Transformada de Fourier, conjuntos de Kakeya y aplicaciones

Fernando Ballesta Yagüe

Universidad de Murcia, Facultad de Matemáticas.

6 de julio de 2021

Tabla de contenidos

Contenido

Fourier transform

Definition

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. We define its *Fourier transform* as

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x} \, dx$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Fourier transform

Definition

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. We define its *Fourier transform* as

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observe that it is **well defined** for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Fourier transform: properties

Some basic properties of Fourier transform are the following:

1. $\widehat{f} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, because $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. ($\widehat{f}$ **bounded**.)

Fourier transform: properties

Some basic properties of Fourier transform are the following:

1. $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, because $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. ($\widehat{f}$ **bounded**.)
2. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$. ($\widehat{f}$ is **continuous**.)

Fourier transform: properties

Some basic properties of Fourier transform are the following:

1. $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, because $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. ($\widehat{f}$ **bounded**.)
2. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$. ($\widehat{f}$ is **continuous**.)
3. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. That is:

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \quad \text{(Riemann-Lebesgue lemma)}$$

Some basic properties of Fourier transform are the following:

1. $\widehat{f} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, because $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$. ($\widehat{f}$ **bounded**.)
2. $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$. ($\widehat{f}$ is **continuous**.)
3. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. That is:

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \quad \text{(Riemann-Lebesgue lemma)}$$

4. $\widehat{f} \in UC(\mathbb{R}^n)$. ($\widehat{f}$ is **uniformly continuous**.)

Fourier Inversion Theorem

Fourier Inversion Theorem

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ be such that $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Then:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

at almost every point $x \in \mathbb{R}^n$.

Fourier Inversion Theorem

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ be such that $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Then:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

at almost every point $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition

We define:

$$\mathfrak{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Plancherel's Theorem

Plancherel's Theorem

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Then $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx.$$

Plancherel's Theorem

Plancherel's Theorem

Let $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Then $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx.$$

Corollary

There exists a unique operator $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ such that

1. $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}, \quad \forall f \in L^1 \cap L^2.$
2. $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in L^2.$

Besides, $\mathcal{F}$ is bijective and its inverse is given by the unique extension of

$$(\mathcal{G}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi, \quad g \in L^1 \cap L^2.$$

Fourier Transform in L^2

Definition (Fourier Transform in $L^2(\mathbb{R}^n)$)

We define the Fourier transform of $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ as

$$\mathcal{F}f(\xi) = L^2\text{-}\lim_{R \to +\infty} \int_{|x| \le R} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} \, dx.$$

Contenido

Protagonistas


(a) Soichi Kakeya


(b) A. Besicovitch


(c) Oskar Perron

Figura: Matemáticos involucrados.

Conjuntos de Kakeya: primer ejemplo

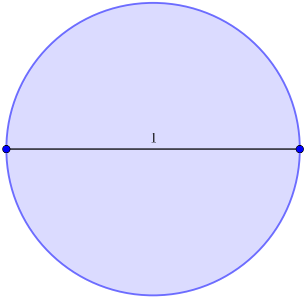


Figura: Ejemplo de conjunto de Kakeya

Conjuntos de Kakeya: segundo ejemplo

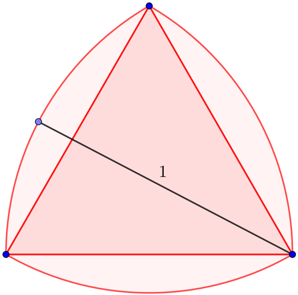


Figura: Ejemplo de conjunto de Kakeya

Protagonistas

(a) Soichi Kakeya

(b) A. Besicovitch

(c) Oskar Perron

Figura: Matemáticos involucrados.

El árbol de Perron: construcción base

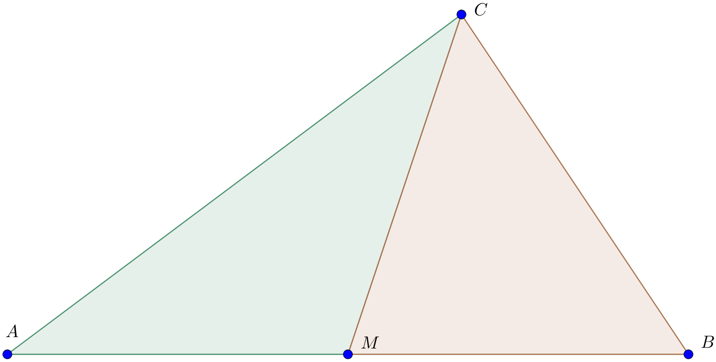


Figura: Configuración inicial

El árbol de Perron: construcción base

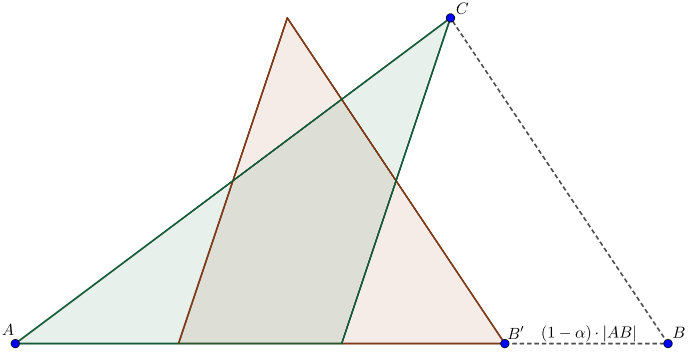


Figura: Construcción base

El árbol de Perron: construcción base

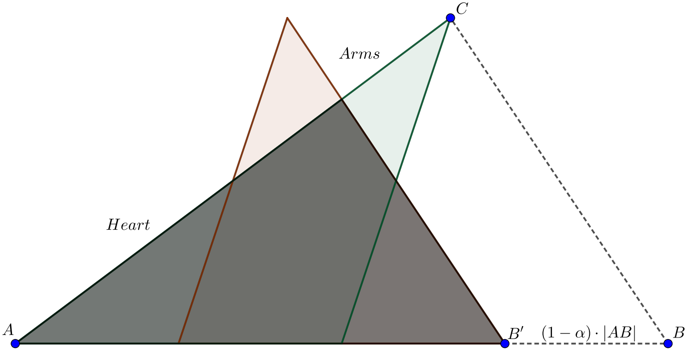


Figura: Construcción base

El árbol de Perron

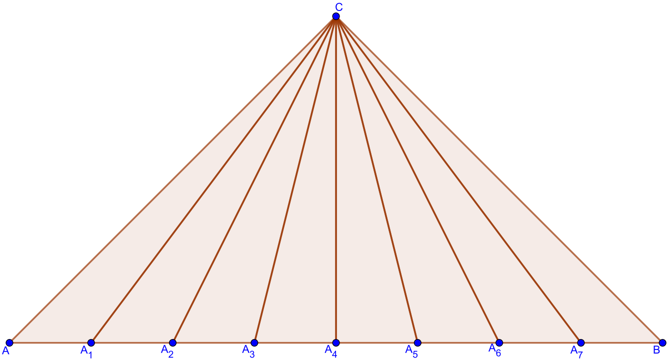


Figura: Configuración inicial

El árbol de Perron

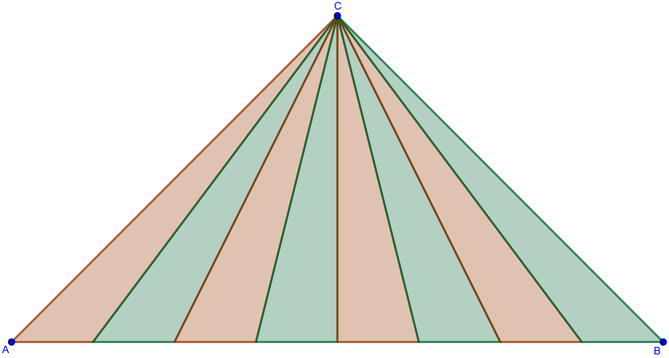


Figura: Aplicamos la operación básica a los pares Marrón-Verde.

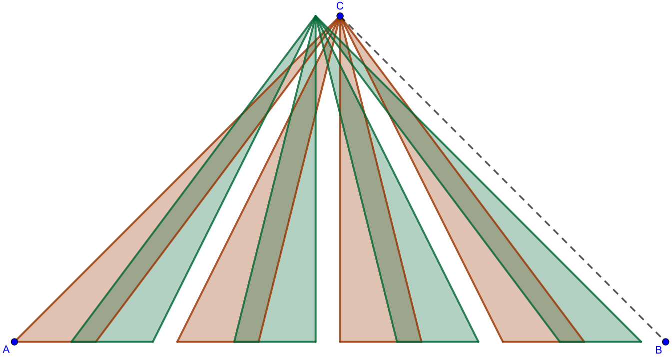


Figura: Resultado de aplicar la operación básica.

El árbol de Perron

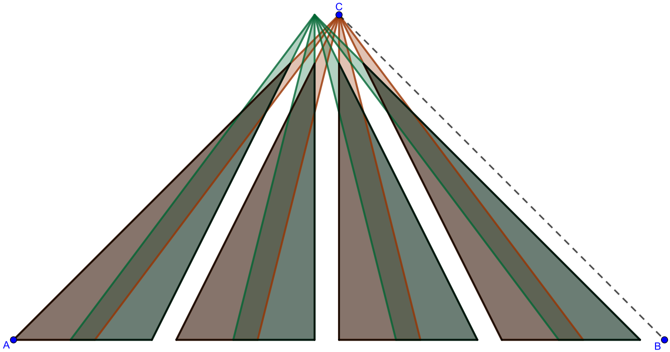


Figura: Resaltamos los hearts

El árbol de Perron

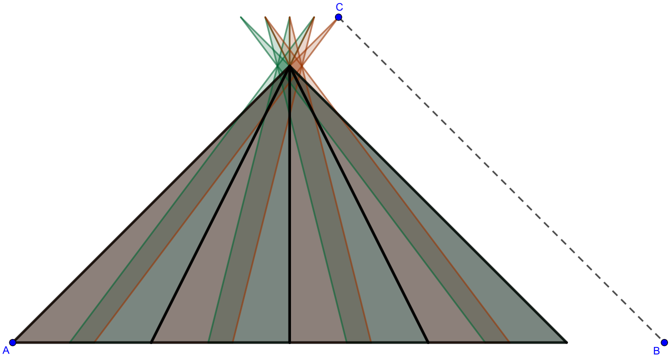


Figura: Trasladamos los *hearts* hasta juntarlos.

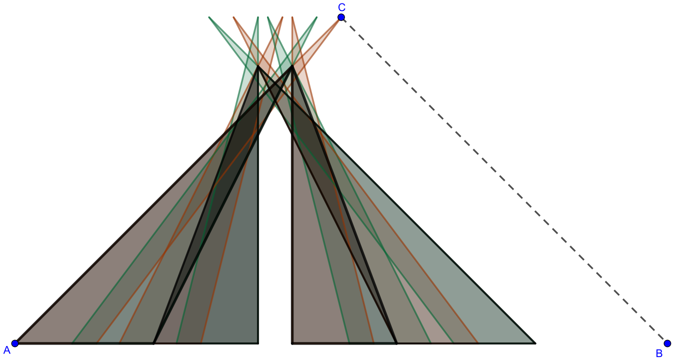


Figura: Aplicamos la operación básica a los *hearts*.

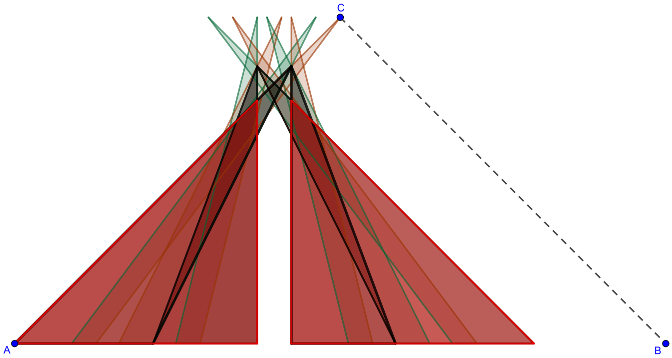


Figura: Resaltamos los *hearts*

El árbol de Perron

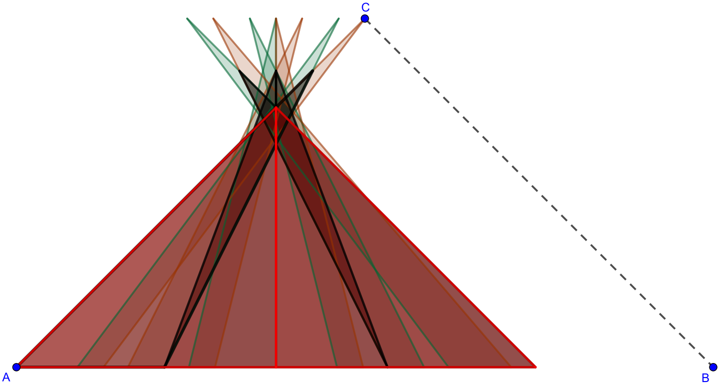


Figura: Trasladamos hasta juntar los *hearts*.

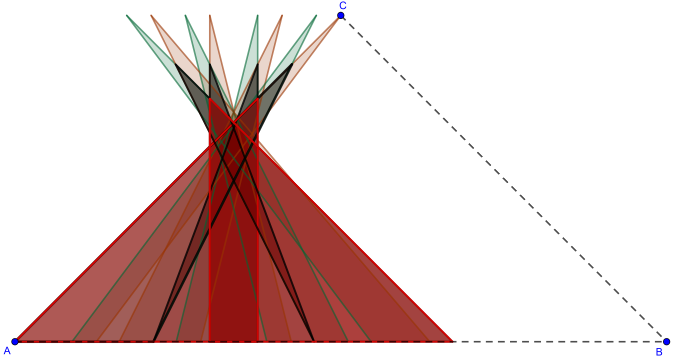


Figura: Aplicamos la operación básica a los *hearts*.

El árbol de Perron

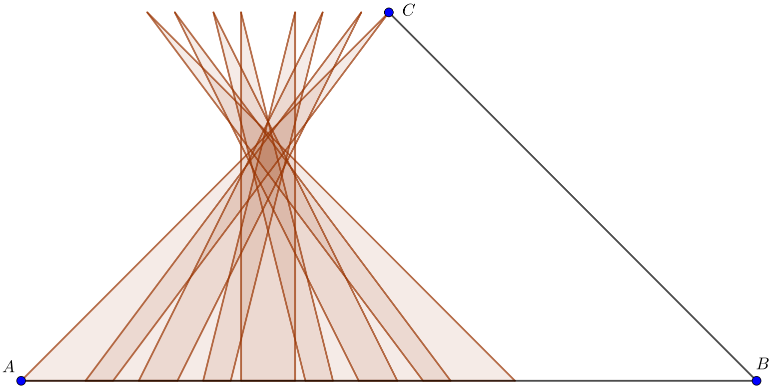


Figura: Conjunto final con área menor que $[\alpha^{2^n} + 2(1-\alpha)] \cdot |ABC|$.

Teorema de los rectángulos

Teorema

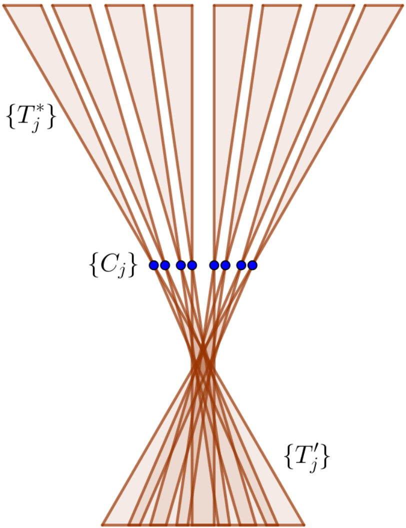
Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen un entero $N = N_\varepsilon$ y 2^N rectángulos $R_1, \dots, R_{2^N}$, cada uno de ellos de dimensiones 1×2^{-N}, tales que:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} R_j \right| < \varepsilon$$

y las traslaciones de dos unidades en la dirección del lado mayor de los R_j, que denotaremos por $\{\widetilde{R}_j\}_{j=1}^{2^N}$, son disjuntas dos a dos y cumplen

$$\left| \bigcup_{j=1}^{2^N} \widetilde{R}_j \right| = 1.$$

Teorema de los rectángulos



Teorema de los rectángulos

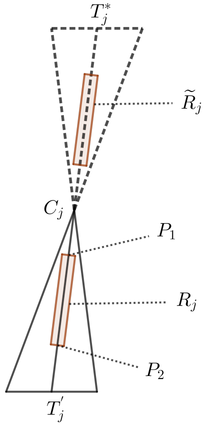
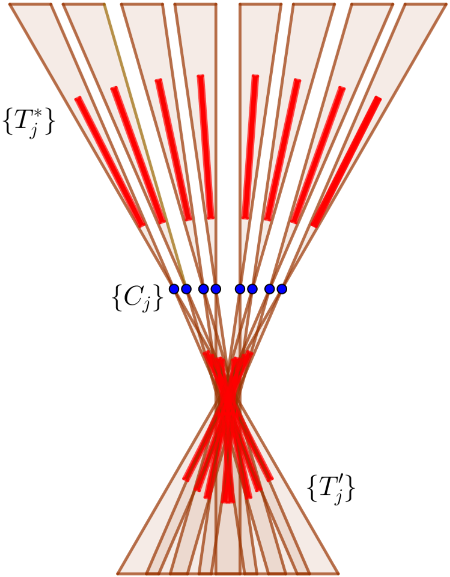


Figura: Idea de la construcción

Teorema de los Rectángulos



Contenido

Contexto histórico.

Una pregunta natural es si la fórmula de inversión

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

es cierta con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Contexto histórico.

Una pregunta natural es si la fórmula de inversión

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

es cierta con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1. Para $n = 1$, $p \in (1, +\infty)$ sí por un teorema de M. Riesz.

Una pregunta natural es si la fórmula de inversión

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

es cierta con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1. Para $n = 1$, $p \in (1, +\infty)$ sí por un teorema de M. Riesz.
2. Para $n \geq 2$, es cierto para $p = 2$, por el teorema de Plancherel.

Contexto histórico.

Una pregunta natural es si la fórmula de inversión

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi$$

es cierta con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1. Para $n = 1$, $p \in (1, +\infty)$ sí por un teorema de M. Riesz.
2. Para $n \geq 2$, es cierto para $p = 2$, por el teorema de Plancherel.
3. Para $n \geq 2$, $p \neq 2$ ha sido un problema abierto famoso.

Contexto histórico.

Una pregunta natural es si la fórmula de inversión

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x\cdot\xi} \, d\xi$$

es cierta con convergencia en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1. Para $n = 1$, $p \in (1, +\infty)$ sí por un teorema de M. Riesz.
2. Para $n \geq 2$, es cierto para $p = 2$, por el teorema de Plancherel.
3. Para $n \geq 2$, $p \neq 2$ ha sido un problema abierto famoso.

Desarrollaremos este último caso.

Multiplicador de la bola

Definición

Llamamos multiplicador de Fourier de la bola $B(0,R)$ a

$$S_R f(x) = \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi.$$

En particular, cuando $R = 1$, lo denotamos por S.

Multiplicador de la bola

Definición

Llamamos multiplicador de Fourier de la bola $B(0, R)$ a

$$S_R f(x) = \int_{B(0,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi.$$

En particular, cuando $R = 1$, lo denotamos por S.

Por tanto, nuestro problema es ver si

$$\lim_{R\to+\infty} \|S_R f - f\|_p = 0.$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema de Análisis Funcional.

Teorema (Relación entre convergencia y acotación)

Sea X un espacio de Banach, sea D un subespacio denso de X. Sea $\{T_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ con $T_N\colon X \to X$ una sucesión de operadores lineales y acotados en X. Son equivalentes:

1. Se cumple:
    1. $\|T_N x\| \leq C \cdot \|x\|$ para todo $x \in D$, para todo $N \in \mathbb{N}$.
    2. $\text{lím}_N \|T_N x - x\|_X = 0$ para todo $x \in D$.
2. $\text{lím}_{N\to+\infty} \|T_N x - x\| = 0$ para todo $x \in X$.

Consideremos el subespacio

$$D = \mathfrak{X}_C = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}$$

denso en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Relación entre acotación y convergencia

Consideremos el subespacio

$$D = \mathfrak{X}_C = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}$$

denso en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.
Como consecuencia del teorema de inversión, cuando $f \in \mathfrak{X}_C$, se tiene $S_R f = f$ para R suficientemente grande. Por tanto,

$$\lim_{R \to +\infty} \|S_R f - f\|_p = 0$$

para toda $f \in \mathfrak{X}_C$.

Relación entre acotación y convergencia

Consideremos el subespacio

$$D = \mathfrak{X}_C = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1_C(\mathbb{R}^n)\}$$

denso en $X = L^p(\mathbb{R}^n)$.
Como consecuencia del teorema de inversión, cuando $f \in \mathfrak{X}_C$, se tiene $S_R f = f$ para R suficientemente grande. Por tanto,

$$\lim_{R\to+\infty} \|S_R f - f\|_p = 0$$

para toda $f \in \mathfrak{X}_C$.
Así que la convergencia en todo $L^p(\mathbb{R}^n)$ equivale a la acotación uniforme de los S_R.

Acotación de S

Lema

Sea $R > 0$. Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para $g \in \mathfrak{X}$, entonces

$$\|S_R g\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$$

para toda $g \in \mathfrak{X}$.

Es decir, la acotación uniforme de los S_R equivale a la acotación de S. Saber si S es acotado es lo que se conoce como el problema del multiplicador de la bola.

Progreso del problema

1. Finales de los 60: multiplicador no acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \notin \left(\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1}\right)$.
2. *Conjetura del disco:* multiplicador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in \left(\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1}\right)$. Probado el caso $p = 2$.
3. Charles Fefferman prueba en *The Multiplier Problem for the Ball* (1971) que el multiplicador de la bola no está acotado para $p \neq 2$.

Teorema del Multiplicador del disco

Teorema (Fefferman)

Supongamos que $n \geq 2$ y $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$. El operador S no es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Construcción del contraejemplo

Lema

Sea $R > 0$. Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para $g \in \mathfrak{X}$, entonces

$$\|S_R g\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$$

para toda $g \in \mathfrak{X}$.

Construcción del contraejemplo

Teorema

Dado $T\colon L^p \to L^p$, son equivalentes:

1. Existe $A_p > 0$ tal que
$$\|Tf\|_p \leq A_p \cdot \|f\|_p \quad \forall f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$
2. Existe $A_p > 0$ tal que
$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |Tf_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p .$$
para todo entero positivo M.

Corolario

Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para $g \in \mathfrak{X}$, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S_R f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

para todas $f_1, \ldots, f_M \in \mathfrak{X}$.

Construcción del contraejemplo

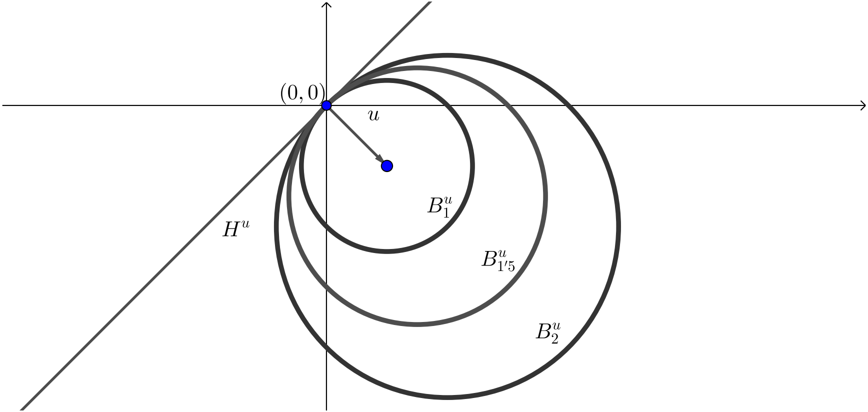


Figura: Bolas que rellenan el semiespacio

Construcción del contraejemplo

Definición

Se define el multiplicador de la bola de centro uR y radio R como:

$$S_R^u f(x) = \int_{B(Ru,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad \forall f \in \mathfrak{X}.$$

Construcción del contraejemplo

Definición

Se define el multiplicador de la bola de centro uR y radio R como:

$$S_R^u f(x) = \int_{B(Ru,R)} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad \forall f \in \mathfrak{X}.$$

Proposición

Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para toda $g \in \mathfrak{X}$, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S_R^{u_j}(f_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Construcción del contraejemplo

Definición

Se define el *multiplicador del semiespacio* H^u por

$$S^u f(x) = \int_{\xi \cdot u > 0} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi, \quad \forall f \in \mathfrak{X}.$$

Construcción del contraejemplo

Definición

Se define el *multiplicador del semiespacio H^u* por

$$S^u f(x) = \int_{\xi \cdot u > 0} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi, \quad \forall f \in \mathfrak{X}.$$

Teorema

Si $\|Sg\|_{L^p} \leq A_p \|g\|_{L^p}$ para toda $g \in \mathfrak{X}$, entonces:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Construcción del contraejemplo

Lema

Sea R un rectángulo del plano $\mathbb{R}^2$ cuyos lados tienen longitudes 1 y 2^{-N} y sea u un vector unitario en la dirección del lado más largo de R. Sea $\widetilde{R} = 2u + R$.
Entonces existe una constante $c' > 0$ tal que:

$$|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\widetilde{R}}.$$

Esquema de la prueba para $p \in (1,2)$, $n = 2$:

Construcción del contraejemplo: esquema de la prueba

Esquema de la prueba para $p \in (1,2)$, $n = 2$:

1. Se prueba que:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Construcción del contraejemplo: esquema de la prueba

Esquema de la prueba para $p \in (1, 2)$, $n = 2$:

1. Se prueba que:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

2. Se prueba que

$$|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\widetilde{R}}.$$

Construcción del contraejemplo: esquema de la prueba

Esquema de la prueba para $p \in (1,2)$, $n = 2$:

1. Se prueba que:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S^{u_j} f_j(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq A_p \cdot \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

2. Se prueba que

$$|S^u(\chi_R)| \geq c' \cdot \chi_{\widetilde{R}}.$$

3. Se escoge como $M = 2^N$, $f_j = \chi_{R_j}$ y u_j el vector director de R_j para llegar a una contradicción.

Sea $E = \bigcup_{j=1}^{2^N} R_j$. Se tiene:

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}^{p} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sop}=E}}{=} \int \left(\sum_{j=1}^{M} |\chi_{R_j}|^2 \right)^{p/2} \cdot \chi_E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder } \frac{2}{p}}}{\leq}$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |\chi_{R_j}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{p}}} \cdot \|\chi_E\|_{L^q} = 1^{\frac{p}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{q}}$$

con $q = \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{-1}$.

Contraejemplo: acotación inferior

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |S^{u_j}(\chi_{R_j})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \left\| \left(\sum_{j=1}^{M} |c' \cdot \chi_{\widetilde{R}_j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$\underset{\{\widetilde{R}_j\} \text{ disjuntos}}{\underset{\uparrow}{=}} \quad c' \cdot \left\| (\chi_{\bigcup \widetilde{R}_j})^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = c'.$$

Contradicción

Llegamos a la contradicción:

$$c' \leq A_p \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p \cdot q}}$$

para todo $\varepsilon > 0$ con $c' > 0$, pues $p \cdot q = p \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{-1} > 0$ si $p \in (1, 2)$.

Contradicción

Llegamos a la contradicción:

$$c' \leq A_p \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p \cdot q}}$$

para todo $\varepsilon > 0$ con $c' > 0$, pues $p \cdot q = p \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{-1} > 0$ si $p \in (1, 2)$.

Para $n \geq 3$, se obtiene el resultado tomando $f_j = f \otimes \chi_{R_j}$ con $f \in \mathfrak{X}$ tal que $\|f\|_p \neq 0$.

Contradicción

Llegamos a la contradicción:

$$c' \leq A_p \cdot \varepsilon^{\frac{1}{p \cdot q}}$$

para todo $\varepsilon > 0$ con $c' > 0$, pues $p \cdot q = p \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{-1} > 0$ si $p \in (1, 2)$.

Para $n \geq 3$, se obtiene el resultado tomando $f_j = f \otimes \chi_{R_j}$ con $f \in \mathfrak{X}$ tal que $\|f\|_p \neq 0$.

Para $p > 2$ se razona por dualidad usando que S es autoadjunto.

Gracias por su atención