UNIVERSIDAD DE MURCIA
Facultad de Matemáticas
Máster de Matemática avanzada

Trabajo Fin de Máster

Aproximación no lineal con algoritmos greedy en espacios de Banach

Ilídio Jaime Eduardo Agostinho
Febrero 2022

Director: Gustavo Garrigós

Declaración de originalidad

Ilídio Jaime Eduardo Agostinho, autor del Trabajo de Fin de Máster “Aproximación no lineal con algoritmos greedy en espacios de Banach”, bajo la tutela del profesor Gustavo Garrigós, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 31 de enero de 2022

Ilídio Agostinho

Fdo: Ilídio Jaime Eduardo Agostinho

Dedicatoria

Mi mujer Cláudia Calado y mis hijos Ilídio y Sara

Agradecimientos

Al profesor Gustavo Garrigós, por todo el apoyo desde mi llegada. Además, por la paciencia, los conocimientos transmitidos, por la habilidad, el rigor y la agilidad en responder todas las preguntas que me inquietaban. Es un matemático admirable y muy inspirador.

También me gustaría expresar mi agradecimiento a la profesora Natividade, co-tutora de este trabajo y coordinadora de la 1ª edición del Máster en Matemáticas y aplicaciones en Angola.

Resumen

Uno de los objetivos de la Teoría de Aproximación consiste en aproximar funciones f mediante combinaciones lineales **finitas** de elementos de un sistema prefijado de vectores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Típicamente, dichas funciones viven en un espacio de Banach $\mathbf{X}$, y el sistema de vectores constituye una *base* de $\mathbf{X}$, de modo que cada $f \in \mathbf{X}$ admite una representación única en forma de serie infinita

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

con convergencia en la norma de $\mathbf{X}$.

En muchos problemas prácticos no es posible almacenar toda la información de f (codificada en sus coeficientes a_n con $n = 1, 2, \ldots$), y estamos limitados a utilizar solamente un número fijo N de datos. En ese caso es necesario "aproximar" f con una combinación lineal adecuada de N-términos de la base.

En la Teoría de Aproximación Lineal se utiliza la suma parcial N-ésima

$$S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$$

y se estudia el comportamiento del error de aproximación $\|f - S_N(f)\|$, para funciones f suficientemente buenas.

En la Teoría de Aproximación no-lineal, se utilizan "algoritmos" más generales

$$\mathcal{A}_N(f) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{n_j} e_{n_j},$$

donde la selección de los vectores e_{n_j} y de los coeficientes α_{n_j} puede ser arbitraria, de modo que el error de aproximación $\|f - \mathcal{A}_N(f)\|$ pueda ser menor que el obtenido por la aproximación lineal $\|f - S_N(f)\|$.

Es necesario pues construir algoritmos capaces de proporcionar un buen error de aproximación desde un punto de vista teórico. Uno de los algoritmos más na-

turales consiste en escoger

$$\mathcal{G}_N(f) = \sum_{j=1}^{N} a_{n_j} e_{n_j},$$

donde $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{N}$ son los N coeficientes **mayores** de f en valor absoluto. Es decir, se reordenan los coeficientes $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de f de forma que

$$|a_{n_1}| \geq |a_{n_2}| \geq |a_{n_3}| \geq \dots$$

y se escoge la suma parcial de los N mayores. Este método se denomina *algoritmo greedy* (o avaricioso). En esta memoria estudiamos los resultados principales sobre la teoría de aproximación no lineal con el algoritmo greedy en espacios de Banach.

El trabajo está estructurado en 3 capítulos.

El Capítulo 1 está dedicado a la definición y propiedades principales de las bases de Schauder en un espacio de Banach $\mathbf{X}$ de dimensión infinita. Un sistema de vectores $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder si cada $x \in \mathbf{X}$ admite una representación única en forma de serie infinita

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \tag{1}$$

con convergencia en la norma de $\mathbf{X}$. En el capítulo 1 resaltamos varios resultados importantes. El primero de ellos es el **Teorema 1.1.2**, que afirma que:

Si $\beta = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base (de Schauder) de $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$, entonces la expresión

$$|||x||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \Big\|, \quad x \in \boldsymbol{X}$$

define una nueva norma en $\boldsymbol{X}$ que es equivalente a $\|.\|$.

A partir de este resultado podremos demostrar la continuidad de los funcionales $f_n : x \in \mathbf{X} \mapsto a_n$, que definen los coeficientes de un vector en la base; ver el **Teorema 1.1.3**.

También obtendremos la acotación uniforme de los operadores de proyección (o de suma parcial)

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \quad x \in \mathbf{X};$$

ver **Proposición 1.1.3**.

A continuación se demuestra un recíproco, el **Teorema 1.1.11**, que establece un método para construir una base en un espacio de Banach **X**, siempre que tengamos una familia de proyecciones que cumplan con las propiedades de los operadores de suma parcial. Por último, presentaremos al final del Capítulo 1 varios ejemplos de bases de Schauder en espacios de Banach clásicos.

En el Capítulo 2 abordamos la definición y propriedades fundamentales de un tipo de base especial, denominada *base incondicional*, que tiene la propriedad de garantizar, para cada $x \in \mathbf{X}$, la convergencia de la serie en (1), independientemente de la ordenación de sus elementos.

De forma más precisa, en la primera sección, §2.1, introducimos varias nociones equivalentes de *convergencia incondicional* de series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach **X**; ver **Teorema 2.1.3**.

En la segunda sección, §2.2, definimos las bases incondicionales, y presentamos algunos teoremas que caracterizan este tipo de bases; ver **Teorema 2.2.2** y **Teorema 2.2.3**. En particular, en este último teorema se definen los operadores

$$S_{\boldsymbol{\beta}}(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j(x) x_j, \quad x \in \operatorname{span}\{x_j\}_{j=1}^{\infty},$$

donde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares, y se demuestra que:

> *Una base $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\boldsymbol{X}$ es incondicional si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que*
>
> $$\|S_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall\ x \in \operatorname{span}\{x_j\}_{j=1}^{\infty},$$
>
> *y para toda sucesión $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $|\beta_j| \leq 1$.*

Este resultado se puede interpretar como una caracterización “cuantitativa” de base incondicional, y permite definir la *constante de base incondicional*, K_u, como la menor C tal que se cumple la desigualdad anterior; ver (2.8) en la §2.2.

Por último, en la sección §2.3, exponemos de forma detallada varios ejemplos de bases incondicionales en espacios de Banach clásicos.

Finalmente, en el Capítulo 3 presentamos los conceptos relacionados con el *algoritmo greedy*, y el teorema de Konyagin y Temlyakov, que es el principal resultado de este trabajo.

De manera más precisa, en la primera sección, §3.1, exponemos con más detalle los aspectos formales relacionados con la aproximación no-lineal y el algoritmo greedy. En particular, fijada una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbf{X}$, definimos

$$\Sigma_N = \Big\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e_\lambda \ : \ a_\lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Card}\,\Lambda \leq N \Big\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

que es el conjunto de todas las combinaciones lineales de a lo sumo N elementos de la base. Dado $x \in \mathbf{X}$, definimos también

$$\sigma_N(x) := \text{ínf}\,\Big\{ \|x - z\| \ : \ z \in \Sigma_N \Big\},$$

que denominamos *mejor error de aproximación con N-términos*. El objetivo de la aproximación no-lineal se puede formular como la búsqueda (constructiva) de "algoritmos" $\mathcal{A}_N : \mathbf{X} \to \Sigma_N$ tales que las aproximaciones $\mathcal{A}_N(x)$ de cada vector $x \in \mathbf{X}$ cumplan que $\|x - \mathcal{A}_N(x)\|$ es aproximadamente igual a $\sigma_N(x)$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

A continuación, en la **Definición 3.1.4** damos una definición rigurosa del "algoritmo greedy"

$$x \in \mathbf{X} \mapsto \mathcal{G}_m(x),$$

y mostramos con algunos ejemplos que los operadores $\mathcal{G}_m : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, en general, no son ni continuos ni lineales.

Por último enunciamos que nuestro objetivo final en este trabajo es encontrar una caracterización de aquellas bases para las cuales

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\,\sigma_m(x), \quad \forall\ x \in \mathbf{X}, \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

A continuación, presentamos en la sección §3.2 el concepto de *base democrática*. De forma más precisa, decimos que una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $\mathbf{X}$ es *democrática* si existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{N}$, con $|A| = |B|$, se tiene:

$$\Big\| \sum_{n\in A} e_n \Big\| \leq C \Big\| \sum_{n\in B} e_n \Big\|.$$

Es decir, las cantidades $\|\sum_{n\in A} e_n\|$ y $\|\sum_{n\in B} e_n\|$ son comparables (salvo constantes multiplicativas) siempre que $|A| = |B|$. En particular, la norma de la suma de un conjunto de N elementos de la base es esencialmente independiente de dónde estén situados dichos elementos.

En la sección §3.2 presentamos varias propiedades de las bases democráticas. En la §3.2.1 estudiamos la democracia en los ejemplos de bases para los espacios de Banach clásicos, presentados en los capítulos anteriores.

En la última sección §3.3 definimos el concepto clave de *base greedy*:

> *Una base* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* $\boldsymbol{X}$ *es greedy si existe una constante* $C > 0$ *tal que se cumple*
>
> $$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\,\sigma_m(x), \quad \forall\ x \in \boldsymbol{X}, \quad \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Con esta definición, podemos enunciar y demostrar el Teorema de Konyagin y Temlyakov, que es el resultado principal de este trabajo; ver **Teorema 3.3.2**. Este teorema dice lo siguiente

> *Sea* $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una base de* $\boldsymbol{X}$*. Entonces* β *es una base greedy, si y sólo si,* β *es incondicional y democrática.*

En la sección §3.3.1 damos una demostración detallada de este teorema. Por último, en la sección §3.3.2 estudiamos, en los ejemplos clásicos de los capítulos anteriores, cuando se cumple la propiedad de base greedy.

En este trabajo se han utilizado como referencias principales dos libros:

[1] F. Albiac, N. Kalton. Topics in Banach space theory. Springer (2016).

[4] E. Hernández, G. Weiss. A first course on wavelets. CRC Press (1996).

Los Capítulos 1 y 2 están basados en parte en [4, Chapter 5], en particular la presentación autocontenida de las propiedades de las bases de Schauder y las bases incondicionales.

El Capítulo 3 está basado en [1, Chapter 10], en particular, la descripción de aproximación no-lineal y algoritmo greedy, las propiedades de las bases democráticas, y el enunciado y demostración del teorema de Konyagin y Temlyakov.

Además, el autor ha recibido la inestimable ayuda del tutor, Gustavo Garrigós, en la organización de los resultados, los detalles de algunas demostraciones, y la presentación de los ejemplos.

Índice general

Capítulo 1

Bases de Schauder

Este capítulo está dedicado al concepto fundamental de Base de Schauder. En la primera sección estudiaremos las definiciones y algunas propriedades de bases en espacios de Banach. Veremos que una base permite representar cualquier elemento del espacio como una combinación infinita de elementos de la base y determinados escalares. Para justificar la convergencia de la serie infinita necesitamos añadir propiedades topológicas. El espacio de Banach es un espacio vectorial con una topología inducida por una norma, y es ésta la que nos va a permitir definir la noción de convergencia asociada al concepto de base de Schauder. En la última sección presentaremos algunos ejemplos de bases de Schauder en espacios de Banach. En este capítulo hemos seguido los libros de E. Hernández y G. Weiss ([4], Chapter 5.1) y de F. Albiac y N. Kalton ([1], Chapter 1.1).

1.1. Conceptos fundamentales de bases de Schauder

Consideraremos siempre $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ como un espacio de Banach (separable), de dimensión infinita, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde por simplicidad asumiremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición 1.1.1. *(Base de Schauder)*

Una sucesión de vectores $\beta = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *base de Schauder* para $\mathbf{X}$ (o simplemente, una *base*), si para cada $x \in \mathbf{X}$ existe una sucesión $(\alpha_j(x))_{j=1}^{\infty}$ de escalares que es única, tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) x_j,$$

donde la convergencia es en la topología generada por la norma $\|\cdot\|$. Es decir, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j\| = 0.$$

Asociado con la base, tenemos la sucesión de funcionales lineales $f_j \in \mathbf{X}^*$, $j = 1, 2, ...$ definida por $f_j(x) = \alpha_j(x), \forall x \in \mathbf{X}$.

Teorema 1.1.2. *Sea $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ un espacio Banach sobre $\mathbb{K}$ y $\beta = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de $\boldsymbol{X}$. Si*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)x_j$$

es la única representación de $\boldsymbol{X}$ en relación a la base β, entonces

$$|||x||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j\|$$

define un norma en $\boldsymbol{X}$ que es equivalente a $\|.\|$.

Demostración. Como $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)x_j$, si definimos

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j$$

tenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x - S_n\| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon.$$

En particular:

$$\|S_n\| = \|S_n - x + x\| \leq \|x - S_n\| + \|x\| \leq \varepsilon + \|x\|, \forall n > N_\varepsilon,$$

y por tanto $|||x||| = \sup_n \|S_n\| = \max\left\{\|S_1\|, ..., \|S_{N_\varepsilon}\|, \sup_{n>N_\varepsilon} \|S_n\|\right\} < \infty$. Además:

1. $|||x||| \geq \lim_{n\to\infty} \|S_n\| = \|x\| > 0, \forall x \neq 0;$

2. $|||x||| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

3. $|||\, kx\, ||| = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(kx)x_j \right\| = \sup_n \left\| k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j \right\| = |k|\, |||x|||, \forall\, k \in \mathbb{K};$

4. $||| \, x+y \, ||| = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x+y)x_j \right\|$,

y por la linealidad de los α_j,

$$||| \, x+y \, ||| = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j(x)+\alpha_j(y)\Big)x_j \right\| = \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y)x_j \right\|$$

$$\leq \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)x_j \right\| + \sup_n \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y)x_j \right\| = ||| \, x \, ||| + ||| \, y \, |||.$$

Así, $||| \cdot |||$ es un norma en $\mathbf{X}$. Sólo falta probar que $||| \, x \, ||| \leq C\,\|x\|$, para todo $x \in \mathbf{X}$ y alguna constante $C > 0$.

Como $\beta = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de $\mathbf{X}$, entonces también lo es el sistema normalizado $\tilde{\beta} = (x_j/\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}$. Notar que $|||x|||$ no cambia para β y $\tilde{\beta}$, y por tanto podemos asumir que $\|x_j\| = 1, \forall j \in \mathbb{N}$. Demostremos ahora que $(\mathbf{X}, ||| \cdot |||)$ es un espacio completo.

Sea $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbf{X}, ||| \cdot |||)$. Tenemos que probar que $y^{(k)} \to y$ en $(\mathbf{X}, ||| \cdot |||)$, para algún $y \in \mathbf{X}$.

Dado $\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$||| \, y^{(k)} - y^{(m)} \, ||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y^{(k)} - y^{(m)})x_j \right\| < \varepsilon, \forall k, m > N_\varepsilon. \qquad (*)$$

Como $\|x_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$| \, \alpha_n(y^{(k)}) - \alpha_n(y^{(m)}) \, | = \|\alpha_n(y^{(k)} - y^{(m)})x_n\| =$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y^{(k)} - y^{(m)})x_j - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(y^{(k)} - y^{(m)})x_j \right\| \leq$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y^{(k)} - y^{(m)})x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(y^{(k)} - y^{(m)})x_j \right\| < 2\varepsilon, \forall k, m > N_\varepsilon.$$

Quiere decir que $\{\alpha_n(y^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\exists \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_n = \lim_{m \to \infty} \alpha_n(y^{(m)}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

De $(*)$,

haciendo $m \to \infty$ (y k fijo), deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j(y^{(k)}) - \alpha_j\Big) x_j \Big\| \leq \varepsilon, \forall k > N_\varepsilon. \qquad (**)$$

Como

$$\sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n+l} \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n+l} \Big(\alpha_j - \alpha_j(y^{(k)})\Big) x_j - \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j - \alpha_j(y^{(k)})\Big) x_j + \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j(y^{(k)}) x_j,$$

entonces:

$$\Big\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j x_j \Big\| \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n+l} \Big(\alpha_j - \alpha_j(y^{(k)})\Big) x_j \Big\| + \Big\| \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j - \alpha_j(y^{(k)})\Big) x_j \Big\| + \Big\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j(y^{(k)}) x_j \Big\|$$

$$\leq 2\varepsilon + \Big\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j y^{(k)} x_j \Big\|, \forall k > N_\varepsilon.$$

Como para cada k fijo la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(y^{(k)}) x_j$ converge en $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$, existirá $n_0(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j(y^{(k)}) x_j \Big\| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}, \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Tomando $k = N_\varepsilon + 1$, esto prueba que

$$\Big\| \sum_{j=n+1}^{n+l} \alpha_j x_j \Big\| \leq 3\varepsilon, \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon, N_\varepsilon + 1), \quad \forall\, l \in \mathbb{N},$$

y por tanto la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$ también converge en $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$.

Llamando $y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j$, entonces $\alpha_j = \alpha_j(y)$ y sustituyendo en $(**)$ tendremos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \Big(\alpha_j(y^{(k)}) - \alpha_j(y)\Big) x_j \Big\| \leq \varepsilon, \forall k > N_\varepsilon.$$

Así $|||\, y^{(k)} - y \,||| < \varepsilon, \quad \forall k > N_\varepsilon$, y concluimos que $(\mathbf{X}, |||\cdot|||)$ es completo.

Ahora como $(\mathbf{X}, ||| \cdot |||)$ y $(\mathbf{X}, \| \cdot \|)$ son espacios de Banach y $\|x\| \leq ||| \, x \, |||$, por el teorema de la aplicación abierta aplicado al operador identidad, tenemos que

$$||| \, x \, ||| \leq C\|x\|, \quad \forall \, x \in \mathbf{X}.$$

□

Teorema 1.1.3. *Los "coeficientes" funcionales $x \in \boldsymbol{X} \mapsto f_j(x) = \alpha_j(x) \in \mathbb{K}$, son continuos en $(\boldsymbol{X}, \| \cdot \|)$, $\forall \, j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, pongamos $j = 1$ y escribimos

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) x_j,$$

tenemos:

$$| \, f_1(x) \, |=| \, f_1(x) \, | \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\| \leq \frac{1}{\|x_1\|} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j \right\| = \frac{1}{\|x_1\|} ||| \, x \, ||| \leq \frac{1}{\|x_1\|} C\|x\|$$

por el teorema anterior. Por lo tanto

$$| \, f_1(x) \, |\leq K_1\|x\|, \forall x \in \mathbf{X},$$

con $K_1 = C/\|x_1\|$. □

Definición 1.1.4. *(Funcionales biortogonales)*

Sea $(\boldsymbol{X}, \|.\|)$ un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{X}$ una base.

Una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq \boldsymbol{X}^*$ es llamada de sucesión de funcionales biortogonales de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ si cumple

$$e_k^*(e_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & si \quad k = j \\ 0, & si \quad k \neq j \end{cases}, \quad \forall \, k, j \in \mathbb{N}.$$

Observación 1.1.5. *En la notación anterior, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base de $\boldsymbol{X}$, entonces tiene un único sistema biortogonal dado por $e_n^*(x) = f_n(x) = \alpha_n(x)$.*

Demostración. Si e_n^* es sistema biortogonal de $\{e_n\}$, como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base entonces $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$, para $\alpha_j = \alpha_j(x)$ únicos. Así

$$e_n^*(x) = e_n^*(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_n^*(e_j) = \alpha_n. \tag{1.1}$$

Esto prueba la unicidad. Para probar la existencia, obsérvese que los funcionales $e_n^* = f_n$ del Teorema 1.1.3 son elementos de $\mathbf{X}^*$, y son biortogonales con $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Como consecuencia obtenemos el siguiente criterio para comprobar que un sistema es base de Schauder.

Corolario 1.1.6. *Sea $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach. Entonces β es una base de Schauder si y sólo si existe una sucesión de funcionales $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $\boldsymbol{X}^*$, biortogonal con β, y tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n, \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}. \tag{1.2}$$

Demostración. Si β es base de Schauder, el resultado sigue de la Observación 1.1.5. Recíprocamente, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ cumplen (1.2), entonces todo $x \in \mathbf{X}$ se puede representar de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ para algunos $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Usando la biortogonalidad como en (1.1) vemos que necesariamente $\alpha_n = e_n^*(x)$, $j \in \mathbb{N}$, y por tanto los escalares α_j son únicos. Esto implica que β es una base de Schauder. □

Definición 1.1.7. *(Proyecciones Canónicas)*

Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach con base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Se definen $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones canónicas asociadas a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ por

$$P_n : \mathbf{X} \to \mathbf{X}, \text{ tal que } P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)_j e_j, \forall n \in \mathbb{N}$$

donde

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j \in \mathbf{X}$$

Las proyecciones canónicas verifican las siguientes propiedades elementales

1. $\dim P_n(\mathbf{X}) = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $P_m \circ P_n = P_{\text{mín}\{m,n\}}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{n\to\infty} \|P_n(x) - x\| = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{X}$.

Además se cumple la siguiente acotación uniforme.

Proposición 1.1.8. *Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach $\mathbf{X}$ y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones canónicas asociadas. Entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.*

Demostración. Por el **Teorema 1.1.2**,

$$\|P_m(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j \right\| = |||\, x \,||| \leq C\|x\|,$$

para algún $C > 0$. Por lo tanto $\|P_m\| \leq C$. □

Definición 1.1.9. *Sea* $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una base para un espacio de Banach* $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$*, el número*

$$k_\beta := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \tag{1.3}$$

es llamado constante de la base β.

En el caso óptimo en que $k_\beta = 1$, la base $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice *monótona*.

Observación 1.1.10. *Dada una base de Schauder* $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\boldsymbol{X}$*, siempre podemos renormar el espacio de Banach de tal manera que la base sea monótona, tomando*

$$|||x||| = \sup_{n\geq 1} \|P_n x\|.$$

Ahora veamos un resultado que establece un método para construir una base para un espacio de Banach. Basta tener una familia de proyecciones que satisfaga las propiedades anteriores de los operadores P_n.

Teorema 1.1.11. *Supongamos que* $S_n : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, $n \in \mathbb{N}$, *es una sucesión de proyecciones lineales acotadas en un espacio de Banach* $\boldsymbol{X}$ *tales que:*

(i) *dim* $S_n(\boldsymbol{X}) = n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $S_n \circ S_m = S_m \circ S_n = S_{\mathrm{mín}\{m,n\}}$, *para cada* $m, n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\|S_n(x) - x\| \to 0$, $\forall\, x \in \boldsymbol{X}$.

Entonces toda sucesión de vectores no nulos $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *en* $\boldsymbol{X}$*, elegida inductivamente de manera que*

$$e_1 \in S_1(\boldsymbol{X}) \quad y \quad e_k \in S_k(\boldsymbol{X}) \cap S_{k-1}^{-1}(0), \quad si\ k \geq 2,$$

es una base para $\boldsymbol{X}$*, cuyas proyecciones canónicas son* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$.

Probamos primero algunos lemas.

Lema 1.1.12. $S_n(X) \subseteq S_{n+1}(X), \forall n \geq 1.$

Demostración. Si $x \in S_n(\mathbf{X}) \Rightarrow x = S_n(z)$, para algún $z \in \mathbf{X}$, y por tanto, usando la propiedad (ii),

$$x = S_n(z) = S_{n+1} \circ S_n(z) = S_{n+1}(S_n(z)) \in S_{n+1}(\mathbf{X}).$$

□

Lema 1.1.13. $S_n(X) = S_{n-1}(X) \oplus (S_n - S_{n-1})(X), \forall n \geq 2.$

En particular, $\dim(S_n - S_{n-1})(X) = 1$.

Demostración. La inclusión $S_{n-1}(\mathbf{X}) \oplus (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \subset S_n(\mathbf{X})$ es consecuencia del Lema 1.1.12. Veamos ahora que $S_n(\mathbf{X}) \subseteq S_{n-1}(\mathbf{X}) \oplus (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$, y que dicha suma es directa.

Tomamos $z \in S_n(\mathbf{X}) \Rightarrow z = S_n(x)$, para algún $x \in S_n(\mathbf{X})$.

Escribimos $z = S_n(x) - S_{n-1}(x) + S_{n-1}(x)$, donde

$S_n(x) - S_{n-1}(x) \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$ y $S_{n-1}(x) \in S_{n-1}(\mathbf{X})$

Esto prueba que $S_n(\mathbf{X}) \subseteq (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) + S_{n-1}(\mathbf{X})$.

Para ver que la suma es directa, sea $z \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}(\mathbf{X})$. Por un lado, como $z \in S_{n-1}(\mathbf{X})$, usando que S_{n-1} es una proyección se tiene que $z = S_{n-1}(z)$.

Por otro lado, $z \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$, y por tanto $z = (S_n - S_{n-1})(x)$, para algún $x \in S_n(\mathbf{X})$. Entonces, la propiedad (ii) implica

$$z = S_{n-1}(z) = S_{n-1} \circ (S_n - S_{n-1})(x) = 0.$$

Esto prueba que $(S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \oplus S_{n-1}(\mathbf{X})$ es una suma directa. Concluimos que,

$$\dim S_n(\mathbf{X}) = \dim(S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \ + \ \dim S_{n-1}(\mathbf{X}),$$

y usando la propiedad (i) esto implica que $\dim(S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) = n - 1$. □

Lema 1.1.14. $(S_n - S_{n-1})(X) = S_n(X) \cap S_{n-1}^{-1}(0), \quad \forall\, n \geq 2.$

Demostración. Probemos primero que

$$(S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \subseteq S_n(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}^{-1}(0).$$

Es claro, por el Lema 1.1.12, que $(S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}) \subseteq S_n(\mathbf{X})$, lo que significa que si $x \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$ entonces $x \in S_n(\mathbf{X})$. Veamos también que $x \in S_{n-1}^{-1}(0)$.

Sea $x \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$, entonces $x = (S_n - S_{n-1})(z)$, para algún $z \in \mathbf{X}$. Entonces

$$S_{n-1}(x) = S_{n-1} \circ \Big(S_n - S_{n-1}\Big)(z) = S_{n-1} \circ S_n(z) - S_{n-1} \circ S_{n-1}(z) = 0,$$

usando en el último paso la propiedad (ii) de la **definición1.1.7**. Esto implica que $x \in S_{n-1}^{-1}(0)$. Por lo tanto como $x \in S_n(\mathbf{X})$ y $x \in S_{n-1}^{-1}(0)$, entonces $x \in S_n(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}^{-1}(0)$.

Ahora probaremos la inclusión contraria

$$S_n(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}^{-1}(0) \subseteq (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X}).$$

Sea $x \in S_n(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}^{-1}(0)$, entonces por un lado $x \in S_n(\mathbf{X})$, que implica

$$x = S_n(z), \quad \text{para algún } z \in \mathbf{X}. \qquad (*)$$

Por otro lado, $x \in S_{n-1}^{-1}(0) \Rightarrow S_{n-1}(x) = 0$. Utilizando esta igualdad en $(*)$ y teniendo en cuenta de nuevo la propiedad (ii) de la **definición1.1.7**,

$$0 = S_{n-1}(x) = S_{n-1} \circ S_n(z) = S_{n-1}(z).$$

Por lo tanto $(*)$ se puede escribir como $x = S_n(z) - S_{n-1}(z)$, es decir que $x \in (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$.

□

Demostración del Teorema 1.1.11.

Sea $0 \neq e_1 \in S_1(\mathbf{X})$ y definimos, $e_1^* : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ de modo que

$$e_1^*(x)e_1 = S_1(x).$$

Como dim $S_1(\mathbf{X}) = 1$, esta aplicación está bien definida y es lineal. Además es continua con norma $\|e_1^*\|_{\mathbf{X}^*} \leq \|S_1\|/\|e_1\|$.

A continuación sea $0 \neq e_2 \in S_2(\mathbf{X}) \cap S_1^{-1}(0) = (S_2 - S_1)(\mathbf{X})$ y definimos

$$e_2^* : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \text{ de modo que } e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x).$$

De nuevo, la aplicación está bien definida y es lineal porque $\dim(S_2 - S_1)(\mathbf{X}) = 1$, debido al Lema 1.1.13.

En general, dado $0 \neq e_n \in S_n(\mathbf{X}) \cap S_{n-1}^{-1}(0) = (S_n - S_{n-1})(\mathbf{X})$, definimos

$$e_n^* : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \text{ de modo que } e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x).$$

La aplicación e_n^* está bien definida y es lineal, y además se cumple

$$\begin{aligned} |e_n^*(x)| &= \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \, \|e_n\|^{-1} \leq \Big(\|S_n(x)\| + \|S_{n-1}(x)\|\Big) \|e_n\|^{-1} \\ &\leq (\|S_n\| + \|S_{n-1}\|) \, \|e_n\|^{-1} \, \|x\|. \end{aligned}$$

Por tanto, $e_n^* \in \mathbf{X}^*$.

Veamos que $\{e_n, e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema biortogonal. Por un lado

$$e_n^*(e_n)e_n = S_n(e_n) - S_{n-1}(e_n) = S_n(e_n) - 0 = e_n,$$

ya que $e_n \in S_{n-1}^{-1}(0)$ y $S_n(e_n) = e_n$. Por unicidad esto implica que $e_n^*(e_n) = 1, \forall n$.

Por otro lado, si $m > n \Rightarrow m \geq n + 1 \Rightarrow m - 1 \geq n$. Como, $e_m \in S_{m-1}^{-1}(0)$, entonces usando la propiedad (ii) se tiene

$$S_n(e_m) = (S_n \circ S_{m-1})(e_m) = S_n(S_{m-1}(e_m)) = 0,$$

y análogamente, $S_{n-1}(e_m) = 0$. Es decir que $e_n^*(e_m)e_n = S_n(e_m) - S_{n-1}(e_m) = 0$, y por tanto

$$e_n^*(e_m) = 0, \quad \forall\, m > n.$$

Para $m < n \Rightarrow m \leq n - 1$, y en ese caso usando que $S_m(e_m) = e_m$ tenemos

$$S_n(e_m) = S_n(S_m(e_m)) = (S_n \circ S_m)(e_m) = S_m(e_m),$$

y análogamente, $S_{n-1}(e_m) = S_{n-1}(S_m(e_m)) = (S_{n-1} \circ S_m)(e_m) = S_m(e_m)$.
Por lo tanto,

$$e_n^*(e_m)e_n = S_n(e_m) - S_{n-1}(e_m) = S_m(e_m) - S_m(e_m) = 0.$$

Así hemos demostrado que

$$e_n^*(e_m) = \delta_{n,m}, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Ahora, usando la definición de los funcionales e_n^*, podemos escribir

$$S_n(x) = S_1(x) + \sum_{j=2}^{n} \Big(S_j(x) - S_{j-1}(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k, \tag{1.5}$$

de modo que, por la condición 3, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k^*(x)e_k$ converge a x, para todo $x \in \mathbb{X}$. Por otro lado, si pudiéramos escribir $x = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m$, para algunos escalares $\alpha_m \in \mathbb{K}$, con convergencia en la norma de $\mathbf{X}$, entonces usando que $e_n^* \in \mathbf{X}^*$ y (1.4) tendríamos

$$e_n^*(x) = e_n^*\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_n^*(e_m) = \alpha_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, los escalares α_n son únicos y coinciden con $e_n^*(x)$.

Todo esto implica que la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para $\mathbf{X}$, y por (1.5), que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ son sus proyecciones canónicas.

□

Definición 1.1.15. *Una sucesión* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* $\mathbf{X}$*, se dice* sucesión básica *si es una base para el subespacio* $[e_n] = \overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

A continuación damos una caracterización de las sucesiones básicas. Para ello usaremos el siguiente lema, conocido de análisis funcional.

Lema 1.1.16. *Sean* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{Y}$ *espacios normados. Sea* E *un subespacio denso en* $\mathbf{X}$ *y sea* $T : E \to \mathbf{Y}$ *un operador lineal y acotado. Entonces existe un único operador* $\overline{T} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *lineal y acotado, tal que*

$$\overline{T}(x) = T(x), \quad \forall\, x \in E.$$

Además, $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$.

Al operador $\overline{T}$ se le denomina la *extensión acotada del operador* T.

Proposición 1.1.17. *Una sucesión* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *de elementos no nulos de* $\mathbf{X}$ *(espacio de Banach) es básica si y sólo si existe una constante* $K > 0$ *tal que:*

$$\|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\| \leq K \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|, \tag{1.6}$$

para todo $a_k \in \mathbb{K}$ *y para todo* $m, n \in \mathbb{N}$ *tales que* $m \leq n$.

Demostración. $(\Rightarrow)$: Sea $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión básica en $\mathbf{X}$. Entonces $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es una base en el subespacio $Z = [e_k] = \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{X}$. Denotamos por $P_m : Z \to Z$, $m = 1, 2, ...$, a las proyecciones canónicas de dicha base. Si $m \leq n$ tenemos:

$$\|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\| = \|P_m(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k)\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|P_k\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\Big)\| = |||\sum_{k=1}^{n} a_k e_k||| \leq K \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|,$$

por el Teorema 1.1.2.

$(\Leftarrow)$: Sea $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores (no nulos) en $\mathbf{X}$ tal que se cumple la propiedad (1.6), para algún $K > 0$. Afirmamos que el sistema $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial $E := \text{span}\,(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$. En efecto, si $\sum_{j=1}^{m} a_j e_j = 0$, entonces

$$\|a_1 e_1\| \leq K \|\sum_{j=1}^{m} a_j e_j\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0.$$

Del mismo modo, $\|0.e_1 + a_2e_2\| \leq K\| \sum_{j=1}^m a_je_j\| = 0$, es decir que $a_2 = 0$. Iterando el proceso tendremos que $a_j = 0$ para todo $j \leq m$. Entonces $(e_j)_{j=1}^\infty$ son linealmente independientes.

Consideremos los operadores lineales $S_m : E \to E_m = \operatorname{span}(e_j)_{j=1}^m$ definidos por

$$S_m\Big(\sum_{j=1}^k a_je_j\Big) = \sum_{j=1}^m a_je_j \ \text{ si } \ k \geq m$$

y

$$S_m\Big(\sum_{j=1}^k a_je_j\Big) = \sum_{j=1}^k a_je_j \ \text{ si } \ k < m.$$

La hipótesis (1.6) implica que S_m está bien definido, es lineal y acotado, y

$$\|S_m(x)\| \leq K\,\|x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

Además, se cumplen trivialmente las propiedades (i) y (ii) del Teorema 1.1.11. Como E es denso en $Z = [e_k] = \overline{\operatorname{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, por el lema anterior las extensiones $\overline{S}_m : Z \to E_m$ cumplirán $\|\overline{S}_m\| \leq K$, $\forall m \in \mathbb{N}$ y además :

- $\dim \overline{S}_m(Z) = \dim(E_m) = m$,
- $\overline{S}_m \circ \overline{S}_n = \overline{S}_n \circ \overline{S}_m = \overline{S}_{\text{mín}\{m,n\}}$
- $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{S}_m(z) = z$, $\forall z \in Z$.

Verificamos esta última propiedad. Si $\varepsilon > 0$, sea $x = \sum_{j=1}^n a_je_j \in E$ tal que $\|z - x\| < \varepsilon$. Entonces, para todo $m \geq n$ se tiene que $\overline{S}_m(x) = S_m(x) = x$, y por tanto

$$\begin{aligned}\left\|\overline{S}_m(z) - z\right\| &= \|\overline{S}_m(z) - \overline{S}_m(x) + x - z\| \\ &\leq \|\overline{S}_m(z - x)\| + \|x - z\| \\ &\leq (K+1)\,\|z - x\| < (K+1)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{lím}_{m\to\infty} \|\overline{S}_m(z) - z\| = 0$, para todo $z \in Z$.

Ahora podemos aplicar el **Teorema 1.1.11** a los operadores $\overline{S}_m$ en el espacio Z, y deducimos que $(e_k)_{k=1}^\infty$ es una base de Z, y por lo tanto es una sucesión básica en **X**. □

Concluimos con el siguiente corolario, que da un criterio para verificar que un sistema de vectores $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base de Schauder en **X**.

Corolario 1.1.18. *Sea X un espacio de Banach, y $\beta = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos (no nulos) de X. Entonces, β es una base de Schauder en X si y sólo si se cumplen*

1. $\operatorname{span}(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *es denso en X*
2. *existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \| \leq K \| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \|, \quad \forall\, a_k \in \mathbb{K}, \quad \forall\, m \leq n.$$

1.2. Ejemplos de bases en espacios de Banach

Veamos algunos ejemplos de bases en espacios de Banach.

1.2.1. Los espacios ℓ_p, $1 \leq p < \infty$

Se define $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ como el conjunto de todas las sucesiones reales $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ tales que

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \Big]^{1/p} < \infty.$$

Si $1 \leq p < \infty$, entonces ℓ_p es un espacio de Banach separable. Definimos la *base canónica* como el conjunto de vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ dados por

$$\mathbf{e}_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^{\infty} = (0, 0, \, \ldots, \underbrace{\;1\;}_{n}, 0, \, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obsérvese que la familia de funcionales lineales $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \ldots\}$ en $(\ell_p)^*$ definidos por

$$\mathbf{e}_n^*(\mathbf{x}) := x_n, \quad \text{si } \mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

es un sistema biortogonal a $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (que llamaremos *base canónica dual*).

Lema 1.2.1. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en ℓ_p.*

Demostración. Veamos que si $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, entonces podemos escribir

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mathbf{e}_j, \tag{1.8}$$

con convergencia en la norma de ℓ_p. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} | x_j |^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

ya que $\sum_{j=n+1}^{\infty} | x_j |^p$ es la cola de la serie convergente $\sum_{j=1}^{\infty} | x_j |^p < \infty$.

Deducimos de (1.7), (1.8) y el Corolario 1.1.6 que $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en ℓ_p. □

1.2.2. El espacio c_0

Se define $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ como el conjunto de todas las sucesiones reales $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$, dotado de la norma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|.$$

Lema 1.2.2. *La misma sucesión $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ del ejemplo anterior, es también una base de Schauder para el espacio c_0, con la norma $\|.\|_\infty$.*

Demostración. De forma similar al ejemplo anterior, si $\mathbf{x} \in c_0$, entonces :

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{j\geq n+1} | x_j | \right) = 0,$$

ya que $\mathbf{x}$ es una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$ que converge a cero. Por lo tanto todo elemento $\mathbf{x} \in c_0$ se puede escribir como en (1.8) con convergencia en $\|\cdot\|_\infty$. Usando (1.7) y el Corolario 1.1.6 se deduce que $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en c_0. □

1.2.3. Los espacios $\ell_p \oplus \ell_q$, $1 \leq p, q < \infty$

Se define $\ell_p \oplus \ell_q$ como el conjunto de pares de sucesiones reales $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tales que $\mathbf{x}_1 \in \ell_p(\mathbb{N})$ y $\mathbf{x}_2 \in \ell_q(\mathbb{N})$, dotado de la siguiente norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p\oplus\ell_q} := \|\mathbf{x}_1\|_p + \|\mathbf{x}_2\|_q.$$

La base canónica en $\ell_p \oplus \ell_q$ se define como

$$\beta = \Big\{(\mathbf{e}_1, 0), (0, \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_2, 0), (0, \mathbf{e}_2), \ldots\Big\}.$$

Es decir

$$\beta = \{\mathfrak{e}_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{donde } \mathfrak{e}_n = \begin{cases} (\mathbf{e}_k, 0), & \text{si } n = 2k-1 \\ (0, \mathbf{e}_k), & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Lema 1.2.3. *Si* $1 \leq p, q < \infty$ *entonces* β *es una base de Schauder de* $\ell_p \oplus \ell_q$. *Además, si* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \ell_p \oplus \ell_q$*, entonces*

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^1 (\mathbf{e}_n, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 (0, \mathbf{e}_m), \tag{1.9}$$

donde ambas series convergen en $\ell_p \oplus \ell_q$.

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \ell_p \oplus \ell_q$. Entonces $\mathbf{x}_1 = (x_n^1)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ y $\mathbf{x}_2 = (x_n^2)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$. Por el **Lemma 1.2.1** sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^1 - \sum_{n=1}^{k} x_n^1 \mathbf{e}_n\|_p = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^2 - \sum_{n=1}^{k} x_n^2 \mathbf{e}_n\|_q = 0. \tag{1.10}$$

Por tanto, usando la definición de la suma directa, tendremos

$$(\mathbf{x}_1, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^1 (\mathbf{e}_n, 0), \quad \text{y} \quad (0, \mathbf{x}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 (0, \mathbf{e}_n),$$

con convergencia en $\ell_p \oplus \ell_q$. Sumando ambas expresiones se obtiene (1.9).

Afirmamos ahora que esto implica la convergencia en $\ell_p \oplus \ell_q$ de la serie

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad \text{donde } \alpha_n = \begin{cases} x_k^1, & \text{si } n = 2k-1 \\ x_k^2 & \text{si } n = 2k. \end{cases} \tag{1.11}$$

En efecto,

$$\|\mathbf{x} - \sum_{n=1}^{2k} \alpha_n \mathbf{e}_n\|_{\ell_p \oplus \ell_q} = \|\mathbf{x}_1 - \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \mathbf{e}_j\|_p + \|\mathbf{x}_2 - \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \mathbf{e}_j\|_q$$

y de forma similar

$$\|\mathbf{x} - \sum_{n=1}^{2k+1} \alpha_n \mathbf{e}_n\|_{\ell_p \oplus \ell_q} = \|\mathbf{x}_1 - \sum_{j=1}^{k+1} x_j^1 \mathbf{e}_j\|_p + \|\mathbf{x}_2 - \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \mathbf{e}_j\|_q,$$

y usando (1.10) ambas expresiones tienden a 0 cuando $k \to \infty$.

Por último, afirmamos que los coeficientes α_n en (1.11) son necesariamente únicos. En efecto, si se tuviera que $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{e}_n$ con convergencia en $\ell_p \oplus \ell_q$, entonces, por la definición de suma directa, se tendría

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1} \mathbf{e}_k \text{ en } \ell_p, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} \mathbf{e}_k \text{ en } \ell_q.$$

Usando el Lema 1.2.1 esto implica que $\alpha_{2k-1} = x_k^1$ y $\alpha_{2k} = x_k^2$, para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Observación 1.2.4. *La misma demostración del Lema 1.2.3 permite probar que si* $\beta_1 = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es base de* $\boldsymbol{X}_1$*, y* $\beta_2 = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es base de* $\boldsymbol{X}_2$*, entonces el sistema* $\beta = \{(e_1, 0), (0, f_1), (e_2, 0), (0, f_2), \ldots\}$ *es base del espacio de Banach* $\boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2$*, dotado con la norma*

$$\|\mathbf{x}\|_{X_1 \oplus X_2} = \|\mathbf{x}_1\|_{X_1} + \|\mathbf{x}_2\|_{X_2}, \quad \textit{si } \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2.$$

1.2.4. El sistema trigonométrico en $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$

Denotamos $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \equiv [0, 2\pi)$, de modo que cada función f en $\mathbb{T}$ se identifica con una función 2π-periódica en $\mathbb{R}$.

Es bien conocido de los cursos sobre Series de Fourier, que el sistema trigonométrico

$$\mathcal{T} = \left\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \ldots\right\}$$

es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ (y en particular, una base de Schauder). Es decir, si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{inx}, \quad \text{donde } \hat{f}(n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx,\ n \in \mathbb{Z},$$

con convergencia (incondicional) en la norma de $L^2(\mathbb{T})$.

Se puede probar que $\mathcal{T}$ sigue siendo una base de Schauder en $L^p(\mathbb{T})$, siempre que $1 < p < \infty$. Este teorema es debido a M. Riesz. Como la dificultad del resultado excede los objetivos del trabajo, sólo lo enunciamos y damos una referencia.

Teorema 1.2.5. *Si* $1 < p < \infty$*, entonces el sistema trigonométrico (con el orden natural)* $\mathcal{T} = \left\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \ldots\right\}$ *es una base de Schauder para* $L^p(\mathbb{T})$*. En particular,*

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0, \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Demostración. Ver ([3], Theorem 3.5.6) □

1.2.5. El sistema de Haar en $L^p([0, 1])$, $1 \le p < \infty$

A continuación definimos el sistema de Haar, introducido por A. Haar en 1910. Sea

$$h(x) := \mathbf{1}_{[0,1/2)} - \mathbf{1}_{[1/2,1)} = \begin{cases} 1\,, & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1\,, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0\,, & \text{en otro caso,} \end{cases},$$

Para cada $j = 0, 1, 2, ...$ y $0 \leq k < 2^j$ definimos las funciones

$$h_{j,k}(x) := 2^{j/2}\, h(2^j x - k) = \begin{cases} 2^{j/2}, & \text{si } k2^{-j} \leq x < (k + \frac{1}{2})2^{-j} \\ -2^{j/2}, & \text{si } (k + \frac{1}{2})2^{-j} \leq x < (k+1)2^{-j} \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

El sistema de Haar $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, en su orden natural, se define como

$$h_0 := \mathbf{1}_{[0,1)}, \quad \text{y} \quad h_n := h_{j,k} \quad \text{si } n = 2^j + k, \text{ con } j = 0, 1, \ldots \text{ y } \ 0 \leq k < 2^j.$$

Es conocido que $\mathcal{H}$ es una base ortonormal en $L^2([0, 1])$, y en particular

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\, f\,,\, h_n \,\rangle h_n, \quad \text{donde } \langle\, f\,,\, h_n \,\rangle = \int_0^1 f(x) h_n(x)\, dx, \tag{1.12}$$

donde la serie converge (incondicionalmente) en la norma de $L^2([0, 1])$.

Enunciamos sin demostrar un teorema que garantiza que $\mathcal{H}$ es de hecho una base de Schauder en $L^p([0, 1])$, para todo $1 \leq p < \infty$. Para éstas y otras propiedades del sistema de Haar, ver la sección 6.1 del libro de Albiac y Kalton [1].

Teorema 1.2.6. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base de Schauder en $L^p([0, 1])$. En particular, para toda $f \in L^p([0, 1])$ la serie* (1.12) *converge en la norma de L^p.*

Demostración. Ver ([1], Proposition 6.1.3). □

Capítulo 2

Bases incondicionales

En el capítulo anterior hemos presentado las bases de Schauder $\beta = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, en las cuales el orden de los elementos de la base es importante para definir la convergencia de las series infinitas. Pero existen numerosos ejemplos de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que son bases sin importar el orden de sus elementos, y esta propiedad especial merece un estudio separado. En este capítulo presentamos primero las definición de series incondicionalmente convergentes, para luego definir las bases incondicionales y sus principales propiedades, y al final del capítulo damos algunos ejemplos. Para estas exposiciones hemos seguido los libros ([4], Chapter 5.2) y ([1], Chapter 3.1).

Como en el capítulo anterior consideraremos siempre $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ como un espacio de Banach (separable) provisto de la norma $\|\cdot\|$, de dimensión infinita, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde por simplicidad asumiremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1. Definiciones de convergencia incondicional

Definición 2.1.1. *(Según [4, Chapter 5.2])*
Sea $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y consideremos la colección $\mathfrak{N}$, de todos los subconjuntos finitos $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}$. Escribimos

$$\lim_{\mathcal{N}\in\mathfrak{N}} \sum_{i\in\mathcal{N}} y_i = y \tag{2.1}$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathfrak{N}$ tal que

$$\|y - \sum_{i\in\mathcal{N}'} y_i\| < \varepsilon \text{ para todo } \mathcal{N}' \in \mathfrak{N} \text{ con } \mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}.$$

Decimos que la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ converge incondicionalmente a y si es cierto (2.1).

En otros libros es habitual definir la convergencia incondicional de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, en términos de la convergencia de cualquiera de sus reordenamientos, es decir $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; ver e.g. [1, Chapter 3.1]. El siguiente lema prueba la equivalencia de estas dos definiciones.

Lema 2.1.2. *En un espacio de Banach $\mathbf{X}$, la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ converge incondicionalmente a $y \in \mathbf{X}$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\pi(i)} = y$ (converge en la norma de $\mathbf{X}$), para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación de $\mathbb{N}$. Como $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i$ converge a $y \in \mathbf{X}$, dado $\varepsilon > 0$, escogemos $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathfrak{N}$ tal que

$$\left\| y - \sum_{i\in\mathcal{N}'} y_i \right\| < \varepsilon,\ \forall \mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N} \text{ con } \mathcal{N}' \in \mathfrak{N}.$$

Definamos $n_0 := \max\{i \in \mathbb{N} : \pi(i) \in \mathcal{N}(\varepsilon)\} = \max \pi^{-1}(\mathcal{N}(\varepsilon))$. Si $n \geq n_0$ tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} y_{\pi(i)} - y \right\| = \left\| \sum_{k\in\{\pi(i):i\leq n\}} y_k - y \right\| < \varepsilon, \quad \text{ya que } \{\pi(i) : i \leq n\} \supseteq \mathcal{N}(\varepsilon).$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\pi(i)} = y$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Asumimos que $\sum_{j\in\mathbb{N}} y_{\rho(j)} = y$ para cada permutación ρ de $\mathbb{N}$, y supongamos que

$$\lim_{\mathcal{N}\in\mathfrak{N}} \sum_{j\in\mathcal{N}} y_j \neq y.$$

Entonces podemos encontrar $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$ existe $\mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{N}' \in \mathfrak{N}$, y

$$\left\| \sum_{j\in\mathcal{N}'} y_j - y \right\| \geq \varepsilon_0.$$

Empecemos con $\mathcal{N}_0 = \{1\}$ entonces existe $\mathcal{N}_0' \in \mathfrak{N}$ tal que $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0'$ y

$$\left\| \sum_{j\in\mathcal{N}_0'} y_j - y \right\| \geq \varepsilon_0.$$

Sea $n_1 = \max\{j : j \in \mathcal{N}_0'\}$ y $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, \ldots, n_1 + 1\}$, entonces existe $\mathcal{N}_1' \in \mathfrak{N}$ tal que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_1'$ y

$$\left\| \sum_{j\in\mathcal{N}_1'} y_j - y \right\| \geq \varepsilon_0.$$

Continuando con el proceso obtenemos una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0^{'} \subset \ ... \ \subset \mathcal{N}_{k-1}^{'} \subset \mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_k^{'} \subset \ ...$$

tal que $n_k = \max\{j : j \in \mathcal{N}_{k-1}^{'}\}$, $\mathcal{N}_k = \{1, 2, \ ... \ , n_k + 1\}$ y

$$(*) \qquad \| \sum_{j \in \mathcal{N}_k^{'}} y_j - y \| \geqslant \varepsilon_0, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Entonces, la colección de subconjuntos finitos

$$\mathcal{N}_0, \ \ \mathcal{N}_0' \setminus \mathcal{N}_0, \ \ \mathcal{N}_1 \setminus \mathcal{N}_0', \ \ \mathcal{N}_1' \setminus \mathcal{N}_1, \ \ \ldots, \ \ \mathcal{N}_k' \setminus \mathcal{N}_k, \ \ \mathcal{N}_{k+1} \setminus \mathcal{N}_k', \ \ \ldots$$

es mutuamente disjunta y su unión es todo $\mathbb{N}$. Sea ρ una permutación de $\mathbb{N}$ donde los elementos de escogen en el orden establecido por la cadena anterior (pudiendo ser la elección arbitraria en cada subconjunto). Notar que en ese caso la siguiente subsucesión de sumas parciales

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{N}_k'} y_{\rho(i)} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k'} y_j, \quad \forall \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

cumple

$$\Big\| \sum_{i=1}^{\mathrm{Card}\,\mathcal{N}_k'} y_{\rho(i)} - y \Big\| = \Big\| \sum_{j \in \mathcal{N}_k'} y_j - y \Big\| \geq \varepsilon_0.$$

Esto implica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\rho(i)}$ no puede ser convergente en $\mathbf{X}$, lo cual es una contradicción. □

El teorema principal de esta sección da varias caracterizaciones del concepto de covergencia incondicional.

Teorema 2.1.3. *Para una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $(\boldsymbol{X}, \| \cdot \|)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) La serie $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ converge incondicionalmente;

(ii) La serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j x_j$ converge para toda sucesión $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $| \beta_j | \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(iii) La serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_{n_j}$ converge para toda sucesión creciente $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$;

(iv) La serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} \epsilon_j x_j$ converge para toda sucesión $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\epsilon_j = \pm 1$.

Antes de probar el teorema, introducimos el siguiente lema

Lema 2.1.4. *Suponer que* $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ *converge incondicionalmente en* $\boldsymbol{X}$*; entonces*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} | f(x_j) |$$

converge uniformemente para todo $f \in \boldsymbol{X}_1^* = \{f \in \boldsymbol{X}^* \; : \; \|f\|_{X^*} \leq 1\}$*, es decir que dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \equiv N(\varepsilon)$ *tal que*

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} | f(x_j) | < \varepsilon, \quad \textit{para todo } n > N \textit{ y } k \in \mathbb{N}, \textit{ y para todo } f \in \boldsymbol{X}_1^*. \tag{2.2}$$

En particular,

$$\sup_{f\in X^* : \|f\|_{X^*}=1} \sum_{j\in\mathbb{N}} | f(x_j) | < \infty. \tag{2.3}$$

Demostración. Supongamos que $\lim_{\mathcal{N}\in\mathfrak{N}} \sum_{j\in\mathcal{N}} x_j = x$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\varepsilon) \in \mathfrak{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{j\in\mathcal{N}} x_j \right\| < \frac{1}{8}\varepsilon, \; \forall \mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}, \; con \; \mathcal{N}' \in \mathfrak{N}.$$

Sea ahora $N = N(\varepsilon) := \text{máx}\{i : i \in \mathcal{N}(\varepsilon)\}$. Para $n \geq N(\varepsilon)$ y $f \in \mathbf{X}_1^*$ definimos

$$\mathcal{N}_1(f) = \{i : n + 1 \leq i \leq n + l, f(x_i) \geq 0\},$$

$$\mathcal{N}_2(f) = \{i : n + 1 \leq i \leq n + l, f(x_i) < 0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{n+l} |f(x_i)| &= \left| f\Big(\sum_{i\in\mathcal{N}_1(f)} x_i \Big) \right| + \left| f\Big(\sum_{i\in\mathcal{N}_2(f)} x_i \Big) \right| \\ &\leq \left\| \sum_{i\in\mathcal{N}_1(f)} x_i \right\| + \left\| \sum_{i\in\mathcal{N}_2(f)} x_i \right\| \equiv I + II. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{N}(\varepsilon) \cap \mathcal{N}_1(f) = \emptyset$, para I tenemos

$$I = \left\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i - \sum_{i\in\mathcal{N}_1(f)} x_i - x + \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i \right\|$$

$$\leq \left\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)\cup\mathcal{N}_1(f)} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4},$$

ya que ambos $\mathcal{N}(\varepsilon)$ y $\mathcal{N}(\varepsilon) \cup \mathcal{N}_1(f)$ contienen $\mathcal{N}(\varepsilon)$. De manera similar para II tenemos

$$II = \Big\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i - \sum_{i\in\mathcal{N}_2(f)} x_i - x + \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i \Big\|$$

$$\leq \Big\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)\cup\mathcal{N}_2(f)} x_i \Big\| + \Big\| x - \sum_{i\in\mathcal{N}(\varepsilon)} x_i \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por tanto

$$\sum_{i=n+1}^{n+l} |f(x_i)| \leq I + II < \varepsilon/2.$$

Por tanto $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |f(x_j)|$ converge uniformemente $\forall f \in \mathbf{X}_1^*$. Para probar (2.3), tomando $\varepsilon = 1$ en (2.2), obtenemos $N = N(1)$ tal que

$$\sum_{j=N(1)+1}^{\infty} | f(x_j) | \leq 1, \quad \forall f \in \mathbf{X}_1.$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{N(1)} | f(x_j) | \leq \sum_{j=1}^{N(1)} \|x_j\| =: C_1, \quad \forall f \in \mathbf{X}_1.$$

Sumando ambas expresiones se obtiene (2.3). □

Demostración del Teorema 2.1.3.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Dado $\varepsilon > 0$, por el lema 2.1.4 escogemos un $N \equiv N(\varepsilon)$ tal que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} | f(x_j) | < \varepsilon, \ \forall f \in \mathbf{X}_1^*, \quad \text{cuando } n > N,\ k \geq 1.$$

Entonces por dualidad;

$$\Big\| \sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j x_j \Big\| = \sup_{f\in\mathbf{X}_1^*} \Big| f\Big(\sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j x_j \Big) \Big| = \sup_{f\in\mathbf{X}_1^*} \Big| \sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j f(x_j) \Big|.$$

Como $| \beta_j | \leq 1$, deducimos que

$$\Big\| \sum_{j=n+1}^{n+k} \beta_j x_j \Big\| \leq \sup_{f\in\mathbf{X}_1^*} \sum_{j=n+1}^{n+k} |f(x_j)| < \varepsilon.$$

Esto muestra que la suma parcial $\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ forma una sucesión de Cauchy, que converge por ser **X** un espacio completo.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sea una sucesión creciente $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, y definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ los escalares

$$\beta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n_j, \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \underbrace{=}_{(ii)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \beta_k x_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n_j} \beta_k x_k = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} x_{n_i}.$$

$(iii) \Longleftrightarrow (iv)$

Dada una sucesión $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\epsilon_k = \pm 1$, si definimos

$$\beta_k = \begin{cases} 1, & si \quad \epsilon_k = 1 \\ 0, & si \quad \epsilon_k = -1 \end{cases}$$

entonces tenemos la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k \Big). \tag{2.4}$$

Si se cumple (iii), entonces existirá el $\lim_{n\to\infty}$ de la primera y la tercera serie, y por tanto también de la segunda, que vale

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Recíprocamente, si se cumple (iv), entonces existirá el $\lim_{n\to\infty}$ de la segunda y la tercera serie en (2.4), y por tanto también de la primera. De este modo también (iv) implica (iii).

Finalmente, $(iii) \Rightarrow (i)$

Sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\rho_i}$ convergente para una sucesión estrictamente creciente de números naturales, $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_l < \ldots$.

En particular, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ está bien definido en $\mathbf{X}$ y converge a algún $x \in \mathbf{X}$. Supongamos que $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ no converge incondicionalmente a x. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}$ podemos encontrar

$$\mathcal{N}' \in \mathfrak{N} \text{ con } \mathcal{N} \subset \mathcal{N}' \quad \text{y} \quad \| \sum_{j \in \mathcal{N}'} x_j - x \| \geqslant \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{N}_0 = \{1\}$, entonces existe $\mathcal{N}_0' \in \mathfrak{N}$ tal que $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0'$ y

$$\| \sum_{j \in \mathcal{N}_0'} x_j - x \| \geqslant \varepsilon.$$

Sea $n_1 = \text{máx}\{j : j \in \mathcal{N}_0'\}$ y $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, \ldots, n_1 + 1\}$, entonces existe $\mathcal{N}_1' \in \mathfrak{N}$ tal que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_1'$ y

$$\| \sum_{j \in \mathcal{N}_1'} x_j - x \| \geqslant \varepsilon.$$

Continuando con el proceso obtenemos una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0' \subset \ldots \subset \mathcal{N}_{k-1}' \subset \mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_k' \subset \ldots$$

tal que $n_k = \text{máx}\{j : j \in \mathcal{N}_{k-1}'\}$, $\mathcal{N}_k = \{1, 2, \ldots, n_k + 1\}$ y

$$(*) \qquad \| \sum_{j \in \mathcal{N}_k'} x_j - x \| \geqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sea $D_k = \mathcal{N}_k' \setminus \mathcal{N}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Entonces la colección $\{D_k, k = 1, 2, \ldots\}$ es mutuamente disjunta y $\text{máx}\{j : j \in D_k\} < \text{mín}\{j : j \in D_{k+1}\}$, por lo que

$$\cup_{k=1}^{\infty} D_k = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$$

donde la sucesión de números naturales p_i es estrictamente creciente. Además, $\mathcal{N}_k' = \mathcal{N}_k \uplus D_k$, de modo que de $(*)$ obtenemos

$$0 < \varepsilon \leq \left\| \Big(\sum_{j \in \mathcal{N}_k} x_j - x \Big) + \sum_{j \in D_k} x_j \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_k} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j \in D_k} x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n_k+1} x_j - x \right\| + \left\| \sum_{j \in D_k} x_j \right\|.$$

Sin embargo, si k es suficientemente grande el primer sumando no excederá $\frac{1}{2}\varepsilon$ (ya que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$) mientras $\sum_{j \in D_k} x_j$ es la diferencia de dos sumas parciales de la serie convergente $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\rho_i}$ que debe tender a cero cuando $k \to \infty$, por el criterio de Cauchy. Esto nos da la contradicción.

$$\frac{1}{2}\varepsilon \leq \| \sum_{j \in D_k} x_j \| \to 0, \;\; k \to \infty.$$

Por lo tanto $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j$ converge incondicionalmente.

□

2.2. Propiedades de bases incondicionales

Definición 2.2.1. *(Base incondicional)*
Decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $\boldsymbol{X}$ es una base incondicional si es una base de Schauder, y si para cada $x \in \boldsymbol{X}$ la serie

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) x_n$$

converge incondicionalmente a x.

De los resultados de la sección anterior, obtenemos varias caracterizaciones inmediatas.

Teorema 2.2.2. *Para una base $\beta = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach $\boldsymbol{X}$, son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) $\beta = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una base incondicional para* $\boldsymbol{X}$*;*

(ii) Para toda permutación $\sigma \in \mathbb{N}$, el conjunto $\beta^{\sigma} = \{x_{\sigma(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ es una base para $\boldsymbol{X}$;

(iii) Para todo $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j(x) x_j$ en $\boldsymbol{X}$ y para toda sucesión $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $|\, \beta_j \,| \leq 1$, la serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j \alpha_j x_j$ converge.

Demostración. Si $\beta = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder, obsérvese en primer lugar que si para alguna permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y algunos escalares $a_j \in \mathbb{K}$, la siguiente serie converge

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{\pi(j)} = x, \tag{2.5}$$

entonces, aplicando a la identidad anterior el funcional $f_{\pi(k)}(x) = \alpha_{\pi(k)}(x)$ (en la notación del Teorema 1.1.3), se obtiene

$$\alpha_{\pi(k)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\pi(k)}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j x_{\pi(j)}\Big) = a_k.$$

Por tanto los coeficientes a_j en (2.5) son siempre únicos.

Con esta observación, el teorema es consecuencia directa de los Lemas 2.1.2, 2.1.4 y el Teorema 2.1.3. □

En el siguiente teorema damos otras caracterizaciones de base incondicional. Para ello usaremos la siguiente familia de operadores lineales: sea $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base fijada en $\mathbf{X}$; si $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, definimos el operador

$$S_{\boldsymbol{\beta}}(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j(x) x_j, \quad x \in \operatorname{span}\{x_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

En principio este operador está bien definido en el subconjunto denso $E = \operatorname{span}\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, y es claramente lineal por la linealidad de los f_j.

Teorema 2.2.3. *Para una base $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(\boldsymbol{X}, \|\cdot\|)$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) β es una base incondicional de $\boldsymbol{X}$;

(ii) Existe una constante $C > 0 : \|S_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$, y para toda sucesión $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $|\beta_j| \leq 1$;

(iii) Existe una constante $C > 0 : \|S_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$, y toda sucesión $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, con $\varepsilon_j = \pm 1$;

(iv) Existe una constante $C > 0 : \|S_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$, y para toda sucesión no nula finita $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $\beta_j \in \{0, 1\}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$

Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base incondicional de $\mathbf{X}$ y $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $|\beta_j| \leq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Si $x \in \mathbf{X}$, por definición, $x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) x_j$ converge incondicionalmente (donde f_j son los coeficientes funcionales). Además, por la parte (iii) del Teorema 2.2.2, podemos definir una extensión del operador $S_{\boldsymbol{\beta}}$ mediante

$$\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j(x) x_j,$$

ya que la serie anterior es convergente. Esta extensión también es claramente lineal.

Para demostrar que el operador $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}$ es acotado usaremos el teorema del grafo cerrado (ver **Apéndice, Teorema A.1.2**): sea $x^{(k)}$ una sucesión convergente a x tal que $S_{\boldsymbol{\beta}}(x^{(k)})$ converge a algún vector $y \in \mathbf{X}$; veamos que, necesariamente, $y = \overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x)$, y por tanto que la gráfica de $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}$ es cerrrada.
Como

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)x_j, \quad x^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x^{(k)})x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(y)x_j$$

obtenemos $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x^{(k)}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j(x^{(k)})x_j$ y como $x^{(k)} \to x$ cuando $k \to \infty$, tenemos para cada j fijo, $\beta_j f_j(x^{(k)})$ converge para $\beta_j f_j(x)$ cuando $k \to \infty$. Por otro lado,

$$\beta_j f_j(x^{(k)}) = f_j\Big(\beta_j x^{(k)}\Big) = f_j\Big(\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x^{(k)})\Big) \to f_j(y).$$

Así, $\beta_j f_j(x) = f_j(y)$, lo que implica

$$\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)x_j = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(y)x_j = y.$$

Podemos pues aplicar el teorema del grafo cerrado y concluir que $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}$ es un operador acotado en $\mathbf{X}$.

Para probar (ii) es necesario verificar que su norma se puede mayorar por una constante C independiente de $\boldsymbol{\beta}$.

Sea ahora $x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)x_j \in \mathbf{X}$ fijo. Si denotamos $\mathbf{X}_1^* = \{f \in \mathbf{X}^* : \|f\| \le 1\}$, sabemos por el **Lema 2.1.4** que

$$c(x) := \sup_{f \in \mathbf{X}_1^*} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)f(x_j)| < \infty.$$

Además, para cada $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ tal que $|\beta_j| \le 1$, tenemos

$$\left\|\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x)\right\| = \sup_{f \in \mathbf{X}_1^*} \left|f\Big(\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x)\Big)\right| = \sup_{f \in \mathbf{X}_1^*} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j(x) f(x_j)\right| \le c(x).$$

Es decir,

$$\sup_{\boldsymbol{\beta} : |\beta_j| \le 1} \left\|\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x)\right\| \le c(x) < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Podemos entonces aplicar el teorema de Banach-Steinhauss (ver **Apéndice, Teorema A.1.3**) a la familia de operadores $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}$, de modo que existe una constante $C < \infty$ tal que

$$\|\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| \le C\,\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Esto demuestra (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Como $|\beta_j| \le 1$, podemos tomar en particular $\beta_j = \varepsilon_j \in \{\pm 1\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. De este modo,

$$\|S_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x)\| = \|S_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| \le C\|x\|, \quad x \in E,$$

uniformemente para toda sucesión $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, con $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Dada una sucesión $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, con $\beta_j \in \{0, 1\}$, podemos definir

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \beta_j = 1 \\ -1, & \text{si } \beta_j = 0 \end{cases},$$

de modo que

$$S_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon_j f_j(x) x_j = 2\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j f_j(x) x_j - \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) x_j = 2S_{\boldsymbol{\beta}}(x) - x, \quad x \in E.$$

Entonces,

$$S_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \frac{S_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) + x}{2}, \quad x \in E,$$

de donde se tiene

$$\|S_{\boldsymbol{\beta}}(x)\| = \frac{\|S_{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) + x\|}{2} \le \frac{C\|x\| + \|x\|}{2} = \frac{C+1}{2}\|x\| = \mathbf{C}\,\|x\|, \quad x \in E,$$

donde $\mathbf{C} = \frac{C+1}{2}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$

Sea $x = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) x_j \in \mathbf{X}$ y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación de $\mathbb{N}$. Demostremos que la serie $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} f_{\sigma(j)}(x) x_{\sigma(j)}$ converge también a $x \in \mathbf{X}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2C+1}, \ \forall n \ge N. \tag{2.6}$$

Sea $M = M(\varepsilon, \sigma) \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(M)\}$.
Si $m \geq M$,

$$\Big\| x - \sum_{j=1}^{m} f_{\sigma(j)}(x) x_{\sigma(j)} \Big\| = \Big\| x - \Big(\sum_{j=1}^{N} f_j(x) x_j + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m : \\ \sigma(j) > N}} f_{\sigma(j)}(x) x_{\sigma(j)} \Big) \Big\|$$

$$\leq \Big\| x - \sum_{j=1}^{N} f_j(x) x_j \Big\| + \Big\| \sum_{k=N+1}^{M_0} \beta_k f_k(x) x_k \Big\|,$$

donde $M_0 = \text{máx}\, \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)\}$ y

$$\beta_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \sigma(j), \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, m\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por un lado (2.6) nos da:

$$\Big\| x - \sum_{j=1}^{N} f_j(x) x_j \Big\| < \frac{\varepsilon}{2C+1}.$$

Por otro lado, usando la hipótesis (iv) tenemos

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=N+1}^{M_0} \beta_k f_k(x) x_k \Big\| &\leq C \Big\| \sum_{k=N+1}^{M_0} f_k(x) x_k \Big\| = C \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{M_0} f_k(x) x_k - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) x_k \Big) + x - x \Big\| \\ &\leq C \Big(\Big\| x - \sum_{k=1}^{M_0} f_k(x) x_k \Big\| + \Big\| x - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) x_k \Big\| \Big) \leq C \, \frac{2\varepsilon}{2C+1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\Big\| x - \sum_{j=1}^{m} f_{\sigma(j)}(x) x_{\sigma(j)} \Big\| \leq \frac{\varepsilon}{2C+1} + C \, \frac{2\varepsilon}{2C+1} = \varepsilon.$$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{\sigma(j)}(x) x_{\sigma(j)} = x, \quad \forall\, x \in \mathbf{X},$$

que según el Lema 2.1.2 nos da la incondicionalidad de la base β. □

Definimos ahora las constantes que cuantifican la incondicionalidad de una base.

Definición 2.2.4. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional de un espacio de Banach $\mathbf{X}$. La* constante de base incondicional K_u *de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es la menor constante K, tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \le K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \right\|, \tag{2.7}$$

para todos $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$ tales que $|a_n| \le |b_n|$, $1 \le n \le N$, y para todo $N \in \mathbb{N}$. Además, decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es K- incondicional siempre que $K \ge K_u$.

Obsérvese que, por el Teorema 2.2.3,

$$K_u = \sup_{\boldsymbol{\beta}\,:\,|\beta_j| \le 1} \left\| S_{\boldsymbol{\beta}} \right\| < \infty. \tag{2.8}$$

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $\mathbf{X}$ incondicional, con funcionales biortogonales $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, y $A \subset \mathbb{N}$, definimos el operador

$$P_A(x) := \sum_{n \in A} f_n(x) x_n, \quad x \in \mathbf{X}.$$

Este operador está bien definido y es acotado, pues coincide con $\overline{S}_{\boldsymbol{\beta}}$ cuando $\beta_j = 1$ si $j \in A$ y $\beta_j = 0$ si $j \notin A$.

Definición 2.2.5. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de un espacio de Banach $\mathbf{X}$, el número*

$$K_{su} := \sup \left\{ \|P_A\| : A \subseteq \mathbb{N} \right\},$$

es llamado constante incondicional de supresión *de la base.*

Se cumple la siguiente propiedad.

Proposición 2.2.6. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base en $\mathbf{X}$. Entonces, la base es incondicional si y sólo si*

$$\widetilde{K}_{su} := \sup \left\{ \|P_A\| : A \subseteq \mathbb{N},\ A \text{ finito} \right\} < \infty$$

En ese caso, se cumple además $K_{su} = \widetilde{K}_{su}$.

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si β es base incondicional, entonces trivialmente se tiene $\widetilde{K}_{su} \le K_{su} < \infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que β es una base con $\widetilde{K}_{su} < \infty$. Para ver que es incondicional, por el Teorema 2.2.3.iv basta demostrar que, para todo $\boldsymbol{\beta} = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\beta_n \in \{0, 1\}$, se cumple

$$\left\| S_{\boldsymbol{\beta}}(x) \right\| \le \widetilde{K}_{su} \|x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

Sea $x \in E$, y sea $S := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \beta_n f_n(x) \neq 0\}$, que es un conjunto finito por ser $x \in E$. Entonces, podemos escribir

$$S_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n f_n(x)\, x_n \ = \ \sum_{n \in S} f_n(x)\, x_n \ = \ P_S(x).$$

Por tanto,

$$\left\| S_{\boldsymbol{\beta}}(x) \right\| = \left\| P_S(x) \right\| \leq \ \widetilde{K}_{su} \, \|x\|.$$

Usando el Teorema 2.2.3.iv tenemos que la base es incondicional. Además, esta última desigualdad nos da

$$K_{su} = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left\| P_A \right\| = \sup_{\boldsymbol{\beta} : \beta_j \in \{0,1\}} \left\| S_{\boldsymbol{\beta}} \right\| \leq \widetilde{K}_{su},$$

de donde se concluye que $K_{su} = \widetilde{K}_{su}$. □

Finalmente observemos que en general,

$$1 \leq K_{su} \leq K_u \leq 2K_{su},$$

donde la última desigualdad se puede probar usando el Lema A.1.4 de convexidad (Ver apéndice).

2.3. Ejemplos de bases incondicionales

2.3.1. Los espacios c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$

Definimos los espacios c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, tal como en el Capítulo anterior **Sección 1.2**. Recuerda que (estos espacios de Banach) están dotados de las normas:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty, \ \ para\ c_0$$

y

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Big[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big]^{1/p} < \infty, \ \ para\ \ell_p, \ \ con\ 1 \leq p < \infty.$$

Tal como en **Sección 1.2**, la *base canónica* es el conjunto de vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ dados por

$$\mathbf{e}_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^{\infty} = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lema 2.3.1. *La base canónica $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en los espacios c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ es incondicional.*

Demostración. Por un lado probemos primero para $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.
Si $x \in c_0$, entonces existe una sucesión de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\mathbf{e}_i$. Como la serie es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Big\|\sum_{i=n}^{m} a_i\mathbf{e}_i\Big\|_\infty < \varepsilon, \ \forall m \geq n \geq n_0. \tag{2.9}$$

Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, permutación. Tenemos que probar la convergencia de la serie reordenada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}\mathbf{e}_{\pi(i)}$ en la norma de c_0.
Tomemos $N_0 := \max\{\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n_0)\}$, y sean $M > N > N_0$. Entonces es cierto que $\pi(N) > n_0$ $\Big($porque si no, tendríamos que $\pi(N) \in \{1, \ldots, n_0\}$, es decir $\pi(N) = j$, $j \in \{1, \ldots, n_0\}$, y por tanto $N = \pi^{-1}(j) \leq N_0$; absurdo porque $N > N_0$ $\Big)$. Así, llamando

$$A := \{\pi(i)\}_{i=N}^{M} \subseteq \{n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\} =: B,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=N}^{M} a_{\pi(i)}\mathbf{e}_{\pi(i)}\Big\|_\infty &= \max_{N\leq i\leq M} |a_{\pi(i)}| = \max_{\lambda\in A} |a_\lambda| \\ &\leq \max_{\lambda\in B} |a_\lambda| = \max_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon,\end{aligned}$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}\mathbf{e}_{\pi(i)}$ es convergente, a algún $y \in c_0$. Usando los funcionales duales $\mathbf{e}_n^*$ vemos que

$$\mathbf{e}_{\pi(j)}^*(y) = a_{\pi(j)} = \mathbf{e}_{\pi(j)}^*(x), \quad \forall\ j \in \mathbb{N},$$

de donde sigue que $y = x$. Por tanto, se cumplen las condiciones de la **Definición 2.2.1**, y la base canónica en c_0 es incondicional.

Por otro lado, de manera similar se prueba para el espacio $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, con $p \in [1, \infty)$. Es decir que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\Big\| \sum_{i=n}^{m} a_i \mathbf{e}_i \Big\|_{\ell_p} < \varepsilon,\ \forall m \geq n \geq n_0.$$

A partir de aquí, si π es una permutación de $\mathbb{N}$ y se define N_0 como antes, entonces $\forall M > N > n_0$, usando la notación anterior

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=N}^{M} a_{\pi(i)}\mathbf{e}_{\pi(i)} \Big\|_{\ell_p} &= \Big(\sum_{i=N}^{M} |a_{\pi(i)}|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{\lambda \in A} |a_\lambda|^p \Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{\lambda \in B} |a_\lambda|^p \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|^p \Big)^{1/p} < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

2.3.2. Bases ortonormales en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, es decir un espacio vectorial dotado con un producto escalar $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ que satisface:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{H}$, y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in \mathbb{H}$;

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathbb{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

tal que la norma asociada

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{H},$$

es una norma completa.
Una sucesión $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{H}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ se dice *sistema ortonormal* si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & si \quad i = j \\ 0, & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.10}$$

y se dice que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema completo si

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{H}.$$

Decimos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *base ortonormal* de $\mathbb{H}$, si es un sistema ortonormal y completo. En ese caso, todo $x \in \mathbb{H}$ se puede escribir de forma única como

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n, \quad \text{donde } a_n = \langle\, x\, ,\, e_n\, \rangle,$$

con convergencia en la norma de $\mathbb{H}$; ver e.g. [6, Chapter 4, Theorem 2.3]. En particular $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder en $\mathbb{H}$.

Lema 2.3.2. *En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, toda base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional.*

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathbb{H}$ y π una permutación de $\mathbb{N}$. De la definición anterior es inmediato comprobar que $\{e_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sigue siendo un sistema ortonormal y completo, y por tanto una base ortonormal. Utilizando la implicación (ii)$\Longrightarrow$(i) del Teorema 2.2.2, se obtiene que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional.

$\square$

En las secciones §1.2.4 y §1.2.5, vimos dos ejemplos clásicos de base ortonormal: el sistema trigonométrico en $L^2(\mathbb{T})$, y el sistema de Haar en $L^2([0,1])$.

2.3.3. Los espacios $\ell_q(\ell_p)$, $1 \le p, q < \infty$

Si $1 \le p, q < \infty$, se define $\ell_q(\ell_p)$ como el conjunto de todas las sucesiones reales dobles $\vec{a} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, tales que

$$\|\vec{a}\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^p \Big)^{q/p} \Big]^{1/q} < \infty.$$

Dotado con la norma anterior, $\ell_q(\ell_p)$ es un espacio de Banach separable. La *base canónica* para este espacio está formada por la familia de vectores:

$$\vec{\mathbf{e}}_{n,m} = (\delta_{jn} \cdot \delta_{km})_{j,k=1}^{\infty}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Si representamos los vectores del espacio como una matriz infinita, cada $\vec{a} \in \ell_q(\ell_p)$ se puede desarrollar en esta base como

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}\vec{\mathbf{e}}_{j,k}.$$

El siguiente lema muestra que la serie anterior converge incondicionalmente en la norma de $\ell_q(\ell_p)$.

Lema 2.3.3. *Si $1 \leq p, q < \infty$, entonces $\left\{\vec{\mathbf{e}}_{n,m}\right\}_{n,m=1}^{\infty}$ es un base incondicional en $\ell_q(\ell_p)$.*

Demostración. Sea $\vec{a} \in \ell_q(\ell_p)$, veamos que, en el sentido de la Definición 2.1.1, la serie

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{jk}\mathbf{e}_{jk} \quad \text{converge incondicionalmente a } \vec{a} \text{ en } \ell_q(\ell_p). \tag{2.11}$$

Si $k \in \mathbb{N}$ es fijo, llamamos

$$A_k = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^p\Big)^{1/p}.$$

Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k^q < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} A_k^q < \varepsilon$. Ahora para cada $1 \leq k \leq k_0$ fijo, tenemos

$$A_k^p = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^p < \infty \implies \exists j_k = j_k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ \Big(\sum_{j=j_k}^{\infty} |a_{jk}|^p\Big)^{q/p} < \varepsilon/k_0.$$

Definimos $j_0 := \text{máx}\{j_1, \cdots, j_{k_0}\}$, entonces $\Big(\sum\limits_{j=j_0}^{\infty} |a_{jk}|^p\Big)^{q/p} < \varepsilon/k_0,\ 1 \leq k \leq k_0$.

Ahora consideramos el conjunto finito

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \colon 1 \leq j \leq j_0,\ 1 \leq k \leq k_0\}.$$

Si $\mathcal{N}' \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es tal que $\mathcal{N}' \supset \mathcal{N}_\varepsilon$, entonces

$$\Big\|\vec{a} - \sum_{(j,k)\in\mathcal{N}'} a_{jk}\vec{\mathbf{e}}_{jk}\Big\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big\|\big(a_{jk}\,\mathbf{1}_{(j,k)\notin\mathcal{N}'}\big)_{j,k=1}^{\infty}\Big\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \Big\|\big(a_{jk}\,\mathbf{1}_{(j,k)\notin\mathcal{N}_\varepsilon}\big)_{j,k=1}^{\infty}\Big\|_{\ell_q(\ell_p)}$$

puesto que el número de coeficientes nulos en el segundo término es mayor que en el tercer término. Reescribiendo este último (a la potencia q) tenemos

$$\left\| \left(a_{jk}\, \mathbf{1}_{(j,k)\notin \mathcal{N}_\varepsilon} \right)_{j,k=1}^{\infty} \right\|_{\ell_q(\ell_p)}^{q} = \sum_{k>k_0} A_k^q + \sum_{k=1}^{k_0} \Big(\sum_{j>j_0} |a_{jk}|^p \Big)^{q/p} \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{k_0} = 2\varepsilon.$$

En conclusión obtenemos

$$\Big\| \vec{a} - \sum_{(j,k)\in \mathcal{N}'} a_{jk} \vec{\mathbf{e}}_{jk} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} < (2\varepsilon)^{1/q}, \quad \forall \mathcal{N}' \supset \mathcal{N}_\varepsilon,$$

lo que prueba la afirmación en (2.11).

Por último, usando los funcionales biortogonales $\mathbf{e}^*_{n,m}$ es fácil ver que si

$$\vec{a} = \sum_{(j,k)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} b_{jk} \mathbf{e}_{jk}$$

con convergencia en $\ell_q(\ell_p)$ (en cualquier orden), entonces necesariamente $b_{j,k} = a_{j,k}$. De aquí sigue que $\{\vec{\mathbf{e}}_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es una base incondicional en $\ell_q(\ell_p)$. □

2.3.4. El sistema de Haar en $L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$

El sistema de Haar $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ presentado en el capítulo anterior **Sección 1.2.5**, es una base incondicional en $L^p([0,1])$, $1 < p < \infty$.

Este resultado clásico es debido a J. Marcinkiewicz (1937). En 1988, D. Burkholder dio una demostración "elemental" de este resultado, que además produce la constante óptima de incondicionalidad. Enunciamos este hecho en el siguiente teorema, y referimos al libro de Albiac y Kalton [1, Theorem 6.1.7] para los detalles de su demostración.

Teorema 2.3.4. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sea* $p^* = \max\{p, q\}$. *Entonces la base de Haar* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es incondicional en* $L^p([0,1])$, *con constante de incondicionalidad* $K_u = p^* - 1$. *En particular,*

$$\Big\| \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j a_j h_j \Big\|_p \le (p^* - 1) \Big\| \sum_{j=0}^{n} a_j h_j \Big\|_p,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *y para todo escalar* $a_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Demostración. Ver ([1], Theorem 6.1.7 y Remark 6.1.8). □

Más adelante también usaremos el siguiente teorema, cuya demostración (basada en la desigualdad de Khintchine) se sale del ámbito del trabajo.

Teorema 2.3.5. *Sea $1 < p < \infty$ y $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ la base de Haar en $L^p([0,1])$. Entonces existen constantes $B_p \geq A_p > 0$ tales que*

$$A_p \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, h_n(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, h_n(x) \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, h_n(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p,$$

para toda sucesión finita de escalares $a_n \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver [1, (10.16)]. □

Capítulo 3

Bases greedy

En este capítulo presentaremos, en primer lugar el concepto formal de "algoritmo greedy", que permite aproximar vectores $x \in \mathbf{X}$ a partir de combinaciones lineales de m elementos de una base $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, eligiendo para ello los m coeficientes de mayor tamaño (en valor absoluto). En la segunda sección definimos el concepto de base democrática, y damos algunos ejemplos de bases con esta propiedad. Por último, en la tercera sección probamos el teorema principal de este trabajo, debido a Konyagin y Temlyakov, que permite caracterizar las bases β para las cuales el algoritmo greedy es óptimo (salvo constantes) como aquéllas que son democráticas e incondicionales. Para los enfoques de este capítulo, hemos seguido el libro de F. Albiac y N. Kalton ([1], Chapter 10.1; 10.3 y 10.4).

En este capítulo, $\mathbf{X}$ será un espacio de Banach y $\beta = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder fija, que habitualmente supondremos *seminormalizada*, esto es, que existen constantes $C_2 \geq C_1 > 0$ tales que

$$C_1 \leq \|e_n\| \leq C_2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Los funcionales biortogonales asociados a β se denotarán por $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. El siguiente lema muestra que dichos funcionales también son seminormalizados.

Lema 3.0.1. *Sea $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder seminormalizada en $\mathbf{X}$. Entonces, su sistema biortogonal asociado $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es también seminormalizado, es decir, existen constantes $C_2' \geq C_1' > 0$ tales que*

$$C_1' \leq \|e_n^*\|_{X^*} \leq C_2', \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Demostración. Suponemos cierto (3.1). Entonces

$$1 = e_n^*(e_n) = |e_n^*(e_n)| \leq \|e_n^*\|_{\mathbf{X}^*}\|e_n\| \leq C_2\, \|e_n^*\|_{\mathbf{X}^*}.$$

Por tanto, la desigualdad izquierda en (3.2) es cierta con $C_1' = 1/C_2$. Por otro lado, para todo $x \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned} |e_n^*(x)| &= |e_n^*(x)|\,\|e_n\|\,\|e_n\|^{-1} \leq C_1^{-1}\,|e_n^*(x)|\,\|e_n\| = C_1^{-1}\,\|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \\ &\leq 2\,C_1^{-1}\,|||x||| \leq 2C_1^{-1}\,k_\beta\,\|x\|. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todo $x \in \mathbf{X}$, se obtiene $\|e_n^*\|_{\mathbf{X}^*} \leq 2C_1^{-1}\,k_\beta$. □

Por último, a lo largo del capítulo usaremos a menudo la siguiente definición

Definición 3.0.2. *Sea* $\beta = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ *una base de* $\mathbf{X}$*, y sea* $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n \in \mathbf{X}$*. Definimos el* soporte de x *, como*

$$\operatorname{sop} x := \{n \in \mathbb{N} \ : \ e_n^*(x) \neq 0\}.$$

Decimos que x *tiene soporte finito, si el cardinal de* $\operatorname{sop} x$ *es finito, es decir* $|\operatorname{sop} x| < \infty$.

3.1. Algoritmo greedy

Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach y $\beta = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de $\mathbf{X}$. Definimos

$$\Sigma_N = \Sigma_N(\beta) := \Big\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e_\lambda \ : \ a_\lambda \in \mathbb{K},\ \operatorname{Card}\Lambda \leq N \Big\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

que es el conjunto de todas las combinaciones lineales de a lo sumo N elementos de la base β. Obsérvese que Σ_N no es un subespacio lineal de $\mathbf{X}$, pues en general sólo se tiene $\Sigma_N + \Sigma_N \subset \Sigma_{2N}$.

Dado $x \in \mathbf{X}$, llamamos *mejor error de aproximación con N-términos de* β a la cantidad

$$\sigma_N(x) = \sigma_N(x;\beta) := \text{ínf}\Big\{\|x - z\| \ : \ z \in \Sigma_N(\beta)\Big\}.$$

En Teoría de Aproximación No-lineal, se buscan procedimientos constructivos (algoritmos) tales que a cada $x \in \mathbf{X}$ le asignen un elemento $x_N \in \Sigma_N$ de modo que el error de aproximación $\|x - x_N\|$ sea lo más cercano posible a $\sigma_N(x)$. Así, un *algoritmo de aproximación con N-términos* es una sucesión de operadores $(\mathcal{A}_N)_{m=1}^\infty$ tal que $\mathcal{A}_N : \mathbf{X} \to \Sigma_N$, es decir, $\mathcal{A}_N(x)$ es una combinación lineal de a lo sumo N elementos de β. En principio, no se pide que los operadores $\mathcal{A}_N$ tengan que ser lineales o continuos.

El algoritmo de aproximación más natural es $(S_N)_{m=1}^{\infty}$ dado por las proyecciones de las sumas parciales

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} e_n^*(x)e_n, \quad x \in \mathbf{X}. \tag{3.3}$$

En este caso los operadores S_N son lineales y $S_N(\mathbf{X}) = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$ es un subespacio lineal contenido en el conjunto Σ_N. Si para cada $x \in \mathbf{X}$ definimos el *mejor error de aproximación lineal de N-términos* como:

$$E_N(x) := \text{ínf}\left\{ \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \right\| \;:\; \alpha_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, N \right\},$$

entonces se puede demostrar que

$$E_N(x) \leq \|x - S_N(x)\| \leq C\, E_N(x), \quad N = 1, 2, \cdots,$$

Es decir, el algoritmo $S_N(x)$ es óptimo (salvo por la constante C) respecto a la mejor aproximación lineal $E_N(x)$. Sin embargo, este mismo algoritmo, en general, va a está muy lejos de ser óptimo respecto a la mejor aproximación no-lineal $\sigma_N(x)$.

A continuación presentamos la definición de los *"algoritmos greedy"* G_N, que como veremos, en muchos casos cumplen que $\|x - G_N(x)\|$ es igual o muy cercano a $\sigma_N(x)$.

Definición 3.1.1. *Sea $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de $\mathbf{X}$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n \in \mathbf{X}$, decimos que $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es un* reordenamiento decreciente de *x, denotado $\pi \in \mathfrak{D}(x)$, si π es inyectiva, $\pi(\mathbb{N})$ contiene al* sop *x, y además*

$$|e_{\pi(n)}^*(x)| \geq |e_{\pi(n+1)}^*(x)|, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

Además, decimos que $\pi \in \mathfrak{D}(x)$ es un reordenamiento decreciente estricto*, si la desigualdad en* (3.4) *es estricta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n \in \mathbf{X}$, entonces para cada $\pi \in \mathfrak{D}(x)$ podemos considerar "formalmente" el reordenamiento decreciente de su serie

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} e_{\pi(n)}^*(x)e_{\pi(n)} \tag{3.5}$$

(sin verificar por el momento si dicha serie converge). Los algoritmos greedy se definen a partir de las sumas parciales de dichas series.

Definición 3.1.2. *Decimos que una aplicación $G_m : \mathbf{X} \to \Sigma_m$ es una aproximación greedy de orden m, si para cada $x \in \mathbf{X}$ se tiene*

$$G_m(x) = \sum_{n=1}^{m} e^*_{\pi(n)}(x) e_{\pi(n)}, \tag{3.6}$$

para algún reordenamiento $\pi \in \mathfrak{D}(x)$.

Observación 3.1.3. Las aproximaciones greedy de un vector x no son necesariamente únicas, pues puede ocurrir que varios coeficientes $e^*_n(x)$ tengan el mismo módulo. En ese caso, se tendría que $\operatorname{Card} \mathfrak{D}(x) > 1$. Cuando existe un reordenamiento *estricto* de x, entonces $\operatorname{Card} \mathfrak{D}(x) = 1$, y $G_m(x)$ está unívocamente definido.

Para evitar ambigüedades cuando $\operatorname{Card} \mathfrak{D}(x) > 1$ es habitual definir un *reordenamiento decreciente natural* $\rho \in \mathfrak{D}(x)$, de la siguiente manera:

Definimos $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como la única aplicación $\rho \in \mathfrak{D}(x)$ tal que si $j < k$, entonces

$$\text{o bien } |e^*_{\rho(j)}(x)| > |e^*_{\rho(k)}(x)|, \text{ o bien } |e^*_{\rho(j)}(x)| = |e^*_{\rho(k)}(x)| \text{ y } \rho(j) < \rho(k).$$

Definición 3.1.4. *Dado $x \in \mathbf{X}$, se define su aproximación greedy natural de orden m, como:*

$$\mathcal{G}_m(x) := \sum_{n=1}^{m} e^*_{\rho(n)}(x) e_{\rho(n)}, \tag{3.7}$$

donde $\rho \in \mathfrak{D}(x)$ es el reordenamiento decreciente natural de x. La familia $(\mathcal{G}_m)_{m=1}^{\infty}$ se conoce como el algoritmo greedy (natural), asociado a la base β en $\mathbf{X}$.

Veamos dos ejemplos sencillos de suma greedy.

Ejemplo 3.1.5. Sea $x = (1, 0, -1, \frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \cdots) \in c_0$. El objetivo del algoritmo greedy es reordenar los coeficientes distintos de cero de forma tal que queden primero los de módulo mayor. Entonces reordenando el x con ρ nos quedaría:

$$x_\rho = (2, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, 0, 0, \cdots).$$

Así, las aproximaciones greedy de este vector x nos quedan:

$$\mathcal{G}_1(x) = 2\vec{e}_5; \qquad \mathcal{G}_2(x) = \mathcal{G}_1(x) + \vec{e}_1;$$

$$\mathcal{G}_3(x) = \mathcal{G}_2(x) - \vec{e}_3; \qquad \mathcal{G}_4(x) = \mathcal{G}_3(x) + \frac{1}{2}\vec{e}_4;$$

$$\mathcal{G}_5(x) = \mathcal{G}_4(x) + \frac{1}{3}\vec{e}_8; \qquad \mathcal{G}_6(x) = \mathcal{G}_5(x) + \frac{1}{8}\vec{e}_7,$$

y en el resto de casos $\mathcal{G}_n(x) = x$, $\forall\, n \geq 7$.

Ejemplo 3.1.6. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, definido por:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}\,, & \text{si n es impar} \\ \\ 0\,, & \text{si n es par} \end{cases} .$$

Este ejemplo ilustra que, en general, $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no es una permutación de $\mathbb{N}$. En efecto, en este caso el reordenamiento ρ viene dado por $\rho(n) := 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, que es inyectiva, pero no sobreyectiva (pues $\rho(\mathbb{N}) = 2\mathbb{N} - 1$). En este caso se tiene $\mathcal{G}_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{2n-1} e_{2n-1}$.

En ambos ejemplos reordenamos la base canónica de c_0 que ya sabemos que es incondicional, con la cual tenemos garantizada la convergencia de la serie en (3.5).

Observación 3.1.7. Veamos que, en general, el operador $\mathcal{G}_m$ no es ni lineal ni continuo. De hecho sean $A, B \subset \mathbb{N}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y $|A| = |B| = m$. Si definimos

$$x := \sum_{n \in A} 3e_n + \sum_{n \in B} 2e_n \quad \text{e} \quad y := \sum_{n \in A} -2e_n + \sum_{n \in B} e_n,$$

entonces

$$\mathcal{G}_m(x + y) = \sum_{n \in B} 3e_n \neq \mathcal{G}_m(x) + \mathcal{G}_m(y) = \sum_{n \in A} e_n.$$

Para ver que no es continuo, tomamos $A \cap B = \emptyset$ con $|A| = |B| = m$ y definamos por ejemplo los vectores

$$x_n := \frac{n^2 + 1}{n^2} \sum_{n \in A} e_n + \sum_{n \in B} e_n$$

y

$$y_n := \sum_{n \in A} e_n + \frac{n^2 + 1}{n^2} \sum_{n \in B} e_n;$$

ambos vectores convergen a $\sum\limits_{n \in A \cup B} e_n$. Sin embargo,

$$\mathcal{G}_m(x_n) = \frac{n^2 + 1}{n^2} \sum_{n \in A} e_n, \quad y \quad \mathcal{G}_m(y_n) = \frac{n^2 + 1}{n^2} \sum_{n \in B} e_n$$

de donde sigue que

$$\mathcal{G}_m(x_n) \text{ converge a } \sum_{n \in A} e_n \quad y \quad \mathcal{G}_m(y_n) \text{ converge a } \sum_{n \in B} e_n.$$

Por tanto $\mathcal{G}_m$ no es continuo.

En el resto del capítulo desarrollamos las propiedades que debe cumplir una base $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que $\|x - G_m(x)\| \approx \sigma_m(x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbf{X}$. La primera de ellas es la "democracia", que vamos a introducir en la siguiente sección.

3.2. Bases democráticas

Definición 3.2.1. *Una base $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach $\mathbf{X}$ se dice* democrática *si existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{N}$, con $|A| = |B|$, se tiene:*

$$\Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\| \leq C \Big\|\sum_{n\in B} e_n\Big\|. \tag{3.8}$$

A la menor de las constantes C que cumplen (3.8) *la llamamos de constante de democracia de la base β, y la denotamos por C_Δ.*

Para medir cuánto se desvía una base β de ser democrática, consideramos su *función de democracia superior*, también conocida como la función fundamental de β,

$$\varphi_u[\beta, \mathbf{X}](m) := \varphi_u(m) = \sup_{|A|=m} \Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\|, \; m = 1, 2, \cdots,$$

y su *función de democracia inferior*

$$\varphi_l[\beta, \mathbf{X}](m) := \varphi_l(m) = \inf_{|A|=m} \Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\|, \; m = 1, 2, \cdots.$$

A continuación probamos algunas propiedades sencillas sobre bases democráticas.

Lema 3.2.2. *Si $\beta = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ es democrática entonces β es seminormalizada.*

Demostración. En particular sean $A, B \in \mathbb{N}$ com $A = \{n\}$ y $B = \{1\}$, entonces

$$\|e_n\| \leq C_\Delta \|e_1\| =: C_2, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Por otro lado,

$$C_1 := \frac{\|e_1\|}{C_\Delta} \leq \|e_n\|, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Por tanto combinando (3.9) y (3.10) tenemos

$$C_1 \leq \|e_n\| \leq C_2, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

□

Lema 3.2.3. *Si $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base democrática de **X**, entonces existe $\overline{C} > 0$ tal que, para todo $A, B \in \mathbb{N}$ con $|A| \leq |B| < \infty$, se tiene*

$$\Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq \overline{C} \Big\| \sum_{n \in B} e_n \Big\|.$$

Demostración. Sea k_β la constante de la base β, definida en (1.3). Tomemos $A, B \in \mathbb{N}$ con $|A| = N \leq |B| = M$. Sean $\overline{A} = \{1, \cdots, N\}$ y $\overline{B} = \{1, \cdots, M\}$, entonces

$$\Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq C_\Delta \Big\| \sum_{n=1}^{N} e_n \Big\| \leq C_\Delta\, k_\beta \Big\| \sum_{n=1}^{M} e_n \Big\| \leq C_\Delta^2\, k_\beta \Big\| \sum_{n \in B} e_n \Big\| = \overline{C} \Big\| \sum_{n \in B} e_n \Big\|,$$

donde $\overline{C} = C_\Delta^2\, k_\beta$. □

Lema 3.2.4. *Sea $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base en **X**. Entonces β es democrática si y sólo si las sucesiones $\{\varphi_u(m)\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{\varphi_l(m)\}_{m=1}^{\infty}$ son uniformemente comparables, es decir, existe $C > 0$ tal que*

$$\varphi_l(m) \leq \varphi_u(m) \leq C\, \varphi_l(m), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

En ese caso, la constante de democracia vale $C_\Delta = \sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_u(m)/\varphi_l(m)$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea β una base democrática, y por tanto seminormalizada. En primer lugar obsérvese que, usando (3.11),

(i) $\varphi_u(m) = \sup_{|A|=m} \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq \sup_{|A|=m} \sum_{n \in A} \|e_n\| \leq C_2\, m < \infty.$

(ii) $\varphi_l(m) = \inf_{|A|=m} \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \geq \text{ínf}_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{k_\beta} \|e_n\| \geq C_1/k_\beta > 0.$

Además, usando que β es democrática, para todo $B \subset \mathbb{N}$ fijo con $|B| = m$, se tiene

$$\varphi_l(m) \leq \varphi_u(m) = \sup_{|A|=m} \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq C_\Delta \Big\| \sum_{n \in B} e_n \Big\|.$$

Tomando el ínfimo sobre todos los $|B| = m$ se obtiene

$$\varphi_l(m) \leq \varphi_u(m) \leq C_\Delta \varphi_l(m).$$

Es decir, $\varphi_l(m)$ y $\varphi_u(m)$ son comparables y $\sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_u(m)/\varphi_l(u) \leq C_\Delta < \infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que se cumple (3.12). En particular se tendrá que $\varphi_l(m) \geq C^{-1}\varphi_u(m) > 0$. Sea $C_d := \sup_{m \in \mathbb{N}} \varphi_u(m)/\varphi_l(m) < \infty$. Probemos que β es democrática. Tomamos $A, B \in \mathbb{N}$ finitos tales que : $|A| = |B| = m$. Entonces

$$\Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq \varphi_u(m) \leq C_d\, \varphi_l(m) \leq C_d \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\|.$$

Concluimos que β es democrática con $C_\Delta \leq C_d$. □

Lema 3.2.5. *Sea β una base democrática con constante de base k_β. Entonces:*

(i) Las funciones φ_u y φ_l son esencialmente crecientes, es decir, cumplen

$$\varphi_u(m) \leq k_\beta\, \varphi_u(r) \quad y \quad \varphi_l(m) \leq k_\beta\, \varphi_l(r), \quad \forall m \leq r;$$

(ii) La sucesión $(\varphi_u(m)/m)_{m=1}^{\infty}$ es no-creciente.

Demostración. Sea S_n el operador usual de suma parcial , dado por

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x)e_j, \;\; \forall x \in \mathbf{X}.$$

Sea $A \subset \mathbb{N}$ tal que $|A| = m$ y sea $M := \text{máx}\{n \; : \; n \in A\}$. Para $r \geq m$, definimos el conjunto $B = A \dot{\cup} \{M+1, \cdots, M+r-m\}$, de modo que $|B| = |A| + r - m = r$. Entonces

$$\Big\| \sum_{n\in A} e_n \Big\| = \Big\| S_M\Big(\sum_{n\in B} e_n \Big) \Big\| \leq k_\beta \, \Big\| \sum_{n\in B} e_n \Big\| \leq k_\beta \; \varphi_u(r).$$

Tomando el supremo sobre todos los $|A| = m$, conseguimos lo que queríamos

$$\varphi_u(m) \leq k_\beta\, \varphi_u(r).$$

Por otro lado, dado un conjunto $B \subset \mathbb{N}$ fijo con $|B| = r \geq m$, escogemos cualquier subconjunto $A \subset B$ con $|A| = m$. Entonces

$$\varphi_l(m) \leq \Big\| \sum_{n\in A} e_n \Big\| = \Big\| S_M\Big(\sum_{n\in B} e_n \Big) \Big\| \leq k_\beta \, \Big\| \sum_{n\in B} e_n \Big\|.$$

Tomando el ínfimo sobre todos los $|B| = r$ se obtiene

$$\varphi_l(m) \leq k_\beta\, \varphi_l(r).$$

Probemos ahora que $(\varphi_u(m)/m)_{m=1}^{\infty}$ es no creciente. Para cada conjunto finito A con $|A| = m \geq 2$ escribimos

$$\sum_{n\in A} e_n = \sum_{n\in A} e_n \sum_{k\in A\setminus\{n\}} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} \sum_{k\in A} \sum_{n\in A\setminus\{k\}} e_n,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n\in A} e_n \Big\| &\leq \frac{1}{m-1} \sum_{k\in A} \Big\| \sum_{n\in A\setminus\{k\}} e_n \Big\| \\ &\leq \frac{1}{m-1} \sum_{k\in A} \varphi_u(m-1) = \frac{m}{m-1}\, \varphi_u(m-1). \end{aligned}$$

Tomando supremo en $|A| = m$ (y diviendo por m) obtenemos,

$$\frac{\varphi_u(m)}{m} \leq \frac{\varphi_u(m-1)}{m-1}.$$

$\square$

3.2.1. Ejemplos de bases democráticas

Veamos algunos ejemplos relacionados con bases democráticas en los espacios de Banach clásicos.

A.- Espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ y $c_0(\mathbb{N})$

Lema 3.2.6. *Sea $X = \ell_p(\mathbb{N})$, con $1 \le p < \infty$, o bien $X = c_0(\mathbb{N})$. Entonces la base canónica $\beta = \{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es democrática con $C_\Delta = 1$.*

Demostración. Probemos primero para $\ell_p(\mathbb{N})$. De hecho, si tomamos cualquier $A \in \mathbb{N}$, con $|A| = m$, entonces

$$\Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\| = \Big(\sum_{n\in A} 1^p \Big)^{\frac{1}{p}} = m^{1/p}.$$

Por tanto, las funciones de democracia superior e inferior coinciden

$$\varphi_u(m) = \varphi_l(m) = m^{1/p}.$$

Así concluimos que β es democrática con $C_\Delta = 1$. De manera similar de procede para c_0,

$$\Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\|_\infty = 1,$$

y por tanto $\varphi_u(m) = \varphi_l(m) = 1$. □

El siguiente ejemplo es un caso especial del anterior, para $p = 2$.

Lema 3.2.7. *Las bases ortonormales $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ son democráticas.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{N}$, con $|A| = m$, entonces usando la ortogonalidad y la igualdad de Pitágoras

$$\Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\|_{\ell_2} = \Big(\sum_{n\in A} \|\mathbf{e}_n\|^2 \Big)^{1/2} = m^{1/2}$$

Así que $\varphi_u(m) = \varphi_l(m) = m^{1/2}$, y la base es democrática con $C_\Delta = 1$. □

B.- Espacios $\ell_q(\ell_p)$

Este ejemplo ilustra una situación en que la base **no** es democrática.

Lema 3.2.8. *En el espacio $\ell_q(\ell_p)$ con $1 \leq p, q < \infty$, la base canónica*

$$\vec{\mathbf{e}}_{n,m} = (\delta_{jn} \cdot \delta_{km})_{j,k=1}^{\infty}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

es democrática si y sólo si $p = q$.

Demostración. Supongamos que $p \neq q$. Probemos para $p < q$. Construimos dos conjuntos $A, B \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con $|A| = |B| = M$, de siguiente modo. Por un lado tomamos $A = \{(1,1), \cdots, (M,1)\}$, entonces

$$\Big\| \sum_{(n,m)\in A} \mathbf{e}_{n,m} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big\| \sum_{n=1}^{M} \mathbf{e}_{n,1} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big((\sum_{n=1}^{M} |\mathbf{1}|^p)^{q/p} + 0 + \cdots \Big)^{1/q} = M^{1/p}. \quad (3.13)$$

Por otro lado, tomamos $B = \{(1,1), \cdots, (1,M)\}$, entonces

$$\Big\| \sum_{(n,m)\in B} \mathbf{e}_{n,m} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big\| \sum_{m=1}^{M} \mathbf{e}_{1,m} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big(\sum_{m=1}^{M} (|\mathbf{1}|^p + 0 + \cdots)^{q/p} \Big)^{1/q} = M^{1/q}. \quad (3.14)$$

Por tanto, si la base fuera democrática tendríamos que $M^{1/p} \leq C_\Delta\, M^{1/q}$, es decir

$$C_\Delta \geq M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad \forall\, M = 1, 2, \ldots$$

Como $p < q$, haciendo M tender a infinito llegaríamos a una contradicción. Concluimos que la base no es democrática si $p < q$. De manera similar, intercambiando los conjuntos A y B, se pueba que la base no es democrática si $p > q$.

Por último, en el caso $p = q$, tenemos que $\ell_q(\ell_p) = \ell_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, y aquí la base canónica sí es democrática por el Lema 3.2.6. $\square$

En este ejemplo, $\mathbf{X} = \ell_q(\ell_p)$, podemos calcular las funciones de democracia incluso aunque la base no sea democrática. Usaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.9. *Sea $\ell_q(\ell_p)$ con $1 \leq p, q < \infty$.*

(i) Si $p \leq q$, entonces

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^q \Big)^{1/q} \leq \|a_{n,m}\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^p \Big)^{1/p}.$$

(ii) Si $p \geq q$, entonces

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^p \Big)^{1/p} \leq \|a_{n,m}\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}|^q \Big)^{1/q}.$$

Demostración. La demostración de las dos condiciones es similar, pero sólo probaremos la primera.
Sea $p < q$ entonces por un lado $\ell_p(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_q(\mathbb{N})$, es decir, $\|a_m\|_{\ell_q} \leq \|(a_m)\|_{\ell_p}$.

Tomemos $\overrightarrow{a} = (a_{nm})_{n,m=1}^{\infty} \in \ell_q(\ell_p)$, entonces

$$\|(a_{n,m})\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{q/p}\Big]^{1/q}.$$

Llamamos $\alpha_m = \Big(\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{1/p}$, entonces

$$\|(a_{n,m})\|_{\ell_q(\ell_p)} = \Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{q/p}\Big]^{1/q} = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_m|^q\Big)^{1/q}$$

$$\leq \Big(\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_m|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{1/p}. \qquad (*)$$

Por otro lado, si fijo $m \in \mathbb{N}$ tengo por hipótesis que

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{1/p}$$

Elevando a la potencia q y sumando $\sum\limits_{m=1}^{\infty}$ en ambos lados, tenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|^q\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|^p\Big)^{q/p}$$

de donde tomando potencias $1/q$ sigue que

$$\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{nm}|^q\Big)^{1/q} \leq \|(a_{n,m})\|_{\ell_q(\ell_p)}. \qquad (**)$$

Asociando $(*)$ y $(**)$ tenemos lo que queríamos. $\square$

Lema 3.2.10. *Sea $X = \ell_q(\ell_p)$. Si $p \leq q$ entonces*

1. $\varphi_u(M) = \sup\limits_{|A|=M}\Big\|\sum\limits_{(n,m)} e_{n,m}\Big\| = M^{1/p}$;

2. $\varphi_l(M) = \inf\limits_{|A|=M}\Big\|\sum\limits_{(n,m)} e_{n,m}\Big\| = M^{1/q}$.

Demostración. 1. En efecto $\forall |A| = M$, Por (i) del lema 3.2.9

$$\Big\| \sum_{(n,m)\in A} e_{n,m} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)} \leq \Big\| \sum_{(n,m)\in A} e_{n,m} \Big\|_{\ell_p} = M^{1/p}.$$

Tomando supremo $\varphi_u(M) \leq M^{1/p}$. Además, escogiendo el mismo conjunto A que en (3.13) vemos que el supremo se alcanza, y por tanto $\varphi_u(M) = M^{1/p}$.

2. Análogamente, usando (ii) del lema 3.2.9, para todo $|B| = M$ tenemos

$$M^{1/q} = \Big\| \sum_{(n,m)\in B} e_{n,m} \Big\|_{\ell_q} \leq \Big\| \sum_{(n,m)\in B} e_{n,m} \Big\|_{\ell_q(\ell_p)}.$$

y tomando ínfimos, tenemos $M^{1/q} \leq \varphi_l(M)$. Usando el conjunto B construido en (3.14) vemos que la igualdad se alcanza, y concluimos que $\varphi_l(M) = M^{1/q}$. □

C.- Espacios $\ell_p \oplus \ell_q$

De un modo similar al ejemplo anterior se obtienen los resultados correspondientes para el espacio $\ell_p \oplus \ell_q$.

Lema 3.2.11. *Sea $1 \leq p, q < \infty$. Entonces, la base canónica*

$$\beta = \{\mathfrak{e}_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad donde\ \mathfrak{e}_n = \begin{cases} (\mathbf{e}_k, 0), & si\ n = 2k-1 \\ (0, \mathbf{e}_k), & si\ n = 2k. \end{cases}$$

del espacio $\ell_p \oplus \ell_q$ es democrática si y sólo si $p = q$.

Demostración. Supongamos que $p < q$. Si $A = \{1, 3, \dots, 2m-1\}$ y $B = \{2, 4, \dots, 2m\}$, entonces tenemos

$$\Big\| \sum_{n\in A} \mathfrak{e}_n \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} = \Big\| \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{e}_k, 0) \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} = \Big\| \sum_{k=1}^{m} \mathbf{e}_k \Big\|_{\ell_p} = m^{1/p}$$

y

$$\Big\| \sum_{n\in B} \mathfrak{e}_n \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} = \Big\| \sum_{k=1}^{m} (0, \mathbf{e}_k) \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} = \Big\| \sum_{k=1}^{m} \mathbf{e}_k \Big\|_{\ell_q} = m^{1/q}.$$

Si β fuera democrática entonces $m^{1/q} \leq C_\Delta\, m^{1/p}$, lo cual no es posible si $p < q$. De manera similar se prueba que β no es democrática para $p > q$. Por último, en el caso $p = q$ la base β es democrática, como veremos a continuación en el Lema 3.2.13 y la Observación 3.2.14. □

Para calcular las funciones de democracia usaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.12. *Sea* $1 \le p, q < \infty$, *y sea* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \ell_p \oplus \ell_q$.

1. *Si* $p \le q$, *entonces:* $\|\mathbf{x}_1\|_{\ell_q} + \|\mathbf{x}_2\|_{\ell_q} \le \|\mathbf{x}\|_{\ell_p \oplus \ell_q} \le \|\mathbf{x}_1\|_{\ell_p} + \|\mathbf{x}_2\|_{\ell_p}$.

2. *Si* $q \le p$, *entonces:* $\|\mathbf{x}_1\|_{\ell_p} + \|\mathbf{x}_2\|_{\ell_p} \le \|\mathbf{x}\|_{\ell_p \oplus \ell_q} \le \|\mathbf{x}_1\|_{\ell_q} + \|\mathbf{x}_2\|_{\ell_q}$.

Demostración. Si $0 < r \le s < \infty$ entonces para toda sucesión $\mathbf{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene

$$\|\mathbf{y}\|_s = \Big[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^s\Big]^{\frac{1}{s}} \le \Big[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^r\Big]^{\frac{1}{r}} = \|\mathbf{y}\|_r,$$

es decir, $\ell_r(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell_s(\mathbb{N})$. Aplicando estas desigualdades a $\|\mathbf{x}\|_{\ell_p \oplus \ell_q} := \|\mathbf{x}_1\|_p + \|\mathbf{x}_2\|_q$ se obtiene fácilmente el resultado. □

En el siguiente lema usaremos la desigualdad elemental

$$a^{1/p} + b^{1/p} \le 2^{1-\frac{1}{p}} (a+b)^{1/p}, \quad \forall\, a, b \ge 0,\ p \ge 1; \tag{3.15}$$

ver Lema A.2.1 en el Apéndice.

Lema 3.2.13. *Sea* $1 \le p \le q < \infty$ *y* β *la base canónica de* $\ell_p \oplus \ell_q$. *Entonces*

1. $M^{1/p} \le \varphi_u(M) \le 2^{1-\frac{1}{p}} M^{1/p}$;

2. $\varphi_l(M) = M^{1/q}$.

Demostración. 1.- Escribimos

$$\varphi_u(M) = \sup_{|A|=M} \Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\|_{\ell_p \oplus \ell_q} = \sup_{|A_1|+|A_2|=M} \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) + \sum_{m\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p \oplus \ell_q}$$

Como $p \le q$, por (1) del lema 3.2.12, para cada A_1 y A_2 tenemos

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) + \sum_{n\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p \oplus \ell_q} &\le \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) \Big\|_{\ell_p} + \Big\| \sum_{n\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p} && (3.16)\\ &= |A_1|^{1/p} + |A_2|^{1/p}. && (3.17) \end{aligned}$$

Usando (3.15) obtenemos $\varphi_u(M) \le 2^{1-\frac{1}{p}} M^{1/p}$. Por otro lado,

$$\varphi_u(M) \ge \Big\| \sum_{n=1}^{M} (\mathbf{e}_n, 0) \Big\|_{\ell_p} = M^{1/p}.$$

Por tanto

$$M^{1/p} \le \varphi_u(M) \le 2^{1-\frac{1}{p}} M^{1/p}.$$

2. De manera similar,

$$\varphi_l(M) = \inf_{|A|=M} \Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} = \inf_{|A_1|+|A_2|=M} \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) + \sum_{m\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q}$$

Por (1) del lema 3.2.12, para cada A_1 y A_2 se tiene

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) + \sum_{n\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_q} &\geq \Big\| \sum_{n\in A_1} (\mathbf{e}_n, 0) \Big\|_{\ell_q} + \Big\| \sum_{m\in A_2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_q} \\ &= |A_1|^{\frac{1}{q}} + |A_2|^{\frac{1}{q}} \geq (|A_1| + |A_2|)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

usando en el último paso la desigualdad elemental en Lema A.2.1.ii. Por tanto, hemos probado que $\varphi_l(M) \geq M^{1/q}$. Por otro lado,

$$\varphi_l(M) \leq \Big\| \sum_{n=1}^{M} (0, \mathbf{e}_n) \Big\|_{\ell_q} = M^{1/q}.$$

Por tanto

$$\varphi_l(M) = M^{1/q}.$$

$\square$

Observación 3.2.14. Si $p = q$, del lema anterior se obtiene que β es democrática con constante

$$C_\Delta = \sup_{M\in\mathbb{N}} \varphi_u(M)/\varphi_l(M) \leq 2^{1-\frac{1}{p}}.$$

De hecho, en este caso se tiene que $C_\Delta = 2^{1-\frac{1}{p}}$. En efecto, si M es par, tomando $A = \{1, \ldots, M\}$ vemos que

$$\varphi_u(M) \geq \Big\| \sum_{n\in A} \mathbf{e}_n \Big\|_{\ell_p\oplus\ell_p} = \Big\| \sum_{n=1}^{M/2} (\mathbf{e}_n, 0) \Big\|_{\ell_p} + \Big\| \sum_{m=1}^{M/2} (0, \mathbf{e}_m) \Big\|_{\ell_p} = 2\,(M/2)^{1/p} = 2^{1-\frac{1}{p}} M^{1/p},$$

de donde sigue que $C_\Delta \geq \sup_{M\in 2\mathbb{N}} \varphi_u(M)/\varphi_l(M) \geq 2^{1-\frac{1}{p}}$.

D.- El sistema de Haar en $L^p([0,1])$

Lema 3.2.15. *Si $1 < p < \infty$, entonces la base de Haar $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ es democrática en $L^p([0,1])$.*

Probaremos este lema en la siguiente sección.

3.3. Bases greedy

En esta sección **X** es un espacio de Banach y $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base seminormalizada de **X**, con funcionales duales $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Consideramos los conjuntos Σ_m, y el mejor error de aproximación con m-términos $\sigma_m(x)$ como en la sección §3.1.

Definición 3.3.1. *(Base Greedy)*
*Una base $\beta = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach **X** es* **greedy** *si existe una constante $C \geq 1$ tal que*

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C\,\sigma_m(x), \quad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \boldsymbol{X} \tag{3.18}$$

A la menor de las constantes C que cumplan (3.18) la llamaremos la constante greedy y la denotaremos por C_g.

Veamos a continuación el resultado más importante de este trabajo, resultado que nos da una caracterización de las bases greedy y que fue demostrado por Konyagin y Temlyakov en 1999; ver [5].

3.3.1. Teorema de caracterización de Konyagin y Temlyakov

Teorema 3.3.2. *Una base $\beta = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach **X** es greedy si y sólo si es incondicional y democrática.*

Para esta prueba necesitaremos de algunos lemas

Lema 3.3.3. *Si β es una base incondicional de **X**, con constante K_u como en la Definición 2.2.4, entonces*

$$\left\|\sum_{n\in A} a_n e_n\right\| \leq K_u \max_{n\in A} |a_n| \left\|\sum_{n\in A} e_n\right\|.$$

Demostración. Sea $\lambda = \max_{n\in A} |a_n|$. Si $\lambda = 0$ entonces la desigualdad es trivial; suponemos pues que $\lambda > 0$. Llamo $\tilde{a}_n = a_n/\lambda$. Entonces $|\tilde{a}_n| \leq 1$, $\forall n \in A$. Por el lema de convexidad (ver Apéndice Lema A.1.4), tenemos

$$\sum_{n\in A} \tilde{a}_n e_n = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j z_j, \qquad (*)$$

donde $\lambda_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1$, y $z_j \in \left\{\sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n : \varepsilon \in \{\pm 1\}\right\} =: \mathbf{Z}$. Entonces

$$\left\|\sum_{n\in A} a_n e_n\right\| = \left\|\sum_{n\in A} \lambda \tilde{a}_n e_n\right\| = \lambda \left\|\sum_{n\in A} \tilde{a}_n e_n\right\| \underbrace{=}_{(*)} \lambda \left\|\sum_{j=1}^{J} \lambda_j z_j\right\|$$

$$\leq \lambda \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \|z_j\| \leq \lambda \Big(\sum_{j=1}^{J} \lambda_j \Big) \max_{z \in \mathbf{Z}} \|z_j\|.$$

Como β es incondicional, usando la constante K_u en la Definición 2.2.4, tenemos $\forall z \in \mathbf{Z}$

$$\|z\| = \Big\| \sum_{n \in A} \varepsilon_n e_n \Big\| \leq K_u \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\|.$$

□

Lema 3.3.4. *Si β es una base incondicional de $\mathbf{X}$ y A es finito entonces*

$$\min_{n \in A} |e_n^*(x)| \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| \leq K_u \|x\|.$$

Demostración. Sea $a_n = e_n^*(x)$ y $\lambda = \min_{n \in A} |a_n|$. Si $\lambda = 0$ entonces la desigualdad es trivial. Suponemos pues que $\lambda > 0$. Entonces,

$$\lambda \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| = \Big\| \sum_{n \in A} \lambda e_n \Big\| = \Big\| \sum_{n \in A} \frac{\lambda}{a_n} a_n e_n \Big\| = \big\| S_{\boldsymbol{\beta}}(x) \big\|$$

donde $\boldsymbol{\beta} = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ se escoge como $\beta_n = \lambda / a_n$ si $n \in A$, y $\beta_n = 0$ si $n \notin A$. Como $|\beta_n| \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, usando la propiedad de la constante K_u en (2.8) tenemos que

$$\lambda \Big\| \sum_{n \in A} e_n \Big\| = \big\| S_{\boldsymbol{\beta}}(x) \big\| \leq K_u \|x\|.$$

□

<u>Demostración del teorema 3.3.2</u>.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea β una base greedy en $\mathbf{X}$ con constante greedy C_g. Consideremos un subconjunto finito $A \subset \mathbb{N}$, con $|A| = m$. Veamos primero que β es incondicional.

Como vimos en la Proposición 2.2.6 (que caracteriza las bases incondicionales), si definimos el siguiente operador en el subconjunto denso $E = \operatorname{span}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$

$$P_A(x) = \sum_{n \in A} e_n^*(x) e_n, \quad x \in E,$$

entonces basta demostrar que se cumple la propiedad

$$\|P_A(x)\| \leq (C_g + 1)\|x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

Por simplicidad denotamos $P_{A^c} = I - P_A$. Si $x \in E$, consideramos $\alpha > \sup_{n \notin A} |e_n^*(x)|$. Sea

$$\begin{aligned} y = P_{A^c}(x) + \alpha \sum_{n \in A} e_n &= x - \sum_{n \in A} e_n^*(x) e_n + \alpha \sum_{n \in A} e_n \\ &= x + \sum_{n \in A} (\alpha - e_n^*(x)) e_n. \end{aligned}$$

Por un lado tenemos

$$\sigma_m(y) = \text{ínf} \left\{ \left\| y - \sum_{j \in A} \alpha_j e_j \right\| : |A| = m,\ \alpha_j \in \mathbb{K} \right\} \leq \|x\|$$

y por otro lado, claramente

$$\mathcal{G}_m(y) = \alpha \sum_{n \in A} e_n.$$

Por hipótesis β es greedy, entonces

$$\|P_{A^c}(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g \sigma_m(y) \leq C_g \|x\|.$$

Entonces

$$\|P_A(x)\| \leq \|x - P_A(x)\| + \|x\| \leq (C_g + 1) \|x\|.$$

Por tanto, la base es incondicional con constante $K_{su} \leq C_g + 1$.

Probemos ahora que β es democrática (ver Definición 3.2.1). Para eso escogemos conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{N}$ tales que $|A| = |B|$. Notar que

$$A \cup B = (B \setminus A) \uplus (A \cap B) \uplus (A \setminus B).$$

Sea $m = |A \setminus B| = |B \setminus A|$, y dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$x = (1 + \varepsilon) \sum_{n \in B \setminus A} e_n + \sum_{n \in A \cap B} e_n + \sum_{n \in A \setminus B} e_n.$$

Entonces $\mathcal{G}_m(x) = (1 + \varepsilon) \sum_{n \in B \setminus A} e_n$, y tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in A} e_n \right\| &= \left\| x - \sum_{n \in B \setminus A} e_n \right\| \leq C_g \sigma_m(x) \\ &\leq C_g \left\| x - \sum_{n \in A \setminus B} e_n \right\| \leq C_g \left(\left\| \sum_{n \in B} e_n \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{n \in B \setminus A} e_n \right\| \right). \end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \searrow 0$ obtenemos

$$\left\| \sum_{n \in A} e_n \right\| \leq C_g \left\| \sum_{n \in B} e_n \right\|$$

y por tanto la base es democrática, con constante $C_\Delta \le C_g$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que β es incondicional y democrática, con constantes respectivas K_u y C_Δ. Fijamos $x \in \mathbf{X}$, $m \in \mathbb{N}$. Tomamos un vector cualquiera $y \in \Sigma_m$, que podemos escribir como

$$y = \sum_{n \in B} a_n e_n,$$

para algunos coeficientes $a_n \in \mathbb{K}$ y un conjunto $B \subset \mathbb{N}$ con $|B| = m$. Vamos a probar que existe $C > 0$ tal que

$$\left\|x - G_m(x)\right\| \le C \left\|x - y\right\|,$$

de hecho, para cualquier aproximación greedy $G_m(x)$ de x (y en particular, para $\mathcal{G}_m(x)$). Escribimos $G_m(x) = P_A(x)$, para algún conjunto $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| = m$. Por la definición de las aproximaciones greedy, tenemos que

$$\min_{n \in A} |e_n^*(x)| \ge \max_{n \notin A} |e_n^*(x)|. \tag{3.19}$$

Obsérvese que

$$A^c = \mathbb{N} \setminus A = (\mathbb{N} \setminus (A \cup B)) \uplus (B \setminus A),$$

por tanto podemos escribir

$$\|x - G_m(x)\| = \|P_{(A\cup B)^c}(x) + P_{B\setminus A}(x)\| \le \|P_{(A\cup B)^c}(x)\| + \|P_{B\setminus A}(x)\|. \tag{$*$}$$

Sea $r = |A \setminus B| = |B \setminus A|$, y nótese que como consecuencia de (3.19) también se cumple

$$\max_{n \in B\setminus A} |e_n^*(x)| \le \min_{n \in A\setminus B} |e_n^*(x)|.$$

Usando el lema 3.3.3 y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|P_{B\setminus A}(x)\| &= \left\|\sum_{n\in B\setminus A} e_n^*(x) e_n\right\| \le K_u \max_{n\in B\setminus A} |e_n^*(x)| \left\|\sum_{n\in B\setminus A} e_n\right\| \\
&\le K_u \min_{n\in A\setminus B} |a_n| \left\|\sum_{n\in A\setminus B} e_n\right\| \cdot \frac{\left\|\sum_{n\in B\setminus A} e_n\right\|}{\left\|\sum_{n\in A\setminus B} e_n\right\|} \\
&\le K_u \frac{\varphi_u(r)}{\varphi_l(r)} \min_{n\in A\setminus B} |a_n| \left\|\sum_{n\in A\setminus B} e_n\right\|.
\end{aligned}$$

Usando que la base es democrática obtenemos

$$\|P_{B\setminus A}(x)\| \le K_u C_\Delta \min_{n\in A\setminus B} |a_n| \left\|\sum_{n\in A\setminus B} e_n\right\|.$$

Usando ahora el Lema 3.3.4 tenemos

$$\|P_{B\setminus A}(x)\| \leq K_u^2\, C_\Delta \left\| \sum_{n \in A\setminus B} e_n^*(x) e_n \right\| = K_u^2\, C_\Delta\, \|P_{A\setminus B}(x)\|. \tag{3.20}$$

Por otro lado, por la incondicionalidad de β, tenemos

$$\|P_{(A\cup B)^c}(x)\| = \|P_{(A\cup B)^c}(x-y)\| \leq K_u \|x-y\|. \tag{3.21}$$

y

$$\|P_{A\setminus B}(x)\| = \|P_{A\setminus B}(x-y)\| \leq K_u \|x-y\|. \tag{3.22}$$

Combinando (3.20), (3.21) y (3.22) y teniendo en cuenta (∗), obtenemos

$$\|x - G_m(x)\| \leq K_u \|x-y\| + K_u^3 C_\Delta \|x-y\| = (K_u + K_u^3 C_\Delta)\|x-y\|.$$

Tomando el ínfimo sobre todos los $y \in \Sigma_m$ concluimos que

$$\|x - G_m(x)\| \leq (K_u + K_u^3 C_\Delta) \inf_{y \in \Sigma_m} \|x-y\| = (K_u + K_u^3 C_\Delta)\, \sigma_m(x).$$

Por tanto, la base es greedy, con $C_g \leq K_u + K_u^3 C_\Delta$.

□

3.3.2. Ejemplos de bases greedy

A.- Espacios ℓ_p y c_0

Proposición 3.3.5. *La base canónica $\beta = \{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ en una base greedy en c_0 y ℓ_p, para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. En efecto β es incondicional por el Lema 2.3.1, y es de democrática por el Lema 3.2.6. Por tanto, el Teorema 3.3.2 implica que β es una base greedy. □

Observación 3.3.6. De hecho, es posible demostrar que la constante $C_g = 1$ en todos estos espacios.

B.- Espacios $\ell_q(\ell_p)$ y $\ell_p \oplus \ell_q$

En estos espacios, ya vimos en el Capítulo 2 que la base canónica es incondicional. Sin embargo, si $p \neq q$ la base no es democrática, y por tanto tampoco es greedy. Es decir, en estos ejemplos, la aproximación con el algoritmo greedy $\|x - \mathcal{G}_m(x)\|$ puede en general no estar cerca del mejor error de aproximación $\sigma_m(x)$.

C.- Base trigonométrica en $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$

Proposición 3.3.7. *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\mathcal{T} = \left\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, \dots\right\}$ el sistema trigonométrico. Entonces $\mathcal{T}$ es una base greedy de $L^p(\mathbb{T})$ si y sólo si $p = 2$.*

Demostración. Si $p = 2$, entonces $\mathcal{T}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$. Por el Lema 2.3.2 es incondicional y por el Lema 3.2.7 es democrática. Por tanto, $\mathcal{T}$ es una base greedy en $L^2(\mathbb{T})$.

Si $p \neq 2$, es posible probar que $\mathcal{T}$ no es base incondicional, y por el Teorema 3.3.2, no será una base greedy en $L^p(\mathbb{T})$. La demostración de la condicionalidad de $\mathcal{T}$ en $L^p(\mathbb{T})$, $p \neq 2$, se puede consultar en [7] (Chapter II.D, Proposition 9). □

D.- Base de Haar en $L^p([0, 1])$, $1 < p < \infty$

Terminamos el capítulo con el resultado que asegura que la base de Haar normalizada es greedy en $L^p([0, 1])$, para $1 < p < \infty$.

Teorema 3.3.8. *Sea $1 < p < \infty$. El sistema normalizado $\mathcal{H}^{(p)} = \left\{h_n^{(p)} := h_n/\|h_n\|_{L^p}\right\}_{n=0}^{\infty}$ es una base greedy en $L^p([0, 1])$.*

Antes de la demostración, veamos un lema que será útil.

Lema 3.3.9. *Sea $1 < r < \infty$ y $0 < p < \infty$. Existen constantes positivas $c_{r,p}$ y $C_{r,p}$ tales que para todo $A \subset \mathbb{Z}$ finito ,*

$$c_{r,p}\Big(\sum_{j\in A} r^{pj}\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{j\in A} r^{2j}\Big)^{1/2} \leq C_{r,p}\Big(\sum_{j\in A} r^{pj}\Big)^{1/p}.$$

Demostración. Sea $j_0 = \text{máx}\{j \ : \ j \in A\}$. Como $r > 1$, usando la fórmula de sumación de una progresión geométrica tenemos

$$r^{j_0} \leq \Big(\sum_{j\in A} r^{pj}\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{j\leq j_0} r^{pj}\Big)^{1/p} = \left(\frac{r^p}{r^p-1}\right)^{1/p} r^{j_0}$$

Llamando $\delta_{r,p} := \left(\frac{r^p}{r^p-1}\right)^{1/p}$, esto implica

$$\Big(\sum_{j\in A} r^{pj}\Big)^{1/p} \leq \delta_{r,p}\, r^{j_0} \leq \delta_{r,p}\Big(\sum_{j\in A} r^{2j}\Big)^{1/2},$$

con lo que multiplicando los miembros por $c_{r,p} := 1/\delta_{r,p}$ se obtiene la primera desigualdad.

Por otro lado, razonando de modo similar,

$$\Big(\sum_{j\in A} r^{2j}\Big)^{1/2} \leq \delta_{r,2}\, r^{j_0} \leq \delta_{r,2}\Big(\sum_{j\in A} r^{pj}\Big)^{1/p}.$$

Esto prueba la segunda igualdad con $C_{r,p} = \delta_{r,2}$. □

<u>**Demostración del Teorema 3.3.8**</u>.

Por el Teorema 2.3.4, $\mathcal{H}$ es incondicional (y por tanto también $\mathcal{H}^{(p)}$). Precisamos probar que también es democrática. Usamos la notación $h^{(p)}_{j,k} := h_{j,k}/\|h_{j,k}\|_{L^p}$, con $h_{j,k}(x)$ como en la §1.2.5. Notar que

$$\|h_{j,k}\|_{L^p} = 2^{j/2}\Big(\int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} dx\Big)^{1/p} = 2^{j/2}\,2^{-j/p}.$$

Además, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$ y cada $x \in [0, 1)$ fijos, existe un único $k \in \{0, 1, \ldots, 2^j - 1\}$ tal que

$$|h^{(p)}_{j,k}(x)| = 2^{j/p}, \qquad \text{y} \quad |h^{(p)}_{j,k'}(x)| = 0, \ \forall\, k' \neq k;$$

de hecho, $k = k_{x,j}$ está unívocamente determinado por $x \in [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j})$. Aplicando del lema anterior con $r = 2^{1/p}$, existirán constantes $C_p \geq c_p > 0$ tales que, para todo subconjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ y $\forall x \in [0, 1)$,

$$c_p\Big(\sum_{n\in A} |h^{(p)}_n(x)|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n\in A} |h^{(p)}_n(x)|^2\Big)^{1/2} \leq C_p\Big(\sum_{n\in A} |h^{(p)}_n(x)|^p\Big)^{1/p}$$

Tomando normas en $L^p([0, 1))$ se obtiene,

$$c_p|A|^{1/p} \leq \Big\|\Big(\sum_{n\in A} |h^{(p)}_n(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq C_p|A|^{1/p}. \tag{3.23}$$

Utilizando ahora el Teorema 2.3.5, enunciado en la §2.3.4, tenemos que

$$A_p\Big\|\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, h^{(p)}_n(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, h^{(p)}_n(x)\Big\|_p \leq B_p\Big\|\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, h^{(p)}_n(x)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p, \tag{3.24}$$

para ciertas constantes $A_p, B_p > 0$, y cualquier sucesión finita de escalares $a_n \in \mathbb{R}$. Escogiendo $a_n = 1$ si $n \in A$, y $a_n = 0$ si $n \notin A$, y combinando con (3.23) obtenemos

$$A_p c_p |A|^{1/p} \leq \Big\|\sum_{n\in A} h^{(p)}_n(x)\Big\| \leq B_p C_p |A|^{1/p}, \quad \forall\, A \subset \mathbb{N}.$$

Esto implica que el sistema $\{h^{(p)}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es democrático en $L^p([0, 1])$. Añadiendo la función h_0, es fácil ver que también $\mathcal{H}^{(p)}$ será una base democrática. Por tanto, el Teorema 3.3.2 implica que $\mathcal{H}^{(p)}$ es una base greedy. □

Apéndice A

Resultados auxiliares

En este apéndice se exponen algunos resultados auxiliares que se utilizan en el desarrollo de este trabajo y que han sido vistos previamente en alguna de las asignaturas del Grado y del Máster en Matemáticas.

A.1. Teoremas de análisis funcional

Corolario A.1.1. *(Teorema de la aplicación abierta)*
Si $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son espacios de Banach y $T : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ es lineal, continua y biyectiva, entonces T es un isomorfismo, es decir $T^{-1} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ es lineal y continua.

Demostración. Ver la prueba en ([2], Corollary 5.11) □

Teorema A.1.2. *(Teorema del grafo cerrado)*
Sean $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ espacios de Banach y $T : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un operador lineal, cuya gráfica

$$\mathcal{G}(T) = \Big\{(x, y) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \,:\, y = T(x)\Big\}$$

es un subespacio cerrado en $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. Entonces T es continuo.

Demostración. Ver la prueba en ([2], Theorem 5.12) □

Teorema A.1.3. *(Teorema de Banach–Steinhaus o Principio de acotación uniforme).*
Sean $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ espacios de Banach, A un conjunto de índices y $T_a : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ operadores lineales y continuos, para cada $a \in A$. Suponer que para cada $x \in \boldsymbol{X}$ se tiene

$$c(x) := \sup_{a \in A} \|T_a(x)\|_{\boldsymbol{Y}} < \infty.$$

Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{a \in A} \|T_a(x)\|_{\boldsymbol{Y}} \leq C\, \|x\|_{\boldsymbol{X}}, \quad \forall\, x \in \boldsymbol{X}.$$

Demostración. Ver la prueba en ([2], Theorem 5.13) □

En el siguiente lema, si $S \subset \mathbf{X}$, denotamos su envoltura convexa por

$$\mathrm{co}\,(S) := \Big\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j s_j \ :\ s_j \in S,\ \lambda_j \in [0,1],\ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1,\ J \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Lema A.1.4. *(Lema de convexidad)*
Si $A \subset \mathbb{N}$ es finito, entonces

$$\Big\{ \sum_{n\in A} a_n e_n : |a_n| \le 1 \Big\} = \mathrm{co}\,\Big(\Big\{ \sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n : \varepsilon_n \in \{\pm 1\} \Big\} \Big).$$

Demostración. $\boxed{\supseteq}$ Trivial.

$\boxed{\subseteq}$ Probemos por inducción en $|A| = N$.
Caso $N = 1$. Si $x = a e_n$ tal que $|a| \le 1$, tenemos que

$$x = \frac{1+a}{2} e_n + \frac{1-a}{2} (-e_n),$$

donde $\lambda_0 = \frac{1+a}{2}, \lambda_1 = \frac{1-a}{2}$, cumplen que $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ y $\lambda_j \in [0,1]$, $j = 0, 1$. Entonces $x \in \mathrm{co}\,(\{e_n, -e_n\})$.

Suponer cierto para $N-1$ y veamos el caso $|A| = N$. Tomo $x = \sum_{n\in A} a_n e_n$. Sea $A = A' \cup \{n_0\}$, donde $|A'| = N-1$, entonces

$$x = a_{n_0} e_{n_0} + x' \quad \text{donde} \quad x' = \sum_{n\in A'} a_n e_n.$$

Como $|A'| = N-1$ y $|a_n| \le 1$, por hipótesis podemos escribir

$$x' = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j x_j \quad \text{con } x_j \in \Big\{ \sum_{n\in A'} \varepsilon_n e_n, \varepsilon_n = \pm 1 \Big\}, \quad \sum_{j=1}^{J} \lambda_j = 1, \quad 0 \le \lambda_j \le 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+a_{n_0}}{2}[e_{n_0} + x'] + \frac{1-a_{n_0}}{2}[-e_{n_0} + x'] \\ &= \sum_{j=1}^{J} \frac{1+a_{n_0}}{2} \lambda_j (x_j + e_{n_0}) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1-a_{n_0}}{2} \lambda_j (x_j - e_{n_0}). \end{aligned}$$

Ahora, como $|a_{n_0}| \leq 1$ tenemos

$$0 \leq \frac{1 \pm a_{n_0}}{2}\lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{J}\Big(\frac{1+a_{n_0}}{2}\lambda_j + \frac{1-a_{n_0}}{2}\lambda_j\Big) = \frac{1+a_{n_0}}{2} + \frac{1-a_{n_0}}{2} = 1.$$

Además, $x_j \pm e_{n_0} \in \Big\{\sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n \,:\, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}\Big\}$, para todo $j = 1, \ldots, J$. Por tanto, deducimos que $x \in \mathrm{co}\Big(\Big\{\sum_{n\in A} \varepsilon_n e_n : \varepsilon_n \in \{\pm 1\}\Big\}\Big)$. □

A.2. Desigualdades

Lema A.2.1. *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Para todo* $a, b \geq 0$ *se cumple*

(i) $a^{1/p} + b^{1/p} \leq 2^{1-\frac{1}{p}}\,(a+b)^{1/p}$

(ii) $(a+b)^{1/p} \leq a^{1/p} + b^{1/p}$.

Demostración. Probamos (i). Sea $f(x) = x^{1/p}$, $x \geq 0$, que es una función cóncava. Entonces se cumple

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Sustituyendo se obtiene la expresión en (i).

Para demostrar (ii), dividiendo todo por b y llamando $x = a/b$, basta comprobar que

$$(x+1)^{1/p} \leq x^{1/p} + 1, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Llamando $g(x) = x^{1/p} + 1 - (x+1)^{1/p}$, vemos que

$$g'(x) = \tfrac{1}{p}x^{1/p-1} - \tfrac{1}{p}(x+1)^{1/p-1} \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Por tanto g es creciente y $g(x) \geq g(0) = 0$ para todo $x \geq 0$. □

Bibliografía

[1] F. Albiac, N.J. Kalton. Topics in Banach space theory, 2nd Ed. Springer (2016).

[2] G. Folland. Real Analysis, 2nd Ed. John Wiley (1999).

[3] L. Grafakos. Classical Fourier Analysis, 2nd Ed. Springer (2008).

[4] E. Hernández, G. Weiss. A first course on wavelets. CRC Press (1996).

[5] S.V. Konyagin, V.N. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces*, East. J. Approx. 5, (1999), 365–379.

[6] E. Stein, R. Shakarchi, Real analysis. Princeton Univ. Press (2005).

[7] P. Wojtaszczyk, Banach spaces for analysts. Cambridge Univ. Press (1991).