con el espacio de Sobolev $H^1(\mathbb{T})$). Entonces

$$[A,B]f = i(xf)' - x(if') = if \Rightarrow [A,B] = iI$$

en $D([A,B]) = D(AB) \cap D(BA)$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} D([A,B]) = \{f \in D(A) \cap D(B) : Bf \in D(A), \ Af \in D(B)\} = \\ \{f \in H^1(\mathbb{T}) : xf \in H^1(\mathbb{T}), \ if' \in L^2([0,1])\} \\ = \{f \in H^1(\mathbb{T}) : f(0) = f(1) = 0\} \\ = H_0^1([0,1]) \end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad que conocemos para este caso es

$$|\langle [A,B]f, f\rangle| = ||f||^2_{L^2([0,1])} \leqslant 2 \cdot ||f'||_{L^2([0,1])} \cdot ||xf||_{L^2([0,1])} \quad \forall f \in H_0^1([0,1]).$$

Ahora bien, en este caso $\overline{[A,B]}$ coincide con iI al ser el operador identidad acotado en $L^2([0,1])$ y $D([A,B]) = H_0^1([0,1])$ denso en $L^2([0,1])$, y se tiene que

$$|\langle \overline{[A,B]}f, f\rangle| = |\langle [A,B]f, f\rangle| = ||f||^2_{L^2([0,1])}.$$

Si quisiésemos extender la desigualdad al resultado de (2.4.5)*, este debería ser cierto para cualquier función* $f \in D(\overline{[A,B]}) = L^2[0,1]$*. Sin embargo, si consideramos la función* $f(x) = 1$ *definida en el intervalo* $[0,1]$*, esta función cumple que* $f(x) \in D(\overline{[A,B]})$ *Sin embargo, al aplicarle la desigualdad, obtenemos que*

$$||1|| \leqslant 2||(1)'|| \cdot ||x \cdot 1|| \Leftrightarrow 1 \leqslant 0,$$

lo cual es absurdo.

Es decir, para extender esta desigualdad a un dominio más grande es neceario añadir hipótesis adiccionales. La pregunta brota naturalmente. ¿Cómo podemos solucionar el inconveniente en este preciso ejemplo?

En este caso, si se tiene que $f \in D(A) \cap D(B) = H^1(\mathbb{T})$, la desigualdad correcta sería

$$|\Im(\langle Bf, Af\rangle)| \leqslant ||Af|| \cdot ||Bf|| = ||f'||_2 \cdot ||xf||_2$$

Veamos en qué se traduce esto. Integrando por partes tenemos lo siguiente:

$$\langle Bf, Af\rangle = -i\int_0^1 xf(x)\overline{f'(x)}dx = -i\Big([xf(x)\overline{f(x)}]_0^1 - \int_0^1 (xf(x))'\overline{f(x)}dx\Big)$$

$$= -i\Big(|f(1)|^2 - \int_0^1 |f(x)|^2 dx - \int_0^1 xf'(x)\overline{f(x)}dx\Big) = -i\Big(|f(1)|^2 - \int_0^1 |f(x)|^2\Big) + \langle Af, Bf\rangle.$$

Como se cumple que

$$\frac{\langle Bf, Af\rangle - \langle Af, Bf\rangle}{2i} = \Im(\langle Bf, Af\rangle),$$

se tendrán las siguientes igualdades

$$\Big|\frac{\langle Bf, Af\rangle - \langle Af, Bf\rangle}{2i}\Big| = |\Im(\langle Bf, Af\rangle)| = \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 |f(x)|^2 - |f(1)|^2\Big|$$

Como se tiene que

$$|\Im(\langle Bf, Af\rangle)| \leqslant ||Bf|| \cdot ||Af||,$$

acabamos obteniendo la desigualdad correcta para este ejemplo, ligeramente diferente a la que hemos demostrado en general:

$$\frac{1}{2}\Big|\int_0^1 |f(x)|^2 - |f(1)|^2\Big| \leqslant ||f'||_2 \cdot ||xf||_2 \quad f \in H^1(\mathbb{T})$$

2.5. Aplicaciones del principio de incertidumbre a la mecánica cuántica

Para este apartado, seguiremos principalmente los resultados del capítulo 11 del libro de Kreyszig [17].

En la mecánica cuántica, la posición de una onda-partícula (estacionaria) en un sistema de partículas se describe mediante una función de probabilidad $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int |\psi(x)|^2 = 1$, de norma 1. Es decir, si consideramos la posición de una partícula, la probabilidad de que pertenezca a un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se describe como

$$Prob(posicion \in A) = \int_A |\psi|^2 dx$$

Esta función ψ definida debe de cumplir la ecuación de Schrodinger:

$$H\psi := -\frac{\hbar}{2m} \triangle \psi + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

donde aquí, E es una constante que representa la energía del sistema. Es decir, lo que buscamos es que

$$H\psi = E\psi \Leftrightarrow \psi \in \sigma_p(H)$$

donde $\sigma_p(H)$ es el espectro puntual del operador H y por tanto, E es un autovalor del mismo.

La otra propiedad importante es el momento de la onda-partícula, que se denota como p. En mecánica clásica, el momento cumple la ecuación

$$p = m \cdot v$$

con m es la masa de la partícula y v su velocidad.

Sin embargo en mecánica cuántica, el momento cuántico se describe con la probabilidad

$$\left|\widehat{\psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 \frac{dp}{h^n},$$

donde aparece la transformada de Fourier. Es decir, la probabilidad de que este pertenezca a un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ viene dada por la expresión

$$Prob(Mom \in B) = \int_B \left|\widehat{\psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 \frac{dp}{h^n}.$$

Ahora, necesitamos definir la posición y momento medios de una partícula en términos probabilísticos.

- Definimos la posición media de la partícula como el vector

$$\vec{m_Q} = \int_{\mathbb{R}^n} x_j |\psi(x)|^2 dx \quad j = 1, \ldots, n$$

- Definimos el momento medio como el vector

$$\vec{m_P} = \int_{\mathbb{R}^n} p \left|\widehat{\psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 \frac{dp}{h^n}$$

Además de estos, necesitamos también describir las desviaciones típicas asociadas a cada uno de ellos.

- Se define la desviación típica asociada a la posición de una partícula como

$$SD(Q) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |x - \vec{m_Q}|^2 |\psi(x)|^2 dx}$$

- Del mismo modo, se define la desviación típica asociada al momento medio de una partícula como

$$SD(P) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |p - \vec{m}_P|^2 \left|\widehat{\psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 \frac{dp}{h^n}}$$

  Aquí, si hacemos el cambio de variables $p/h = \xi$ obtenemos que

$$SD(P) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |p - \vec{m}_P|^2 \left|\widehat{\psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 \frac{dp}{h^n}} = h\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - \xi_0|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}$$

  Aquí, $\xi_0 = \vec{m}_P/h$

Ahora bien, si nos fijamos hemos definido

$$SD(Q) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |x - \vec{m}_Q|^2 |\psi(x)|^2 dx} = ||(x - \vec{m}_Q)\psi||_2$$

y también

$$SD(P) = h\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - \xi_0|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi} = h||(\xi - \xi_0)\widehat{\psi}||_2$$

A estas funciones podemos aplicarles el principio de incertidumbre de Heisenberg para obtener que

$$||(x - m_Q)\psi||_2 \cdot ||(\xi - \xi_0)\widehat{\psi}||_2 \geqslant \frac{||\psi||_2^2}{4\pi}$$

o lo que es lo mismo, al tenerse que $||\psi||_2 = 1$:

$$SD_Q \cdot SD_P \geqslant \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

donde $\hbar = h/(2\pi)$ es la **constante de Planck reducida**.

Lo que esto nos está diciendo es que no puede ocurrir a la vez que tanto la posición de la partícula como el momento estén muy localizados y tengan una desviación estándar cercana a 0.

$$SD_Q \to 0 \Rightarrow SD_P \geqslant \frac{\hbar}{2SD_Q} \to \infty$$

La potencia de esta desigualdad es que establece un límite mas allá del cual los conceptos de la física no pueden ser empleados. No podemos conocer simultáneamente la posición y el momento lineal de un objeto con una exactitud aceptable.

CAPÍTULO 3

Desigualdad de Heisenberg y funciones de Hermite

La demostración del principio de incertidumbre de Heisenberg en el espacio $S(\mathbb{R})$ admite una prueba más elegante utilizando como base las funciones de Hermite y sus propiedades, entre las cuales destaca la constitución de una base ortonormal del espacio $L^2(\mathbb{R})$ contenida en $S(\mathbb{R})$. En la primera sección de este capítulo desarrollaremos estas propiedades y las utilizaremos en el capítulo siguiente para poder demostrar la desigualdad junto con otros Corolarios interesantes a los cuáles podemos acceder mediante las herramientas que aquí utilizamos.

3.1. Funciones de Hermite

El desarrollo de esta sección se hace a partir de los resultados recogidos por Stein y Shakarchi en [19], 185-190.

Definición 3.1.1. *Se define la k-ésima función de Hermite, $h_k(t)$ como la función que cumple la identidad*

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}$$

A partir de esta definición, podemos expresar las funciones para los primeros índices:

- $h_0(x) = 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $h_1(x) = 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $h_2(x) = (4x^2-2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $h_3(x) = (8x^3-12x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $h_4(x) = (16x^4-48x^2+12) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Proposición 3.1.2. *Las funciones de Hermite pueden ser definidas de forma alternativa según la fórmula*

$$h_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}}\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t^2},\ n = 0,1,2...$$

Demostración. Para x fijo, el desarrollo en serie de Taylor de $f(x-t)$ en t=0 es

$$f(x-t) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}t + \frac{f''(x)}{2!}t^2 - \frac{f'''(x)}{3!}t^3 + ...$$

Tenemos que

$$e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)} = e^{\frac{x^2}{2}}e^{-(x-t)^2}$$

Aplicando el desarrollo a $f(u) = e^{-u^2}$, con $u = x-t$, obtenemos la expresión para $f(x-t)$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x^2}{2}}e^{-(x-t)^2} &= e^{\frac{x^2}{2}}[e^{-x^2} - \frac{d}{dx}(e^{-x^2})\frac{t}{1!} + \Big(\frac{d}{dx}\Big)^2(e^{-x^2})\frac{t^2}{2!} - ...] \\ &= e^{\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)\frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Aquí, $h_k = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x^2})$ como se quería ver.

□

Corolario 3.1.3. *Para cada* $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *se tiene que* $h_j(x) = H_j(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$*, donde* $H_j(x)$ *es un polinomio de grado j. A cada uno de estos polinomios se le denomina* ***j-ésimo polinomio de Hermite****.*

Demostración. La prueba del resultado la haremos por inducción.

- Si $n = 0$, entonces $h_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, tal y como hemos visto.
- Suponemos por tanto el resultado cierto para n. Veamos qué sucede en $n+1$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx}e^{-x^2} = (-1)^{n+1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^n}{dx}e^{-x^2}\Big) \\ &= (-1)^{n+1}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d}{dx}(h_n(x)(-1)^n e^{\frac{-x^2}{2}}) = (-1)e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d}{dx}(H_n(x)e^{-x^2}) = \\ &= -e^{\frac{x^2}{2}}(H_n'(x)e^{-x^2} + H_n(x)(-2x)e^{-x^2}) = -e^{\frac{-x^2}{2}}(H_n'(x) - 2xH_n(x)) \\ &= e^{\frac{-x^2}{2}}H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

donde $H_{n+1}(x) = -H_n'(x) + 2xH_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$. □

Como consecuencia de la prueba anterior obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4. *Los polinomios de Hermite pueden escribirse de forma recurrente. De hecho, se tiene que*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

Demostración. Escribimos $H_n = h_n \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$

Derivando H_n obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = (-1)^n 2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}$$

Esto nos acaba produciendo que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx}H_n(x)$$

□

Definimos a su vez el operador funcional de Hermite.

Definición 3.1.5. *Definimos* $\mathscr{H} := -\Delta + |x|^2 = -\partial_{xx} + |x|^2$*, el operador de Hermite en* $\mathbb{R}$*, tomando como dominio la clase de Schwartz* $S(\mathbb{R})$*.*

Es decir, si $f \in S(\mathbb{R})$ *se tiene que* $\mathscr{H} f = -f'' + x^2 f$*.*

Notar que las funciones de Hermite $h_k,\ k \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$ están todas en la clase $S(\mathbb{R})$. Además, son autovectores del operador $\mathscr{H}$, como vemos a continuación.

Proposición 3.1.6. *El operador de Hermite cumple que*

$$\mathscr{H}(h_k) = (2k+1)h_k$$

Demostración. Lo comprobaremos directamente. Por un lado,

$$\mathscr{H}\left(e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}\right) = \mathscr{H}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{H}(h_k(x))\frac{t^k}{k!}$$

y por otro lado

$$\mathscr{H}\left(e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}\right) = -\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}\right) + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}-2tx+t^2} =$$

$$-\frac{d}{dx}\{(e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}(-x+2t)\} + x^2 e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)} =$$

$$e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}(-(-x+2t)^2+1) + x^2 e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}$$

$$= e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}(1-4t^2+4tx)$$

$$= e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)} + (4tx-4t^2)e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} + 2t\frac{d}{dt}\left(e^{-(\frac{x^2}{2}-2tx+t^2)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} + 2t\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} + 2t\sum_{k=0}^{\infty} kh_k(x)\frac{t^{k-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} 2kh_k(x)\frac{t^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)h_k(x)\frac{t^k}{k!}$$

De aquí se deduce que $\mathscr{H}(h_k) = (2k+1)h_k$ □

Otra propiedad fundamental del operador de Hermite es que es autoadjunto.

Proposición 3.1.7. *El operador de Hermite $\mathscr{H}$ es autoadjunto en $S(\mathbb{R})$, es decir se cumple*

$$\langle \mathscr{H} f, g\rangle = \langle f, \mathscr{H} g\rangle, \quad \forall f, g \in S(\mathbb{R}).$$

Demostración.

$$\langle \mathscr{H} f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}(f)\overline{g} = -\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 (f)\overline{g} + \int_{\mathbb{R}} x^2 f\overline{g}$$

- Ahora integramos por partes en la primera igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f\overline{g} = \left[\frac{d}{dx} f\overline{g}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f \frac{d}{dx}\overline{g}$$

- Al estar las funciones en la clase $S(\mathbb{R})$, $[\frac{d}{dx} f\overline{g}]_{-\infty}^{\infty} = 0$. Integrando de nuevo por partes, acabamos obeniendo que

$$-\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 (f)\overline{g} + \int_{\mathbb{R}} x^2 f\overline{g} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f \frac{d}{dx} g + \int_{\mathbb{R}} x^2 f\overline{g}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f \overline{\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (g)} + \int_{\mathbb{R}} f x^2 \overline{g} = \int_{\mathbb{R}} f \overline{\mathscr{H}(g)} = \langle f, \mathscr{H} g\rangle$$

□

Una propiedad fundamental de estos polinomios es que forman una base ortonormal en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 3.1.8. *Sean $\{h_k\}_k$ las funciones de Hermite. Entonces las funciones $\mathfrak{h}_k = \frac{h_k}{||h_k||_2}$ forman un sistema completo ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$*

Demostración. Para demostrar el resultado, necesitamos probar la ortogonalidad y la completitud, dado que las funciones están ya normalizadas.

- **Ortogonalidad**

  Para ver la ortogonalidad, utilizaremos el operador de Hermite. Sea $k \neq m$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{H}(\mathfrak{h}_k), \mathfrak{h}_m\rangle &= \langle (2k+1)\mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_m\rangle \\ &= (2k+1)\langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_m\rangle \end{aligned}$$

  Por otra parte, también tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{h}_k, \mathscr{H}(\mathfrak{h}_m)\rangle &= \langle \mathfrak{h}_k, (2m+1)\mathfrak{h}_m\rangle \\ &= (2m+1)\langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_m\rangle \end{aligned}$$

  Dado que el operador de Hermite es autoadjunto, ambas expresiones deben ser iguales. Restándolas, obtenemos que

$$((2k+1) - (2m+1))\langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_m\rangle = 0$$

  Pero esto solo se cumple si $\langle \mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_m\rangle = 0$, es decir, si $\langle h_k, h_m\rangle = 0$.

- **Completitud**

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definimos la función $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{zx-\frac{x^2}{2}}dx \quad z \in \mathbb{C}$$

Se tiene que $||e^{zx-\frac{x^2}{2}}||_2 < \infty$ fijado $z \in \mathbb{C}$, ya que

$$|e^{zx-\frac{x^2}{2}}| = e^{\Re(zx-\frac{x^2}{2})} = e^{\Re(z)x-\frac{x^2}{2}} \leqslant e^{|z||x|-\frac{x^2}{2}}$$

y por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{zx-\frac{x^2}{2}}|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{2|z||x|-x^2}dx < \infty$$

Esto nos permite ver que $||f(x)e^{zx-\frac{x^2}{2}}||_1 < \infty$, ya que

$$||f(x)e^{zx-\frac{x^2}{2}}||_1 \leqslant ||f(x)||_2 \cdot ||e^{zx-\frac{x^2}{2}}||_2 < \infty$$

Ahora bien, utilizando el desarrollo en serie de potencias de la exponencial se tiene que

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Como el integrando está dominado en módulo por una función $L^1(\mathbb{R})$ vamos a poder intercambiar los signos sumatorio e integral gracias a la aplicación del Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!}\Big)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\langle f, x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\rangle \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Vamos ahora a ver que en efecto se trata de un sistema completo. Para ello, supongamos que $\langle \mathfrak{h}_k, f\rangle = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\langle h_k, f\rangle = 0$. Como los polinomios de Hermite forman un sistema linealmente independiente (por ser ortogonal), es una base del conjunto de polinomos, y podemos escribir cada monomio x^m como

$$x^m = a_0H_0 + a_1H_1 + \ldots + a_mH_m =$$

Por tanto

$$\langle f, x^m e^{-\frac{x^2}{2}}\rangle = \sum_{k=0}^{m} a_k\langle f, H_k e^{-\frac{x^2}{2}}\rangle = \sum_{k=0}^{m} a_k\langle f, h_k\rangle = 0$$

Sustituyendo en (3.1.1) debe tenerse que $F(z) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Pero se tiene también que:

$$F(-2\pi it) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x)e^{\frac{-x^2}{2}})e^{-2\pi itx}dx$$

$$= \widehat{f \cdot h_0}(t)$$

Esto es, la transformada de Fourier de $f \cdot h_0$. Como hemos visto, $F = 0$, pero esto implica que $\widehat{f \cdot h_0} = 0$. Podemos utilizar el Teorema de unicidad de la transformada de Fourier (A.0.6) para concluir que $f \cdot h_0 = 0$ en casi todo punto. Como $h_0 > 0$, se tendrá que tener que $f = 0$ en casi todo punto.

□

3.2. Demostración del resultado

Después de haber desarrollado las propiedades de las funciones de Hermite, las utilizaremos para probar los resultados aquí recogidos. Previamente, necesitamos probar un Lema auxiliar que utilizaremos recurrentemente en muchas ocasiones.

Lema 3.2.9. *Sean $a, b > 0$, y f una función que cumple que tanto ella como las funciones $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} \cdot f(\lambda x)$, $\lambda > 0$, satisfacen la desigualdad*

$$||f_\lambda||_2^2 \leqslant a||xf_\lambda||_2^2 + b||(f_\lambda)'||_2^2, \quad \forall \lambda > 0. \tag{3.2.2}$$

Entonces, tanto ella como dichas funciones también cumplen que

$$||f||_2^2 \leqslant 2\sqrt{ab}||xf||_2||f'||_2 \tag{3.2.3}$$

Además, si se tiene igualdad en (3.2.3), entonces existe un $\lambda > 0$ tal que se tiene igualdad en (3.2.2).

Demostración. Sabemos que tenemos que

$$||f||_2^2 \leqslant a||xf||_2^2 + b||f'||_2^2$$

Aplicaremos esta desigualdad a las dilataciones $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} \cdot f(\lambda x)$. Estas funciones cumplen que $||f||_2 = ||f_\lambda||_2$. En efecto, con el cambio de variable $y = \lambda x$:

$$||f_\lambda||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\lambda} f(\lambda x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy = ||f||_2^2$$

Entonces, la aplicación a la desigualdad es la siguiente:

$$||f_\lambda||_2^2 = ||f||_2^2 \leqslant a||xf_\lambda||_2^2 + b||(f_\lambda)'||_2^2 \tag{3.2.4}$$

Aquí se tiene que

$$||xf_\lambda||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |xf(\lambda x)\sqrt{\lambda}|^2 dx$$

Hacemos ahora el cambio de variable $\lambda x = y$:

$$\int_{\mathbb{R}} |xf(\lambda x)\sqrt{\lambda}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{y}{\lambda} f(y)\right|^2 dy = ||\frac{y}{\lambda} f||_2^2 = \frac{1}{\lambda^2}||yf||_2^2 = \frac{1}{\lambda^2}||xf||_2^2$$

Por otra parte tenemos que:

$$||(f_\lambda)'||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |(f_\lambda)'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\lambda}(f(\lambda x))'|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\lambda\sqrt{\lambda} f'(\lambda x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |\sqrt{\lambda} f'(\lambda x)|^2 dx$$

$$= \lambda^2 ||(f')_\lambda||_2^2 = \lambda^2 ||f'||_2^2$$

Por tanto, la expresión derecha en (3.2.4) coincide con la función

$$g(\lambda) = \frac{a}{\lambda^2}||xf||_2^2 + b\lambda^2||f'||_2^2$$

Llamando $A = a||xf||_2^2$ y $B = b||f'||_2^2$, obtenemos finalmente la expresión con la que trabajaremos:

$$g(\lambda) = \frac{A}{\lambda^2} + B\lambda^2$$

Buscamos ahora minimizar esta función de una variable cuando $\lambda > 0$:

$$g'(\lambda) = \frac{-2A}{\lambda^3} + 2B\lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{\lambda^3} = B\lambda \Leftrightarrow A = B\lambda^4$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Al ser estos los únicos extremos reales, nos quedamos con el positivo, ya que buscamos $\lambda > 0$.

Veamos por tanto cual es la imagen de la función en $\lambda = (\frac{A}{B})^{\frac{1}{4}}$:

$$g\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{A}{((\frac{A}{B})^{\frac{1}{4}})^2} + B\left(\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{B}}} + B\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{B}\cdot\frac{A}{\sqrt{A}} + \frac{B}{\sqrt{B}}\cdot\sqrt{A}$$

$$= \sqrt{BA} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB}$$

Teníamos por definición de g que

$$g(\lambda) \geqslant ||f||_2^2$$

Por tanto, se tiene también que $2\sqrt{AB} \geqslant ||f||_2^2$.

Ahora bien,

$$2\sqrt{AB} = 2\sqrt{ab\cdot||f'||_2^2\cdot||xf||_2^2} = 2\sqrt{ab}\cdot||xf||_2\cdot||f'||_2$$

Por tanto, hemos obtenido que

$$2\sqrt{ab}||xf||_2\cdot||f'||_2 \geqslant ||f||_2^2,$$

que era lo que se buscaba.

La última afirmación del lema se obtiene tomando $\lambda = (A/B)^{1/4}$, que como hemos visto implica

$$2\sqrt{AB} = \frac{A}{\lambda^2} + B\lambda^2,$$

y sustituyendo los valores de A y B,

$$2\sqrt{ab}||xf||_2 \cdot ||f'||_2 = \frac{a}{\lambda^2}||xf||_2^2 + b\lambda^2||f'||_2^2 = a\|xf_\lambda\|_2^2 + b\|f'_\lambda\|_2^2.$$

□

Vamos ya con la nueva demostración de la desigualdad de Heisenberg junto con sus Corolarios. Para ello, seguiremos los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 recogidos en el artículo de de Bruijn [7].

En la demostración utilizaremos además la identidad de Parseval (A.0.7) para funciones definidas en un espacio de Hilbert.

Teorema 3.2.10 (de Bruijn)**.** *Si* $f \in S(\mathbb{R})$, *entonces* $||f||^2 \leqslant 4\pi||xf|| \cdot ||\xi\widehat{f}||$

Demostración.

Dado que las funciones de Hermite forman una base en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, si $f \in S(\mathbb{R})$ se tiene que

$$||f||^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)|\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle\overline{\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\langle f, (2j+1)\mathfrak{h}_j\rangle\overline{\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle} = \sum_{j=0}^{\infty}\langle f, \mathscr{H}(\mathfrak{h}_j)\rangle\overline{\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle} = \sum_{j=0}^{\infty}\langle \mathscr{H}(f), \mathfrak{h}_j\rangle\overline{\langle f, \mathfrak{h}_j\rangle}$$

$$= \langle \mathscr{H}(f), f\rangle = \langle -f'', f\rangle + \langle x^2 f, f\rangle = ||f'||^2 + ||xf||^2 \tag{3.2.5}$$

Esto se tiene ya que al ser $f \in S(\mathbb{R})$, $f \in D(\mathscr{H})$, el dominio del operador de Hermite.

Aquí, hemos concluido que $\langle -f'', f\rangle = \langle f', f'\rangle$ utilizando integración por partes.

Por tanto, por el Lema (3.2.9), obtenemos inmediatamente que

$$||f||^2 \leqslant 2||f'|| \cdot ||xf|| \leqslant 4\pi||\xi\widehat{f}|| \cdot ||xf||$$

utilizando el Teorema de Plancherel en este último caso.

□

Ahora bien, podemos preguntarnos qué forma debe tener la función para que se cumpla la igualdad.

Corolario 3.2.11. *La igualdad en* (3.2.10) *se da si y solo si se cumple que* f *sea de la forma*

$$f = c_\lambda e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

con $\lambda > 0$.

Demostración. Obtendremos el resultado en dos pasos. El primer lugar, para que se tenga la igualdad en $||f||^2 \leqslant ||f'||^2 + ||xf||^2$, de la prueba se deriva que

$$||f||^2 = ||f'||^2 + ||xf||^2 \Leftrightarrow \langle f, h_j \rangle = 0 \quad \forall j \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow f = c_0 h_0 = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}},$$

con c_0 constante.

Por otro lado, observando la prueba del Lema 3.2.9, para que exista la igualdad en $||f||^2 = 2||xf|| \cdot ||f'||$ debe de existir $\lambda > 0$ con $f_\lambda = \sqrt{\lambda} \cdot f(\lambda x)$ tal que

$$||f_\lambda||_2^2 = ||(f_\lambda)'||_2 + ||xf_\lambda||_2,$$

lo que implica que, debe cumplirse que $f_\lambda = c_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$ y finalmente con un cambio de variable se obtiene que

$$f = c_\lambda e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}},$$

con c_λ constante dependiendo de λ.

□

Vamos a ver un par de Corolarios que mejoran la desigualdad obtenida.

Corolario 3.2.12. *Si $f \in S(\mathbb{R})$ y es impar, entonces se cumple que*

$$||f||^2 \leqslant \frac{4\pi}{3} ||xf|| \cdot ||\xi \widehat{f}||$$

Demostración. Si f es impar, entonces se tiene que $\langle f, \mathfrak{h}_0 \rangle = 0$, con lo que en la prueba anterior tenemos que

$$||f||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle|^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) |\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle|^2 = \frac{1}{3} \langle \mathscr{H}(f), f \rangle$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (||f'||^2 + ||xf||^2)$$

Aplicando el Lema 3.2.9 y Plancherel se obtiene el resultado.

□

Corolario 3.2.13. *Si $f \in S(\mathbb{R})$ y es ortogonal a $\{\mathfrak{h}_j\}_{\{0 \leqslant j < J\}}$, entonces se tiene que $||f||^2 \leqslant \frac{4\pi}{2J+1} ||xf|| \cdot ||\xi \widehat{f}||$*

Demostración. La prueba es similar al caso impar utilizando que $\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle = 0 \quad 0 \leqslant j < J$. □

Al igual que en el resultado principal, en este Corolario la igualdad se tiene si y solo si

$$\exists \lambda > 0 : \ f_\lambda = c \cdot h_J(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 \cdot h_J\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

En el caso impar del Corolario 3.2.12 se tendrá que $J = 0$. Entonces, la igualdad se tiene si

$$f(x) = c' \cdot h_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = c_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}$$

Además, por densidad, estas relaciones pueden extenderse a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Un resultado interesante y similar al principio de incertidumbre es el siguiente.

Teorema 3.2.14 (de Bruijn). *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $||f||_2 = 1$. Sea δ un número no negativo con la propiedad de que para cada $c > 0$ y para cada número complejo λ con $|\lambda| = 1$ se tiene que*

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t) - \lambda c^{-1/2}\mathfrak{h}_0\left(\frac{t}{c}\right)\right|^2 dt\right]^{1/2} \geqslant \delta. \tag{3.2.6}$$

Entonces, se cumple que

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right]^{1/2} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 dt\right]^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi}\left[3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2\right]$$

Observación 3.2.15. *Mediante el cambio de variable $\frac{t}{c} = y$, el resultado (3.2.6) se transforma en*

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sqrt{c}f(ct) - \lambda\mathfrak{h}_0(t)\right|^2 dt\right]^{1/2} \geqslant \delta.$$

Es decir, el resultado nos proporciona una nueva desigualdad en base a la distancia en la norma $L^2(\mathbb{R})$ entre la dilatación de la función con la que trabajamos y la función $\mathfrak{h}_0 = \frac{h_0}{||h_0||_2}$, donde h_0 era la función de Hermite que nos proporcionaba la igualdad en la desigualdad de Heisenberg.

Demostración. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\gamma_j = \langle f, \mathfrak{h}_j \rangle$$

Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^2 = 1$$

De la demostración que hemos dado del principio de incertidumbre, ver (3.2.5), se deduce la siguiente igualdad.

$$||tf(t)||_2^2 + ||f'(t)||_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)|\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle|^2$$

Ahora bien:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)|\langle f, \mathfrak{h}_j \rangle|^2 \geqslant [|\gamma_0|^2 + 3(|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 + ...)]$$

$$= |\gamma_0|^2 + 3(1 - |\gamma_0|^2) = (3 - 2|\gamma_0|^2)$$

Es decir,

$$||tf(t)||_2^2 + ||f'(t)||_2^2 \geqslant (3 - 2|\gamma_0|^2). \tag{3.2.7}$$

Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, utilizando (3.2.6) y tomando $c = 1$ (ya que por hipótesis el resultado es cierto para todo $c > 0$), utilizando que tenemos una base ortonormal llegamos a que

$$\delta^2 \leqslant ||f - \lambda\mathfrak{h}_0||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f - \lambda\mathfrak{h}_0|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j\mathfrak{h}_j - \lambda\mathfrak{h}_0\right|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|(\gamma_0 - \lambda)\mathfrak{h}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j\mathfrak{h}_j\right|^2 = |\gamma_0 - \lambda|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2$$

$$= |\gamma_0 - \lambda|^2 + (1 - |\gamma_0|^2)$$

Ahora si $\gamma_0 = |\gamma_0|e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, escogiendo $\lambda = e^{i\theta}$ tenemos que $\overline{\lambda}\gamma_0 = |\gamma_0| \geqslant 0$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\delta^2 \leqslant |\gamma_0 - \lambda|^2 + (1 - |\gamma_0|^2) &= |\gamma_0|^2 + |\lambda|^2 - 2\Re(\gamma_0\overline{\lambda}) + (1 - |\gamma_0|^2)\\ &= |\gamma_0|^2 + 1 - 2|\gamma_0| + (1 - |\gamma_0|^2) = 2(1 - |\gamma_0|)\end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$|\gamma_0|^2 \leqslant \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2$$

Trabajando ahora con esto y (3.2.7), se obtiene que

$$||tf(t)||_2^2 + ||f'(t)||_2^2 \geqslant (3 - 2|\gamma_0|^2) \geqslant \left[3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2\right]$$

Llamando $\left[3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2\right] = \alpha$ se tiene que

$$||tf(t)||_2^2 + ||f'(t)||_2^2 \geqslant \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot ||f||_2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot ||tf(t)||_2^2 + \frac{1}{\alpha}||f'(t)||_2^2 \geqslant ||f||_2^2$$

Este razonamiento, que hemos aplicado a f, podíamos igualmente haberlo aplicado a cualquiera de las funciones $f_c(t) = \sqrt{c}f(ct)$, $c > 0$, por la Observación 3.2.15. Utilizando el Lema 3.2.9 obtenemos que también se cumple que

$$||tf(t)||_2 \cdot ||f'(t)||_2 \cdot 2\frac{1}{\alpha} \geqslant ||f||_2^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow ||tf(t)||_2 \cdot ||f'(t)||_2 \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left[3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2\right]$$

Finalmente, el Teorema de Plancherel nos da

$$||tf(t)||_2 \cdot ||\xi\widehat{f}(\xi)||_2 \geqslant \frac{1}{4\pi} \cdot \left[3 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\delta^2\right)^2\right]$$

□

Observación 3.2.16. Veamos una interpretación del Teorema 3.2.14. Denotamos por

$$\mathscr{H}_0 := \left\{\frac{\lambda}{\sqrt{c}}\mathfrak{h}_0\left(\frac{t}{c}\right) : |\lambda| = 1,\ c > 0\right\}$$

al conjunto de todas las funciones con norma 1 en $L^2(\mathbb{R})$ que alcanzan la igualdad de Heisenberg. Entonces se tiene la siguiente propiedad

Corolario 3.2.17. *Si $\|f\|_2 = 1$ y para algún $\varepsilon \in (0,1)$ se cumple*

$$\left|4\pi\,\|xf\|_2 \cdot \|\xi\hat{f}\|_2 - \|f\|_2^2\right| < \varepsilon^2, \tag{3.2.8}$$

entonces

$$\mathrm{dist}\,(f, \mathscr{H}_0) < \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\varepsilon. \tag{3.2.9}$$

Demostración. Sea $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon$. Suponer por reducción al absurdo que no se cumple (3.2.9). Entonces, se verifica la hipótesis (3.2.6) del Teorema 3.2.14, con $\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon$, y por el teorema podemos concluir que

$$4\pi \|xf\|_2 \cdot \|\xi \hat{f}\|_2 \geqslant 3 - 2\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2 = 1 + 2\delta^2 - \frac{\delta^4}{2}.$$

Esto implica

$$4\pi \|xf\|_2 \cdot \|\xi \hat{f}\|_2 - 1 \geqslant 2\delta^2 - \frac{\delta^4}{2} \geqslant \frac{3}{2}\delta^2 = \varepsilon^2,$$

lo cual contradice (3.2.8). □

La interpretación de este resultado nos dice que si una función f, con $\|f\|_2 = 1$, está cercana a cumplir la igualdad de Heisenberg (en el sentido de (3.2.8)), entonces f debe estar cerca del conjunto de minimizantes $\mathscr{H}_0$.

CAPÍTULO 4

Versiones L^p y locales de la desigualdad de Heisenberg

En este capítulo vamos a explorar algunas versiones de la desigualdad de Heisenberg para los espacios L^p, así como las versiones locales del principio de incertidumbre debidas a Faris. Excepto en la primera sección donde se recogen algunos resultados previos necesarios para el desarrollo de los resultados, la fuente que seguiremos principalmente será el artículo de Benedetto (ver [2]), de donde extraeremos todos los Teoremas que aquí se detallan y que señalaremos en cada enunciado.

4.1. Resultados previos

Para probar los principales resultados de este capítulo, vamos a necesitar de algunos resultados previos del mismo modo que hemos hecho en el capítulo 2.

Lema 4.1.1. *Si f cumple el teorema de inversión, entonces se tiene que $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$*

Demostración.

Sabemos que $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$.

Por el Teorema de inversión para la transformada de Fourier, se tiene además que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi,$$

que es una nueva forma de escribir $f(x)$.

Por tanto, se tiene también que

$$\hat{\hat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi i x\xi}d\xi = f(-x)$$

□

También necesitaremos de la desigualdad de Hausdorff-Young.

Teorema 4.1.2 (Folland [9], Th. 8.21)**.** *Sean p tal que $1 \leqslant p \leqslant 2$ y q tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$||\hat{f}||_q \leqslant ||f||_p$$

Proposición 4.1.3 (Folland [9], Prop. 6.1)**.** *Sean p tal que $1 < p < +\infty$ y q tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean además a y b dos números reales no negativos. Entonces se tiene que*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

La siguiente se conoce como la desigualdad integral de Minkowski.

Proposición 4.1.4 (Folland [9], Prop. 6.19)**.** *Sean $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ medible. Entonces se cumple que*

$$\Big|\Big| \int_Y F(x,y)dy \Big|\Big|_{L^p(X)} \leqslant \int_Y ||F(x,y)||_{L^p(X)} dy$$

siempre y cuando $\int_Y ||F(x,y)||_{L^p(X)}\, dy$ sea finita.

Definición 4.1.5. *Se define el operador de Hardy como el operador lineal positivo P_1 definido para funciones medibles Lebesgue en $(0,\infty)$ como*

$$P_1(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x > 0$$

La siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Hardy, utiliza el operador previamente definido y la desigualdad de Minkowski. El resultado lo hemos tomado de Benedetto, [2, 2.1.1].

Proposición 4.1.6 (Hardy)**.** *$\forall f \geqslant 0$ medible en $(0,\infty)$ y $p > 1$ se tiene que*

$$\int_0^\infty \Big(\frac{P_1(f)(t)}{t}\Big)^p dt \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty f(t)^p dt$$

Demostración. Veamos cómo se comportan las integrales.

El cambio de variable $y = xt$ nos proporciona lo siguiente:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = \int_0^1 f(xt)dt$$

Podemos aplicar por tanto la desigualdad de Minkowski y obtenemos:

$$\Big(\int_0^\infty \Big|\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^\infty \Big|\int_0^1 f(xt)dt\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_0^1 \Big(\int_0^\infty |f(xt)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} dt$$

Haciendo ahora en esta nueva integral el cambio $xt = y$ se obtiene el resultado:

$$= \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}} dt \Big(\int_0^\infty |f(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}\Big(\int_0^\infty |f(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Para la desigualdad de Minkowski, hemos utilizado que los intervalos en la recta real con la medida de Lebesgue son medibles y la función considerada también lo es.

□

Como Corolario tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.1.7. *Sea g una función de clase C^1 en $[0,+\infty)$ y tal que $g(0)=0$. Entonces se cumple que*

$$\int_0^\infty \Big|\frac{g(x)}{x}\Big|^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty |g'(x)|^p dx$$

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$g(x) = \int_0^\infty g'(t)dt + g(0) = \int_0^\infty g'(t)dt = P_1(g')(x).$$

Si aplicamos ahora la proposición 4.1.6, obtenemos que

$$\int_0^\infty \Big|\frac{g(x)}{x}\Big|^p dx = \int_0^\infty \frac{|P_1(g')(x)|^p}{x^p} dx \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^\infty |g'(x)|^p dx$$

□

4.2. Versiones L^p

En todo el apartado, vamos a trabajar con una norma L^p con $1 < p \leqslant 2$.

Proposición 4.2.8 (Benedetto, Th. 2.1.2)**.** *Sea $1 < p \leqslant 2$. Entonces, $\forall f \in S(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$||f||_2^2 \leqslant 4\pi ||tf(t)||_p ||\xi \widehat{f}(\xi)||_p$$

Demostración. Comenzaremos revisando la desigualdad del principo de incertidumbre clásico para posteriormente utilizar la desigualdad de Hölder en su versión $L^p(\mathbb{R})$ en lugar de Cauchy-Schwarz y finalmente usar Hausdorff-Young.

Teníamos que

$$0 \leqslant ||f||_2 = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx$$

Ahora, integrando por partes y teniendo en cuenta que si $f \in S(\mathbb{R})$, se tiene que $[x|f(x)|^2]_{-\infty}^\infty = 0$, se obtenía que

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = [|f(x)|^2 x]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dx}(|f(x)|^2) x dx = -\int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dx} f(x)\overline{f(x)} x dx$$

Aquí,

$$\frac{d}{dx}[f(x)\overline{f(x)}] = \frac{d}{dx}[|f(x)|^2] = f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)} = 2Re[f(x)\overline{f(x)}].$$

Por tanto, obtenemos que

$$-2Re\Big[\int_{-\infty}^\infty f'(x)\overline{f(x)} x dx\Big] \leqslant 2\Big|\int_{-\infty}^\infty f'(x)\overline{f(x)} x dx\Big| = 2|\langle f', xf(x)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}| \leqslant 2||f'||_q \cdot ||xf||_p$$

donde aquí, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por tanto, utilizando el Lema 4.1.1 obtenemos:

$$2||f'(x)||_q \cdot ||xf(x)||_p = 2||f'(-x)||_q \cdot ||xf(x)||_p$$

$$= 2||\widehat{\widehat{(f')}}(x)||_q \cdot ||xf(x)||_p \leqslant 2||\widehat{(f')}(x)||_p \cdot ||xf(x)||_p$$
$$= 2||2\pi i\xi \widehat{f}(\xi)||_p \cdot ||xf(x)||_p = 4\pi||\xi \widehat{f}(\xi)||_p \cdot ||xf(x)||_p$$

□

Ahora bien, aquí cabe preguntarse si esta es la mejor acotación posible. La respuesta es que no, cuando $1 < p < 2$ (para $p = 2$ ya sabemos que se puede alcanzar la igualdad en algunos casos). Para ello podemos acudir al resultado del apéndice A.0.4, una mejora de la desigualdad de Hausdorff-Young probada por Babenko y Beckner (ver [1], [3]). Usando la constante $B_1(p) < 1$ que aperece en (A.0.4) y repitiendo la prueba anterior se puede obtener el siguiente resultado.

Proposición 4.2.9. *Sea $1 < p \leqslant 2$. Entonces, $\forall f \in S(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$||f||_2^2 \leqslant 4\pi B_1(p)||tf(t)||_p||\xi \widehat{f}(\xi)||_p$$

donde $B_1(p) = ((p^{\frac{1}{p}})(q)^{\frac{-1}{q}})^{\frac{1}{2}}$

Después de este resultado, podemos dar otro también en espacios L^p donde la constante está aún más refinada siempre y cuando estemos en un espacio más concreto, el espacio $S_0(\mathbb{R})$, de funciones tales que $f \in S(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$. Previamente vamos a demostrar un Lema auxiliar.

Lema 4.2.10. *Sea $1 < p \leqslant 2$. Si se cumple que*

$$||f||_2^2 \leqslant p\Big(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^q dx}{q}\Big), \quad \forall f \in S_0(\mathbb{R}), \tag{4.2.1}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces también se cumple que

$$||f||_2^2 \leqslant p||xf||_p \cdot ||f'||_q$$

Demostración. Vamos a aplicar la desigualdad (4.2.1) a las funciones $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$, $\lambda > 0$, que también están en S_0. Previamente hemos visto que $||f_\lambda||_2 = ||f||_2$:

$$\frac{1}{p}||f||_2^2 = \frac{1}{p}||f_\lambda||_2^2 \leqslant \frac{||xf_\lambda||_p^p}{p} + \frac{||(f_\lambda)'||_q^q}{q}$$
$$= \lambda^{\frac{p}{2}} \frac{||xf(\lambda x)||_p^p}{p} + \lambda^{\frac{q}{2}} \cdot \lambda^q \cdot \frac{||f'(\lambda x)||_q^q}{q}$$

El cambio de variable $\lambda x = y$ nos proporciona el siguiente paso:

$$= \frac{\lambda^{\frac{p}{2}}}{\lambda^{p+1}} \cdot \frac{||yf||_p^p}{p} + \frac{\lambda^{\frac{3q}{2}}}{\lambda} \cdot \frac{||f'||_q^q}{q}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{\frac{p}{2}+1}} \cdot \frac{||xf||_p^p}{p} + \lambda^{\frac{3q}{2}-1} \cdot \frac{||f'||_q^q}{q} \tag{4.2.2}$$

Ahora bien, trabajando un poco las potencias de λ, escribimos

$$\lambda^{\frac{p}{2}+1} = \lambda^{p(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} = \mu^p,$$

donde tomamos $\mu := \lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}$, y

$$\lambda^{\frac{3q}{2}-1} = \lambda^{q(\frac{3}{2}-\frac{1}{q})} = \lambda^{q(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} = \mu^q$$

Además de estas definiciones, llamaremos

$$A = ||xf||_p^p, \quad B = ||f'||_q^q$$

Entonces podemos reescribir la expresión (4.2.2) en función de estos elementos como

$$\frac{1}{p}||f||_2^2 \leqslant \frac{1}{\mu^p} \cdot \frac{A}{p} + \mu^q \cdot \frac{B}{q}, \quad \forall \mu > 0.$$

El siguiente objetivo será minimizar en μ la función

$$h(\mu) = \frac{1}{\mu^p} \cdot \frac{A}{p} + \mu^q \cdot \frac{B}{q}.$$

Derivamos, igualamos a 0 y obtenemos:

$$h'(\mu) = \frac{-p}{\mu^{p+1}} \cdot \frac{A}{p} + q\mu^{q-1} \cdot \frac{B}{q} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{\mu^{p+1}} = B\mu^{q-1} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \mu^{p+q}$$

$$\Leftrightarrow \mu = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p+q}} = \mu_0$$

Vamos a evaluar la función en este punto.

$$h(\mu_0) = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{p}{p+q}} \cdot \frac{A}{p} + \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{q}{p+q}} \cdot \frac{B}{q}$$

$$= B^{\frac{p}{p+q}} \cdot A^{1-\frac{p}{p+q}} \cdot \frac{1}{p} + A^{\frac{q}{p+q}} \cdot B^{1-\frac{q}{p+q}} \cdot \frac{1}{q}$$

$$= A^{\frac{q}{p+q}} \cdot B^{\frac{p}{p+q}} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$= A^{\frac{q}{p+q}} \cdot B^{\frac{p}{p+q}}$$

Entonces, observando que

$$\frac{p}{p+q} = \frac{p}{pq} \cdot \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \frac{1}{q}, \quad \frac{q}{p+q} = \frac{q}{pq} \cdot \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \frac{1}{p}$$

se tiene que

$$h(\mu_0) = A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}}$$

Con esto concluimos que

$$\frac{1}{p}||f||_2^2 \leqslant ||xf||_p \cdot ||f'||_q$$

□

Utilizando este Lema estamos en condiciones de demostrar el resultado completo.

Proposición 4.2.11 (Benedetto, Th. 2.1.3)**.** *Sea* $1 < p \leqslant 2$. *Entonces,* $\forall f \in S_0(\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$||f||_2^2 \leqslant 2\pi p||xf||_p \cdot ||\xi \widehat{f}||_p$$

Demostración. Veamos la desigualdad:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \leqslant \Big(\int_0^\infty |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty \Big|\frac{1}{x} f(x)\Big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant p\Big(\int_0^\infty |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}},$$

donde hemos utilizado que

$$P_1(f')(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

y que se tiene con el Corolario 4.1.7 que

$$\Big(\int_0^\infty \Big|\frac{1}{x} P_1(f')(x)\Big|^q dx\Big) \leqslant \Big(\Big(\frac{q}{q-1}\Big)^q \int_0^\infty |f'(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} = p\Big(\int_0^\infty |f'(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Ahora bien, vamos a ver como se comporta la norma en todo $\mathbb{R}$:

$$||f||_2^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^0 |f(x)|^2 dx$$
$$= \int_0^\infty |f(x)|^2 dx + \int_0^\infty |f(-x)|^2 dx$$

donde lo hemos obtenido mediante el cambio de variable $x = -y$. Por tanto llamando $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx + \int_0^\infty |\widetilde{f}(x)|^2 dx \leqslant p\Big[\Big(\int_0^\infty |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$+ \Big(\int_0^\infty |x\widetilde{f}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty |-f'(-x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big]$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos:

$$= p\Big[\Big(\int_0^\infty |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_{-\infty}^0 |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{-\infty}^0 |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big)\Big]$$

Seguidamente, vamos a aplicar la desigualdad de (4.1.3) para obtener que

$$\Big(\int_0^\infty |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\int_0^\infty |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_0^\infty |f'(x)|^q dx}{q}$$

y

$$\Big(\int_{-\infty}^0 |xf(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{-\infty}^0 |f'(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\int_{-\infty}^0 |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_{-\infty}^0 |f'(x)|^q dx}{q}$$

Entonces, se tendrá que

$$\frac{1}{p}||f||_2^2 \leqslant \frac{\int_0^\infty |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_0^\infty |f'(x)|^q dx}{q} + \frac{\int_{-\infty}^0 |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_{-\infty}^0 |f'(x)|^q dx}{q}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^\infty |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_{-\infty}^\infty |f'(x)|^q dx}{q}$$

Es decir,

$$||f||_2^2 \leqslant p\Big(\frac{\int_{-\infty}^\infty |xf(x)|^p dx}{p} + \frac{\int_{-\infty}^\infty |f'(x)|^q dx}{q}\Big)$$

Ahora aplicando el Lema 4.2.10 y la desigualdad de Hausdorff-Young, se obtiene finalmente que

$$||f||_2^2 \leqslant p||xf||_p \cdot ||f'||_q \leqslant 2p\pi||xf||_p \cdot ||\xi\widehat{f}||_p.$$

□

Al igual que en el resultado (4.2.9), la desigualdad obtenida no es óptima y se puede mejorar, por ejemplo, utilizando el resultado de Beckner-Babenko. En ese caso la desigualdad sería la siguiente:

Proposición 4.2.12. *El resultado de* (4.2.11) *se puede mejorar a*

$$||f||_2^2 \leqslant 2p\pi B_1(p)||xf||_p \cdot ||\xi\widehat{f}||_p, \quad f \in S_0(\mathbb{R}).$$

4.3. Versiones locales: Teorema de Faris

En este apartado, dedicado a las versiones locales de la desigualdad de Heisenberg, estudiaremos principalmente el conocido como principio de incertidumbre de Faris. Después de este, daremos también una versión del mismo para dimensiones mayores de 2. En esta parte seguimos la referencia de Benedetto [2, Th. 3.1.1].

Teorema 4.3.13 (Faris)**.** *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible Borel. Entonces se cumple que, $\forall f \in S(\mathbb{R})$,*

$$\int_E |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 2\pi|E| \cdot ||tf(t)||_2 \cdot ||f||_2$$

Demostración. En primer lugar, tenemos que

$$\int_E |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant |E| \cdot ||\widehat{f}||_\infty^2 \leqslant |E| \cdot ||f||_1^2.$$

La última desigualdad se obtiene de que

$$||\widehat{f}||_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\Big| \leqslant \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-2\pi ix\xi}|dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = ||f||_1$$

Por otra parte, tenemos que

$$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\sqrt{\lambda^2+x^2}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} dx \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 (\lambda^2+x^2) dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\lambda^2+x^2} dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)\lambda|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \sqrt{\pi} \Big(\lambda ||f||_2^2 + \frac{1}{\lambda} ||xf||_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, siguiendo un argumento de minimización similar al Lema 3.2.9, obtendremos que

$$\frac{A}{\lambda} + \lambda B \geqslant 2\sqrt{AB}$$

donde $A = ||xf||_2^2$ y $B = ||f||_2^2$.

Introduciendo este resultado en la desigualdad que teníamos, se obtiene

$$||f||_1 \leqslant \sqrt{\pi} \Big(\lambda ||f||_2^2 + \frac{1}{\lambda} ||xf||_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow ||f||_1^2 \leqslant \pi \Big(\lambda ||f||_2^2 + \frac{1}{\lambda} ||xf||_2^2 \Big)$$

$$\Rightarrow ||f||_1^2 \leqslant 2\pi ||f||_2 \cdot ||xf||_2$$

Esta desigualdad recibe el nombre de desigualdad de Carlson.

Finalmente, combinando esto con la primera desigualdad de la demostración, obtenemos que

$$\int_E |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leqslant |E| \cdot 2\pi \cdot ||f||_2 \cdot ||xf||_2$$

□

Un resultado similar a este pero para dimensión $n \geqslant 3$ es el siguiente.

Teorema 4.3.14 (Faris)**.** *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$. Entonces se cumple que*

$$\int_E |\widehat{f}|^2 \leqslant C_n \cdot |E|^{\frac{2}{n}} \cdot ||xf||_2^2 \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n),$$

para una constante $C_n > 0$ que sólo depende de n.

Observación 4.3.15. *Lo primero que debemos resaltar es que a lo largo de la prueba nos irán apareciendo constantes reales que llamaremos $K_i, i = 1,2....$ Todas ellas nos acabarán conformando la constante C_n final del enunciado.*

Demostración. Dado $r > 0$ y tomando $f \in S(\mathbb{R}^n)$, la dividimos en dos partes según la bola de centro 0 y radio r:

$$f = f \cdot \chi_{B_r(0)} + f \cdot \chi_{B_r^c(0)} = f_0 + f_1$$

Ahora bien, utilizando esto podemos trabajar con sus normas para obtener las siguientes desigualdades:

$$\Big(\int_E |\widehat{f}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_E |\widehat{f_0}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_E |\widehat{f_1}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_E ||\widehat{f_0}||_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + ||\widehat{f_1}||_2$$

$$= |E|^{\frac{1}{2}} \cdot ||\widehat{f_0}||_\infty + ||f_1||_2$$

Entonces, por un lado tenemos las siguientes desigualdades:

$$||f_1||_2^2 = \int_{|x|\geqslant r} |f(x)|^2 \leqslant \int_{|x|\geqslant r} \frac{|x|^2}{r^2}|f(x)|^2 = \frac{1}{r^2}\int_{|x|\geqslant r} (|x|\cdot|f(x)|)^2$$

$$\leqslant \frac{||xf||_2^2}{r^2}$$

Por el otro tenemos que

$$||\widehat{f_0}||_\infty \leqslant ||f_0||_1 = \int_{|x|<r} |f(x)| \leqslant \left(\int_{|x|<r} (|x|\cdot|f(x)|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{|x|<r} \frac{1}{|x|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, en la segunda integral hacemos el cambio a coordenadas polares en dimensión n:

$$\int_{|x|<r} \frac{1}{|x|^2}dx = K_1 \cdot \int_0^r \rho^{n-3} d\rho,$$

donde $K_1 = \omega_n$ es el área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$; ver [9, Cor 2.51]. Entonces, la desigualdad nos queda de la siguiente manera:

$$\left(\int_{|x|<r} (|x||f(x)|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{|x|<r} \frac{1}{|x|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}} = K_1 \cdot \left(\int_{|x|<r} (|x||f(x)|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^r \rho^{n-3}d\rho\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant K_1 \cdot ||xf||_2 \cdot \left(\int_0^r \rho^{n-3}d\rho\right)^{\frac{1}{2}} = K_1 \cdot ||xf||_2 \cdot \frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= K_2 \cdot ||xf||_2 \cdot r^{\frac{n-2}{2}}$$

Por tanto, hemos concluido que

$$\left(\int_E |\widehat{f}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(K_2|E|^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{r}\right) \cdot ||xf||_2 \tag{4.3.3}$$

El siguiente paso será minimizar en r el factor de la parte derecha de la desigualdad. El proceso será similar al del Lema 3.2.9 pero con estos nuevos datos. En primer lugar, definimos la siguiente función:

$$h(r) = K_2 \cdot |E|^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{r}$$

Derivando e igualando a 0 obtenemos:

$$h'(r) = K_2|E|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)r^{\frac{n}{2}-2} - \frac{1}{r^2} = K_3 \cdot |E|^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{n}{2}-2} - \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = K_3 \cdot |E|^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{n}{2}-2} \Leftrightarrow r = \left(\frac{|E|^{-\frac{1}{2}}}{K_3}\right)^{\frac{2}{n}}$$

$$= K_4 \cdot |E|^{-\frac{1}{n}} = r_0$$

Evaluando ahora la función en este punto, obtenemos lo sguiente:

$$h(r_0) = K_5 \cdot |E|^{\frac{1}{2}} \cdot |E|^{-\frac{1}{n}(\frac{n}{2}-1)} + \frac{1}{K_4 \cdot |E|^{-\frac{1}{n}}}$$

$$= K_5 \cdot |E|^{\frac{1}{n}} + K_4^{-1} \cdot |E|^{\frac{1}{n}} = C_n \cdot |E|^{\frac{1}{n}}$$

Finalmente, esto junto con (4.3.3) nos acaba produciendo justo lo que queríamos probar. La constante $C_n = K_5 + K_4^{-1}$ se obtiene tras arrastrar las constantes que aparecen a lo largo de la prueba.

$$\left(\int_E |\widehat{f}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_n \cdot |E|^{\frac{1}{n}} \cdot ||xf||_2$$

$\square$

Observación 4.3.16. Una interpretación del Teorema 4.3.13 de Faris, como un principio de incertidumbre local, es como sigue: suponer que f es una función de onda con $\|f\|_2 = 1$ y cuya dispersión es pequeña, digamos $\|xf\|_2 \leqslant \varepsilon$. La desigualdad de Heisenberg dice que $\hat{f}$ debe tener una dispersión grande

$$\|\xi \hat{f}\|_2 \geqslant \frac{1}{4\pi\varepsilon}. \tag{4.3.4}$$

Esto sin embargo no excluye la posibilidad de que el soporte de $\hat{f}$ pueda ser muy pequeño, por ejemplo, podría estar concentrado en dos conjuntos muy pequeños pero muy alejados entre sí (de modo que se cumpla (4.3.4)). Veamos que esto no puede ocurrir. Escogemos un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de modo que $\hat{f}$ tenga la mitad de su masa concentrada en E, es decir

$$\int_E |\hat{f}|^2 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Entonces del teorema de Faris se deduce que

$$|E| \geqslant \frac{1}{4\pi\|xf\|_2} \geqslant \frac{1}{4\pi\varepsilon}.$$

Es decir, el tamaño de E debe ser necesariamente grande. Por tanto, no es posible que $\hat{f}$ concentre una parte importante de su masa en un conjunto E de tamaño pequeño.

CAPÍTULO 5

Principios de incertidumbre cualitativos

En este capítulo vamos a estudiar algunos principios de incertidumbre diferentes a los clásicos, a partir del concepto conocido como Annihilating pairs.

5.1. Definiciones

Para las definiciones vamos a seguir el artículo de Bonami y Demange [5].

Definición 5.1.1. *Sean S, E dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *(S, E) es un annhilating pair débil si para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\operatorname{supp}(f) \subset S, \quad \operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset E \tag{5.1.1}$$

necesariamente se tiene que $f = 0$.

2. *(S, E) se llama un annhilating pair fuerte si existe una constante $C = C(S, E)$ tal que*

$$||f||_2 \leqslant C(||f||_{L^2(S^c)} + ||\widehat{f}||_{L^2(E^c)}), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Con supp f indicamos el soporte de la función medible f, definido como

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \backslash U,$$

donde U es el mayor abierto tal que $f(x) = 0$ en ctp $x \in U$; ver [9, p. 215]. Cuando f es continua se tiene la expresión habitual

$$\operatorname{supp} f = \overline{\left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\right\}},$$

ver [9, p.132].

Un resultado elemental que nos da una gran cantidad de ejemplos de Annihilating pairs es el siguiente.

Proposición 5.1.2. *Si dos conjuntos S, E son compactos en $\mathbb{R}$, entonces forman un Annihilating pair. Más generalmente, si son conjuntos acotados, entonces también lo forman.*

Demostración. Si S,E son conjuntos acotados, entonces existe $R>0$ tal que

$$S\cup E\subset[-R,R].$$

Sea $f\in L^2(\mathbb{R})$ tal que se cumple (5.1.1). En particular, $\mathrm{supp} f\subseteq[-R,R]$, y podemos definir la transformada de esta función en todo el plano complejo:

$$\widehat{f}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ixz}dx=\int_{-R}^{R}f(x)e^{-2\pi ixz}dx,\quad z\in\mathbb{C}$$

Al integrar sobre un compacto, el Teorema de convergencia dominada y el Teorema de Morera, descrito en el apéndice A.0.5, implican que $\widehat{f}$ define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Por otro lado, como $\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset[-R,R]$ (y $\hat{f}$ es continua), se tiene que

$$\widehat{f}(\xi)=0,\quad \xi\in(-\infty,-R)\cup(R,\infty)$$

Por tanto, dado que $\widehat{f}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, el principio de identidad nos impone que $\widehat{f}\equiv 0$ y por tanto $f\equiv 0$ también.

□

5.2. Teorema de Benedicks

El Teorema de Benedicks constituye uno de los resultados fundamentales relativos a los Annihilating pairs. En esencia nos aporta un criterio mediante el cual podemos obtener Annihilating pairs débiles, más general que la Proposición 5.1.2. Para el resultado de este capítulo, seguiremos su artículo original, que puede encontrarse en [4].

Previamente necesitamos del siguiente Lema auxiliar. Como es habitual, identificamos el toro $\mathbb{T}^n$ con $[0,1)^n$, y las funciones $f:\mathbb{T}^n\to\mathbb{C}$ con funciones $\mathbb{Z}^n$-periódicas definidas en $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.2.3. *Si $F\in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}F(x-m)\in L^1(\mathbb{T}^n)$, donde la serie converge absolutamente en ctp $x\in\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Directamente:

$$\int_{\mathbb{T}^n}\Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}F(x-m)\Big|dx\leqslant\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|F(x-m)|dx=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|F(x-m)|dx$$

Nótese que podemos intercambiar los signos integral y sumatorio por el teorema de Tonelli; ver [9, Th. 2.37.a]. Si hacemos ahora el cambio de variable $x-m=y$, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|F(x-m)|dx=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n-m}|F(y)|dy=\int_{\mathbb{R}^n}|F(y)|dy<+\infty$$

□

Ahora si, vamos ya con el Teorema.

Teorema 5.2.4 (Benedicks)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sean además $S_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ y $S_{\widehat{f}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \widehat{f}(\xi) \neq 0\}$. Entonces:*

$$|S_f| < \infty \;\; y \;\; |S_{\widehat{f}}| < \infty \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0$$

Observación 5.2.5. *Si f es continua es claro que $S_f \subset \operatorname{supp} f$. Si f es sólo medible esta inclusión podría no ser cierta, pero se tiene*

$$|S_f| \leqslant |\operatorname{supp} f|.$$

En efecto, por definición de soporte, si $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^n \backslash U$, entonces $S_f \cap U = \{x \in U : \; f(x) \neq 0\}$ tiene medida cero. Por tanto,

$$|S_f| = |S_f \cap U| + |S_f \cap U^{\complement}| = |S_f \cap \operatorname{supp} f| \leqslant |\operatorname{supp} f|.$$

En particular, el teorema de Benedicks también implica

$$|\operatorname{supp} f| < \infty \;\; y \;\; |\operatorname{supp} \widehat{f}| < \infty \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0,$$

que es una generalización de la Proposición 5.1.2.

Demostración. Para la demostración, la idea fundamental será reducir el problema de trabajar con una función definida en $\mathbb{R}^n$ a un caso periódico. Notar que si $h \in L^1(\mathbb{T}^n)$ y sus coeficientes de Fourier no nulos son un conjunto finito, es decir $|\operatorname{supp} \widehat{h}| < \infty$, entonces $h \in \mathscr{T}$, donde $\mathscr{T}$ respresenta el conjunto de los polinomios trigonométricos. La propiedad fundamental que usaremos es que, si T es uno de ellos, el conjunto de ceros del mismo es finito y por tanto se cumple que

$$|\{x : T(x) \neq 0\}| = |\mathbb{T}^n - \{x : T(x) = 0\}| = 1$$

A partir de esta función auxiliar obtendremos la información que buscamos sobre nuestra función de partida.

En primer lugar, dado $a > 0$, llamamos $F(x) = f(ax)$. Entoces, si definimos

$$S_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \; F(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(ax) \neq 0\},$$

se tendrá que

$$x \in S_F \Leftrightarrow f(ax) \neq 0 \Leftrightarrow ax \in S_f \Leftrightarrow x \in \frac{1}{a} S_f$$

Aquí, $S_f = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \neq 0\}$.

Por tanto, se tiene que

$$|S_F| = \frac{1}{a^n} |S_f|$$

Tomando el parámetro a suficientemente grande, podemos obtener que $|S_F| < 1$.

Del mismo modo, se tiene que

$$S_{\widehat{F}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \; \widehat{F}(\xi) \neq 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \; \widehat{f(ax)} \neq 0\}$$

Ahora bien, la transformada de la dilatación cumple que

$$f(ax) \xrightarrow{\wedge} \Big(\frac{1}{a}\Big)^n \widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big)$$

Entonces,

$$\widehat{f}\Big(\frac{\xi}{a}\Big) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\xi}{a} \in S_{\widehat{f}} \Leftrightarrow \xi \in aS_{\widehat{f}}$$

Entonces análogamente al resultado previo, obtenemos que

$$|S_{\widehat{F}}| = a^n |S_{\widehat{f}}| < \infty$$

El siguiente paso será reducir la hipótesis de que $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a un espacio más pequeño. Para eso, periodizaremos la función $G(x) = e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}F(x)$ utilizando la **transformada de Zak**:

Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$G_\xi(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Esta función cumple lo siguiente:

1. $G_\xi \in L^1(\mathbb{T}^n)$, ya que

$$||G_\xi||_{L^1(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n}\Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m)\Big|dx \leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m)|dx$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|F(x-m)|dx < \infty$$

La deducción de que la cantidad es finita se obtiene gracias al Lema 5.2.3 ya que $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. Los coeficientes de Fourier de G_ξ son $\widehat{G_\xi}(k) = \widehat{F}(k+\xi),\ \ k \in \mathbb{Z}^n$. En efecto:

$$\widehat{G_\xi}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} G_\xi(x)e^{-2\pi i\langle x,k\rangle}dx = \int_{\mathbb{T}^n}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m)\Big)e^{-2\pi i\langle x,k\rangle}dx$$

Al ser el integrando absolutamente integrable, podemos intercambiar integral y sumatorio obteniendo que

$$\int_{\mathbb{T}^n}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m)\Big)e^{-2\pi i\langle x,k\rangle}dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i\langle x-m,\xi\rangle}F(x-m)e^{-2\pi i\langle x,k\rangle}dx$$

Haciendo el cambio de variable $x-m=y$, tenemos que

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n-m} e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}F(y)e^{-2\pi i\langle y+m,k\rangle}dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}F(y)e^{-2\pi i\langle y,k\rangle}dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,\xi+k\rangle}F(y)dy = \widehat{F}(k+\xi),$$

donde hemos utilizado que $e^{-2\pi i\langle m,k\rangle} = 1,\ m \in \mathbb{Z}^n$.

3. $S_{G_\xi} = |\{x \in \mathbb{T}^n : G_\xi(x) \neq 0\}| < 1$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo.
   En efecto, si $G_\xi(x) \neq 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{Z}^n$ tal que $F(x - m_0) \neq 0$. Esto provoca que
$$x \in (S_F + m_0) \cap \mathbb{T}^n \Rightarrow S_{G_\xi} \subseteq \cup_{m \in \mathbb{Z}^n} (S_F + m) \cap \mathbb{T}^n$$
   Además:
$$|S_{G_\xi}| \leqslant |\cup_{m \in \mathbb{Z}^n} (S_F + m) \cap \mathbb{T}^n| \leqslant \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |(S_F + m) \cap \mathbb{T}^n| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{S_F}(x - m) dx$$
   Aquí, χ_{S_F} representa la función característica del conjunto S_F. Haciendo de nuevo el cambio de variable $x - m = y$ obtenemos
$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{S_F}(x - m) dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n - m} \chi_{S_F}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{S_F}(y) dy = |S_F| < 1$$

Una vez vistas estas propiedades, el siguiente paso consistirá en probar que para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{G_\xi}$ tiene soporte finito en $\mathbb{Z}^n$.

Para ello, definimos
$$\phi(\xi) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{S_{\widehat{F}}}(\xi - m) \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$
Claramente esta función es positiva ya que es suma de funciones características. Además, pertenece al espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$, ya que
$$\int_{\mathbb{T}^n} \phi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{S_{\widehat{F}}}(\xi - m) d\xi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{S_{\widehat{F}}}(\xi - m) d\xi$$
Una vez más, los símbolos integral y sumatorio se pueden intercambiar al ser las funciones positivas. De nuevo, el cambio de variable $\xi - m = y$ nos da el resultado:
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n - m} \chi_{S_{\widehat{F}}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{S_{\widehat{F}}}(y) dy = |S_{\widehat{F}}| < \infty$$
Ahora bien, esto implica que $\phi(\xi) < \infty$ en casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

En este punto, definimos
$$A = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \phi(\xi) < \infty\}$$
Claramente, $|A^c| = 0$. Entonces, si $\xi \in A$, entonces se cumple que
$$\chi_{S_{\widehat{F}}}(\xi + m) = 0,$$
salvo en un número finito de $m \in \mathbb{Z}^n$. Esto implica que
$$\widehat{F}(\xi + m) = 0,$$
salvo de nuevo en un número finito de $m \in \mathbb{Z}^n$.

Ahora bien, por la propiedad 2 de la función G_ξ, sus coeficientes de Fourier son cero salvo en un número finito de $m \in \mathbb{Z}^n$. Esto implica que G_ξ es un polinomio trigonométrico para $x \in \mathbb{T}$. Ahora bien, como un polinomio trigonométrico no puede anularse en un conjunto infinito de puntos, se tendrá que $|S_{G_\xi}| = 1$. Pero entonces la propiedad 3 de la función nos lleva directamente a que $G_\xi \equiv 0$, $\xi \in A$.

Pero entonces, $\widehat{G_\xi}(k) = \widehat{F}(k + \xi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Evaluando en $k = 0$, obtenemos que $\widehat{F}(\xi) = 0$ en casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es decir, $\widehat{F} = 0$ y por la fórmula de inversión, $F \equiv 0$. Finalmente, esto implica que $f \equiv 0$ en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

5.3. Teorema de Amrein-Berthier

El Teorema de Amrein Berthier aparece como otro de los resultados más improtantes referentes a los Annihilating pairs y es un resultado más potente que el Teorema de Benedicks como veremos. Pese a tener su demostración propia, la prueba que aquí seguiremos es la presente en el artículo de Bonami y Demange ([5], Theorem 2.6), que lo obtiene como corolario del de Benedicks.

Para probar el Teorema vamos a necesitar el Teorema de Banach-Alaoglu, para el cual necesitamos introducir algunas definiciones previas.

Definición 5.3.6. *La topología débil* en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ (que en este caso coincide con la topología débil) es la topología generada por los funcionales lineales y continuos del espacio $\mathbb{H}$. Es decir, es la topolgía más débil que hace que todos los funcionales lineales de dicho espacio sean continuos.*

Definición 5.3.7. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ es *-convergente a $f \in \mathbb{H}$ si*

$$\langle f_n, g\rangle_{\mathbb{H}} \to \langle f, g\rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall g \in \mathbb{H}$$

Esto se denotará como $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Aquí, $\langle , \rangle_{\mathbb{H}}$ denota el producto interno en el espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Observación 5.3.8. *La convergencia en norma es más fuerte que la convergencia que acabamos de definir. Es decir,*

$$f_n \xrightarrow{||\cdot||} f \implies f_n \xrightarrow{w^*} f$$

Veamos por qué:

$$|\langle f_n, g\rangle_{\mathbb{H}} - \langle f, g\rangle_{\mathbb{H}}| = |\langle f_n - f, g\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant ||f_n - f|| \cdot ||g|| \to 0,$$

ya que se tiene que $||f_n - f|| \to 0$.

Vamos ya con el Teorema de Banach-Alaoglu.

Teorema 5.3.9 (Folland [9], Th. 5.18)**.** *Si $\mathfrak{X}$ es un espacio vectorial normado, la bola unidad cerrada $B^* = \{f \in \mathfrak{X}^* : ||f|| \leqslant 1\}$ en $\mathfrak{X}^*$ es compacta en la topología débil*. Es decir, si $\{f_n\}_n \in B$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_j$ de f_n y una función f tales que*

$$f_{n_j} \xrightarrow{w^*} f$$

Con todos estos resultados, podemos probar el siguiente Lema:

Lema 5.3.10. *Sea $\{f_n\}_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones que cumplen $||f_n||_2 = 1$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_j$ de f_n tal que*

$$\widehat{f_{n_j}} \xrightarrow{w^*} \widehat{f} \tag{5.3.2}$$

para alguna función $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. En efecto, utilizando el Teorema de Plancherel,

$$||f_n||_2 = ||\widehat{f_n}||_2 = 1$$

Por tanto, la sucesión de las transformadas $\widehat{f_n}$ está acotada y todos sus términos tienen norma 1, por lo que están dentro de la bola unidad cerrada en el espacio dual de $L^2(\mathbb{R}^n)$, que coincide con él mismo al ser un espacio de Hilbert. Dado que en un compacto toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, existirá una función $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión $\widehat{f_{n_j}}$ tales que

$$\widehat{f_{n_j}} \xrightarrow{w*} g$$

Llamando $f = g^\vee$, obtenemos (5.3.2). Esto es justo lo que ser quería probar. □

También necesitaremos del siguiente Lema:

Lema 5.3.11 (Folland [9], Ex. 6.9)**.** *Si $g_n \to g$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una subsucesión $\{g_{n_j}\}_j$ de $\{g_n\}$ tal que*

$$g_{n_j}(x) \to g(x)$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Enunciamos ya el Teorema de Amrein-Berthier.

Teorema 5.3.12 (Bonami, Demange)**.** *Si $S, E \subseteq \mathbb{R}^n$son tales que $|S|, |E| < \infty$, entonces existe $C_{S,E} > 0$ tal que*

$$||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{S,E}[||f||_{L^2(S^c)} + ||\widehat{f}||_{L^2(E^c)}], \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{5.3.3}$$

Observación 5.3.13. *Debemos notar que este Teorema es más potente que el de Benedicks. De hecho, tomando (con la notación previamente utilizada) $S = S_f$ y $E = S_{\widehat{f}}$, se tiene el resultado, ya que en este caso $||f||_{L^2(S^c)} = 0 = ||\widehat{f}||_{L^2(E^c)}$ y por tanto, se tiene que $||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant 0 \Rightarrow ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$, acabando en que $f \equiv 0$ en casi todo punto.*

Para poder demostrar el Teorema, vamos a trabajar con una expresión más sencilla que (5.3.3). Utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 5.3.14. (5.3.3) *es equivalente a que exista $D_{S,E} > 0$ tal que*

$$||f||_{L^2(S^c)} \geqslant \frac{1}{D_{S,E}} ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \; S_{\widehat{f}} \subseteq E \tag{5.3.4}$$

Demostración.

- (5.3.3) ⇒ (5.3.4).

  Si $S_{\widehat{f}} \subseteq E$, entonces $||\widehat{f}||_{L^2(E^c)} = 0$ y tomando $D_{S,E} = C_{S,E}$ se obtiene el resultado.

- (5.3.3) ⇐ (5.3.4).

$$||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||(\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||(\chi_E \widehat{f})\check{} + (\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

  Utilizando la desigualdad triangular conseguimos separar la norma de los sumandos:

$$\leqslant ||(\chi_E \widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant D_{S,E}||(\chi_E \widehat{f})\check{}||_{L^2(S^c)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

usando (5.3.4) en la última desigualdad. Sumamos y restamos χ_{E^c} para poder continuar:

$$= D_{S,E}||((\chi_E + \chi_{E^c} - \chi_{E^c})\widehat{f})\check{}||_{L^2(S^c)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= D_{S,E}||((1-\chi_{E^c})\widehat{f})\check{}||_{L^2(S^c)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= D_{S,E}||(\widehat{f})\check{} - (\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(S^c)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

De nuevo la desigualdad triangular nos separa los sumandos:

$$\leqslant D_{S,E}||f||_{L^2(S^c)} + D_{S,E}||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(S^c)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leqslant D_{S,E}||f||_{L^2(S^c)} + D_{S,E}||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= D_{S,E}||f||_{L^2(S^c)} + (D_{S,E}+1)||(\chi_{E^c}\widehat{f})\check{}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Usando Plancherel en el segundo sumando obtenemos el resultado:

$$= D_{S,E}||f||_{L^2(S^c)} + (D_{S,E}+1)||\widehat{f}||_{L^2(E^c)}$$

□

Una vez probado este Lema, podemos encarar la demostración del Teorema.

Demostración. Vamos a suponer que (5.3.4) no es cierto. Entonces, $\forall N \geqslant 1$ existirá una sucesión f_N cumpliendo que $S_{\widehat{f_N}} \subseteq E$ tal que

$$||f_N||_{L^2(S^c)} < \frac{1}{N}||f_N||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Podemos además suponer que la sucesión está normalizada, es decir, que $||f_N||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ y obtenemos que

$$||f_N||_{L^2(S^c)} < \frac{1}{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Utilizando el Lema 5.3.11 sabemos que existirá una subsucesión $\{f_{N_j}\}_j$ de esta cumpliendo que $f_{N_j} \to 0$ para casi todo $x \in S^c$, ya que $f_N \to 0$ en $L^2(S^c)$. Además, al ser los f_{N_j} términos de la sucesión f_N, también se cumple que

$$||f_{N_j}||_2 = 1.$$

Esto nos permite utilizar el Lema 5.3.10 para obtener una subsucesión $\{f_{N_{j'}}\}_{j'}$ de f_{N_j} tal que

$$\widehat{f_{N_{j'}}} \xrightarrow{w^*} \widehat{f}$$

para alguna función $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Además, $\widehat{f} = 0$ en ctp $\xi \in E^c$. Para probar esto, tomamos $R > 0$ y consideramos la bola $B_R(0)$. Entonces,

$$\int_{E^c \cap B_R(0)} |\widehat{f}| = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \cdot \overline{\frac{\widehat{f}}{|\widehat{f}|}\chi_{E^c \cap B_R(0)}}$$

Si llamamos $h = \frac{\hat{f}}{|\hat{f}|}\chi_{E^c \cap B_R(0)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot \overline{\frac{\hat{f}}{|\hat{f}|}\chi_{E^c\cap B_R(0)}} = \langle \hat{f}, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{N_{j'}\to\infty} \langle \widehat{f_{N_{j'}}}, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \lim_{N_{j'}\to\infty} \int \widehat{f_{N_{j'}}} \cdot \overline{\frac{\hat{f}}{|\hat{f}|}\chi_{E^c\cap B_R(0)}} = \lim_{N_{j'}\to\infty} 0 = 0$$

El integrando resulta 0 ya que $\widehat{f_{N'_j}} = 0$ en E^c por hipótesis, y esto acaba implicando que $\hat{f}(\xi) = 0,\ ctp\ \xi \in E^c$. Es decir, $S_{\hat{f}} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \hat{f}(\xi) \neq 0\} \subset E \cup N$, donde N tiene medida cero.

Por otro lado, como hemos visto, la definición de convergencia débil equivale a que

$$\langle \widehat{f_{N_{j'}}}, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to \langle \hat{f}, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Tomando $h(\xi) = e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E(\xi)$, para x fijo, tendremos que

$$\langle \widehat{f_{N_{j'}}}, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to \langle \hat{f}, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E(\xi)}d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E(\xi)d\xi = f(x),$$

usando en el último paso que $\hat{f} = 0$ en ctp $\xi \in E^c$ y el Teorema de inversión. Notar que podemos aplicar este Teorema al ser $|S_{\hat{f}}| \leqslant |E| < \infty$, y por tanto $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Del mismo modo tenemos

$$\langle \widehat{f_{N_{j'}}}, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_{N_{j'}}}(\xi) \cdot \overline{e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E(\xi)}d\xi = f_{N_{j'}}(x),$$

y podemos concluir que $f_{N_{j'}}(x) \to f(x)$ en ctp $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora trataremos de probar que se cumplen las hipótesis del Teorema de Benedicks en f, es decir:

1. $f(x) = 0$ en casi todo $x \in S^c$.
2. $\hat{f}(\xi) = 0$ en casi todo $\xi \in E^c$.

Con esto conseguiríamos probar que

$$|S_f| = |\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| \leqslant |S| < \infty$$

y que

$$|S_{\hat{f}}| = |\{\xi \in \mathbb{R}^n : \hat{f}(\xi) \neq 0\}| \leqslant |E| < \infty$$

y concluiríamos por Benedicks que $f \equiv 0$.

- El punto 2 lo hemos probado previamente.
- Para probar ahora el punto 1, como ya hemos visto que $\lim_{j'\to\infty} f_{N_{j'}}(x) = f(x)$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Tomando $x \in S^c$, hemos visto previamente que

  $$\lim_{j\to\infty} f_{N_j}(x) = 0$$

  Como los términos de $f_{N_{j'}}$ son a su vez términos de f_{N_j} concluimos que $f(x) = 0$ en casi todo $x \in S^c$.

- De los dos puntos anteriores concluimos que $f = 0$, por el Teorema de Benedicks. Veamos ahora que esto es una contradicción.
- Tenemos, por la fórmula de inversión, que

$$|f_N(x)| = |\langle \widehat{f_N}, e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \leqslant ||f_N||_2 \cdot ||e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\chi_E||_2 = 1 \cdot |E|^{\frac{1}{2}}$$
$$= |E|^{\frac{1}{2}}$$

Esto nos permite utilizar el Teorema de la convergencia dominada de la siguiente forma:

$$\lim_{N\to\infty} ||f_N(x) - f(x)||^2_{L^2(S)} = \lim_{N\to\infty} \int_S |f_N(x) - f(x)|^2 dx = \int_S \lim_{N\to\infty} |f_N(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

Esto implica:

$$\lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(S^c)} + \lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(S)} = \lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(S)} = ||f||^2_{L^2(S)} = ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

y además se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(S^c)} + \lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(S)} = \lim_{N\to\infty} \left(\int_{S^c} |f_N|^2 + \int_S |f_N|^2 \right) = \lim_{N\to\infty} ||f_N||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$$

Con lo cual, concluimos que

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$$

Esto contradice la conclusión anterior de que $f = 0$.

□

CAPÍTULO 6

Principios de incertidumbre del tipo Hardy

Finalmente, vamos a hablar de principios de incertidumbre del tipo Hardy. Estos se deben al autor con el mismo nombre, y nos dan condiciones bajo las cuales una función y su transformada de Fourier pueden tener ambas rápido decaimiento.

6.1. El Teorema de Beurling

El primer Teorema de la sección es debido a Beurling, que lo demostró en los años 60 aunque nunca publicó su demostración. En 1991, Hörmander reprodujo una demostración tomada de partir de apuntes personales, ver la explicación histórica en [13]. El resultado se enuncia como sigue:

Teorema 6.1.1 (Beurling). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, y suponer que*

$$\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)||\widehat{f}(y)|e^{2\pi|xy|}dxdy < +\infty.$$

Entonces $f = 0$ en ctp.

La versión siguiente, más general que la original de Beurling, es debida a Bonami, Demange y Jaming; ver [6, Theorem 1.1].

Teorema 6.1.2 (Bonami, Demange, Jaming). *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene que*

$$\int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)||\widehat{f}(y)|}{(1+|x|+|y|)^N} e^{2\pi|\langle x,y\rangle|}dxdy < +\infty$$

si y solo si f tiene la forma $f(x) = P(x)e^{-\pi\langle Ax,x\rangle}$, donde A es una matriz simétrica real definida positiva y P es un polinomio de grado $< \frac{N-n}{2}$.

En particular, si $N \leqslant n$, la función f es idénticamente 0.

Dada la complejidad de la prueba, trataremos de dar únicamente una demostración para el caso $N = 0$, es decir, suponiendo que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi < \infty \tag{6.1.1}$$

Esto incluye el Teorema de Beurling, que es el caso de dimensión $n = 1$. Para ello seguimos un argumento de demostración relativamente elemental debido a Hedenmalm [12], y que se basa en una aplicación adecuada del Teorema de Liouville y técnicas de variable compleja.

Observación 6.1.3. *La condición* (6.1.1) *implica también que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|dxdx\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi < \infty$$

Esto implica que tanto f como $\widehat{f}$ están en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$. Es decir, el resultado del enunciado se cumple para las funciones f que están en el espacio de las funciones donde el Teorema de inversión para la transformada de Fourier funciona.

Demostración. Definimos la banda

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < 1\}$$

y la función

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi iz\langle x,\xi\rangle}dxd\xi \quad z \in \overline{S}$$

Lo primero que notamos aquí es que, tomando módulos se tiene por hipótesis que

$$|F(z)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi iz\langle x,\xi\rangle}dxd\xi\Big|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi < \infty \quad \forall z \in \overline{S}$$

En el factor exponencial hemos utilizado que

$$|e^{2\pi iz\langle x,\xi\rangle}| = e^{\Re(2\pi iz\langle x,\xi\rangle)},$$

y aquí se tiene que

$$\Re(2\pi iz\langle x,\xi\rangle) = -\Im(2\pi z\langle x,\xi\rangle) \leqslant 2\pi|\langle x,\xi\rangle|\,|\Im(z)| \leqslant 2\pi|\langle x,\xi\rangle|,$$

ya que $\Im(z) \in [-1,1]$.

Esto implica usando convergencia dominada que la función F es continua en $\overline{S}$ y además es holomorfa en S utilizando el Teorema de Morera (A.0.5).

Dado que la función f cumple la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, por la Observación 6.1.3, para $z = u \in \mathbb{R}$ por Fubini tenemos que

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi iu\langle x,\xi\rangle}d\xi\Big]dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}f(ux)dx \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Ahora bien, si $u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, haciendo el cambio de variable $ux = y$ obtenemos que

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{f\Big(\frac{y}{u}\Big)}f(y)\frac{dy}{|u|^n} = \frac{1}{|u|^n}\overline{F\Big(\frac{1}{u}\Big)} \tag{6.1.2}$$

Vamos a enunciar ahora un Lema que utilizaremos.

Lema 6.1.4. *a) Si una función $G(z)$ es holomorfa en un abierto A, entonces la función $\phi(z) = \overline{G(\frac{1}{\bar{z}})}$ es holomorfa en el abierto $\widehat{A}$, donde*

$$\widehat{A} = \left\{ \frac{1}{\bar{z}} : z \in A \backslash \{0\} \right\}$$

b) Si además se cumple que $G(z) = \overline{G(\frac{1}{\bar{z}})}$, para todo $z \in A \cap \hat{A}$, entonces la función

$$\phi(z) = \begin{cases} G(z) & si\ z \in A \\ \\ \overline{G(\frac{1}{\bar{z}})} & si\ z \in \widehat{A}, \end{cases}$$

es holomorfa en el conjunto unión $A \cup \hat{A}$.

El objetivo ahora será utilizar este Lema junto con (6.1.2) para definir una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ que cumpla las hipótesis del Teorema de Liouville (A.0.8).

Ahora bien, esta definición debe hacerse cuidadosamente, porque la función $\phi(z) = \overline{F(\frac{1}{\bar{z}})}$, cumple que $\phi \in H(\widehat{S})$, pero $\phi(z) \neq \overline{\phi(\frac{1}{\bar{z}})}$ en $S \cap \hat{S}$, pues

$$\phi(u) = |u|^n F(u) \neq F(u) = \overline{\phi\left(\frac{1}{u}\right)}, \quad u \in \mathbb{R} \backslash \{0, \pm 1\}$$

Por tanto, no es posible extender F de forma holomorfa a todo $S \cup \hat{S}$. Sin embargo, la función

$$\phi(z) = (1+z^2)^{\frac{n}{2}} F(z) \quad z \in S$$

no tiene este problema. Esta será la que utilizaremos. Para asegurarnos que podemos utilizar el apartado b) del Lema 6.1.4, estudiaremos sus propiedades.

1. ϕ es holomorfa en S. Para ello, dado que la función F es holomorfa en S, nos queda ver qué sucede con el factor $(1+z^2)^{\frac{n}{2}}$. Como se tiene que

   $$(1+z^2)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\mathrm{Log}(1+z^2)}$$

   y el logaritmo principal $\mathrm{Log}(w)$ es holomorfo en $w \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$, lo que necesitamos es que $\mathrm{Arg}\, w \neq \pm\pi$, si $w = 1+z^2$.

   En efecto, si tomamos

   $$w = 1+z^2 \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow z^2 \in (-\infty, -1]$$

   Si tomamos ahora $z = re^{i\theta}$, entonces

   $$z^2 = r^2 e^{2i\theta} \in (-\infty, -1] \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \pm\pi \\ r \geqslant 1 \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pm\frac{\pi}{2} \\ r \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = re^{i\frac{\pi}{2}}, re^{-i\frac{\pi}{2}}, r \geqslant 1 \Leftrightarrow z \in \pm i[1, \infty)$$

   Es decir, $(1+z^2)^{\frac{n}{2}} \in H(\mathbb{C} \backslash \pm i[1, +\infty))$.

   Por tanto, $\phi \in H(S) \cap C(\overline{S} \backslash \{\pm i\})$

2. Entonces, por el Lema 6.1.4, la función $\widetilde{\phi}(z) = \overline{\phi(\frac{1}{\bar{z}})}$, $z \in \widehat{S}$ cumple que $\widetilde{\phi}(z) \in H(\widehat{S})$

   Ahora bien, ¿quién es exactamente $\widehat{S} = \{\frac{1}{\bar{z}} : z \in S\}$?

   En primer lugar debemos notar que, si denotamos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, el disco complejo unidad, entonces $\widehat{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$. Además, como $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{\pm i\} \subseteq S$, se tendrá que $\mathbb{D}^c \backslash \{\pm i\} \subseteq \widehat{S}$. De aquí se deduce que $\mathbb{C} \backslash \{\pm i\} \subset S \cup \widehat{S}$. De hecho, se tiene que

$$S \cup \widehat{S} = \mathbb{C} \backslash \{\pm i\}$$

   pues es fácil ver que $\pm i$ no pertenece a $S \cup \widehat{S}$.

   Podemos también hallar una descripción explícita de $\widehat{S}$. Para ello vamos a fijarnos en qué sucede con los puntos de la frontera de S.

   Si $z = x + i \in \partial S$ es un punto de la frontera superior de S, con $x \in \mathbb{R}$, se tendrá que

$$w = u + iv = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - i} = \frac{x + i}{x^2 + 1}$$

   Parametrizando obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+1} \\ v = \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{v} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - v}{v}$$

   Sustituyendo en la expresión de u^2 obtenemos que:

$$u^2 = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{1-v}{v}}{(\frac{1}{v})^2} = v - v^2$$

   Completando cuadrados llegamos a que

$$u^2 + v^2 - v = 0 \Leftrightarrow u^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

   Esta es la circunferencia de centro $(0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$.

   Es decir, la reflexión de los puntos de la frontera superior de S forman una circunferencia en el interior de $\mathbb{D}$. Del mismo modo, se puede comprobar que los puntos de la fontera inferior forman la circunferencia del mismo radio y centro $(0, -\frac{1}{2})$. Por otro lado, tomando por ejemplo el origen $0 \in S$, vemos que los puntos interiores de S se transforman en puntos exteriores a dichos discos.

   Por tanto, tenemos que

$$\widehat{S} = \mathbb{C} \backslash \left[\overline{\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)} \cup \overline{\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-i}{2}\right)}\right]$$

3. Si $u \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, entonces

$$\widetilde{\phi}(u) = \overline{\phi\left(\frac{1}{u}\right)} = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \overline{F\left(\frac{1}{u}\right)} = \left(\frac{u^2 + 1}{u^2}\right)^{\frac{n}{2}} \overline{F\left(\frac{1}{u}\right)}$$
$$= \frac{(u^2 + 1)^{\frac{n}{2}}}{|u|^n} \cdot \overline{F\left(\frac{1}{u}\right)} = (u^2 + 1)^{\frac{n}{2}} F(u) = \phi(u),$$

usando (6.1.2) en la última línea. Esto implica que $\phi = \widetilde{\phi}$ en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Al ser este un conjunto con puntos de acumulación contenido en el abierto $S\cap\widehat{S}$, por el principio de identidad para funciones complejas se tiene que $\phi = \widetilde{\phi}$ en $S\cap\widehat{S}$.

El siguiente paso será definir la extensión

$$\phi^*(x) = \begin{cases} \phi(z) & \text{si } z\in S \\ \widetilde{\phi}(z) & \text{si } z\in \widehat{S}, \end{cases}$$

Lo primero que notamos es que esta extensión está bien definida ya que ambas ramas coinciden en la intersección. Además, por el Lema 6.1.4, esta función es holomorfa en $S\cup\widehat{S}$, es decir

$$\phi^* \in H(S\cup\widehat{S}) = H(\mathbb{C}\backslash\{\pm i\})$$

Sea ahora $\mathscr{D}^{\pm} = \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}(\pm i)$, el disco de centro $\pm i$ y radio $\frac{1}{2}$.

Si $z\in\mathscr{D}^{\pm}\cap\overline{S}\backslash\{\pm i\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}|\phi^*(z)| &= |\phi(z)| = |F(z)|\cdot|(1+z^2)^{\frac{n}{2}}| \\ &\leqslant C\cdot|1+z^2|^{\frac{n}{2}} \leqslant C(1+|z|^2)^{\frac{n}{2}} \leqslant C'\end{aligned}$$

Nótese aquí que, aunque la función raíz cuadrada no sea holomorfa cerca del origen, sí que está acotada.

Análogamente, si $z\in\mathscr{D}^{\pm}\cap\widehat{S}\backslash\{\pm i\}$, se tiene que

$$|\phi^*(z)| = |\widetilde{\phi}(z)| = \left|\phi\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right| = \left|F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right|\cdot\left|\left(1+\frac{1}{\overline{z}^2}\right)^{\frac{n}{2}}\right| \leqslant C\left(1+\frac{1}{|z|^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant C''$$

Por tanto, hemos concluido que ϕ^* está acotado en $\mathscr{D}^{\pm}\backslash\{\pm i\}$. Ahora, por el Teorema de extensión de Riemann (A.0.9) se tiene que ϕ^* admite una extensión holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

El objetivo ahora es probar que ϕ^* está acotada en todo $\mathbb{C}$.

- Si $z\in K := \overline{D_1(0)}$, entonces
$$|\phi^*(z)| \leqslant C_1$$
porque K es un compacto.
- Si $z\in\mathbb{C}\backslash K$, entonces $|z|>1$ y $z\in\widehat{S}$. Se cumple por tanto que
$$|\phi^*(z)| = \left|F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right|\cdot\left|\left(1+\frac{1}{\overline{z}}^2\right)^{\frac{n}{2}}\right| \leqslant C\cdot\left(1+\frac{1}{|z|^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant C\cdot 2^{\frac{n}{2}} = C_2$$

Por tanto, siempre se cumplirá que

$$|\phi^*(z)| \leqslant \max\{C_1,C_2\} \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Por el Teorema de Liouville, $\phi^*(z) = c_0$ $\forall z\in\mathbb{C}$, es decir, ϕ^* es constante.

Para terminar nos bastará con ver que en algún punto esta constante debe de ser 0.

$$\lim_{\substack{z\to\pm i\\ z\in S}}\phi^*(z) = \lim_{\substack{z\to\pm i\\ z\in S}}F(z)(1+z^2)^{\frac{n}{2}} = 0,$$

ya que $F(z)$ está acotada y el factor $(1+z^2)^{\frac{n}{2}}$ tiende a 0. Por tanto, se tiene que $c_0 = 0$

Esto implica que $\phi^* \equiv 0$ en $\mathbb{C}$, lo cual a su vez implica que $\phi \equiv 0$ en S y que a su vez implica que $F \equiv 0$ en S. Entonces:

$$F(1) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

$\square$

6.2. Teoremas de Cowling-Price

Necesitamos de un pequeño Lema auxiliar para poder demostrar el resultado de este apartado.

Lema 6.2.5. *Si* $0 < a$*, entonces para* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

$$2|x| \cdot |y| \leqslant a|x|^2 + \frac{1}{a}|y|^2$$

Demostración. Como se tiene que $(\sqrt{a}|x| - \sqrt{\frac{1}{a}}|y|)^2 = a|x|^2 + \frac{1}{a}|y|^2 - 2|x| \cdot |y| \geqslant 0$, se cumple directamente que

$$a|x|^2 + \frac{1}{a}|y|^2 \geqslant 2|x| \cdot |y|$$

$\square$

Teorema 6.2.6 (Tipo Cowling-Price). *Sea* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *que cumple*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, e^{\pi a|x|^2} dx < \infty$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|\, e^{\pi b|\xi|^2} d\xi < \infty$

para ciertas constantes positivas a y b con $ab \geqslant 1$*. Se tiene entonces que* $f \equiv 0$*.*

Demostración. La estrategia será deducirlo del Teorema de Beurling probado anteriormente, es decir, comprobar que se cumple la condición (6.1.1).

Notar que las hipótesis 1 y 2 implican

$$\infty > \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| e^{\pi a|x|^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| e^{\pi b|\xi|^2} d\xi\right) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\widehat{f}(\xi)| e^{\pi a|x|^2 + \pi b|\xi|^2} dx d\xi$$

Ahora bien, utilizando el Lema 6.2.5, y la condición $b \geqslant \frac{1}{a}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\widehat{f}(\xi)| e^{\pi a|x|^2 + \pi b|\xi|^2} dx d\xi &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\widehat{f}(\xi)| e^{\pi a|x|^2 + \frac{\pi}{a}|\xi|^2} dx d\xi \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\widehat{f}(\xi)| e^{2\pi |x| \cdot |\xi|} dx d\xi\end{aligned}$$

Utilizando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz llegamos a que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|x|\cdot|\xi|}dxd\xi \geqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi$$

Pero entonces hemos concluido que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi < +\infty.$$

Por el Teorema 6.1.2 (con $N=0$), obtenemos que $f\equiv 0$.

□

6.3. Teorema de Hardy

El Teorema mas clásico de Hardy ([6] Prop. 3.4), que aquí presentamos, se puede obtener como corolario de los Teoremas que hemos visto en esta sección.

Teorema 6.3.7 (Hardy)**.** *Sea $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que, para ciertos $C,N>0$,*

1. $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^N e^{-a\pi|x|^2}$
2. $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^N e^{-b\pi|\xi|^2}$

Entonces, se cumple que si $ab>1$, entonces $f\equiv 0$.

Demostración. Vamos a ver que se cumple la condición (6.1.1) del Teorema de Beurling. Por un lado se tiene, usando las hipótesis del Teorema de Hardy

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\cdot|\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}dxd\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} C^2 e^{-a\pi|x|^2-b\pi|\xi|^2+2\pi|\langle x,\xi\rangle|}(1+|x|)^N(1+|\xi|)^N dxd\xi$$

Ahora bien, como $ab>1$ podemos escribir

$$a=a'+\varepsilon, \quad b=b'+\varepsilon \quad \text{con } a'b'=1 \text{ y } a',b',\varepsilon>0.$$

Por tanto, del Lema 6.2.5 se sigue que

$$\begin{aligned} -a\pi|x|^2-b\pi|\xi|^2+2\pi|\langle x,\xi\rangle| &= -\varepsilon\pi(|x|^2+|\xi|^2)-(a'\pi|x|^2+b'\pi|\xi|^2-2\pi|\langle x,\xi\rangle|) \\ &\leqslant -\varepsilon\pi(|x|^2+|\xi|^2) \end{aligned}$$

Por tanto, el factor exponencial no va a desaparecer y podemos acotar la integral anterior por

$$C^2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\pi|x|^2-\varepsilon\pi|\xi|^2}(1+|x|)^N(1+|\xi|)^N dxd\xi < \infty$$

Hemos pues probado que f cumple la condición (6.1.1), y por el Teorema de Beurling esto de nuevo implica que $f\equiv 0$.

□

Bibliografía

[1] Babenko, K. I. . An inequality in the theory of Fourier integrals. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, 25 (1961), 531-542.

[2] Benedetto, J. J. Uncertainty principle inequalities and spectrum estimation. In Recent Advances in Fourier Analysis and its Applications. Springer (1990), 143-182.

[3] Beckner, W. Inequalities in Fourier analysis. Annals of Mathematics, 102 (1975), 159-182.

[4] Benedicks, M. Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. J. Math. Anal. Applic., 106 (1985), 180-183.

[5] Bonami, A., Demange, B. A survey on uncertainty principles related to quadratic forms. Collectanea Mathematica (2006), 1-36.

[6] Bonami, A., Demange, B., Jaming, P. Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms. Rev. Matem, Iberoam. 19 (2003), 23-55.

[7] de Bruijn, N. G. Uncertainty principles in Fourier analysis. Inequalities (O. Shisha, ed.). Academic Press, New York, (1967) 55-71.

[8] Cowling, M., Escauriaza, L., Kenig, C. E., Ponce, G., Vega, L. The Hardy uncertainty principle revisited. Indiana University mathematics journal (2010), 2007-2025.

[9] Folland, G. B. Real analysis: modern techniques and their applications. John Wiley and Sons. 40 (1999).

[10] Folland, G. B., Sitaram, A. The uncertainty principle: a mathematical survey. Journal of Fourier analysis and applications, 3 (1997), 207-238.

[11] Grafakos, L. Classical Fourier Analysis, 3rd Edition, Sp ringer, Graduate Texts in Mathematics 249, 2014.

[12] Hedenmalm, H. Heisenberg's uncertainty principle in the sense of Beurling. Journal d'Analyse Mathématique, 118 (2012), 691-702.

[13] Hörmander, L. A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs. Ark. Mat. 29 (1991), 237–240.

[14] Huybrechts, Daniel. Complex geometry: an introduction. Berlin: Springer, (2005).

[15] Jaming, P. Uncertainty principles for orthonormal bases. Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) dit aussi. Séminaire (2006).

[16] Price, J. F. Uncertainty principles and sampling theorems. In Fourier Techniques and Applications. Springer US (1985), 25-44.

[17] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applica- tions, Wiley (1978).

[18] Rudin, W. Real and complex analysis. Mc Graw Hill international editions. US (1966).

[19] Stein, E. M., Shakarchi, R. Fourier analysis: an introduction. Princeton University Press. 1 (2011).

APÉNDICE A

Apéndice

Proposición A.0.1 (Folland [9], Th. 8.22 c). *Sean $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si denotamos por $*$ la convolución entre dos funciones, se cumple que*

$$\widehat{f*g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

Proposición A.0.2 (Folland [9], p. 258). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para $a \in \mathbb{R}^n$, su transformada de Fourier cumple que*

$$f(x-a) \overset{\widehat{}}{\rightarrow} e^{-2\pi i a\xi}\widehat{f}(\xi)$$

Proposición A.0.3 (Grafakos [11], Th. 1.2.19). *Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n}\phi = 1$, y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Sea además $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Entonces $\phi_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema A.0.4 (Beckner [3], Babenko [1]). *Sean p tal que $1 < p \leqslant 2$ y q tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, se tiene que

$$||\widehat{f}||_{p'} \leqslant B_d(p)||f||_p,$$

donde $B_d(p)$ es tal que

$$B_d(p) = (p^{\frac{1}{p}}q^{-\frac{1}{q}})^{\frac{d}{2}}$$

Teorema A.0.5 (Rudin [18], Th. 10.17). *Sea Ω un abierto y sea f una función compleja continua en Ω. Entonces son equivalentes:*

1. *f es holomorfa en Ω*
2. *$\int_T f(w)dw = 0$ siempre que el triángulo T esté contenido en Ω*

Teorema A.0.6 (Folland [9], Th. 8.26). *Sean $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, si se cumple que*

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n$$

entonces se tiene que $f = g$ en casi todo punto.

Teorema A.0.7 (Rudin [18], Th. 4.18). *Sea $B = \{e_i\}_i$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert. Entonces se tiene que, para cualquier vector x de este espacio,*

$$||x||^2 = \sum_{i=0}|\langle x, e_i\rangle|^2$$

Teorema A.0.8 (Rudin [18], Th. 10.23)**.** *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función entera y acotada, es decir, existe* $M > 0$ *tal que*

$$|f(z)| < M \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Entonces f *es constante.*

Teorema A.0.9 (Huybrechts [14], Th. 1.1.7)**.** *Sean* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un abierto,* $\alpha \in A$ *y supongamos que* f *es holomrofa en* $A \backslash \{\alpha\}$*. Equivalen:*

1. f *tiene una extensión holomorfa a A, es decir, existe una función* $g \in H(A)$ *tal que* $g(z) = f(z)$ *para cualquier punto de* $z \in A,\ z \neq \alpha$*.*
2. f *tiene una extensión continua en A, esto es, existe* $h \in C(A)$ *tal que* $h(z) = f(z)$ *para cada* $z \in A \backslash \{\alpha\}$*. Equivalentemente existe el límite* $\lim_{z \to \alpha} f(z)$*.*
3. f *está acotada en un entorno reducido de* α*.*
4. $\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = 0$*.*