Variable Compleja
problemas y complementos

Gabriel Vera Botí

En un verso de ocho sílabas
¿qué no cabrá,
si en una y tan sólo en ella
cabe el mar?

Ocho sílabas son muchas
para cantar.
Me basta una que tenga
por dentro el mar.

Rafael Alberti.

Dedicado a Marisa, Marcos y María,
que también llevan dentro el mar.

Índice general

Prólogo

Este libro es fruto de una dilatada experiencia enseñando análisis complejo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia. Además de algunos ejercicios clásicos contiene material complementario con el que se profundiza en algunos aspectos de la materia.

Cada capítulo comienza con una exposición de los conceptos y resultados teóricos que se utilizan en las soluciones de los ejercicios que contiene. El repertorio de ejercicios resueltos se presenta organizado en bloques, atendiendo a los recursos teóricos que, de manera natural, intervienen en sus soluciones. En cada bloque, a través de los ejercicios allí agrupados, se analizan comentan y enseñan posibles estrategias para abordar éstos y otros ejercicios análogos. Esta organización en bloques se complementa con una guía a la que hemos llamado *Cómo hacerlo* donde, de modo transversal, se señalan ejercicios que ilustran cómo abordar tareas típicas de la materia.

Dentro de cada bloque se ha cuidado el orden en que aparecen los ejercicios. Cuando el enunciado o la solución de uno de ellos utiliza resultados establecidos en otros, se ha procurado que éstos hayan aparecido previamente. Así, la ubicación de un ejercicio suele ser una valiosa indicación del camino y de los recursos con los que se puede alcanzar su solución. Cada capítulo termina con una colección de ejercicios propuestos. Se ofrece así un material de trabajo accesible y bien organizado que completa la labor ya realizada por otros autores en textos análogos muy valiosos [6], [10], [17].

Como orientación a los posibles interesados en esta obra merece la pena comentar aquí algunos detalles sobre su enfoque y contenido. No obstante, para tener una visión completa de ella, se recomienda acudir a los comentarios que figuran en los encabezamientos de los bloques de ejercicios.

En el primer capítulo, dedicado al cuerpo de los números complejos, aparecen ejercicios de carácter teórico donde se establecen las bases para la manipulación correcta de sumas infinitas de números complejos (sumación por paquetes, sumación de series dobles iteradas, etc.) En los complementos del capítulo se desarrolla la teoría de las familias sumables, que permite un enfoque natural de este asunto.

En el segundo capítulo se consideran aspectos topológicos y geométricos del plano complejo. A la utilización de la variable compleja para hacer geometría plana se le dedica una atención especial, por lo que ha parecido oportuno anticipar aquí la introducción de las transformaciones de Möbius.

Los ejercicios del tercer capítulo se ocupan de las funciones elementales de variable compleja y especialmente de la manipulación de funciones expresadas en términos de ellas. Otros están dedicados a la determinación y gestión de ramas de algunas multifunciones mediante técnicas que usan recursos de continuidad y conexión. En algunos de ellos se obtienen, mediante fórmulas, ramas concretas de raíces y logaritmos de polinomios.

En el capítulo cuarto, que se ocupa de las funciones definidas mediante series de potencias o de Laurent, se sigue insistiendo en la manipulación de funciones concretas. Se persigue adquirir experiencia en el manejo y en las propiedades de estos desarrollos antes de abordar la teoría general de Cauchy. La parte más básica es el bloque donde se calculan desarrollos de funciones definidas en términos de las funciones elementales.

El quinto capítulo incluye ya ejercicios genuinos de la teoría de funciones holomorfas que se pueden resolver utilizando las versiones elementales de los teoremas de Cauchy. Hay un bloque donde se manipulan y calculan integrales de línea considerando los desarrollos en serie de potencias o Laurent de las funciones involucradas en ellas. Se insiste en el cálculo de radios de convergencia de series de potencias, usando que la convergencia de la serie ocurre en el mayor disco que cabe en un dominio donde existe una prolongación analítica de la función suma.

El capítulo sexto se ocupa del comportamiento local de las funciones holomorfas en puntos regulares o en singularidades aisladas. Hay un bloque de ejercicios con resultados útiles para detectar singularidades esenciales. La parte más básica es el bloque dedicado a la clasificación, en funciones concretas, de sus singularidades aisladas y a las técnicas para calcular los correspondientes residuos. Como material complementario se han incluido ejercicios sobre funciones meromorfas y su representación mediante desarrollos de Mittag-Leffler.

En el capítulo séptimo, con las versiones generales de los teoremas de Cauchy, el teorema de los residuos y el principio del argumento culminan los resultados teóricos relacionados con las integrales de línea. En las soluciones de los ejercicios confluye y se usa el bagaje teórico de los capítulos previos. El principio del argumento interviene de forma natural en ejercicios donde se aplican criterios integrales para la existencia de primitivas y la existencia de ramas de logaritmos o raíces de funciones holomorfas. Estos ejercicios se completan con otros, donde se caracterizan los abiertos del plano complejo donde estos resultados de existencia están garantizados.

El octavo capítulo contiene ejercicios clásicos sobre aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales y sumación de series.

En los ejercicios del noveno capítulo, además de algunas aplicaciones del teorema del módulo máximo, se consideran nuevos aspectos de las transformaciones conformes, en particular aquéllos en los que interviene el Lema de Schwarz.

El lector interesado puede acudir a la versión electrónica de este libro que contiene, además de lo anterior, ejercicios sobre funciones armónicas, factorización de funciones, representación de funciones clásicas (Γ de Euler y ζ de Riemann) y familias normales de funciones holomorfas. A través de dicha versión se podrá enlazar también con el material complementario que se vaya añadiendo en el futuro.

Casi todos los ejercicios considerados en este libro proceden o son adaptaciones de los que figuran en los textos habituales [1], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14], [15] y unos pocos son propuestas directas del autor.

Los conocimientos previos asumidos al redactar este libro han sido:

- nociones básicas de álgebra lineal y geometría euclídea;
- topología de los espacios métricos: compacidad, conexión y continuidad;
- cálculo diferencial e integral para funciones de una y dos variables reales.

Quiero expresar mi agradecimiento a los compañeros que han influido en la publicación de este libro. Bernardo Cascales, José Manuel Mira, Antonio Pallarés y Salvador Sánchez-Pedreño, que conocían buena parte del material que aquí se ofrece, me animaron a preparar la versión final del libro que ahora se publica. También les debo un reconocimiento adicional porque de ellos, y de sus libros, he aprendido los recursos de LaTeX que me han permitido redactar y reorganizar el material que ha cuajado en este libro. Además debo un agradecimiento especial a Salvador, por haber realizado una cuidadosa lectura del borrador inicial, con atinadas sugerencias y comentarios que han mejorado el texto.

Por último quisiera expresar mi agradecimiento a los estudiantes que he tenido como alumnos y se han entusiasmado con el análisis complejo. Ellos han sido el principal incentivo para culminar esta obra.

Los errores e imperfecciones siempre acaban por aparecer en cualquier obra escrita. Se agradecerá a los lectores el envío de las correcciones, sugerencias, observaciones o críticas que consideren oportunas. Se procurará mantener al día una página web con la lista de las correcciones y erratas que se vayan detectando.

Gabriel Vera Botí

Cómo hacerlo

Aquí se expone una guía orientativa para las tareas comunes a los diversos ejercicios de variable compleja considerados en este texto.

Justificar igualdades y desigualdades donde intervienen números complejos

Se recomienda utilizar $|z|^2 = z\overline{z}$ en lugar de $|z|^2 = x^2 + y^2$. Véanse los ejercicios 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.8, 3.14, 4.34 y 4.36.

La función exponencial compleja y las fórmulas de de Moivre suelen ser útiles para establecer fórmulas de trigonometría como las que figuran en los ejercicios propuestos 8, 9, 10 y 11 del primer capítulo. Cuando interviene la función exponencial hay que tener presente que $|e^z| = e^x$, con $x = \operatorname{Re} z$. Véanse los ejercicios 1.8, 3.16, 4.1, 4.4 y 4.5.

Usar números complejos para hacer geometría en el plano

Para los ejercicios de geometría plana se recomienda usar las coordenadas complejas conjugadas $z, \overline{z}$: véanse los ejercicios 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.9, 2.36 y los ejercicios propuestos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del capítulo 2.

En algunas cuestiones de geometría plana intervienen las transformaciones de Möbius. Véanse los ejercicios 2.10, 2.11, 2.12, 2.14 y 2.32. Estas transformaciones también son útiles para algunos asuntos de geometría esférica: véanse los ejercicios 2.31, 2.33 y 2.34.

Manejar series dobles y sumas iteradas

Para demostrar que una suma $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z_{pq}$ es conmutativamente convergente (sumable) y manejar las correspondientes sumas iteradas se recomienda el resultado del corolario 1.1.3 (véase también el ejercicio 1.16).

Calcular la imagen de una función

Cuando la función es sencilla y el dominio se describe fácilmente en coordenadas cartesianas o polares la técnica básica se explica en la sección 2.1.3. Véanse los ejercicios 2.22, 2.23, 2.26, 3.20 y 3.21. Para funciones más complicadas se recomienda descomponer la función en transformaciones más sencillas. Las transformaciones de Möbius aparecen frecuentemente en estas descomposiciones por lo que conviene conocer las propiedades geométricas de estas transformaciones. Véanse los ejercicios 2.17, 2.25, 2.27, 3.9, 3.12, 3.13, 3.17 y 3.18.

Obtener una rama de $f^{-1}(z)$

Se recomienda descomponer la función f como composición de otras más sencillas, para las que sea cómodo determinar ramas de sus inversas, y componer luego estas ramas. Este procedimiento requiere, en cada paso, calcular las imágenes de las funciones involucradas para poder determinar ramas concretas de sus inversas y gestionar luego la adecuada composición de las mismas. Véanse los ejercicios 2.22, 2.28, 2.29, 3.9, 3.12, 3.13, 3.19 y 3.22. En particular, si f es inyectiva, con este método se pueden conseguir fórmulas concretas para su inversa.

Obtener una rama de $\log f(z)$

Para una función concreta $f(z)$ a veces es posible definir una rama de $\log f(z)$ mediante una fórmula explícita, con una composición $L(f(z))$ donde L es un logaritmo de la identidad. Véanse los ejercicios 3.3, 3.10, 4.16 y 4.17. Este procedimiento, que requiere calcular la imagen de f y verificar que está contenida en un abierto donde hay definida una rama $L(z)$ de $\log z$, no es siempre aplicable (véanse los ejercicios 3.5 y 3.10). Una alternativa para abordar otros casos y simplificar los cálculos consiste en expresar la función como producto de otras para las que existen ramas de sus logaritmos y obtener la rama de $\log f(z)$ como suma de estas ramas. En general se puede acudir al resultado expuesto en la proposición 5.1.5 que transforma el problema en otro equivalente sobre existencia de primitivas de $f'(z)/f(z)$, que se puede abordar con los recursos avanzados de los capítulos 5, 6 y 7.

Obtener una rama de $\sqrt[m]{f(z)}$

Para una función concreta $f(z)$, si podemos definir una rama holomorfa $g(z)$ de $\log f(z)$ también podemos obtener una rama de $\sqrt[m]{f(z)}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, mediante la función $e^{g(z)/m}$. Aunque este método no es aplicable en general (véanse los ejercicios 3.4 y 3.10) sin embargo, para valores particulares de m puede ser posible obtener una rama de $\sqrt[m]{f(z)}$ descomponiendo f en producto de funciones y multiplicando ramas de los factores. Este método, que requiere calcular para cada factor su imagen y verificar que está contenida en un abierto donde se puede definir una rama de $\sqrt[m]{z}$, es recomendable en situaciones concretas porque proporciona una fórmula explícita para una rama de $\sqrt[m]{f(z)}$. Véanse los ejercicios 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 4.25, 5.6 y 7.19.

En general se puede acudir al resultado expuesto en el ejercicio 7.36 que transforma el problema en otro equivalente sobre integrales curvilíneas de f'/f, que se podrán calcular con los recursos avanzados de los capítulos 5, 6 y 7. Muy útil para este tipo de cuestiones es el principio del argumento (7.1.12).

Gestionar ramas de multifunciones

Para determinar y manejar de manera precisa ramas de algunos tipos de multifunciones se recomienda usar los resultados, basados en argumentos de conexión y continuidad, que se exponen en los ejercicios 3.1, 3.2 y 3.5. Véanse también los ejercicios 3.38 y 3.39.

Justificar la holomorfía de una función

Se recomienda expresar la función en términos de funciones más sencillas y luego utilizar que son holomorfas las sumas, productos y composiciones de funciones holomorfas. También lo son los cocientes (en abiertos donde no se anule el denominador). Según la proposición 3.1.4 y el comentario que le sigue, en las condiciones apropiadas, si f es holomorfa también lo son las ramas de las multifunciones $f^{-1}(z)$, $\log f(z)$ y $\sqrt[m]{f(z)}$ con $m \in \mathbb{N}$, cuando estas ramas existen.

Para justificar la holomorfía de funciones definidas por integrales que dependen de un parámetro se puede acudir al teorema 5.1.17 y a los ejercicios 5.48 y 5.49. Ejemplos ilustrativos de la aplicación de estos resultados se pueden ver en los ejercicios 5.51, 5.52 y 5.53.

En general, para demostrar que una función es holomorfa, no se recomienda acudir a las condiciones de Cauchy-Riemann 3.1.6, salvo en el caso de una función definida en términos de su parte real y su parte imaginaria, como ocurre en el ejercicio propuesto 3 del capítulo 3. Estas condiciones, que son útiles en ejercicios de naturaleza teórica, como 3.25, 3.27, 3.28, 3.29 y 3.30, desempeñan un papel protagonista en la teoría de funciones armónicas.

Obtener isomorfismos conformes

Según la proposición 3.1.4, para que una aplicación biyectiva f sea un isomorfismo conforme entre su dominio y su imagen basta que sea holomorfa con inversa continua. Recursos teóricos avanzados (corolario 6.1.3) permiten eliminar el requerimiento de la continuidad de la inversa: si f es inyectiva, su derivada no se anula, su imagen es abierta y f establece un isomorfismo conforme entre su dominio y su imagen. En situaciones concretas, no suele ser necesario acudir a este resultado porque a menudo es fácil comprobar que la imagen es abierta y que la inversa es derivable. La técnica básica consiste en buscar el isomorfismo conforme como composición de otros más sencillos (transformaciones de Möbius, función exponencial, potencias y raíces) cuya gestión suele ser sencilla usado coordenadas polares. Resulta muy útil la experiencia adquirida en el cálculo de las imágenes de los abiertos intermedios mediante los isomorfismos conformes que intervienen en la composición. Véanse los ejercicios 2.13, 2.15, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.24, 2.25, 2.26, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.35, 3.36 y 3.37.

Calcular el radio de convergencia de una serie de potencias

Cuando se tiene un candidato para el valor del radio de convergencia, se puede justificar su valor ρ invocando la proposición 4.1.4; en particular, se pueden buscar puntos en la circunferencia $|z-a| = \rho$ donde la serie sea convergente y puntos donde no lo sea (véase el ejercicio 4.29). Cuando se conoce una fórmula para los coeficientes de la serie de potencias el cálculo de su radio de convergencia se puede abordar mediante los límites indicados después de la proposición 4.1.4. Este método se usa en las soluciones de los ejercicios 4.10, 4.11 y 4.32.

Cuando no se dispone de una fórmula para los coeficientes, o el cálculo de los límites resulta engorroso, puede ser útil el método empleado en las ejercicios 4.25 y 5.20, basado en el hecho de que un desarrollo en serie de potencias converge en el mayor disco, centrado en el punto dado, donde hay definida una función holomorfa con ese desarrollo.

Calcular desarrollos en serie de potencias y en serie de Laurent

Para obtener el desarrollo en serie de potencias o el desarrollo en serie de Laurent de una función concreta no es aconsejable calcular sus coeficientes mediante la fórmula integral del teorema 5.1.11 o el corolario 5.1.4. Realmente estas fórmulas sirven para calcular las integrales que figuran en ellas cuando hay un método alternativo para el cálculo de los coeficientes.

Se recomienda obtener el desarrollo, a partir de los desarrollos de otras funciones, usando los resultados indicados en el capítulo 4: las funciones definidas por series de potencias se pueden sumar y multiplicar siguiendo reglas similares a las de los polinomios. Si se conoce el desarrollo en serie de potencias de una función $f(z)$, para calcular los coeficientes del desarrollo de $1/f(z)$ se puede usar el método de los coeficientes indeterminados (indicado después de la proposición 4.1.8). Por otra parte, según la proposición 4.1.7, el desarrollo de la composición de dos funciones cuyos desarrollos (en los puntos adecuados) son conocidos, se puede hallar sustituyendo formalmente una serie en la otra. Véanse los ejercicios 4.20, 4.21, 4.23 y5.22.

La serie binomial es útil para calcular desarrollos en serie de Laurent, alrededor de 0, de funciones definidas por fórmulas donde intervienen ramas holomorfas de $\sqrt[n]{1+(az)^k}$ (vea los ejercicios 3.6, 4.22, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 5.6, 5.7, 7.16, 7.19 y 7.20).

Para calcular desarrollos de ramas de algunas multifunciones, y en particular de funciones inversas, se recomienda comenzar calculando los desarrollos de las derivadas (generalmente todas las ramas de una multifunción tienen la misma derivada) que suelen ser funciones sencillas con desarrollos conocidos. De estos desarrollos se calculan primitivas y se llega al desarrollo de la rama propuesta mediante la adición de la constante adecuada. Véanse los ejercicios 4.12, 4.15 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 7.8 y 7.9.

Para calcular el desarrollo en serie de potencias de la suma de una serie de funciones con desarrollos conocidos se puede usar la técnica de sumación por paquetes, como se muestra en los ejercicios 4.13 y 4.14. También se puede razonar, sin usar sumación por paquetes, mediante el corolario 5.1.16.

Aplicando el teorema de los residuos es posible calcular los coeficientes de un desarrollo de Laurent usando los coeficientes del desarrollo en una corona contigua. Esto se ilustra en los ejercicios 7.28 y 7.29.

Calcular la suma de una serie de potencias

Un método útil se basa en la consideración de la serie derivada que puede tener una suma conocida. Véanse los ejercicios 4.32, 4.30 y 5.21.

Utilizar las desigualdades de Cauchy

Este resultado (teorema 5.1.13) puede servir para obtener desigualdades en las que intervienen las sucesivas derivadas de una función en un punto. Véanse los ejercicios 5.38 y 5.39.

Utilizando desigualdades donde interviene $|f(z)|$, combinadas con las desigualdades de Cauchy, se pueden obtener conclusiones interesantes, como las de los ejercicios 5.40, 5.43 y 5.44.

Bajo hipótesis adecuadas, la función $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r\}$ tiene ciertas propiedades que suelen ser consecuencia de las desigualdades de Cauchy. Véanse los ejercicios 5.41, 5.42 y 5.45.

Utilizar el teorema de Liouville

Se puede usar el teorema de Liouville (5.1.14) para demostrar que una función entera es constante cuando verifica alguna condición adicional. Para ello se sugiere considerar alguna función relacionada con ella a la que se le pueda aplicar el teorema de Liouville. Véanse los ejercicios 5.46 y 5.47.

Determinar el tipo de singularidad aislada

Para funciones concretas se pueden utilizar los resultados indicados en los ejemplos 6.1.10. Véanse los ejercicios 6.19, 6.20, 6.21 y 6.22, así como los ejercicios 6.9, 6.10 y 6.11. Otras veces se puede razonar por exclusión: la singularidad es de un tipo porque no puede ser de los otros dos tipos. Véanse los ejercicios 6.13 y 6.14. Como norma general, se puede acudir al desarrollo de Laurent (ejercicio 6.8).

Calcular el residuo

En el párrafo que sigue a la definición 6.1.11 se indican resultados útiles para el cálculo del residuo. En los ejercicios 6.17, 6.18, 7.19, 7.23, 7.25, 7.27 y 7.32 se ilustran estas técnicas. Véanse también los ejercicios 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 7.21 y 7.24. Como norma general, se recomienda considerar el desarrollo de Laurent, del que no es preciso calcular todos sus términos pues sólo interesa el coeficiente a_{-1}. Véanse los ejercicios 6.23 y 7.19.

Calcular la parte principal en un polo

La parte principal en un polo se calcula siguiendo el procedimiento indicado en el párrafo que sigue a la proposición 6.1.7. Véanse los ejercicios 6.3 y 6.4.

Calcular integrales de línea mediante desarrollos de Laurent

Según el corolario 5.1.4 el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent de una función holomorfa en una corona sirve para calcular sus integrales sobre caminos cerrados en ella y, en particular, para averiguar si la función tiene primitiva allí. En los ejercicios 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.31, 7.17, 7.19, 7.38, 7.39 y 7.40, se utiliza este resultado.

Calcular integrales de línea

Algunas integrales de línea se pueden calcular mediante una aplicación directa de la fórmula integral de Cauchy o del teorema de los residuos. Véanse los ejercicios 7.26, 7.27, 7.33 y 7.45. Otras integrales de línea, aunque no quedan enmarcadas en el ámbito de aplicación de estos teoremas, se pueden transformar en otras calculables mediante los resultados mencionados. Los ejercicios 5.2, 5.3, 5.9, 5.32, 7.18, 7.19, 7.20 y 7.31 sirven de ejemplo.

En otras ocasiones puede ser útil expresar la función como límite (o suma) de una sucesión de funciones que converge uniformemente sobre el camino de integración, cuyas integrales son inmediatas, y obtener el valor de la integral como límite (o suma) de las integrales calculadas. Véanse los ejercicios 5.10, 5.11, 5.12, 5.27, 5.31, 5.33, 7.33, 7.34, 7.35 y 7.43.

Calcular integrales impropias con el teorema de los residuos

Además de las integrales de los tipos considerados en el capítulo 8, merece la pena consultar otras que quedan fuera de este marco. Véanse los ejercicios 5.14, 5.15, 8.9, 8.10, 8.11, 8.12 y 8.15.

Calcular índices

El manejo atinado de las propiedades del índice de un camino cerrado puede servir para calcular índices de caminos sencillos. Véanse los ejercicios 7.1, 7.2 y 7.3. El principio del argumento (7.1.12) es una herramienta muy útil para calcular índices de caminos cerrados, pues la integral que interviene allí se puede interpretar como un índice. Véase la proposición 7.1.13 y los ejercicios 7.4, 7.38, 7.39 y 7.40.

Estudiar la existencia de primitiva

La versión general de los teoremas de Cauchy (7.1.7 y 7.1.8) y el teorema de los residuos (7.1.11) combinados con las propiedades del índice de un camino cerrado respecto a un punto son las herramientas con las que se puede estudiar la clase de los abiertos donde una función dada tiene primitiva. Véanse los ejercicios 7.10, 7.11, 7.15, 7.17 y 7.30.

Estudiar la existencia de ramas de multifunciones

Dada una función holomorfa f, la proposición 5.1.5 y el ejercicio 7.36, combinados con el principio del argumento y las propiedades del índice de un camino cerrado respecto a un punto, son las herramientas definitivas para investigar la clase de los abiertos en los que existen ramas de $\log f(z)$ o ramas de $\sqrt[n]{f(z)}$, obteniendo así criterios generales que mejoran las ideas sobre gestión de ramas de multifunciones expuestas en la página 6. Véanse los ejercicios 7.7, 7.8, 7.9, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.19 y 7.37. Para otras multifunciones notables véase 7.15 y 7.16.

Los métodos para obtener, en abiertos dados, fórmulas concretas para este tipo de ramas han sido comentados anteriormente.

Localizar ceros y polos

El teorema de Rouché (7.1.14) es muy útil para localizar ceros y polos de funciones meromorfas. Véanse los ejercicios 7.47, 7.48, 7.49, 7.50 y 7.53.

Extender al campo complejo fórmulas conocidas en el ámbito real Esto se consigue usando el principio de identidad (4.1.10) una o varias veces. Véase el ejercicio 4.43.

Calcular desarrollos de Mittag-Leffler

La técnica estándar se muestra en los ejercicios 6.29, 6.30, 6.31, 8.22 y 8.23.

Capítulo 1

Los números complejos

1.1. Preliminares teóricos

1.1.1. Módulo, argumento y conjugado

Se supone que el lector conoce el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, formado por pares ordenados de números reales, donde se definen la suma y el producto según las reglas:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); \qquad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Cuando el par $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ se considera como elemento de $\mathbb{C}$ se expresa en la forma habitual $a+ib$, con $i=(0,1)$. Cada número complejo se representa mediante un punto del plano euclídeo, y en las cuestiones donde no interviene la estructura de cuerpo se supone $\mathbb{C}$ identificado con $\mathbb{R}^2$ en la forma natural $x+iy\leftrightarrow(x,y)$.

Por z, w designamos habitualmente elementos genéricos de $\mathbb{C}$ y se reservan las letras x, y (resp. u, v) para la parte real e imaginaria de $z=x+iy$ (resp. $w=u+iv$):

$$x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z,\quad u=\operatorname{Re}w,\ v=\operatorname{Im}w.$$

Se dice que $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=0\}=\{iy:y\in\mathbb{R}\}$ es el *eje imaginario* y que $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z=0\}$ es el *eje real* que se supone identificado con el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

La estructura de cuerpo ordenado que tiene $\mathbb{R}$ no se puede extender a $\mathbb{C}$, por lo que la relación $z\leq w$ no tiene sentido para números complejos arbitrarios. Sin embargo, a la hora de describir subconjuntos de $\mathbb{C}$, es cómodo adoptar el siguiente convenio de notación: $z\leq w$ (resp. $z<w$) significa que z y w están en el eje real y que, considerados como números reales, cumplen la correspondiente desigualdad. Se usan convenios análogos para $z\geq w$ y $z>w$.

El *conjugado* del número complejo $z=x+iy$ es $\bar z=x-iy$ y su *módulo* o *valor absoluto* es $|z|=\sqrt{z\bar z}=\sqrt{x^2+y^2}$. Se verifica:

a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$, $\quad\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$, $\quad\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$ si $w\neq 0$;

b) $1/z=\overline{z}/|z|^2$ si $z\neq 0$.

Además de las propiedades características de la norma euclídea:

a) $|z|\geq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}$, y $|z|=0$ si y sólo si $z=0$;

b) $|z+w|\leq|z|+|w|$ (desigualdad triangular);

el valor absoluto de los números complejos se comporta respecto al producto de la misma forma que el valor absoluto de los números reales

c) $|zw| = |z|\,|w|$.

Si $z \neq 0$ y $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = z/|z|$ se dice que φ es un argumento de z. Se denotará por $\arg z$ el conjunto de los argumentos de z. El argumento principal de z, denotado $\operatorname{Arg} z$, es el único argumento de z que verifica $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, de modo que

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2\pi m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

En el ejercicio 1.4 se muestra que para un número complejo $z = x + iy$ en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ su argumento principal $\theta = \operatorname{Arg}(x + iy)$ se puede calcular con la fórmula

$$\theta = 2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

También se supone que el lector está familiarizado con la expresión módulo argumental de los números complejos: cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se representa en la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$, $\theta \in \arg z$ y $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Es fácil ver que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; esto es otra forma de escribir la clásica fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

muy útil para expresar $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

1.1.2. Exponenciales, logaritmos y raíces

Para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se define $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. El conjunto de los logaritmos de $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es

$$\log w := \{z : e^z = w\} = \{\log|w| + i\alpha : \alpha \in \arg(w)\}.$$

El *logaritmo principal*, es el que se obtiene con el argumento principal

$$\operatorname{Log} w = \log|w| + i \operatorname{Arg} w.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, la ecuación $w^n = z$ tiene n soluciones, distintas si $z \neq 0$, llamadas raíces n-ésimas de z:

$$w_k = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg} w + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\operatorname{Arg} w + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Las n raíces de z son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio $|z|^{1/n}$. Mientras no se indique otra cosa el símbolo $\sqrt[n]{z}$ designa el conjunto finito de las raíces n-ésimas de z. Ninguna tiene preferencia y para seleccionar una de ellas basta indicar explícitamente su argumento.

Dados $a \neq 0$ y $z \in \mathbb{C}$ se define

$$a^z = \{e^{zc} : c \in \log a\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, resulta $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, pero en general a^z es un conjunto infinito. Sin embargo también se suele usar la notación a^z para denotar el valor principal $e^{z \operatorname{Log} a}$. Es lo que ocurre cuando $a = e$.

1.1.3. Sumación de familias numerables y series dobles

El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, con la distancia usual dada por $d(z,w) = |z-w|$, es un espacio métrico completo, es decir, una sucesión de números complejos (z_n) converge si y sólo si cumple la condición de Cauchy:

$$\textit{para cada } \varepsilon > 0 \textit{ existe } n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tal que para } p, q \in \mathbb{N},$$
$$\textit{si } p, q \geq n(\varepsilon) \textit{ entonces } |z_p - z_q| < \varepsilon$$

En particular, una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si cumple la condición de Cauchy para series:

$$\textit{para cada } \varepsilon > 0 \textit{ existe } n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tal que para } p, q \in \mathbb{N},$$
$$\textit{si } q > p \geq n(\varepsilon) \textit{ entonces } \left|\sum_{n=p}^{q} z_n\right| \leq \varepsilon.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$ se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es *absolutamente convergente*.

Una consecuencia directa de la condición de Cauchy es que toda serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y además se verifica que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Una serie de números complejos se dice que es *semiconvergente* cuando es convergente pero no es absolutamente convergente.

Cambiar el orden de los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ consiste en considerar otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ donde $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una biyección. Una serie se dice que es *incondicionalmente convergente* cuando es convergente y cualquier cambio del orden de sus términos no altera ni la convergencia ni el valor de la suma.

Para una serie de números reales es bien conocida la equivalencia entre la convergencia absoluta y la convergencia incondicional. En particular, si una serie de números reales positivos es convergente, sigue siendo convergente, con la misma suma, cuando se modifica el orden de sus términos. Considerando las dos series reales en que se descompone una serie compleja se obtiene fácilmente que para series de números complejos la convergencia absoluta y la convergencia incondicional también son equivalentes.

Si J es un conjunto infinito numerable, se dice que $\sum_{j\in J} z_j$ es una suma *conmutativamente convergente*, con suma S, cuando para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ converge y su suma es S. (Para $J = \mathbb{N}$ la convergencia conmutativa no es otra cosa que la convergencia incondicional). Una demostración directa de los siguientes resultados se puede ver en el capítulo 2 de [16].

Proposición 1.1.1.

La suma $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente si y sólo si el conjunto de las sumas finitas $\{\sum_{j\in F} |z_j| : F \subset J \text{ finito}\}$ está acotado superiormente.

En virtud de 1.1.1, si $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente y $M \subset J$ entonces $\sum_{m\in M} z_m$ también lo es. En lo que sigue su valor será denotado S_M.

Teorema 1.1.2. Sumación por paquetes.

Si $\sum_{j\in J} a_j$ es conmutativamente convergente, dada una partición $\{J_k : k \in \mathbb{N}\}$ de J, sea $S_k = \sum_{j\in J_k} a_j$. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ es absolutamente convergente y

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in J_k} a_j$$

El teorema anterior permite justificar algunas manipulaciones formales que se suelen hacer con las series de potencias, similares a las que habitualmente se hacen con los polinomios (véanse los ejercicios 4.13, 4.14 y 5.11).

Corolario 1.1.3.
Si $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|z_{nk}|<+\infty$ *entonces para cada* $n\in\mathbb{N}$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$ *las series* $\sum_{k=1}^{\infty}z_{nk}$, $\sum_{n=1}^{\infty}z_{nk}$ *son absolutamente convergentes y sus sumas forman series absolutamente convergentes que verifican*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}z_{nk}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}z_{nk}$$

Corolario 1.1.4.
Si las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ *son absolutamente convergentes, su producto de convolución* $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, *definido por* $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots a_nb_1$ *también es absolutamente convergente y*

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Big)$$

El resultado anterior lo completa un resultado de Mertens (véase el teorema 8.46 en [2] o el ejercicio 1.18) según el cual, si dos series de números complejos son convergentes y una de ellas es absolutamente convergente entonces su producto de convolución es convergente hacia el producto de sus sumas.

En 1.1.4 se introduce la noción de familia sumable (que para las familias numerables equivale a la convergencia conmutativa) y con ella se obtienen los resultados anteriores así como la equivalencia entre la convergencia absoluta y la incondicional.

1.1.4. Complementos sobre familias sumables

En algunos temas de Análisis Matemático (como en la teoría de series de potencias) a menudo conviene considerar sumas del tipo $\sum_{j\in J}z_j$ donde $(z_j)_{j\in J}$ es una familia de números complejos con índices en un conjunto arbitrario J donde no hay prefijado un orden natural, como ocurre en el caso de las series dobles cuando $J=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Con la noción de familia sumable de números complejos (véase la definición 1.1.5) se logra dar sentido a sumas de este tipo. En el ejercicio 1.13 se muestra que cuando J es numerable esta noción es equivalente a la de convergencia conmutativa. Esto permite, en el ejercicio 1.15, establecer la equivalencia entre la convergencia absoluta y la convergencia incondicional de series de números complejos.

Un resultado central de la teoría de familias sumables es el teorema de sumación por paquetes (1.11), que establece una propiedad asociativa generalizada para las sumas infinitas. Este resultado, que se formula y justifica cómodamente con el lenguaje de las familias sumables, proporciona un tratamiento sencillo y unificado de la sumación iterada de series dobles y del producto de convolución de series (1.1.3 y 1.1.4). Además permite justificar las manipulaciones formales que se suelen hacer para calcular desarrollos en serie de potencias.

La noción de familia sumable proporciona un punto de vista natural, y algo más general, de la convergencia incondicional y de la sumación por paquetes.

El teorema 8.42 del libro de Apostol [2] es una versión del teorema de sumación por paquetes para el caso de series dobles absolutamente convergentes. Los teoremas 8.43 y

8.44 del mismo libro aparecen aquí como 1.16 y 1.17. Véanse también los teoremas 8.32 y 8.33 en [2, págs. 239–240].

Dada una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$, con índices en un conjunto arbitrario J, la idea para dar sentido a la suma $\sum_{j\in J} z_j$ consiste en considerar, para los subconjuntos finitos $H \subset J$, las sumas finitas $S_H = \sum_{j\in H} z_j$ y luego el límite de estas sumas finitas, en el sentido que se precisa en la siguiente definición:

Definición 1.1.5.

La familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable con suma $S \in \mathbb{C}$ si se verifica: para cada $\varepsilon > 0$ existe $H(\varepsilon) \subset J$ finito tal que, si $H \subset J$ es finito y $H \supset H(\varepsilon)$, entonces $|S_H - S| < \varepsilon$.

En este caso la suma S de la familia se denota $\sum_{j\in J} z_j$.

Si $\mathscr{H}(J)$ es la familia de las partes finitas de J, dirigida por inclusión, el lector familiarizado con la noción de red reconocerá que $(S_H)_{H\in\mathscr{H}(J)}$ es una red y que en la definición 1.1.5 lo que se hace es requerir que esta red tenga límite S.

En las condiciones de la definición anterior es inmediato que la suma S es única. Además, cuando J es finito, resulta el caso particular de una suma finita.

En lo que sigue, aunque no se sepa que la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable, es cómodo adoptar un abuso de notación similar al que se usa con las series: el símbolo $\sum_{j\in J} z_j$ significa que se está considerando la sumabilidad de la familia $(z_j)_{j\in J}$. En el caso de que sea sumable se suele decir también que $\sum_{j\in J} z_j$ es sumable y con el mismo símbolo se designa también el valor de la suma.

En el ejercicio 1.9 se puede ver la demostración del siguiente resultado.

Proposición 1.1.6.

Una condición necesaria y suficiente para que la familia $(z_j)_{j\in J}$ sea sumable es que se cumpla la siguiente condición de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$ existe $H(\varepsilon) \subset J$ finito tal que, si $H \subset J$ es finito y $H \cap H(\varepsilon) = \emptyset$, entonces $|S_H| \leq \varepsilon$.

Usando la condición de Cauchy se obtiene fácilmente que si $L \subset J$ y la familia $(z_j)_{j\in J}$ es sumable, entonces $(z_j)_{j\in L}$ también lo es: dado $\varepsilon > 0$, si $H(\varepsilon)$ es el subconjunto finito de J que proporciona la condición de Cauchy para la familia sumable $(z_j)_{j\in J}$ entonces $H(\varepsilon) \cap L$ es un subconjunto finito de L que sirve para ver que la familia $(z_j)_{j\in L}$ cumple la condición de Cauchy, y por lo tanto es sumable.

En el ejercicio 1.11 se puede ver la demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.1.7. Sumación por paquetes.

Dada una familia sumable $(z_j)_{j\in J}$ y una partición $\{J_\alpha : \alpha \in A\}$ de J formada por conjuntos no vacíos, se verifica: todas las familias $(z_j)_{j\in J_\alpha}$ son sumables y si $S_\alpha = \sum_{j\in J_\alpha} z_j$ entonces la familia de las sumas $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ es sumable y se cumple:

$$\sum_{j\in J} z_j = \sum_{\alpha\in A} S_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\Big(\sum_{j\in J_\alpha} z_j\Big)$$

En el caso $J = \mathbb{N}$ hay que advertir que la noción de familia sumable es distinta de la noción usual de serie convergente. Dada una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para la definición de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se tiene en cuenta el orden de $\mathbb{N}$, ya que sólo se consideran sumas finitas del tipo

$$S_{\{1,2,\dots,n\}} = z_1 + z_2 + \cdots + z_n,$$

y se requiere que estas sumas formen una sucesión convergente. Es decir, en la definición de suma de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ interviene una suma ordenada y se obtiene la suma total añadiendo términos de acuerdo con el orden usual de $\mathbb{N}$.

Por otra parte, la definición de familia sumable $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es intrínsecamente una noción de suma desordenada donde la suma total se obtiene añadiendo sumandos, en cantidad finita y en forma completamente arbitraria.

Por ello, cuando $J = \mathbb{N}$, conviene distinguir los dos conceptos usando notaciones distintas, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, según se considere, respectivamente, una serie en sentido usual o una suma en el sentido de las familias sumables.

Según el ejercicio 1.12 a la hora de estudiar la sumabilidad de una familia concreta $(z_j)_{j\in J}$ no es restrictivo suponer que J es numerable. Después de este resultado parece que el estudio de las familias sumables se debería restringir al de las sucesiones sumables. Pero hay dos razones para considerar familias sumables con índices en un conjunto arbitrario J. La primera de ellas es que al considerar las familias sumables con índices en J, el conjunto numerable C que aparece en 1.12 no es común a todas las familias. La segunda es que, incluso cuando J es numerable, no es recomendable numerar J para reconsiderar la familia con índices en $\mathbb{N}$. En el caso caso de las series dobles, donde $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cualquier orden que se imponga en J es completamente artificial y ajeno a la noción de familia sumable.

Cuando J es numerable hay otra alternativa para dar sentido a sumas de números complejos del tipo $\sum_{j\in J} z_j$, basada en la noción de serie incondicionalmente convergente: es la noción de suma conmutativamente convergente considerada en la sección 1.1.3 (véase el ejercicio 1.13). Una vez que ha sido establecida la equivalencia entre sumabilidad y convergencia conmutativa (véase el ejercicio 1.14) en el ejercicio 1.15 se obtiene un criterio útil para garantizar, en situaciones concretas, la sumabilidad de una familia dada.

Resultados clásicos sobre series dobles y producto de series se obtienen fácilmente considerando el caso $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Véanse los ejercicios 1.16 y 1.17.

1.2. Ejercicios resueltos

1.2.1. Sobre módulo, argumento y conjugado

Los ejercicios recogidos en este tramo son de carácter elemental. En ellos sólo intervienen la multiplicación compleja y las nociones de valor absoluto, conjugado y argumento de un número complejo.

Ejercicio 1.1.

Si z, w son números complejos demuestre la identidad del paralelogramo:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big).$$

Como aplicación obtenga el mínimo valor de $|z-a|^2 + |z-b|^2$ donde a, b son números complejos fijos y z varía en $\mathbb{C}$.

SOLUCIÓN.

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Sustituyendo z por $z-(a+b)/2$ y w por $(b-a)/2$ resulta

$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + 2\left|\frac{b-a}{2}\right|^2$$

Es obvio que la expresión de la derecha alcanza un mínimo para $z = (a+b)/2$. Su valor es $|b-a|^2/2$.

Ejercicio 1.2.

Compruebe las siguientes afirmaciones:

a) $|a-b| < |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| < 1$ *y* $|b| < 1$*;*

b) $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ *si* $|a| = 1$ *o* $|b| = 1$*.*

SOLUCIÓN.

a) $|a-b| < |1-\overline{a}b|$ equivale a $(a-b)(\overline{a}-\overline{b}) < (1-\overline{a}b)(1-a\overline{b})$. Efectuando los productos y sumando miembro a miembro el número real $b\overline{a} + a\overline{b}$ resulta la desigualdad equivalente $|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$ que, escrita en la forma $|a|^2(1-|b|^2) < (1-|b|^2)$, es inmediata.

b) Análogamente, $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ equivale a $|a|^2(1-|b|^2) = 1-|b|^2$, que se cumple cuando $|a| = 1$ o $|b| = 1$.

Nota. También se puede obtener *a)* usando la teoría de las transformaciones de Möbius que se expone en el capítulo 2. En ella se establece que si $|a| < 1$ entonces $T(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ transforma la circunferencia $|z| = 1$ en sí misma y deja invariante el disco $|z| < 1$ (véase el ejercicio 2.19).

Ejercicio 1.3.

Demuestre la igualdad de Lagrange:

$$\Big|\sum_{1\le i\le n} a_i b_i\Big|^2 = \Big(\sum_{1\le i\le n} |a_i|^2\Big)\Big(\sum_{1\le i\le n} |b_i|^2\Big) - \sum_{1\le i<j\le n} |a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}|^2$$

SOLUCIÓN.

En los siguientes sumatorios los subíndices i, j varían en $\{1, 2\ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_i |a_i|^2\Big)\Big(\sum_i |b_i|^2\Big) - \Big|\sum_i a_i b_i\Big|^2 &= \sum_{i,j} |a_i|^2|b_j|^2 - \sum_{i,j} a_i b_i \overline{a_j b_j} = \\
&= \sum_{i\ne j} |a_i|^2|b_j|^2 - \sum_{i\ne j} a_i b_i \overline{a_j b_j} = \\
&= \sum_{i<j} a_i\overline{b_j}(\overline{a_i}b_j - \overline{a_j}b_i) + \sum_{i>j} a_i\overline{b_j}(\overline{a_i}b_j - \overline{a_j}b_i) = \\
&= \sum_{i<j} \Big[a_i\overline{b_j}(\overline{a_i}b_j - \overline{a_j}b_i) + a_j\overline{b_i}(\overline{a_j}b_i - \overline{a_i}b_j)\Big] = \\
&= \sum_{i<j} (a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i})(\overline{a_i}b_j - \overline{a_j}b_i) = \\
&= \sum_{i<j} |a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}|^2.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.

Obtenga una fórmula para calcular el argumento principal de un número complejo $z = x + iy$ en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

SOLUCIÓN.

Sea $z = x + iy \in \Omega_1$ y $\theta = \operatorname{Arg} z$. Entonces

$$\begin{aligned} y &= r \operatorname{sen} \theta = 2r \operatorname{sen} \tfrac{\theta}{2} \cos \tfrac{\theta}{2} = 2r \cos^2 \tfrac{\theta}{2} \operatorname{tg} \tfrac{\theta}{2} = \\ &= (r + r\cos\theta) \operatorname{tg} \tfrac{\theta}{2} = (r + x) \operatorname{tg} \tfrac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Cuando $x + iy \in \Omega_1$ se puede asegurar que $x + r = x + \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ y así se obtiene

$$\operatorname{Arg}(x + iy) = \theta = 2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nota. Si consideramos Arg como función de dos variables reales (x, y) la fórmula anterior garantiza que su restricción a $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ es de clase C^∞.

1.2.2. Ejercicios con polinomios complejos

Los ejercicios de este tramo, sobre funciones polinómicas de variable compleja, se resuelven con recursos básicos de límites y continuidad.

Ejercicio 1.5.

Sea $f(z) = 1 + \sum_{n=m}^{k} a_n z^n$ un polinomio, donde $a_m \neq 0$ $(1 \leq m \leq k)$.

a) Si $u \in \mathbb{C}$ y $|u| = 1$ demuestre que

$$\lim_{t \to 0} (|f(tu)|^2 - 1) t^{-m} = 2 \operatorname{Re}(a_m u^m);$$
$$\lim_{t \to 0} (\operatorname{Re} f(tu) - 1) t^{-m} = \operatorname{Re}(a_m u^m).$$

b) Utilice a) para demostrar que las funciones $|f|$, $\operatorname{Re} f$ no presentan en $z = 0$ ni máximo ni mínimo relativo.

c) Utilice b) para demostrar el teorema fundamental del Álgebra.

Indicación. Si p es un polinomio complejo y $p(a) \neq 0$ entonces $|p|$ no presenta un mínimo relativo en a.

SOLUCIÓN.

a) $f(z) = 1 + a_m z^m p(z)$ donde $p(z)$ es un polinomio de grado $k - m \geq 0$ tal que $p(0) = 1$. Si $|u| = 1$ y $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|f(tu)|^2 = f(tu)\overline{f(tu)} = \big(1 + t^m u^m a_m p(tu)\big)\big(1 + t^m \overline{u^m a_m p(tu)}\,\big),$$

luego

$$|f(tu)|^2 - 1 = t^m \big(u^m a_m p(tu) + \overline{u^m a_m p(tu)}\,\big) + t^{2m} |a_m|^2 |p(tu)|^2.$$

Como $p(0) = 1$, se obtiene

$$\lim_{t\to 0}(|f(tu)|^2 - 1)t^{-m} = u^m a_m + \overline{u^m a_m} = 2\,\mathrm{Re}(a_m u^m).$$

Tomando partes reales en la igualdad $(f(tu) - 1)t^{-m} = a_m u^m p(tu)$ y pasando al límite cuando t tiende hacia 0 resulta

$$\lim_{t\to 0}(\mathrm{Re}(f(tu) - 1)t^{-m} = \mathrm{Re}(a_m u^m).$$

b) Para $t > 0$ suficientemente pequeño $(|f(tu)|^2 - 1)t^{-m}$ tiene el mismo signo que su límite en $t = 0$. Si m es impar $|f(tu)|^2 - 1$ cambia de signo en cualquier entorno de 0 luego $|f|$ no presenta en $z = 0$ ni máximo ni mínimo relativo. Si m es par y se elige u de modo que $\mathrm{Re}(a_m u^m) < 0$ entonces $|f(tu)|^2 - 1 < 0$ en un cierto entorno de $t = 0$, luego $|f|$ no presenta mínimo relativo en $z = 0$. Razonando con otro valor de u tal que $\mathrm{Re}(a_m u^m) > 0$ se obtiene que $|f|$ tampoco presenta un máximo relativo en $z = 0$.

Análogamente, para $t > 0$ suficientemente pequeño $(\mathrm{Re}(f(tu) - 1)t^{-m}$ tiene el mismo signo que su límite $\mathrm{Re}(a_m u^m)$ y con un razonamiento similar al efectuado anteriormente se demuestra que $\mathrm{Re}\, f(z)$ no presenta en $z = 0$ un extremo relativo.

c) Si suponemos que p es un polinomio no constante y $p(a) \neq 0$ entonces $f(z) = p(z + a)/p(a)$ es un polinomio que está en las condiciones del enunciado. Según *b*) la función $|f|$ no presenta extremos relativos en $z = 0$, y lo mismo le ocurre a $|p|$ en $z = a$.

Se sigue de esto que si $|p|$ presenta un mínimo absoluto en $a \in \mathbb{C}$ debe ser $p(a) = 0$. La demostración del teorema fundamental del álgebra se obtiene viendo que $|p|$ alcanza un mínimo absoluto. Efectivamente, como p no es constante se cumple $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = +\infty$, luego existe $R > 0$ tal que $|z| > R$ implica $|p(z)| > |p(0)|$. El mínimo absoluto de la función continua $|p|$ sobre el compacto $\{z : |z| \leq R\}$ se alcanza en algún punto a del compacto. Teniendo en cuenta que

$$|p(a)| \leq |p(0)| < |p(z)| \quad \text{para } |z| > R$$

se obtiene que $|p(a)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.6.

Sea $p(z) = z^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ *un polinomio complejo con* $\sum_{k=0}^{m} |a_k| > 0$. *Demuestre que el polinomio real* $r(x) = x^{m+1} - \sum_{k=0}^{m} |a_k| x^k$ *tiene un único cero positivo* $\alpha \leq \max\{1, \sum_{k=0}^{m} |a_k|\}$ *y que los ceros de* p *están contenidos en el disco cerrado* $\overline{D(0, \alpha)}$.

SOLUCIÓN.

El polinomio real $r(x)$ tiene los mismos ceros positivos que la función

$$f(x) = \frac{r(x)}{x^{m+1}} = 1 - \left(\frac{|a_m|}{x} + \frac{|a_{m-1}|}{x^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{x^{m+1}}\right).$$

La expresión de la derecha pone de manifiesto que f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ y que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Con el teorema de Bolzano se obtiene que $f(\alpha) = 0$ para algún $\alpha > 0$ y, como f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, se sigue que α es el único cero positivo de f.

Si $p(a) = 0$ y $a \neq 0$ se cumple

$$|a|^{m+1} = \Big|\sum_{k=0}^{m} a_k a^k\Big| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k||a|^k$$

luego $f(|a|) \leq 0$, y por lo tanto $|a| \leq \alpha$. Sea $R = \text{máx}\{1, \sum_{k=0}^{m} |a_k|\}$.

Si $R = 1$ entonces $f(1) \geq 0$ lo que implica $\alpha \leq 1 = R$.

Si $R > 1$ es $f(1) < 0$ luego $\alpha > 1$, con lo cual

$$\alpha^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} |a_k|\alpha^k \leq \alpha^m \sum_{k=0}^{m} |a_k|$$

es decir, $\alpha \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| = R$.

Ejercicio 1.7.

Si $p(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{m+1} z^{m+1}$ es un polinomio complejo con coeficientes reales, $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_{m+1} > 0$, demuestre que p no tiene ceros en $D(0,1)$.

Indicación. Considere el polinomio $q(z) = (z-1)p(z)$ y utilice el resultado obtenido en el ejercicio 1.6.

SOLUCIÓN.

No es restrictivo suponer que $b_0 = 1$.

$$q(z) = (z-1)p(z) = b_{m+1} z^{m+2} + (b_m - b_{m+1}) z^{m+1} + \cdots + (b_0 - b_1) z - b_0.$$

El polinomio

$$Q(z) = b_{m+1} + (b_m - b_{m+1}) z + \cdots + (b_0 - b_1) z^{m+1} - b_0 z^{m+2} = z^{m+2} q\Big(\frac{1}{z}\Big)$$

cumple

$$\begin{aligned} |b_{m+1}| + |b_m - b_{m+1}| + \cdots + |b_0 - b_1| &= \\ &= b_{m+1} + (b_m - b_{m+1}) + \cdots + (b_0 - b_1) = b_0 = 1. \end{aligned}$$

Según el ejercicio 1.6, los ceros de Q están contenidos en $\{z : |z| \leq 1\}$. Si $p(a) = 0$ debe ser $a \neq 0$ y $q(a) = 0$, luego $Q(1/a) = 0$ y se sigue que $|1/a| \leq 1$, es decir $|a| \geq 1$.

Ejercicio 1.8.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ números complejos no nulos, distintos dos a dos. Si los polinomios complejos $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_n(z)$ verifican

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(z) e^{\alpha_k z} = 0 \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

demuestre que son idénticamente nulos.

SOLUCIÓN.

Podemos suponer $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \cdots \geq |\alpha_{n-1}| \geq |\alpha_n| > 0$. Comenzamos escribiendo la igualdad del enunciado para $z = t\overline{\alpha}_1$, con $t \in \mathbb{R}$:

$$p_1(t\overline{\alpha}_1)e^{|\alpha_1|^2 t} + p_2(t\overline{\alpha}_1)e^{\alpha_2\overline{\alpha}_1 t} + \cdots + p_n(t\overline{\alpha}_1)e^{\alpha_n\overline{\alpha}_1 t} = 0.$$

Multiplicando por $e^{-t|\alpha_1|^2}$ se obtiene que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$p_1(t\overline{\alpha}_1) + p_2(t\overline{\alpha}_1)e^{-\mu_2 t} + \cdots + p_n(t\overline{\alpha}_1)e^{-\mu_n t} = 0 \qquad (*)$$

con $\mu_k = |\alpha_1|^2 - \alpha_k\overline{\alpha}_1$.

Como $\alpha_k/\alpha_1 \neq 1$ y $|\alpha_k/\alpha_1| \leq 1$, debe ser $\operatorname{Re}(\alpha_k/\alpha_1) < 1$, luego

$$\operatorname{Re}(\alpha_k\overline{\alpha}_1) = |\alpha_1|^2 \operatorname{Re}\frac{\alpha_k\overline{\alpha_1}}{|\alpha_1|^2} = |\alpha_1|^2 \operatorname{Re}\frac{\alpha_k}{\alpha_1} < |\alpha_1|^2$$

es decir, $\operatorname{Re}\mu_k > 0$ para $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

En virtud de la desigualdad triangular, para $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, hay un polinomio q_k, con coeficientes reales positivos, que verifica $|p_k(t\overline{\alpha}_1)| \leq q_k(t)$ para todo $t > 0$, luego $|p_k(t\overline{\alpha}_1)||e^{-t\mu_k}| \leq q_k(t)e^{-t\operatorname{Re}\mu_k}$, y por lo tanto

$$\lim_{t\to+\infty} |p_k(t\overline{\alpha}_1)||e^{-t\mu_k}| = 0 \ \text{ para } k \in \{2, 3, \ldots, n\}.$$

Usando la igualdad (*) se obtiene que $\lim_{t\to+\infty} p_1(t\overline{\alpha}_1) = 0$, de donde se sigue que el polinomio p_1 es idénticamente nulo. Repitiendo el razonamiento se obtiene sucesivamente que p_2 es idénticamente nulo, que p_3 es idénticamente nulo, etc.

1.2.3. Sobre familias sumables

Ejercicio 1.9.

Demuestre que la siguiente condición de Cauchy es necesaria y suficiente para que la familia $(z_j)_{j\in J}$ sea sumable: para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $H(\varepsilon) \subset J$ tal que todo conjunto finito $H \subset J$ con $H \cap H(\varepsilon) = \emptyset$ cumple $|S_H| < \varepsilon$.

SOLUCIÓN.

Necesidad. Dado $\varepsilon > 0$ sea $H(\varepsilon/2) \subset J$ el conjunto finito proporcionado por la definición de familia sumable. Si $H \subset J$ es finito y $H \cap H(\varepsilon/2) = \emptyset$, se puede escribir $S_H = S_A - S_B$, con $A = H(\varepsilon/2) \cup H$ y $B = H(\varepsilon/2)$, luego

$$|S_H| \leq |S_A - S| + |S_B - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficiencia. La condición de Cauchy con $\varepsilon = 1/n$ proporciona una sucesión de conjuntos finitos $H_n \subset J$ tal que si $H \subset J$ es finito y $H \cap H_n = \emptyset$ entonces $|S_H| < 1/n$. La sucesión S_{H_n} es de Cauchy: efectivamente, dados $n, m \in \mathbb{N}$, si se cancelan sumandos comunes en las sumas S_{H_n}, S_{H_m} se obtiene

$$|S_{H_n} - S_{H_m}| = |S_A - S_B|, \text{ donde } A := H_n \setminus H_m, \quad B := H_m \setminus H_n.$$

Como $|S_A| < 1/m$ y $|S_B| < 1/n$ resulta $|S_{H_n} - S_{H_m}| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ de donde se sigue que (S_{H_n}) es una sucesión de Cauchy. La completitud de $\mathbb{C}$ garantiza la existencia del límite

$S = \lim_n S_{H_n}$. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) > 2/\varepsilon$ tal que $|S_{H_n} - S| < \varepsilon/2$, para todo $n \geq n(\varepsilon)$. La demostración termina mostrando que el conjunto finito $H(\varepsilon) := H_{n(\varepsilon)}$ cumple los requisitos de la definición 1.1.5. Efectivamente, si $H \subset J$ es finito y $H \supset H_{n(\varepsilon)}$ la diferencia $D := H \setminus H_{n(\varepsilon)}$ cumple $|S_D| < \frac{1}{n(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ y se obtiene

$$|S_H - S| \leq |S_H - S_{H_{n(\varepsilon)}}| + |S_{H_{n(\varepsilon)}} - S| = |S_D| + |S_{H_{n(\varepsilon)}} - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ejercicio 1.10.

Demuestre que, para una familia de números complejos $(z_j)_{j \in J}$, son equivalentes:

a) $\sum_{j \in J} |z_j|$ *es sumable.*

b) $\sum_{j \in J} z_j$ *es sumable.*

c) El conjunto de las sumas finitas $\left\{\sum_{j \in H} z_j : H \in \mathscr{H}(J)\right\}$ *es acotado.*

d) El conjunto de las sumas finitas $\left\{\sum_{j \in H} |z_j| : H \in \mathscr{H}(J)\right\}$ *es acotado.*

SOLUCIÓN.

a) $\Rightarrow$ *b)* Es consecuencia de 1.1.6 ya que, en virtud de la desigualdad triangular, la condición de Cauchy para la suma en *a)* implica la condición de Cauchy para la suma en *b)*.

b) $\Rightarrow$ *c)* Si $\sum_{j \in J} z_j$ es sumable con suma S, aplicando la definición de familia sumable con $\varepsilon = 1$ se obtiene un conjunto finito $H(1) \subset J$ tal que $|S_A - S| < 1$ cuando A es finito y $A \supset H(1)$. Si $R = |S_{H(1)}| + 1$ es claro que para todo conjunto finito $H \subset J$ podemos considerar $A = H \cup H(1)$ y por lo tanto

$$|S_H - S| \leq |S_H - S_A| + |S_A - S| \leq |S_{H(1)}| + |S_A - S| \leq R$$

c) $\Rightarrow$ *d)* Por hipótesis $M := \sup\{|S_H| : H \subset J, \text{ finito}\} < +\infty$. Considerando la parte real x_j de z_j, cada conjunto finito $H \subset J$ lo descomponemos en dos partes disjuntas $H^+ = \{j \in H : x_j \geq 0\}$, $H^- = \{j \in H : x_j < 0\}$ con las que se obtiene

$$\sum_{j \in H} |x_j| = \sum_{j \in H^+} x_j - \sum_{j \in H^-} x_j = \Big|\sum_{j \in H^+} x_j\Big| + \Big|\sum_{j \in H^-} x_j\Big| =$$

$$= |\operatorname{Re} S_{H^+}| + |\operatorname{Re} S_{H^-}| \leq |S_{H^+}| + |S_{H^-}| \leq 2M.$$

Análogamente, considerando $y_j = \operatorname{Im} z_j$ resulta $\sum_{j \in H} |y_j| \leq 2M$ y, teniendo en cuenta que $|z_j| \leq |x_j| + |y_j|$, se concluye que $\sum_{j \in H} |z_j| \leq 4M$ para cada $H \subset J$ finito.

d) $\Rightarrow$ *a)* Por hipótesis $\sigma = \sup\{\sum_{j \in H} |z_j| : H \in \mathscr{H}(J)\}$ es finito. Como la familia de las sumas finitas $\sigma_H = \sum_{j \in H} |z_j|$ es creciente, es decir $\sigma_{H_1} \leq \sigma_{H_2}$ cuando $H_1 \subset H_2$, usando la definición de extremo superior, se obtiene que σ cumple la condición exigida en la definición 1.1.5, es decir, $\sum_j |z_j|$ es sumable con suma σ.

Ejercicio 1.11.

Sea $(z_j)_{j\in J}$ una familia sumable de números complejos con suma S y $(J_\alpha)_{\alpha\in A}$ una partición de J. Demuestre que las familias $(z_j)_{j\in J_\alpha}$ son sumables y que la familia formada por sus sumas $S_\alpha = \sum_{j\in J_\alpha} z_j$ es sumable con suma S. Es decir, la suma inicial se puede sumar por paquetes:

$$\sum_{j\in J} z_j = \sum_{\alpha\in A} S_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\sum_{j\in J_\alpha} z_j$$

SOLUCIÓN.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $H(\varepsilon) \subset J$ el conjunto finito que proporciona la condición de Cauchy para la familia sumable $(z_j)_{j\in J}$ (vea el ejercicio 1.9). El conjunto finito $H(\varepsilon)\cap J_\alpha$ sirve para ver que la familia $(z_j)_{j\in J_\alpha}$ cumple la condición de Cauchy con el $\varepsilon > 0$ dado inicialmente. Por lo tanto la familia $(z_j)_{j\in J_\alpha}$ es sumable.

A continuación demostramos que la familia $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ es sumable con suma $S = \sum_{i\in J} z_i$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$ se fija un conjunto finito $H(\varepsilon) \subset J$ tal que $|S - S_H| < \varepsilon$ siempre que H es finito y $J \supset H \supset H(\varepsilon)$.

Claramente $A(\varepsilon) = \{\alpha \in A : H(\varepsilon) \cap J_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito y comprobamos a continuación que si $L \subset A$ es finito y $A(\varepsilon) \subset L$ entonces $|\sum_{\alpha\in L} S_\alpha - S| < 2\varepsilon$. Efectivamente, si m es el número de elementos de L, para cada $\alpha \in L$ existe un conjunto finito $C_\alpha \subset J_\alpha$ tal que $H(\varepsilon) \cap J_\alpha \subset C_\alpha$ y $|\sum_{j\in C_\alpha} z_j - S_\alpha| < \varepsilon/m$. Como $A(\varepsilon) \subset L$ podemos asegurar que el conjunto finito $H = \bigcup_{\alpha\in L} C_\alpha$ contiene a $H(\varepsilon)$ (si $j \in H(\varepsilon)$ entonces $j \in J_\alpha$ para algún $\alpha \in A$, luego $j \in C_\alpha$ con $j \in A(\varepsilon) \subset L$). Entonces, teniendo en cuenta que la unión $H = \bigcup_{\alpha\in L} C_\alpha$ es disjunta y que $\sum_{\alpha\in L}\sum_{j\in C_\alpha} z_j = \sum_{j\in H} z_j$, se obtiene

$$\Big|\sum_{\alpha\in L} S_\alpha - S\Big| \le \Big|\sum_{\alpha\in L}\Big(S_\alpha - \sum_{j\in C_\alpha} z_j\Big)\Big| + \Big|\sum_{j\in H} z_j - S\Big| \le m\frac{\varepsilon}{m} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ejercicio 1.12.

Demuestre que una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$ es sumable si y sólo si el conjunto $C = \{j \in J : z_j \neq 0\}$ es numerable y la familia $(z_j)_{j\in C}$ es sumable. En este caso $\sum_{j\in J} z_j = \sum_{j\in C} z_j$.

SOLUCIÓN.

Si $(z_j)_{j\in J}$ es sumable sea $H(1/n) \subset J$ el conjunto finito proporcionado por la condición de Cauchy con $\varepsilon = 1/n$ (vea el ejercicio 1.9). Si $j \notin H(1/n)$ se verifica $|z_j| < 1/n$, luego cada $C_n = \{j \in J : |z_j| \ge 1/n\}$ es finito y se sigue que $C = \bigcup_n C_n$ es numerable. Es inmediato que $(z_j)_{j\in J}$ es sumable si y sólo si $(z_j)_{j\in C}$ es sumable (con el mismo valor de la suma).

Ejercicio 1.13.

Sea $(z_j)_{j\in J}$ una familia de números complejos donde J es numerable. Se dice que $\sum_{j\in J} z_j$ es una suma conmutativamente convergente, con suma S, cuando para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow J$, la serie $\sum_{n=1}^\infty z_{\tau(n)}$ es convergente y su suma es S. Demuestre que son equivalentes:

a) *$\sum_{j\in J} z_j$ es sumable (con suma S);*

b) $\sum_{j\in J} z_j$ *es conmutativamente convergente (con suma S).*

SOLUCIÓN.

a) $\Rightarrow$ *b)* Si $\sum_{j\in J} z_j$ es sumable con suma S, dado $\varepsilon > 0$ sea $H(\varepsilon) \subset J$ el conjunto finito que proporciona la definición de familia sumable. Dada una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $H(\varepsilon) \subset \{\tau(1), \tau(2), \cdots, \tau(n(\varepsilon))\}$, luego $m \geq n(\varepsilon)$ implica $|\sum_{n=1}^{m} z_{\tau(n)} - S| < \varepsilon$, es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ converge y su suma es S. Esto es cierto para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow J$ y así queda demostrado que $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente con suma S.

b) $\Rightarrow$ *a)* Demostraremos el contrarrecíproco. Si no se cumple *a)*, según la condición de Cauchy (según el ejercicio 1.9), podemos afirmar que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada parte finita $A \subset J$ existe otra parte finita $A' \subset J$, tal que $A \cap A' = \emptyset$, y $|S_{A'}| \geq \varepsilon$.

Empezamos con $A_0 = \emptyset$ y con el correspondiente A'_0 formamos el conjunto $A_1 = A_0 \cup A'_0$. Para A_1 consideramos el correspondiente A'_1 y formamos $A_2 = A_1 \cup A'_1$, etc. Obtenemos así una sucesión disjunta A'_n de subconjuntos finitos de J tal que $|S_{A'_n}| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, para fijar ideas, que la diferencia $D = J \setminus \bigcup_n A'_n$ no es finita (si lo fuese, el razonamiento que sigue se simplifica). Como D es numerable, escribimos $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$ y ordenamos los elementos de J en sucesión mediante el siguiente procedimiento: el primer elemento es d_1, luego siguen todos los elementos de A'_1, a continuación d_2, luego siguen todos los elementos de A'_2, después d_3, etc. Esta ordenación proporciona una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_{\tau(n)}$ no cumple la condición de Cauchy y por lo tanto no converge. (Basta tener en cuenta que las sumas $S_{A'_n}$ son de la forma $S_{A'_n} = \sum_{k=p_n}^{q_n} z_{\tau(k)}$ con $p_n \leq q_n < p_{n+1} \leq q_{n+1} \cdots$, y cumplen $|S_{A'_n}| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Así queda demostrado que no se cumple *b)*.

Ejercicio 1.14.

Demuestre que para series de números complejos la convergencia absoluta y la convergencia incondicional son equivalentes.

Si J es numerable demuestre que las siguientes propiedades de una familia de números complejos $(z_j)_{j\in J}$ son equivalentes:

a) $\sum_{j\in J} z_j$ *es conmutativamente convergente;*

b) *para cada biyección $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\tau(n)}|$ converge;*

c) *para alguna biyección $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|$ converge.*

SOLUCIÓN.

Cuando $J = \mathbb{N}$, en virtud del ejercicio 1.13, la convergencia incondicional de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y la sumabilidad de la familia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son conceptos equivalentes. Por otra parte, en virtud de la equivalencia *b)* $\Leftrightarrow$ *d)* en el mismo ejercicio, la sumabilidad de la familia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivale a la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

a) $\Rightarrow$ *b)* Dada una biyección $\tau : \mathbb{N} \to J$, si se cumple *a)*, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tau(n)}$ converge incondicionalmente y por lo tanto es absolutamente convergente.

b) $\Rightarrow$ *c)* Es inmediato.

c) ⇒ *a*) Basta tener en cuenta que las series absolutamente convergentes son incondicionalmente convergentes.

Ejercicio 1.15.

Demuestre que si J es numerable y $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$ es una biyección, son equivalentes:

a) $\sum_{j\in J} z_j$ *es sumable;*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}| < +\infty$.

SOLUCIÓN.

a) ⇒ *b*) En virtud del ejercicio 1.14 basta demostrar que si se cumple *a*) entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ es incondicionalmente convergente. Esto es consecuencia del ejercicio 1.13 que nos asegura que la suma $\sum_{j\in J} z_j$ es conmutativamente convergente, lo que lleva consigo la convergencia incondicional de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$.

b) ⇒ *a*) Es claro que $M = \sum_{n=1}^{\infty} |z_{\sigma(n)}|$ es una cota superior del conjunto de las sumas finitas $\sum_{j\in H} |z_j|$ luego, en virtud del ejercicio 1.10, se cumple *a*).

Ejercicio 1.16.

Sea $\{z_{nk} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión doble tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}| < +\infty.$$

Demuestre que la familia $(z_{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es sumable y que su suma S se puede calcular mediante sumas iteradas, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ las series $\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk}$ son absolutamente convergentes y sus sumas forman series absolutamente convergentes que verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} z_{nk} = S.$$

SOLUCIÓN.

La familia $(z_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es sumable porque el valor absoluto de sus sumas finitas está acotado superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}| < +\infty$ (véase el ejercicio 1.10).

Como $J = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es unión disjunta de los conjuntos $J_n = \{(n,k) : k \in \mathbb{N}\}$ y también es unión disjunta de los conjuntos $I_k = \{(n,k) : n \in \mathbb{N}\}$, aplicando dos veces la sumación por paquetes (ejercicio 1.11) se concluye que la suma S coincide con la de las dos series iteradas. La convergencia absoluta de las series iteradas es consecuencia de lo que se ha establecido en el ejercicio 1.10.

Ejercicio 1.17.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series absolutamente convergentes de números complejos, demuestre que la familia $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es sumable, con suma

$$S = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

Utilice este resultado para deducir que la serie producto de convolución $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, definida por $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_n b_1$, es absolutamente convergente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

SOLUCIÓN.

Basta aplicar el ejercicio 1.16 con $z_{nk} = a_n b_k$ y efectuar luego una sumación por paquetes (ejercicio 1.11) con $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $J_n = \{(i,j) : i + j = n + 1\}$. Obsérvese que la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es consecuencia de la sumabilidad de la familia $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 1.18. Teorema de Mertens.

Demuestre el teorema de Mertens: sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series convergentes de números complejos. Si una de ellas es absolutamente convergente entonces su producto de convolución $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, cuyo término general está definido por $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$, es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

SOLUCIÓN.

Utilizaremos las notaciones siguientes:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n, \quad B_m = \sum_{n=1}^{m} b_n, \quad C_m = \sum_{n=1}^{m} c_n.$$

Es claro que $C_m = \sum\limits_{i+j \le m+1} a_i b_j = a_1 B_m + a_2 B_{m-1} + \cdots + a_m B_1$, luego

$$C_m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)B - \big[a_1(B - B_m) + a_2(B - B_{m-1}) + \cdots + a_m(B - B_1)\big]$$

y se obtiene

$$|C_m - A_m B| \le |a_1||B - B_m| + |a_2||B - B_{m-1}| + \cdots + |a_m||B - B_1|.$$

Si suponemos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. También podemos suponer que $|B - B_n| \le \varepsilon$ cuando $n \ge k$. En estas condiciones, para $m \ge 2k$, los primeros términos de la suma anterior,

$$|a_1||B - B_m|, \ldots, |a_{m-k}||B - B_{k+1}|$$

están acotados por $\alpha\varepsilon$, donde $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, y los últimos términos,

$$|a_{m-k+1}||B - B_k|, \ldots, |a_m||B - B_1|$$

están acotados por $\beta\varepsilon$, donde $\beta = \sup\{|B - B_m| : m \ge 1\}$. Por consiguiente, para $m \ge 2k$ se verifica $|C_m - A_m B| \le (\alpha + \beta)\varepsilon$. Queda demostrado así que $\lim_m (C_m - A_m B) = 0$ y con ello que converge hacia 0 la sucesión

$$C_m - AB = (C_m - A_m B) + (A_m - A)B.$$

1.3. Ejercicios propuestos

1.1 Calcule la parte real y la parte imaginaria de $(1+i)^{2n+1}$.

1.2 Calcule el argumento principal del cociente $(z-1)/(z+1)$ donde $|z|=1$, $z \notin \{1,-1\}$.

1.3 Compruebe que la parte la parte imaginaria de $z/(1+z^2)$ es positiva si y sólo si $|z|<1$.

1.4 Si $\omega^n = 1$, calcule

$$1+\omega^k+\omega^{2k}+\cdots+\omega^{(n-1)k} \quad \text{y} \quad 1-\omega^k+\omega^{2k}-\cdots+(-1)^{n-1}\omega^{(n-1)k}.$$

1.5 Si a, b son números complejos demuestre la identidad

$$|1+\overline{a}b|^2 = |a+b|^2 + (1-|a|^2)(1-|b|^2).$$

1.6 Demuestre que las dos raíces cuadradas de $z=a+ib$, con $b \neq 0$, vienen dadas por

$$\sqrt{a+ib} = \pm\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\ \text{signo}(b)\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}$$

1.7 Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re} z_k > 0$ y $\operatorname{Re}(z_1 z_2 \cdots z_k) > 0$, para $1 \leq k \leq n$, compruebe que el logaritmo principal cumple

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2 \cdots z_n) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + \cdots + \operatorname{Log} z_n.$$

¿Se cumple lo mismo sin las restricciones sobre los z_k?

1.8 Justifique que para $0 \leq r < 1$ se cumple

a) $1 + 2r\cos\theta + \cdots + 2r^n \cos n\theta + \cdots = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$

b) $r\operatorname{sen}\theta + \cdots + r^n \sin n\theta + \cdots = \dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

1.9 Justifique la igualdad

$$1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+\cdots+2\cos n\theta = \frac{\operatorname{sen}\big[(2n+1)\theta/2\big]}{\operatorname{sen}(\theta/2)}$$

1.10 Suponiendo que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ demuestre que

$$r^n \cos n\theta = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 - \cdots$$

$$r^n \operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1} x^{n-1}y - \binom{n}{3} x^{n-4}y^4 + \cdots$$

1.11 Utilice el producto $(5-i)^4(1+i)$ para establecer la igualdad de Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

1.12 Utilice los números complejos para expresar $x^4 + 4$ como producto de dos polinomios reales de segundo grado.

1.13 Demuestre que $\cos nt$ se puede expresar en la forma $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ donde T_n es un polinomio de grado $n - 1$ (el n-ésimo polinomio de Tchevichev). Calcule T_0, T_1, T_2 y obtenga la relación de recurrencia

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

1.14 Demuestre que el número complejo $u = (2 - i)/(2 + i)$ tiene la propiedad de que $u^n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (En [7, pág.33] se puede ver una solución atribuida a Hurwitz, que la necesitaba para el resultado del ejercicio 4.35).

Capítulo 2

Topología y geometría en el plano complejo

2.1. Preliminares teóricos

2.1.1. Compacidad y conexión

El cuerpo de los números complejos, con la distancia usual

$$d(z, w) = |z - w|,$$

es un espacio métrico. A las bolas del espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$ se les llama discos, y se usan las notaciones

$$D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}, \qquad D^*(a, r) = \{z : 0 < |z - a| < r\},$$

para el *disco abierto* y el *disco abierto perforado* de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Las nociones topológicas y métricas en $\mathbb{C}$ son las del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Se supone que el lector conoce las nociones y resultados básicos de topología (límites, continuidad, conexión y compacidad) en el ámbito de los espacios métricos y en particular en el espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$.

Generalmente Ω denotará un subconjunto abierto de $(\mathbb{C}, d)$, $\overline{M}$ el conjunto de los puntos adherentes a $M \subset \mathbb{C}$ ($a \in \overline{M}$ si $D(a, r) \cap M \neq \emptyset$ para todo $r > 0$) y M' el conjunto de los puntos de acumulación de $M \subset \mathbb{C}$ ($a \in M'$ si $D^*(a, r) \cap M \neq \emptyset$ para todo $r > 0$).

Si $M \subset \Omega$ y $M' \cap \Omega = \emptyset$ se dice que M es discreto en Ω. En este caso para cada $a \in M$ existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \cap M = \{a\}$.

Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ se dice que es *compacto* cuando de todo recubrimiento de K, formado por conjuntos abiertos, se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Proposición 2.1.1.
Las siguientes propiedades de $K \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) *K es compacto.*

b) *Cada sucesión en K posee una subsucesión convergente hacia un punto de K.*

c) *Para cada conjunto infinito $M \subset K$ se cumple $M' \cap K \neq \emptyset$ (es decir, M tiene algún punto de acumulación en K).*

d) K *es cerrado y acotado.*

Corolario 2.1.2.
Si (z_n) *es una sucesión acotada de números complejos, son equivalentes:*

a) (z_n) *es convergente (hacia* z*);*

b) todas las subsucesiones convergentes de (z_n) *tienen el mismo límite (*z*).*

Proposición 2.1.3.
Sea X *compacto. Si* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *es continua entonces* $f(X)$ *es compacto. Si* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua entonces* g *alcanza en* X *un máximo absoluto y un mínimo absoluto.*

Para diversas cuestiones conviene ampliar el conjunto de los números complejos introduciendo un nuevo elemento llamado punto del infinito, denotado ∞. El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado.* Si $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$ se adoptan los convenios:

$$\begin{aligned} &a + \infty = \infty + a = \infty; \quad && b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty; \\ &a/0 = \infty \text{ si } a \neq 0; && b/\infty = 0 \text{ si } b \neq \infty; \quad |\infty| = +\infty. \end{aligned}$$

(No es posible definir $\infty + \infty$ o $\infty \cdot 0$ sin violar las reglas usuales de la aritmética).

En $\mathbb{C}_\infty$ se introduce una topología natural especificando una base de entornos de cada punto. Para definir los entornos de ∞ se consideran los "discos"

$$\begin{aligned} D(\infty, r) &= \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1/r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\} \cup \{\infty\} \\ D^*(\infty, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\}. \end{aligned}$$

Si existe $r > 0$ tal que $V \supset D(a, r)$ se dice que $V \subseteq \mathbb{C}_\infty$ es entorno de $a \in \mathbb{C}_\infty$. La familia $\mathscr{G}_\infty$ formada por los conjuntos $G \subset \mathbb{C}_\infty$ que son entornos de todos sus puntos forma una topología, con la que $\mathbb{C}_\infty$ es compacto. Esta topología induce en $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_\infty$ la topología usual y $\mathbb{C}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{C}_\infty$.

El plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$ se identifica con la *esfera de Riemann*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

mediante la *proyección estereográfica* $\Psi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S$, donde $\Psi(\infty) = (0, 0, 1)$ y $\Psi(x + iy)$ es el punto de S, distinto de $(0, 0, 1)$, en el que la recta que pasa por $(x, y, 0)$ y $(0, 0, 1)$ corta a la esfera. Las ecuaciones de Ψ y su inversa son

$$\begin{aligned} \Psi(x + iy) &= \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \\ \Psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

Cuando S se considera con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^3$, la proyección estereográfica $\Psi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S$ establece un homeomorfismo, luego la topología de $\mathbb{C}_\infty$ se metriza con la denominada *distancia cordal* $d_\infty(z, w) = d_2(\Psi(z), \Psi(w))$

$$\begin{aligned} d_\infty(z, w) &= \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}} \quad \text{si} \quad z, w \in \mathbb{C}; \\ d_\infty(z, \infty) &= \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} \quad \text{si} \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

El espacio métrico $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ es compacto e isométrico (mediante la proyección estereográfica) a la esfera de Riemann. La distancia que d_∞ induce en $\mathbb{C}$ es equivalente a la distancia usual, pero no uniformemente equivalente: la sucesión $z_n = n$ no es de Cauchy para la distancia euclídea d, pero lo es para la distancia cordal d_∞, por ser convergente en el espacio métrico $(\mathbb{C}, d_\infty)$.

Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}$ se dice que están separados cuando $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Se dice que $X \subset \mathbb{C}$ es *conexo* cuando es imposible descomponerlo en la forma $X = A \cup B$ donde A, B son conjuntos separados no vacíos.

$\mathbb{C}$ es conexo, lo que significa que los únicos subconjuntos de $\mathbb{C}$ que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\mathbb{C}$ y $\emptyset$. Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es conexo cuando es imposible descomponerlo como unión $\Omega = A \cup B$ de dos abiertos $A, B \subset \mathbb{C}$ no vacíos y disjuntos. En ese caso se suele decir que Ω es un *dominio* o *región*.

Si $M \subset \mathbb{C}$ se llama *componente conexa* de $x \in M$ a la unión de las partes conexas de M que contienen a x. Las componentes conexas de M forman una partición de M. Las componentes conexas de los abiertos son abiertas. Todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se expresa de modo único como unión disjunta de una familia finita o numerable de abiertos conexos (sus *componentes conexas*).

Proposición 2.1.4.

Si $X \subset \mathbb{C}$ es conexo y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua entonces $f(X)$ es conexo. En particular, si $f(X) \subset \mathbb{R}$ entonces $f(X)$ es un intervalo.

Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow X \subset \mathbb{C}$ es continua se dice que γ es un *camino* en X de origen $\gamma(a)$ y extremo $\gamma(b)$. Un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ se dice que es *conexo por caminos* (o conexo por arcos) cuando para cada par $a, b \in X$ existe un camino $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ de origen $\gamma(0) = a$ y extremo $\gamma(1) = b$.

Todo conjunto $X \subset \mathbb{C}$ conexo por caminos es conexo. El recíproco se cumple si X es abierto. Más aún, todo conjunto abierto y conexo $X \subset \mathbb{C}$ es conexo por líneas poligonales (de lados paralelos a los ejes).

2.1.2. Transformaciones de Möbius

Son las transformaciones $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

con el convenio: $T(\infty) = a/c$, $T(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$ y $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

El conjunto $\mathscr{M}$ de las transformaciones de Möbius, con la composición, es un grupo generado por las transformaciones elementales siguientes:

Traslaciones:	$z \to a + z, \quad (a \in \mathbb{C})$	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
Dilataciones:	$z \to rz, \quad (r > 0)$	Inversión:	$z \to 1/z.$

Dada una terna z_1, z_2, z_3 formada por tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, si w_1, w_2, w_3 es otra terna en las mismas condiciones, existe una única $T \in \mathscr{M}$ que transforma la primera terna en la segunda, es decir $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Dada una cuaterna ordenada z_0, z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C}_\infty$, donde z_1, z_2, z_3 se suponen distintos, la *razón doble* (z_0, z_1, z_2, z_3) es la imagen de z_0 mediante la única $R \in \mathscr{M}$ que verifica

$R(z_1) = 0,\ R(z_2) = 1,\ R(z_3) = \infty$, es decir

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} \quad \text{si } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

$$(z_0, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z_0 - z_3}; \quad (z_0, z_1, \infty, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3}; \quad (z_0, z_1, z_2, \infty) = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}$$

La razón doble es un invariante de las transformaciones de Möbius: si $T \in \mathscr{M}$

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)).$$

En la teoría de las transformaciones de Möbius conviene considerar a las rectas como un caso particular de circunferencias (las que pasan por ∞). Véanse los ejercicios resueltos 2.5 y 2.32. Así, en lo que sigue, la familia de las circunferencias contiene a las líneas rectas.

Dados tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, sea C la circunferencia que determinan, entonces $z \in C$ si y sólo si la razón doble (z, z_1, z_2, z_3) es real.

Dado un punto $a \in \mathbb{C}_\infty$ su simétrico a^* respecto a la circunferencia C (vea el ejercicio 2.6) queda determinado analíticamente mediante la ecuación

$$(a^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(a, z_1, z_2, z_3)}.$$

Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias, y circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales (ejercicio 2.14), conservando puntos simétricos: si a, a^* son simétricos respecto a la circunferencia C y $T \in \mathscr{M}$ entonces $T(a)$ y $T(a^*)$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen $T(C)$. Esta propiedad, que se suele llamar *principio de simetría*, es muy útil en las aplicaciones. En las soluciones de los ejercicios 2.10 a 2.17 y 2.21 se pueden ver algunas aplicaciones típicas de este principio.

Una circunferencia C se orienta dando una terna ordenada (z_1, z_2, z_3) formada por puntos distintos de ella (la orientación usual de una recta mediante un par de puntos (z_1, z_2) se puede considerar como caso particular con $z_3 = \infty$). Al orientar una circunferencia queda determinado un sentido de recorrido: el que corresponde a la parametrización $z = z(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, que se obtiene despejando z en la ecuación $(z, z_1, z_2, z_3) = t$.

Cuando la circunferencia C se orienta mediante la terna (z_1, z_2, z_3), se llama *lado derecho* de C a la región $\{z : \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$. Análogamente se define el *lado izquierdo* de C como la región $\{z : \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$. Con los convenios habituales de representación gráfica, en el caso de una recta ($z_3 = \infty$) orientada mediante (z_1, z_2, ∞), el lado derecho corresponde al semiplano que queda a la derecha cuando se recorre la recta en la dirección marcada por el vector $z_2 - z_1$. Si el sentido de recorrido de una circunferencia orientada es el de las manecillas del reloj entonces el lado derecho corresponde a su interior y el lado izquierdo a su exterior.

El *principio de conservación de las orientaciones* asegura que si la circunferencia C está orientada mediante la terna (z_1, z_2, z_3) y la imagen $T(C)$ se orienta mediante $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$ entonces T transforma el lado izquierdo (resp. derecho) de C en el lado izquierdo (resp. derecho) de $T(C)$. El ejercicio 2.18 está resuelto aplicando este principio.

2.1.3. Representaciones gráficas

Para conseguir una imagen gráfica de las funciones complejas de variable compleja conviene considerarlas como transformaciones entre dos copias del plano complejo. En la primera, llamada plano z, se mueve la variable independiente z y en la segunda, llamada plano w, se mueve la variable dependiente $w = f(z)$. Cuando $z(t)$ describe una curva en el primer plano, su imagen $w(t) = f(z(t))$ describe otra curva en el segundo plano. Interpretando t como el tiempo, el movimiento de $w(t)$ proporciona una idea del comportamiento de la función f a lo largo del camino $z(t)$.

En el plano z se suelen considerar rectas paralelas al eje real, $y = cte$, y rectas paralelas al eje imaginario, $x = cte$, igualmente espaciadas. Otras veces resulta más adecuado usar coordenadas polares, $z = re^{i\varphi}$, y considerar las circunferencias $z(t) = re^{it}$ y las semirrectas $z(r) = re^{it}$, con $r \geq 0$ y $t \in [0, 2\pi]$.

Con esta técnica suele ser fácil obtener las imágenes de regiones sencillas que se describen fácilmente en coordenadas cartesianas o en coordenadas polares. Véanse los ejercicios 2.23 y 2.26 donde, con estos procedimientos gráficos, se estudian con detalle algunos aspectos geométricos de la transformación $z \to z^2$ y de la transformación de Joukowski $z \to (z + 1/z)/2$.

Otra alternativa para conseguir una imagen gráfica de f consiste en representar las funciones $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ mediante sus curvas de nivel $u(x, y) = c$, $v(x, y) = c$ (vea los ejercicios 3.27 y 3.28).

Desde el punto de vista de algunas aplicaciones físicas, a veces resulta conveniente utilizar un solo plano para representar tanto la variable independiente z como variable dependiente $w = f(z)$, pero con el convenio de representar z mediante un punto y w mediante el vector $\overline{w}$ dibujado con origen en z. Es decir, se representa $f = u + iv$ mediante el campo de vectores $A(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y))$ donde $A_1 = u$ y $A_2 = -v$ (véase el ejercicio 3.28).

2.2. Ejercicios resueltos

2.2.1. Geometría analítica con coordenadas complejas conjugadas

Las coordenadas cartesianas x, y de un punto del plano se expresan en términos de z, $\overline{z}$ mediante las fórmulas

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}); \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Las cantidades $z, \overline{z}$ se llaman las *coordenadas conjugadas* del punto (x, y). La mayor parte de los ejercicios de este apartado plantean problemas de geometría analítica plana que se resuelven fácilmente usando las coordenadas complejas conjugadas z y $\overline{z}$. Los ejercicios 2.1 a 2.6 y 2.32 ponen de manifiesto que el empleo de coordenadas conjugadas resulta cómodo y adecuado para abordar algunas cuestiones de geometría del plano.

Ejercicio 2.1.

Compruebe que el área del triángulo T de vértices $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ viene dada por

$$\text{Área}(T) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN.

Utilizamos la fórmula bien conocida para el área del triángulo en función de las coordenadas cartesianas de sus vértices (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3$:

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Como $z_k = x_k + iy_k$, un cálculo sencillo muestra que

$$\begin{pmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de la izquierda es igual al producto de los determinantes de las matrices de la derecha y así se obtiene la fórmula del enunciado.

Ejercicio 2.2.

Compruebe las siguientes afirmaciones.

a) *Si $z_1 \neq z_2$ la ecuación de la recta que pasa por z_1 y z_2 es $D(z, z_1, z_2) = 0$ donde*

$$D(z, z_1, z_2) = \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \end{vmatrix}$$

b) *Si $z_1 = z_2 + \rho e^{i\theta}$, la ecuación de la recta que pasa por z_1 y z_2 se escribe en la forma $\overline{z} = Az + B$, donde la cantidad $A = e^{-2i\theta}$, que llamaremos inclinación de la recta, está relacionada con la pendiente m mediante las fórmulas*

$$A = \frac{1 - im}{1 + im} \qquad m = -i\frac{1 - A}{1 + A}$$

c) *La ecuación de la recta que pasa por z_0 y que tiene inclinación A, es $\overline{z} = A(z - z_0) + \overline{z}_0$. Dos rectas de inclinaciones A_1, A_2 son paralelas si y sólo si $A_1 = A_2$ y son perpendiculares si y sólo si $A_1 = -A_2$. Más generalmente, el ángulo α que forman las dos rectas viene dado por*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = i\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

SOLUCIÓN.

a) La ecuación paramétrica de la recta que determinan z_1 y z_2 es

$$z = tz_1 + (1 - t)z_2 = z_2 + t(z_1 - z_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La ecuación implícita de la recta, usando coordenadas complejas conjugadas, se obtiene expresando que el cociente $(z - z_2)/(z_1 - z_2)$ es real:

$$\frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \quad \text{o bien} \quad (\overline{z} - \overline{z}_2)(z_1 - z_2) = (z - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2).$$

Es más fácil recordar la ecuación de la recta escrita en la forma

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(según el ejercicio 2.1 esto significa que z determina con z_1 y z_2 un triángulo de área nula).

b) Si $z_1 = z_2 + \rho e^{i\theta}$ la ecuación de la recta se puede escribir en la forma $\overline{z} = Az + B$ donde $A = (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)/(z_1 - z_2) = e^{-2i\theta}$. Fácilmente se obtiene que

$$A = \frac{(x_2 - x_1) - i(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)} = \frac{1 - im}{1 + im}$$

luego $m = -i\frac{1-A}{1+A}$.

La comprobación de las afirmaciones del apartado *c*) es rutinaria y se deja al cuidado del lector.

Ejercicio 2.3.

Un triángulo de vértices z_1, z_2, z_3 está inscrito en la circunferencia $|z| = 1$. Utilizando coordenadas conjugadas demuestre:

a) *las tres alturas del triángulo se cortan en el ortocentro $S = z_1 + z_2 + z_3$;*

b) *las tres medianas del triángulo (es decir, las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto) se cortan en el baricentro $B = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.*

Se sigue de a) y b) que el circuncentro $C = 0$, el ortocentro S y el baricentro $B = S/3$ están alineados (la recta que contiene a estos tres puntos se llama línea de Euler del triángulo). Además el baricentro está en el segmento que une el circuncentro con el ortocentro, siendo su distancia al circuncentro la mitad de su distancia al ortocentro.

SOLUCIÓN.

a) Como los vértices del triángulo están en la circunferencia $|z| = 1$, se cumple $\overline{z}_i = 1/z_i$, $i = 1, 2, 3$. Según el ejercicio 2.2 la ecuación de la recta que pasa por z_2 y z_3 es $(\overline{z} - \overline{z}_2)(z_3 - z_2) = (z - z_2)(\overline{z}_3 - \overline{z}_2)$ y sustituyendo $\overline{z}_2 = 1/z_2$, $\overline{z}_3 = 1/z_3$ resulta

$$\overline{z} = -\frac{1}{z_2 z_3}(z - z_2) + \frac{1}{z_2}$$

Según el ejercicio 2.2, la recta perpendicular que pasa por z_1 tiene inclinación $1/(z_2 z_3)$, luego su ecuación en forma compleja es

$$\overline{z} = \frac{1}{z_2 z_3}(z - z_1) + \frac{1}{z_1} \qquad (h_1)$$

Análogamente, la ecuación de la recta que pasa por z_2 y es perpendicular al lado z_1z_3 es

$$\overline{z} = \frac{1}{z_1 z_3}(z - z_2) + \frac{1}{z_2} \qquad (h_2)$$

Es fácil ver que las rectas h_1, h_2 pasan por el punto $S = z_1 + z_2 + z_3$. Por razones de simetría la recta h_3 que contiene a la otra altura también pasa por S. Queda demostrado que el ortocentro existe y es $S = z_1 + z_2 + z_3$.

b) Es un razonamiento similar que se deja al cuidado del lector.

Ejercicio 2.4.

Se considera un triángulo de vértices z_1, z_2, z_3, inscrito en la circunferencia $|z| = 1$. Para $k = 1, 2, 3$ sea P_k el pie de la altura trazada por z_k, M_k el punto medio del lado opuesto a z_k y O_k el punto medio entre el vértice z_k y el ortocentro.

Demuestre que los nueve puntos M_k, O_k, P_k, $k = 1, 2, 3$, son concíclicos, que el centro de la circunferencia que los contiene, llamada circunferencia de los nueve puntos, es el punto medio entre el circuncentro y el ortocentro y que su radio es la mitad del radio del círculo circunscrito al triángulo (teorema de los nueve puntos).

SOLUCIÓN.

Según se ha visto en la solución del ejercicio 2.3 la ecuación de la recta z_2z_3 es

$$\overline{z} = -\frac{1}{z_2 z_3}(z - z_2) + \frac{1}{z_2}$$

y la ecuación de la altura trazada por z_1 es

$$\overline{z} = \frac{1}{z_2 z_3}(z - z_1) + \frac{1}{z_1}$$

Eliminando $\overline{z}$ entre las dos ecuaciones se obtiene P_1 y análogamente se calculan P_2 y P_3:

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right), \quad P_2 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{z_1 z_3}{z_2}\right), \quad P_3 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{z_1 z_2}{z_3}\right).$$

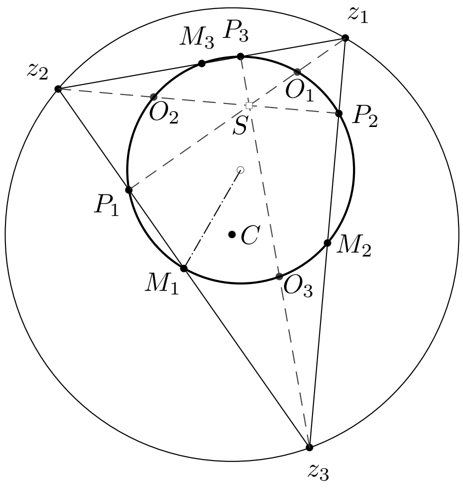
donde $S = z_1 + z_2 + z_3$ es el ortocentro (véase el ejercicio 2.3).

Los puntos medios entre cada vértice y el ortocentro son

$$O_1 = \frac{1}{2}(S + z_1), \quad O_2 = \frac{1}{2}(S + z_2), \quad O_3 = \frac{1}{2}(S + z_3)$$

y los puntos medios de los lados son

$$M_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3), \quad M_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3), \quad M_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$



Se deja al cuidado del lector la comprobación de que los nueve puntos calculados satisfacen la ecuación de la circunferencia $\overline{(z - S/2)}(z - S/2) = 1/4$ cuyo centro $S/2$, es el punto medio entre el ortocentro S y el circuncentro $C = 0$.

Ejercicio 2.5.

Circunferencias en el plano complejo.

a) *Compruebe que la forma general de la ecuación de una recta o circunferencia en el plano complejo es $A\overline{z}z + Bz + C\overline{z} + D = 0$ donde A y D son reales, B y C son complejos conjugados y $AD - BC < 0$. (Si $A = 0$ se obtiene una recta y si $A \neq 0$ resulta una circunferencia de centro $z_0 = -C/A$ y radio $\rho = \sqrt{BC - AD}/|A|$).*

b) *Sean Γ_i, $i = 1, 2$, circunferencias en el plano complejo de ecuaciones respectivas $A_i\overline{z}z + B_iz + C_i\overline{z} + D_i = 0$, donde A_i, D_i son reales, B_i, C_i complejos conjugados y $A_iD_i - B_iC_i < 0$. Demuestre que Γ_1 y Γ_2 son ortogonales si y sólo si $A_1D_2 + A_2D_1 = B_1C_2 + B_2C_1$.*

SOLUCIÓN.

a) Si en la ecuación cartesiana de una recta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) se sustituye $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, se obtiene la ecuación compleja $Bz + C\bar{z} + D = 0$ donde $B = (\alpha - i\beta)/2$, $C = (\alpha + i\beta)/2$ y $D = \gamma$. Obsérvese que en este caso, al ser $A = 0$ se cumple que $AD - BC = -B\overline{B} = -|B|^2 < 0$.

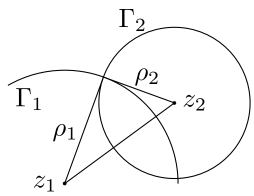
Por otra parte, la ecuación de la circunferencia de centro z_0 y radio $\rho > 0$ es $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) = \rho^2$ la cual, después de multiplicar miembro a miembro por un número real $A \neq 0$, adopta la forma

$$Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$$

con $A \in \mathbb{R}$, $B = -A\bar{z_0}$, $C = -Az_0$, $D = A(|z_0|^2 - \rho^2)$ y $AD - BC = -A^2\rho^2 < 0$.

Recíprocamente, $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$, con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$ es la ecuación de una recta cuando $A = 0$, o una circunferencia de centro $z_0 = -C/A$ y radio $\rho = \sqrt{BC - AD}/|A|$, cuando $A \neq 0$.

b) Supongamos en primer lugar que $A_1 \neq 0$ y $A_2 \neq 0$, de modo que Γ_1 y Γ_2 son circunferencias de centros z_1, z_2 y radios ρ_1, ρ_2 respectivamente. En este caso Γ_1 y Γ_2 son ortogonales si y sólo si se cumple la condición $|z_1 - z_2|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$.



Como $z_i = -C_i/A_i$ y $\rho_i^2 = (B_iC_i - A_iD_i)/A_i^2$, esta condición toma la forma

$$\left(\frac{C_1}{A_1} - \frac{C_2}{A_2}\right)\overline{\left(\frac{C_1}{A_1} - \frac{C_2}{A_2}\right)} = \frac{B_1C_1 - A_1D_1}{A_1^2} + \frac{B_2C_2 - A_2D_2}{A_2^2}$$

que después de simplificada se convierte en $A_1D_2 + A_2D_1 = B_1C_2 + B_2C_1$.

Si $A_1 = 0$ y $A_2 \neq 0$ entonces Γ_1 es una recta, que será ortogonal a la circunferencia Γ_2 si y sólo si pasa por su centro z_2. Esta condición se traduce en $-B_1C_2 - C_1\overline{C_2} + D_1A_2 = 0$, que después de sustituir $\overline{C_2} = B_2$, se escribe en la forma $A_2D_1 = B_1C_2 + B_2C_1$.

Finalmente, si $A_1 = A_2 = 0$ entonces Γ_1 y Γ_2 son rectas, cuya condición de ortogonalidad es $B_1C_2 + B_2C_1 = 0$.

Ejercicio 2.6.

Dada la circunferencia $S = \{z : |z - a| = R\}$, el simétrico de $b \in \mathbb{C}$, $b \neq a$, respecto a S es el único punto de la semirrecta $L(a, b) = \{a + t(b - a) : t \geq 0\}$ que cumple $|b - a||b^* - a| = R^2$. Viene dado por

$$b^* = a + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{a}} = a + \frac{R^2}{|b - a|^2}(b - a).$$

Se completa la definición de simetría con $a^* = \infty$ y $\infty^* = a$.

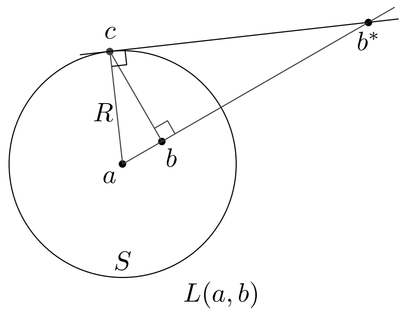
a) Indique un procedimiento geométrico para obtener el simétrico de un punto respecto a una circunferencia.

b) Demuestre que la familia de las circunferencias que pasan por $b \notin S$ y su simétrico b^* coincide con la familia de las circunferencias ortogonales a S que pasan por b.

c) Deduzca que la simetría transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales y que las circunferencias ortogonales a S se transforman en sí mismas.

SOLUCIÓN.

a) Cuando $b \in S$ se cumple $R^2/(\overline{b} - \overline{a}) = b - a$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la simetría se obtiene que $b^* = b$. Si $b \notin S$ queda dentro de la circunferencia, su simétrico b^* es exterior a la misma y se puede obtener con la siguiente construcción. Se traza la recta que pasa por b y es perpendicular a la semirrecta $L(a, b)$. Si c es uno de los dos puntos donde esta perpendicular corta a la circunferencia S, entonces b^* queda determinado como el punto en que la tangente a S en c corta a la semirrecta $L(a, b)$.



Efectivamente, por la semejanza de los triángulos $\triangle(a, c, b^*)$, $\triangle(a, b, c)$, el punto b^* así obtenido verifica $|b^* - a|/R = R/|b - a|$. Si b es exterior a la circunferencia su simétrico b^* se obtiene realizando la construcción en sentido inverso.

b) Para simplificar los cálculos suponemos que S es la circunferencia unidad $z\bar{z} = 1$, de modo que la ecuación de la simetría es $z^* = 1/\bar{z}$ (esto no es restrictivo ya que, en términos de $w = (z - a)/R$, la ecuación de S es $w\bar{w} = 1$).

Sea Γ una circunferencia de ecuación $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$, donde $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$ (vea el ejercicio 2.5). Si Γ pasa por b y por $b^* = 1/\bar{b}$, se verifican las igualdades

$$Ab\bar{b} + Bb + C\bar{b} + D = 0; \qquad A + Bb + C\bar{b} + Db\bar{b} = 0;$$

y restando las dos ecuaciones resulta $A(|b|^2 - 1) + D(1 - |b|^2) = 0$. Como estamos suponiendo $|b| \neq 1$ se obtiene la condición $A = D$ que, según el ejercicio 2.5, es necesaria y suficiente para que S y Γ sean ortogonales. Recíprocamente, si Γ es ortogonal a S debe ser $A = D$, de donde se sigue que si $b \in \Gamma$ entonces $b^* \in \Gamma$.

c) Sustituyendo z por $1/\bar{z}$ en la ecuación de Γ se obtiene que la imagen de Γ mediante la simetría es la circunferencia $Dz\bar{z} + Bz + C\bar{z} + A = 0$, donde $D, A \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$. Usando la condición de ortogonalidad establecida en el ejercicio 2.5 es fácil comprobar que si dos circunferencias son ortogonales lo mismo les ocurre a sus simétricas.

Por otra parte, las circunferencias que son ortogonales a S cumplen $A = D$ y por lo tanto se transforman en sí mismas mediante la simetría.

Ejercicio 2.7.

Determine geométricamente los siguientes subconjuntos del plano:

a) $R = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z - a}{b} = 0\right\}$, $H = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z - a}{b} > 0\right\}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

b) $R = \{z : \operatorname{Re}(z/b) = 1\}$, $H = \{z : \operatorname{Re}(z/b) > 1\}$, $b \in \mathbb{C}$.

c) $\{z : |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) + \alpha = 0\}$, $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) $\{z : |z - a| = \rho|z - b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$.

e) $\{z : |z - a| = |1 - \bar{a}z|\}$, $|a| < 1$.

SOLUCIÓN.

a) En la siguiente discusión, según convenga para la interpretación geométrica, los números complejos a veces se consideran como puntos del plano euclídeo y a veces como vectores. Obsérvese que $z \in R$ si y sólo si $(z - a)/b$ es un número real $t \in \mathbb{R}$, lo que significa que z es un punto de la recta de ecuación paramétrica $z(t) = a + tb$, luego R es la recta que pasa por el punto a según la dirección del vector b.

Mediante la transformación $z = a + bw$ la recta real $\{w : \mathrm{Im}(w) = 0\}$ se transforma en la recta R y el semiplano $\{w : \mathrm{Im}(w) > 0\}$ se transforma en H. Teniendo en cuenta el significado geométrico de esta transformación (un giro, seguido de una homotecia y una traslación), es claro que H es un semiplano. Se trata del semiplano determinado por la recta R que contiene al punto $a+ib$. Como ib es un vector ortogonal al vector de dirección de la recta R, formando con él un ángulo de amplitud $\pi/2$ en sentido positivo, se observa que $a + ib$ queda al lado izquierdo de esta recta cuando es recorrida según la dirección de b (véase el final de la sección 2.1.2).

b) Con un razonamiento análogo al realizado en el apartado *a*) se obtiene que R es la recta de ecuación paramétrica $z(t) = b + t(ib)$, es decir, la recta que pasa por b y es perpendicular al vector b. H es el semiplano determinado por esta recta que no contiene al origen.

c) Si $|a|^2 \geq \alpha$ el conjunto es la circunferencia $|z - a| = \sqrt{|a|^2 - \alpha}$. En otro caso es el conjunto vacío. Para justificar esta afirmación basta usar los resultados generales obtenidos en el apartado *a*) del ejercicio 2.5.

d) Escrito en la forma $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) - \rho^2(z - b)(\overline{z} - \overline{b}) = 0$, según el ejercicio 2.5, el subconjunto del plano descrito por esta igualdad es una circunferencia, de centro $(a - \rho^2 b)/|1 - \rho^2|$ y radio $\rho|b - a|/|1 - \rho^2|$ (otra solución, usando transformaciones de Möbius, se puede ver en el ejercicio 2.11).

e) Razonando como en el apartado *d*) se comprueba que el conjunto considerado es la circunferencia de centro 0 y radio 1.

Ejercicio 2.8.

Sea σ una isometría del plano complejo (para la distancia usual). Demuestre que existen $a, u \in \mathbb{C}$, con $|u| = 1$, tales que o bien $\sigma(z) = uz + a$, o bien $\sigma(z) = u\overline{z} + a$.

SOLUCIÓN.

Sea $a = \sigma(0)$, $u = \sigma(1) - \sigma(0)$. Como σ es isometría, $|u| = 1$. Es inmediato que $f(z) = (\sigma(z) - a)/u$ es otra isometría con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Basta demostrar que, o bien $f(z) = z$, o bien $f(z) = \overline{z}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$|f(z)| = |f(z) - f(0)| = |z|; \qquad |f(z) - 1| = |f(z) - f(1)| = |z - 1|.$$

La primera igualdad nos dice que $f(z)$ pertenece a la circunferencia de centro 0 y radio $|z|$ y la segunda que también pertenece a la circunferencia de centro 1 y radio $|z - 1|$. Como estas circunferencias se cortan en los puntos $z, \overline{z}$, se obtiene que $f(z) \in \{z, \overline{z}\}$, luego $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si $f(i) = i$ la isometría $g(z) = f(iz)/i$ verifica $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y, razonando como antes, se obtiene que $g(z) \in \{z, \overline{z}\}$, luego

$$f(iz) = ig(z) \in \{iz, -\overline{iz}\},$$

es decir $f(w) \in \{w, -\overline{w}\}$, lo que significa que $\mathrm{Im}\, f(w) = \mathrm{Im}\, w$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Con esta igualdad y la establecida antes se concluye que $f(w) = w$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Si $f(i) = -i$, razonando en forma similar con $g(z) = -f(iz)/i$, se obtiene que $f(w) = \overline{w}$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2.9.

Se supone que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ se ha identificado con el plano complejo en la forma usual. Se dice que una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ conserva ángulos orientados cuando, para cada par ordenado (w_1, w_2) de números complejos no nulos, se verifica $\operatorname{Arg}(w_2/w_1) = \operatorname{Arg}(L(w_2)/L(w_1))$, donde $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ denota el argumento principal de $z \neq 0$. Si la aplicación lineal

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy), \quad \textit{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

se expresa en términos de las coordenadas complejas conjugadas $z, \overline{z}$

$$L(z) = rz + s\overline{z}, \;\; \textit{donde } 2r = (a + d) + i(c - b), \quad 2s = (a - d) + i(b + c),$$

demuestre que L conserva ángulos orientados si y sólo si $s = 0$, lo que significa que L es $\mathbb{C}$-lineal.

SOLUCIÓN.

Es evidente que L conserva ángulos orientados cuando $s = 0$, es decir cuando L es de la forma $L(z) = rz$ donde $r \neq 0$ es un número complejo fijo.

Recíprocamente, si L conserva ángulos orientados es claro que L es no singular. En este caso, representando L en la forma $L = rdz + sd\overline{z}$, se observa que cuando w recorre la circunferencia $|w| = 1$, entonces $L(w)/w$ recorre la circunferencia de centro r y radio $|s|$ ya que $L(w)/w = r + s\overline{w}/w = r + s\overline{w}^2$.

Por otra parte, aplicando al par $(w, 1)$ con $|w| = 1$ la condición de conservación de ángulos orientados se obtiene que $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg}(L(w)/L(1))$, por lo que existe $\rho > 0$ tal que $\rho w = L(w)/L(1)$. Esto significa que $L(w)/w$ permanece en la recta $\{tL(1) : t \in \mathbb{R}\}$. Para que las dos condiciones que se han obtenido sean compatibles es necesario que sea $s = 0$.

Queda establecido que las únicas aplicaciones lineales $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que conservan ángulos orientados son las de la forma $L(z) = \rho e^{i\alpha} z$, cuya interpretación geométrica es bien sencilla: la composición de un giro de amplitud α alrededor de 0 con una homotecia de razón ρ respecto al origen.

2.2.2. Transformaciones de Möbius y geometría

En los ejercicios de este tramo se usan transformaciones de Möbius para continuar estudiando cuestiones geométricas en el plano complejo. Es conveniente familiarizarse con estas transformaciones que surgen de modo natural al estudiar las funciones elementales de variable compleja (véanse las soluciones de los ejercicios 2.27 a 2.29, 3.8, 3.17, 3.18, 4.17, 4.25 y 7.15).

Ejercicio 2.10.

Sea C la circunferencia imagen de $|z - 1| = \sqrt{2}$ mediante la transformación $T(z) = (z - 1)/(z - 3)$. Utilice el principio de simetría para determinar el centro de C.

SOLUCIÓN.

El centro b de la circunferencia C es el simétrico de ∞ respecto a esta circunferencia. Según el principio de conservación de las simetrías $a = T^{-1}(b)$ y $3 = T^{-1}(\infty)$ son simétricos respecto a la circunferencia $|z - 1| = \sqrt{2}$, luego $a = 2$ y $b = T(2) = -1$.

Ejercicio 2.11.

Demuestre que el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ cuyas distancias a dos puntos distintos $a, b \in \mathbb{C}$ tienen una razón constante ρ es una circunferencia respecto a la cual a y b son simétricos. Determine su centro y su radio cuando $\rho \neq 1$. (Las circunferencias obtenidas así reciben el nombre de circunferencias de Apolonio de puntos límites a, b).

SOLUCIÓN.

El lugar geométrico es $S_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho|z-b|\}$, es decir, $S_\rho = T^{-1}(C_\rho)$, donde $T(z) = \frac{z-a}{z-b}$ y $C_\rho = \{w \in \mathbb{C} : |w| = \rho\}$.

Si $\rho = 1$ es claro que S_ρ es la recta mediatriz del segmento de extremos a, b.

Si $\rho \neq 1$ entonces $\infty \notin S_\rho$ (ya que $T(\infty) = 1 \notin C_\rho$), luego S_ρ es una verdadera circunferencia respecto a la que a y b son simétricos (pues $T(a) = 0$ y $T(b) = \infty$ son simétricos respecto a C_ρ). El centro c de la circunferencia S_ρ se puede calcular fácilmente aplicando otra vez el principio de simetría: los puntos $T(c)$ y $T(\infty) = 1$ son simétricos respecto a la circunferencia C_ρ, luego $T(c) = \rho^2$, y se obtiene

$$c = T^{-1}(\rho^2) = \frac{a - b\rho^2}{1-\rho^2}$$

Como la circunferencia S_ρ pasa por $T^{-1}(\rho)$, su radio es

$$|c - T^{-1}(\rho)| = \frac{\rho}{|1-\rho^2|}|b-a|.$$

(Una solución que no usa transformaciones de Möbius se puede ver en el apartado d) del ejercicio 2.7).

Ejercicio 2.12.

Sea $\mathscr{C}_1$ la familia de las circunferencias del plano que pasan por $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, y $\mathscr{C}_2$ la familia de las circunferencias respecto a las que a y b son simétricos. Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Por cada punto del plano, distinto de a y b, pasa una única circunferencia de $\mathscr{C}_1$ y una única circunferencia de $\mathscr{C}_2$.

b) Las circunferencias de $\mathscr{C}_1$ son ortogonales a las circunferencias de $\mathscr{C}_2$.

c) Si S es la simetría respecto a $C_1 \in \mathscr{C}_1$ entonces $S(C_2) = C_2$ para cada $C_2 \in \mathscr{C}_2$. Análogamente, si S es la simetría respecto a $C_2 \in \mathscr{C}_2$ se verifica $S(C_1) = C_1$ para cada $C_1 \in \mathscr{C}_1$.

SOLUCIÓN.

La transformación $T(z) = (z-a)/(z-b)$ establece una correspondencia biyectiva entre $\mathscr{C}_1$ y la familia $\mathscr{C}_1'$ formada por las rectas que pasan por 0. En virtud del principio de simetría, T también establece una biyección entre $\mathscr{C}_2$ y la familia $\mathscr{C}_2'$ formada por las circunferencias centradas en 0 (las circunferencias respecto a las que $T(a) = 0$ y $T(b) = \infty$ son simétricos).

Las propiedades a), b) y c) son inmediatas para las familias $\mathscr{C}_1'$ y $\mathscr{C}_2'$. Como estas propiedades son invariantes frente a transformaciones de Möbius se sigue que las familias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ también las cumplen.

Ejercicio 2.13.

Demuestre que un par de circunferencias del plano ampliado se pueden transformar, mediante una transformación de Möbius apropiada, en un par de circunferencias concéntricas o en un par de líneas rectas.

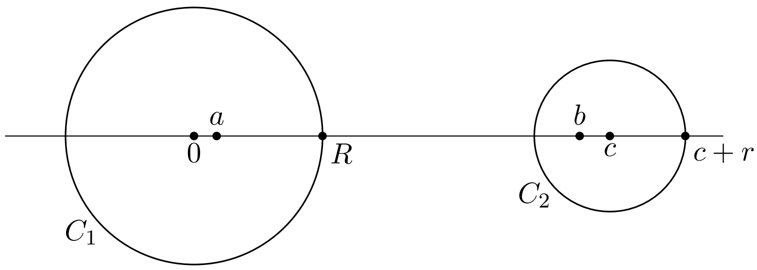
SOLUCIÓN.

Sean C_1, C_2 dos circunferencias en el plano. Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ y $a \in C_1 \cap C_2$ entonces $T(z) = 1/(z-a)$ transforma las dos circunferencias en dos líneas rectas (que serán paralelas cuando C_1 y C_2 sean tangentes en a).

Si las circunferencias no se cortan y una es exterior a la otra hay dos puntos $a, b \in \mathbb{C}$ que son simétricos respecto a ambas circunferencias. Efectivamente, eligiendo un sistema de referencia adecuado se puede suponer que C_1 está centrada en 0 y que C_2 está centrada en $c > 0$. Si $R > 0$ es el radio de C_1 y $r > 0$ el de C_2 se cumple $c > R + r$. Los puntos a, b que se buscan deben estar en el eje real y verificar

$$ab = R^2 \quad \text{y} \quad (c-a)(c-b) = r^2;$$

luego $(a+b) = (c^2 + R^2 - r^2)/c$ y se sigue que a, b son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - Bx + R^2 = 0$, con $B = (c^2 + R^2 - r^2)/c$. Observe que esta ecuación tiene dos raíces reales distintas ya que, al ser $(c-R)^2 > r^2$, se cumple $B > 2R$.



En virtud del principio de simetría $T(z) = (z-a)/(z-b)$ transforma C_1 y C_2 en circunferencias respecto a las que son simétricos $T(a) = 0$ y $T(b) = \infty$, es decir en circunferencias centradas en 0.

Finalmente, si las circunferencias C_1 y C_2 no se cortan, pero una queda dentro de la otra, también se obtiene el resultado porque con un razonamiento similar se demuestra que hay dos puntos simétricos respecto a ambas circunferencias.

Ejercicio 2.14.

Demuestre que las transformaciones de Möbius llevan circunferencias ortogonales a circunferencias ortogonales. Obtenga las circunferencias ortogonales a las dos circunferencias

$$C_1 = \{z : |z| = 1\}, \quad C_2 = \{z : |z-1| = 4\}.$$

SOLUCIÓN.

a) Teniendo en cuenta la descomposición de las transformaciones de Möbius en transformaciones elementales, basta demostrar que $T(z) = 1/z$ lleva circunferencias ortogonales a circunferencias ortogonales. La comprobación analítica de esto es inmediata usando la forma compleja de las ecuaciones de las circunferencias y la condición de ortogonalidad que se obtuvo en el ejercicio 2.5.

b) Sea a, b la única pareja de puntos que son simétricos respecto a las dos circunferencias C_1 y C_2 (vea el ejercicio 2.13). Las circunferencias ortogonales a C_1 y C_2 son precisamente las que pasan por a y b.

Efectivamente, en virtud del principio de simetría $T(z) = (z-a)/(z-b)$ transforma C_1 y C_2 en circunferencias centradas en el origen. Las circunferencias que pasan por a y b se corresponden, mediante T, con las rectas que pasan por el origen. Como estas rectas son ortogonales a $T(C_1)$ y $T(C_2)$, aplicando *a*) se concluye que las circunferencias que pasan por a y b son ortogonales a las circunferencias del enunciado y recíprocamente (véase el ejercicio 2.12).

Para terminar, basta calcular los dos puntos simétricos respecto a las circunferencias del enunciado. Estos puntos tienen que estar alineados con los centros de las circunferencias, luego deben estar en el eje real. Más aún, deben estar en una semirrecta de origen 0 y también en una semirrecta de origen 1. Uno de ellos, el que llamamos a, debe ser interior a las dos circunferencias y el otro, b, exterior a ambas, luego se deberá cumplir $-1 < a < 0$, y $b < -3$.

La condición de simetría respecto a C_1 es $ab = 1$ y la condición de simetría respecto a C_2 es $(1-a)(1-b) = 16$, luego $a + b = -14$. Entonces a y b son las soluciones de la ecuación $x^2 + 14x + 1 = 0$, es decir, $a = -7 + 4\sqrt{3}$ y $b = -7 - 4\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.15.

Busque una transformación de Möbius que transforme el abierto

$$\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z-5| > 3\}$$

en una corona circular centrada en 0.

SOLUCIÓN.

Busquemos dos puntos a, b que sean simétricos respecto al eje imaginario I y a la circunferencia $C = \{z : |z-5| = 3\}$. Como estos puntos deben estar en el eje real podemos suponer $b = -a$ con $a > 0$. La condición de simetría respecto a C es $(5-a)(5+a) = 9$, luego $a = 4$, y $b = -4$. Usando la transformación $T(z) = (z-4)/(z+4)$ se obtiene que los puntos $T(4) = 0$ y $T(-4) = \infty$ son simétricos respecto a las circunferencias $T(I)$ y $T(C)$, lo que significa que ambas están centradas en 0.

Teniendo en cuenta que $-1 = T(0) \in T(I)$, $-1/3 = T(2) \in T(C)$, se concluye que el radio de $T(I)$ es 1 y el radio de $T(C)$ es $1/3$. Finalmente, como T es biyectiva, $1 \in \Omega$ y $T(1) = -3/5$, se obtiene que

$$T(\Omega) = T(\{z : \operatorname{Re} z > 0\}) \cap T(\{z : |z-5| > 3\}) = \{z : 1/3 < |z| < 1\}.$$

Ejercicio 2.16.

Obtenga una transformación de Möbius que transforme la circunferencia $|z| = 1$ *en una recta paralela al eje imaginario, el punto* $z = 4$ *en el punto* $w = 0$ *y la circunferencia* $|z| = 2$ *en ella misma.*

SOLUCIÓN.

Con una transformación de la forma $T(z) = (z-a)/(z-1)$ se consigue que la circunferencia $|z| = 1$ se transforme en una recta. El simétrico de $b = 1$ respecto a la circunferencia $|z| = 2$ es $b^* = 4$ luego con $a = 4$ se consigue una transformación que lleva la circunferencia $|z| = 2$ a una circunferencia respecto a la que $T(4) = 0$ y $T(1) = \infty$ son simétricos, es decir, una circunferencia centrada en 0 que pasa por $T(2) = -2$.

Queda establecido así que $T(z) = (z-4)/(z-1)$ deja invariante la circunferencia $|z| = 2$. Por otra parte, T transforma la circunferencia $|z| = 1$ en una recta paralela al eje imaginario ya que $T(0) = 4$ y $T(\infty) = 1$ son simétricos respecto a ella.

Ejercicio 2.17.

Utilice el principio de simetría para determinar $S(\Omega_1)$ y $T(\Omega_2)$ donde

$$\begin{aligned} &S(z) = (z-i)/(z+i), && \Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}; \\ &T(z) = z/(z-1), && \Omega_2 = \{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \tfrac{\pi}{4}\} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

a) $\Omega_1 = P \cap Q$ donde $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y $Q = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Como S es biyectiva, $S(\Omega_1) = S(P) \cap S(Q)$.

Determinación de $S(Q)$. Aunque es obvio que S transforma el eje imaginario en el eje real, indicamos cómo llegar a este resultado usando el principio de simetría. S transforma el eje imaginario en una recta (pues $S(-i) = \infty$) respecto a la que $S(1) = -i$ y $S(-1) = i$ son simétricos, luego la recta es el eje real. Como $1 \in Q$ y $S(1) = -i$ se sigue que $S(Q) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Determinación de $S(P)$. Con el principio de simetría también se obtiene la imagen del eje real. Los puntos i, $-i$ son simétricos respecto al eje real, luego $S(i) = 0$ y $S(-i) = \infty$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen del eje real. Por lo tanto el centro de esta circunferencia es 0 y el radio es $1 = |S(0)|$. Como $i \in P$ y $S(i) = 0$, resulta $S(P) = \{z : |z| < 1\}$. Se obtiene así

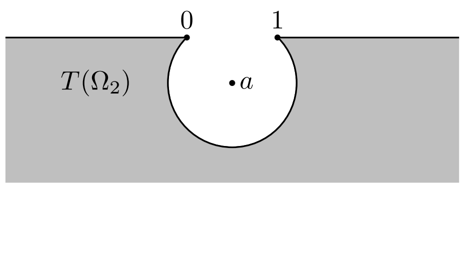
$$S(\Omega_1) = S(P) \cap S(Q) = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$

b) $\Omega_2 = A \cap P$ donde $A = \{x + iy : x > y\}$ y $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Como T es biyectiva, $T(\Omega_2) = T(A) \cap T(P)$.

Determinación de $T(A)$. T transforma la recta $x = y$ en una circunferencia que pasa por $T(\infty) = 1$. Como $T(1) = \infty$, su centro a es la imagen del simétrico de 1 respecto a esta recta, es decir $a = T(i) = (1-i)/2$. El radio de la circunferencia es $r = |a-1| = \sqrt{2}/2$. Como $i \notin A$ se sigue que $T(A) = \{z : |z-a| > r\}$.

Determinación de $T(P)$. T transforma el eje real en si mismo y la imagen de $1 + i \in P$ es $T(1+i) = 1-i$, luego $T(P) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Se obtiene así

$$T(\Omega_2) = T(A) \cap T(P) = \{z : |z-a| > r,\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$



Ejercicio 2.18.

En cada caso obtenga una transformación de Möbius T con $T(\Omega) = G$:

a) $\Omega = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\quad G = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

b) $\Omega = \{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad G = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

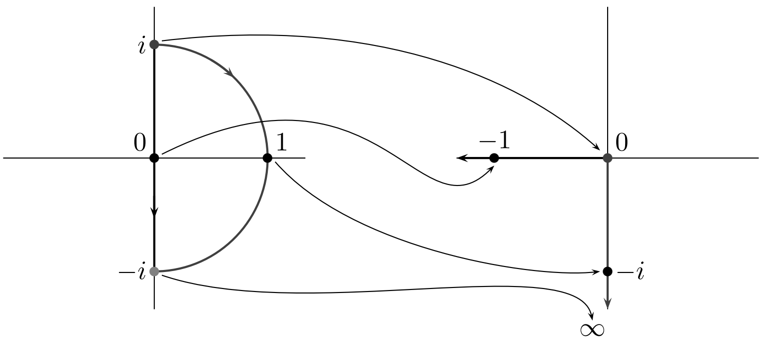
SOLUCIÓN.

a) Ω es una de las cuatro regiones determinadas por dos circunferencias (en sentido amplio) que se cortan ortogonalmente en $z = i$ y $z = -i$. Con la transformación $S(z) = (z-i)/(z+i)$ estas circunferencias se convierten en dos rectas perpendiculares que pasan por el origen, luego $S(\Omega)$ es uno de los cuatro cuadrantes determinados por estas rectas. Aunque es fácil obtener $S(\Omega)$ razonando como en el ejercicio 2.17, a título ilustrativo mostramos cómo obtenerlo con el principio de conservación de las orientaciones.

El semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, que es el lado izquierdo del eje imaginario orientado con la terna $(i, 0, -i)$, se transforma en $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, que es el lado izquierdo del eje real orientado con la terna $(0, -1, \infty) = (S(i), S(0), S(-i))$.

El disco $\{z : |z| < 1\}$, que es el lado derecho de la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ orientada mediante la terna $(i, 1, -i)$, se transforma en el lado derecho del eje imaginario, orientado con la terna $(0, -i, \infty) = (S(i), S(1), S(-i))$, que es el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

En definitiva, como S es biyectiva, $S(\Omega) = \{z : \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$, luego $T = -S$ cumple la condición requerida en el enunciado.



b) Se puede razonar como en *a)*, pero es obvio que $T(z) = -1/z$ cumple la condición deseada.

Ejercicio 2.19.

Demuestre que la forma general de una transformación de Möbius T que deja invariante el disco $D(0,1)$ es

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \text{con } |\mu| = 1 \text{ y } |a| < 1.$$

SOLUCIÓN.

Si $T \in \mathscr{M}$ es de la forma indicada en el enunciado y $|z| = 1$ se cumple

$$|T(z)| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}z - \bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} = 1,$$

luego T transforma la circunferencia $|z| = 1$ es sí misma. Por razones de conexión, $T\big(D(0,1)\big)$ es una de las dos regiones $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$ y, puesto que $|a| < 1$ y $T(a) = 0$, se concluye que $T\big(D(0,1)\big) = D(0,1)$.

Recíprocamente, supongamos que $T \in \mathscr{M}$ deja invariante el disco $D(0,1)$. Como $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es un homeomorfismo debe cumplir que $T\big(\partial D(0,1)\big) = \partial T\big(D(0,1)\big)$, es decir $|z| = 1$ si y sólo si $|T(z)| = 1$. Si $a = T^{-1}(0)$ debe ser $|a| < 1$ y según el principio de simetría el simétrico de a respecto a la circunferencia $|z| = 1$ debe ser $b = T^{-1}(\infty)$, luego $b = 1/\overline{a}$. Se sigue de esto que T es de la forma

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \text{con } |a| < 1.$$

Cuando $|z| = 1$, al sustituir $1 = z\overline{z}$ en la fórmula anterior se obtiene

$$|T(z)| = |\mu| \frac{|z-a|}{|z(\overline{z}-\overline{a})|} = \frac{|\mu|}{|z|} = |\mu|$$

y la condición $|\mu| = 1$ garantiza que $|T(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Por lo tanto, las transformaciones de Möbius que dejan invariante el disco $D(0,1)$ son las de la forma indicada en el enunciado.

Análogamente, las transformaciones de Möbius que dejan invariante el disco $D(0,R)$ son las de la forma

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{R^2 - \overline{a}z} \quad \text{con } |a| < R \text{ y } |\mu| = R^2.$$

Ejercicio 2.20.

Demuestre que la forma general de una transformación de Möbius T que deja invariante el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ es

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{donde} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0$$

SOLUCIÓN.

Toda transformación de Möbius T que verifique $T(P) = P$ debe cumplir $T(\partial P) = \partial P$, es decir T debe transformar la recta real en sí misma. Como los tres puntos $z_1 = T^{-1}(0)$, $z_2 = T^{-1}(1)$, $z_3 = T^{-1}(\infty)$, están en la recta real, usando la fórmula para la razón doble $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ se obtiene una expresión $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ en la que todos los coeficientes a, b, c, d son reales y cumplen la condición $ad - bc = (c^2 + d^2) \operatorname{Im} T(i) > 0$.

Recíprocamente, si T es de esta forma deja invariante la recta real $\mathbb{R}_\infty$ y, por razones de conexión, $T(P)$ debe ser uno de los dos semiplanos $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $-P = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$; ahora bien, con la condición $\operatorname{Im} T(i) = (ad - bc)/(d^2 + c^2) > 0$ se concluye que $T(P) = P$.

Ejercicio 2.21.

Obtenga la forma general de las transformaciones de Möbius que transforman el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en el disco $D(0,R)$.

SOLUCIÓN.

Toda transformación de Möbius T que verifique $T(P) = D(0, R)$ debe transformar el eje real en la circunferencia $|z| = R$. Si $a = T^{-1}(0)$, en virtud del principio de simetría, se debe cumplir que $\overline{a} = T^{-1}(\infty)$, luego T es de la forma

$$T(z) = \mu \frac{z - a}{z - \overline{a}} \quad \text{con } \operatorname{Im} a > 0, \; |\mu| = R.$$

La condición $|\mu| = R$ es la que garantiza que $|T(x)| = R$ cuando $z = x \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si T es de este tipo, es claro que $T(P) = D(0, R)$.

2.2.3. Otras transformaciones. La transformación de Joukowski

Para definir una función de variable compleja mediante la composición de otras dos hay que averiguar si la imagen de una de ellas está contenida en el dominio de la otra. Para calcular la imagen de una transformación definida explícitamente mediante una fórmula concreta la técnica consiste en descomponerla en transformaciones elementales cuyo comportamiento es conocido. En este asunto, además de las transformaciones de Möbius, suelen intervenir otras transformaciones sencillas como las consideradas en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 2.22.

Estudie los abiertos sobre los que la transformación $f(z) = z^2$ es inyectiva. Compruebe que es inyectiva sobre

$$A := \{x + iy : x > 0, y > 0\}, \; P := \{x + iy : y > 0\} \text{ y } H := \{x + iy : x > 0\}$$

Obtenga las imágenes de estos conjuntos por f y fórmulas explícitas para las inversas de $f|_A$, $f|_P$ y $f|_H$.

SOLUCIÓN.

Obsérvese que $f(z) = z^2$ no es inyectiva en ningún entorno de 0, pues en el entorno siempre hay pares de puntos distintos $a, -a$ con la misma imagen. Para cada $w \neq 0$ la ecuación $z^2 = w$ tiene exactamente dos soluciones, una opuesta de la otra. Por lo tanto $f(z) = z^2$ es inyectiva sobre cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ con la propiedad de no contener parejas de puntos simétricos respecto al origen, es decir, tal que si $z \in \Omega$ entonces $-z \notin \Omega$. Es claro que los abiertos A, P y H tienen esta propiedad.

Como estos abiertos tienen una descripción simple en coordenadas polares es fácil calcular sus imágenes mediante la transformación $f(re^{i\alpha}) = r^2 e^{i2\alpha}$.

$$f(A) = P; \quad f(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}; \quad f(H) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Se sigue que la transformación $z \to z^2$ establece una biyección entre cada uno de los abiertos A, P, H y su imagen. Obsérvese que mientras que la inversa de $f|_H$ es la raíz cuadrada principal $\sqrt{z}$, la inversa de $f|_P$ es $i\sqrt{-z}$. Es claro que estas biyecciones son homeomorfismos. Más aún, son difeomorfismos de clase C^∞ cuando se consideran en el ámbito del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.23.

Realize un esquema gráfico de la transformación $w = z^2$, usando coordenadas cartesianas en los planos de las variables $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Utilícelo para deducir que esta transformación establece una biyección entre las siguientes parejas de abiertos (donde $\alpha > 0$):

$$\begin{array}{lll} V_\alpha = \{x + iy : x^2 - y^2 > \alpha\} & \to & H_\alpha = \{u + iv : u > \alpha\} \\ H_\alpha = \{x + iy : x > \alpha\} & \to & U_\alpha = \{u + iv : v^2 > 4\alpha^2(\alpha^2 - u)\} \end{array}$$

SOLUCIÓN.

Para cada $w \neq 0$ la ecuación $z^2 = w$ tiene exactamente dos soluciones, una opuesta de la otra, luego z^2 es inyectiva sobre cada subconjunto abierto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que tenga la propiedad de no contener parejas de puntos simétricos respecto al origen. Obviamente V_α y H_α tienen esta propiedad.

En coordenadas cartesianas las ecuaciones de la transformación z^2 son

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

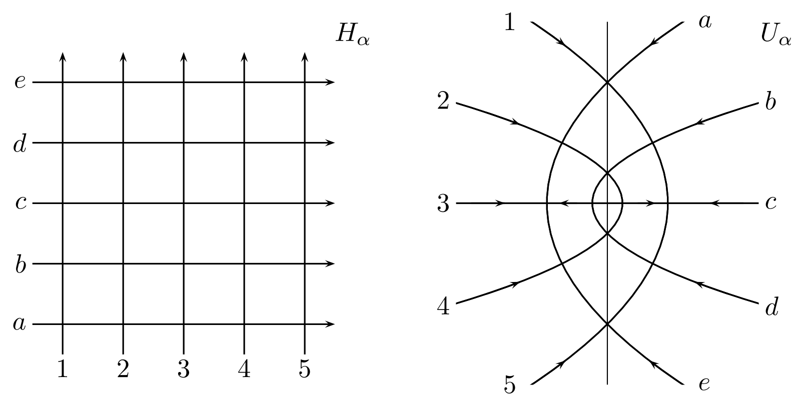
Las rectas $z(t) = c + it$ se transforman en las parábolas $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ de ecuaciones paramétricas

$$u = c^2 - t^2, \qquad v = 2ct, \qquad -\infty < t < +\infty,$$

y las rectas $z(t) = t + ic$ se transforman en las parábolas $v^2 = 4c^2(c^2 + u)$ de ecuaciones paramétricas

$$u = t^2 - c^2, \qquad v = 2ct, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

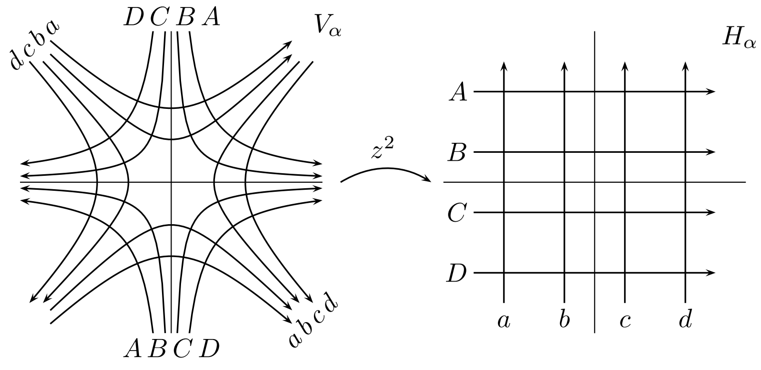
Las parábolas de las dos familias tienen el foco en $(0, 0)$ y las de la primera (resp. segunda) familia tienen los ejes dirigidos en la dirección negativa (resp. positiva) del eje Ou. Obsérvese que, de acuerdo con lo que se verá en el ejercicio 3.27, las parábolas de una familia son ortogonales a las de la otra. Además, para $x = c$ y $x = -c$ se obtienen las misma parábolas pero recorridas en sentidos opuestos. Lo mismo ocurre con las que corresponden a $y = c$ e $y = -c$. Considerando la evolución de las parábolas del plano (x, y), cuando c recorre $(\alpha, +\infty)$ se observa que la imagen de H_α es U_α, luego z^2 establece una biyección entre H_α y U_α.



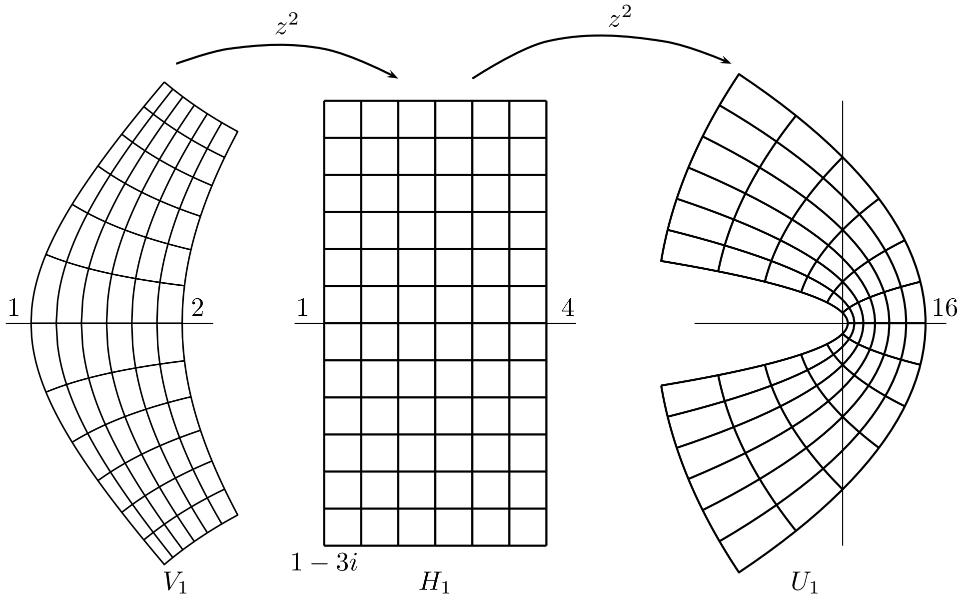
Por otra parte, las curvas del plano (x, y) que corresponden a las rectas $u = c$ y $v = c$ del plano (u, v) forman las familias de hipérbolas

$$x^2 - y^2 = c, \qquad 2xy = c.$$

Aquí también se cumple, de acuerdo con el ejercicio 3.27, que las hipérbolas de la primera familia son ortogonales a las de la segunda.



Observando la evolución de estas hipérbolas cuando c recorre $(\alpha, +\infty)$, así como el sentido de recorrido de las mismas, se observa que cuando $w = u + iv$ describe una de las rectas $u = cte$ (resp. $v = cte$) entonces los dos puntos que le corresponden en el plano z (sus dos raíces cuadradas) se mueven cada una en una rama de la correspondiente hipérbola, manteniéndose simétricas respecto al origen. Con este esquema se aprecia que z^2 transforma biyectivamente V_α en H_α.



Ejercicio 2.24.

Utilice la transformación $w = z^2$, combinada con una transformación de Möbius para obtener una biyección entre el abierto

$$\Omega = \{x + iy : x > a, x^2 - y^2 > a^2\}$$

y el disco $\{w : |w| < 1\}$, de modo que el foco de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ corresponda a $w = 0$ y el vértice a $w = -1$.

SOLUCIÓN.

Los focos de la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son los puntos $\pm c$ tales que $c^2 = a^2 + b^2$. En el caso que nos ocupa los focos son $\pm\sqrt{2}a$. La rama de la hipérbola que limita Ω es la que tiene el vértice en a y el foco en $\sqrt{2}a$.

En términos de las componentes de $z = x + iy$ y $w = u + iv$ la transformación $w = z^2$ viene dada por las ecuaciones

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Teniendo en cuenta el ejercicio 2.23 es claro que la función z^2 establece una biyección entre Ω y el semiplano $H = \{u + iv : u > a^2\}$. Para terminar basta componer z^2 con una transformación de Möbius T tal que

$$T(H) = D(0,1), \quad T(2a^2) = 0, \quad T(a^2) = -1.$$

El principio de simetría ayuda a determinar T: los puntos 0 y $2a^2$ son simétricos respecto a la recta $\operatorname{Re} z = a^2$ que queremos transformar en la circunferencia $|z| = 1$; por lo tanto si $T(2a^2) = 0$ debe ser $T(0) = \infty$, luego T es de la forma $T(z) = A + B/z$. Las condiciones $T(2a^2) = 0$ y $T(a^2) = -1$ conducen a los valores $A = 1$ y $B = -2a^2$. Se obtiene así que $f(z) = 1 - 2(a/z)^2$ es una biyección con las propiedades requeridas.

Ejercicio 2.25.

Utilice la transformación $w = z^2$ combinada con una transformación de Möbius para obtener una biyección entre $\Omega = \{x + iy : y^2 > 2px\}$ $(p > 0)$, y el disco $\{w : |w| < 1\}$ de modo que los puntos $z = 0$ y $z = -p/2$ se transformen en $w = 1$ y $w = 0$ respectivamente.

SOLUCIÓN.

Sea $R(z) = i\sqrt{-z}$ la rama de la raíz cuadrada definida en el complementario del eje real positivo. Si $w = R(z)$, en términos de coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $w = u + iv$ se verifica

$$u^2 - v^2 = x, \quad 2uv = y.$$

Si $c > 0$ el abierto $\Omega_1 = \{x + iy : y^2 > 4c^2(x + c^2)\}$ está contenido en el dominio de R y $R(\Omega_1)$ es el semiplano $H = \{u + iv : v > c\}$ (obsérvese que R transforma la parábola $y^2 = 4c^2(x + c^2)$ en la recta $v = c$). Con $c = \sqrt{p/2}$ se obtiene

$$\Omega_1 = \{x + iy : y^2 > 2p(x + p/2)\} = s(\Omega)$$

donde $s(z) = z - p/2$. Como

$$R(s(0)) = R(-p/2) = i\sqrt{p/2}, \quad R(s(-p/2)) = R(-p) = i\sqrt{p}$$

la solución se puede obtener componiendo $R(s(z)) = i\sqrt{p/2 - z}$ con una transformación de Möbius T que cumpla

$$T(H) = D(0,1), \quad T(i\sqrt{p/2}) = 1, \quad T(i\sqrt{p}) = 0.$$

Una transformación con estas propiedades se consigue con el principio de simetría: el simétrico de $i\sqrt{p}$ respecto a la recta $y = \sqrt{p/2}$ es $i(\sqrt{2} - 1)\sqrt{p}$ cuya imagen, mediante T, ha de ser ∞. Estas condiciones conducen a

$$T(z) = \frac{z - i\sqrt{p}}{i(\sqrt{2} - 1)\sqrt{p} - z}$$

Con $\alpha = \sqrt{p}$, $\beta = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{p}$, se obtiene que

$$f(z) = \frac{\sqrt{p/2 - z} - \alpha}{\beta - \sqrt{p/2 - z}}$$

es una biyección entre Ω y el disco $D(0, 1)$ que cumple los requisitos del enunciado. La transformación inversa es

$$g(z) = \frac{p}{2} - \left(\frac{\alpha + \beta z}{1 + z}\right)^2.$$

Ejercicio 2.26.

Sea $J : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ la transformación de Joukowski definida por

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ si } z \notin \{0, \infty\}, \quad J(0) = J(\infty) = \infty.$$

Visualice la transformación obteniendo las imágenes de las circunferencias $C_r(t) = re^{it}$, $r > 0$, y de las semirrectas $L_t = \{re^{it} : r \geq 0\}$, $t \in [0, 2\pi)$.

Obtenga las imágenes $J(P)$, $J(D)$ del semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y del disco $D = D(0, 1)$, y muestre que J establece una biyección entre cada uno de estos abiertos y su imagen.

Justifique que con la función J se pueden establecer biyecciones entre un semidisco y un semiplano, y entre el exterior de un disco y el exterior de una elipse.

SOLUCIÓN.

Imágenes de las circunferencias C_r.

Fijado $r > 0$, la imagen de la circunferencia $C_r(t) = re^{it}$ es la elipse $E_r(t)$ de ecuaciones paramétricas

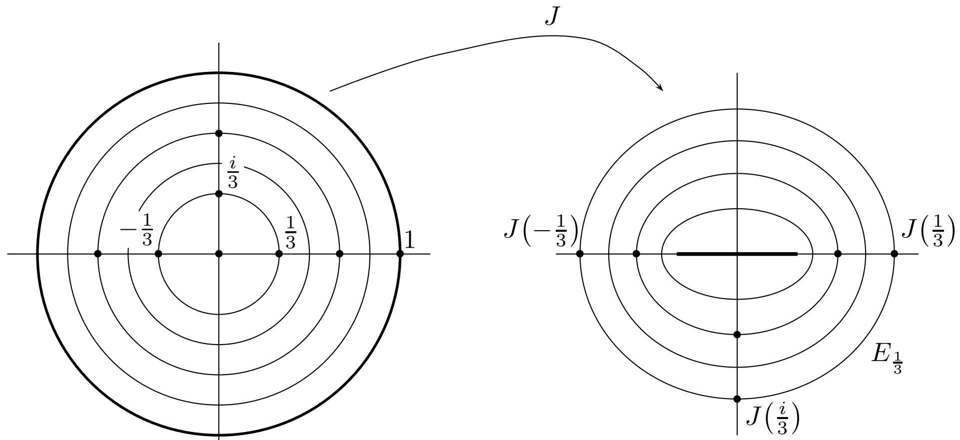
$$u(t) = a \cos t, \quad v(t) = b \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

de semiejes $a = \frac{1}{2}(r + 1/r)$ y $b = \frac{1}{2}(r - 1/r)$, con focos en los puntos 1 y -1.

Cuando r tiende hacia 0, o hacia ∞, la longitud de los semiejes crece hacia ∞. Si $0 < r < 1$ (resp. $r > 1$) entonces $b < 0$ (resp. $b > 0$) luego E_r se recorre en sentido negativo (resp. positivo). Puesto que las elipses E_r y $E_{1/r}$ coinciden, salvo el sentido de recorrido, basta considerar el caso $0 < r \leq 1$.

Cuando $0 < r < 1$ se aproxima al valor 1, el semieje mayor de la elipse, $[-a, a]$, se aproxima al segmento $[-1, 1]$, mientras que la longitud del semieje menor tiende hacia cero. Para $r = 1$ la elipse E_r degenera en el segmento $[-1, 1]$, recorrido dos veces en el sentido $1 \to -1 \to 1$, y a través de esta elipse degenerada se realiza la transición entre las orientaciones opuestas que aparecen para $r < 1$ y para $r > 1$.

Para cada $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$ la ecuación $J(z) = w$ tiene dos soluciones, z_1 y z_2, donde $z_1 \in D(0, 1)$ y $z_2 = 1/z_1 \in D(\infty, 1)$, luego por cada punto $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1]$ pasa una y sólo una de las elipses E_r con $r < 1$ (y una y sólo una de las elipses E_r con $r > 1$).



$J(\{z : 0 < |z| < 1\}) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

Imágenes de las semirrectas L_t.

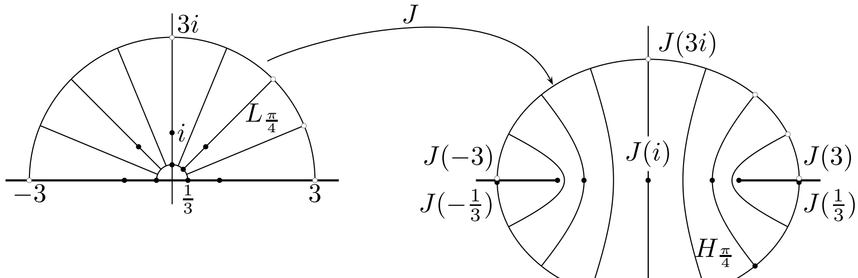
Fijado $t \in [0, 2\pi]$, la imagen de la semirrecta $L_t(r) = re^{it}$, $r > 0$, es el camino $H_t(r)$ de ecuaciones paramétricas

$$u(r) = \frac{\alpha}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad v(r) = \frac{\beta}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \quad r > 0,$$

donde $\alpha = \cos t$ y $\beta = \operatorname{sen} t$. Eliminando el parámetro r se observa que este camino recorre una de las ramas de la hipérbola $u^2/\alpha^2 - v^2/\beta^2 = 1$, atravesando el eje real para $r = 1$.

Atendiendo al signo de α y β se aprecia que, cuando $0 < t < \pi$ está fijo y r crece desde 0 hasta $+\infty$, el punto $(u(r), v(r))$ describe la rama de la hipérbola en el sentido en que crece v, de tal modo que la parte que queda en el semiplano $\operatorname{Im} z < 0$ (resp. $\operatorname{Im} z > 0$) corresponde a los valores $0 < r < 1$ (resp. $r > 1$).

Para $t = \pi/2$ la rama de hipérbola $H_{\pi/2}$ degenera en el eje imaginario y para $t = 0$ y $t = \pi$ las ramas de hipérbola H_0 y H_π degeneran, respectivamente, en las semirrectas $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$, que aparecen recorridas dos veces en el sentido $+\infty \to 1 \to +\infty$ y $-\infty \to -1 \to -\infty$ respectivamente. Más precisamente, a través de H_π se realiza la transición entre el comportamiento para $0 < t < \pi$ y el comportamiento para $t \in (\pi, 2\pi)$ que es simétrico al anterior, pero las ramas de las hipérbolas se recorren en el sentido en que decrece v.



$J(\{z : \operatorname{Im} z > 0\}) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$

Con esta descripción de la transformación en coordenadas polares es claro que:

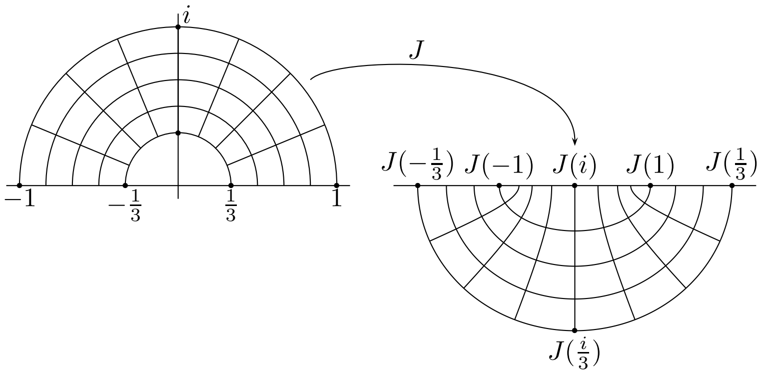
$$J(D) = \mathbb{C}_\infty \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}, \quad J(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$

y también que $J(D^+) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, donde $D^+ = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. (En el ejercicio 2.27 se obtienen $J(D)$ y $J(P)$ por otro procedimiento).

Merece la pena observar cómo se corresponden las fronteras en la biyección $J : D^+ \longrightarrow \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Cuando z recorre la frontera de D^+ en el sentido $0 \to 1/3 \to 1 \to i \to -1 \to -1/3 \to 0$, su imagen $w = J(z)$ recorre la frontera del semiplano $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ en el sentido

$$\infty \to J(1/3) \to 1 = J(1) \to 0 = J(i) \to -1 = J(-1) \to J(-1/3) \to \infty.$$

Para los lectores que ya conozcan los resultados básicos sobre transformaciones conformes (véase el apartado 3.1.4) se advierte que se produce el fenómeno de duplicación de ángulos en los puntos ± 1, donde se anula la derivada J'.



La descripción de la transformación en coordenadas polares también revela que para $r > 1$ (resp. $0 < r < 1$) la función $z \to J(rz)$ transforma $\{z : |z| > 1\}$ (resp. $D^*(0, 1)$) en la región exterior a la elipse

$$\left\{x + iy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1\right\}$$

donde $a = \frac{1}{2}(r + 1/r)$ y $b = \frac{1}{2}(r - 1/r)$. Obsérvese que las elipses de esta forma cumplen la condición $a^2 - b^2 = 1$ y que toda elipse $x^2/a^2 + y^/b^2 = 1$ con esta condición se puede expresar en la forma anterior con $r = a + b > 1$, ya que $1/r = 1/(a + b) = a - b$.

Por otra parte, una elipse arbitraria se puede transformar, mediante una traslación seguida de un giro y una homotecia respecto al origen, en otra elipse de la forma considerada anteriormente. Por lo tanto, para una elipse arbitraria siempre es posible encontrar una biyección del tipo $z \to \mu J(rz) + \nu$ entre $\{z : |z| > 1\}$ y el exterior de la elipse.

Así queda establecido que con la transformación de Joukowski se puede conseguir una biyección entre un semi disco y un semiplano y una biyección entre el exterior de un disco y el exterior de una elipse.

Nota. Los lectores que conozcan la noción de transformación conforme advertirán que todas las biyecciones que han sido establecidas en este ejercicio son realmente isomorfismos conformes.

Ejercicio 2.27.

Determine la clase de los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ sobre los que es inyectiva la transformación de Joukowski $J : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida en el ejercicio 2.26. Compruebe que J es inyectiva sobre $D = D(0, 1)$ y sobre $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Si Ω es una de las dos regiones del *plano ampliado limitadas por una circunferencia Γ que pasa por $+1$ y -1, demuestre que J también es inyectiva sobre Ω. Compruebe que $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$, con $T(z) = (z-1)/(z+1)$, y utilice esta descomposición para calcular $J(D)$, $J(P)$ y $J(\Omega)$.*

SOLUCIÓN.

La condición $J(a) = J(b)$, con $a, b \in \mathbb{C}$, se escribe en la forma

$$(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=0$$

luego $J(a) = J(b)$ con $a \neq b$ si y sólo si $ab \neq 1$. En todo entorno de 1 y en todo entorno de -1 existen puntos $a \neq b$ con $ab = 1$, luego para que J sea inyectiva sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es necesario que $\Omega \cap \{-1, +1\} = \emptyset$. (Anticipando resultados de la teoría de funciones holomorfas también se puede obtener lo mismo observando que $\{z \in \mathbb{C}_\infty : J'(z) = 0\} = \{+1, -1\}$, y teniendo en cuenta que la derivada de una función holomorfa inyectiva no se anula nunca, véase el ejercicio 4.52).

Si suponemos que se cumple la condición necesaria $\Omega \cap \{-1, +1\} = \emptyset$, se tendrá $J(\Omega) \cap \{-1, +1\} = \emptyset$. Este hecho garantiza que si $w \in J(\Omega)$ y $w \neq \infty$ entonces la ecuación $J(z) = w$ tiene dos soluciones finitas distintas a, $b = 1/a$ (las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2 - 2wz + 1 = 0$). Cuando $w = \infty \in J(\Omega)$ la ecuación $J(z) = \infty$ también tiene dos soluciones distintas $a = 0$, $b = \infty$, que verifican $a = 1/b$. En definitiva, una condición necesaria y suficiente para que J sea inyectiva sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es que se cumpla

$$z \in \Omega \Rightarrow 1/z \notin \Omega.$$

Es claro que D y P cumplen esta condición. Para ver que Ω también la cumple basta ver que si z está en el disco limitado por Γ entonces $1/z$ está en el exterior del disco. Efectivamente, existe $t > 1$ tal que $a = tz \in \Gamma$, y como la razón doble $(1, -1, a, 1/a) = 2$ es real se tiene que $1/a \in \Gamma$, con lo cual $1/z = t/a$ está en la región exterior del disco limitado por Γ.

Con un sencillo cálculo se comprueba la igualdad $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$ donde $T^{-1}(z) = (1+z)/(1-z)$. Con esta descomposición es fácil calcular $J(P)$ y $J(D)$, como se muestra a continuación.

Es claro que $T(P) = P$ (véase el ejercicio 2.20). La imagen de P mediante la transformación z^2 es el abierto $\Omega_{-1} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Usando la teoría de las transformaciones de Möbius se obtiene

$$J(P) = T^{-1}(\Omega_{-1}) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

Se comprueba fácilmente que $T(D)$ es el semiplano $H = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, cuya imagen mediante la transformación z^2 es $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, luego

$$J(D) = T^{-1}(\Omega_1) = \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1].$$

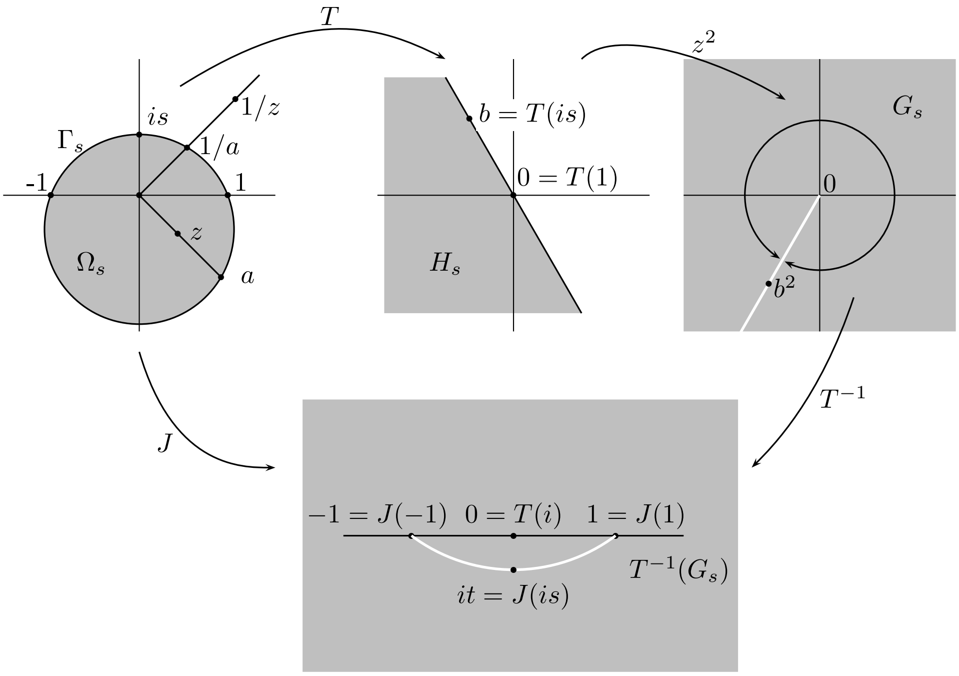
La imagen $J(\Omega)$ también se puede calcular usando la descomposición $J = T^{-1}(T^2)$. Efectivamente, $T(\Gamma)$ es una recta que pasa por el origen (pues $T(1) = 0$ y $T(-1) = \infty$) luego $H = T(\Omega)$ es un semiplano abierto. Su imagen U mediante z^2 es el complemento de una semirrecta que surge del origen, luego $J(\Omega) = T^{-1}(U)$ es el complemento de un arco de circunferencia de extremos $T^{-1}(0) = 1$ y $T^{-1}(\infty) = -1$

$$\Omega \xrightarrow{T} H \xrightarrow{z^2} U \xrightarrow{T^{-1}} J(\Omega)$$

Para determinar de modo más concreto $J(\Omega)$ suponemos que la circunferencia Γ está dada y orientada mediante la terna $(+1, is, -1)$, donde $s > 0$, de modo que Ω es el lado izquierdo de Γ. Es claro que $T(\Gamma)$ es la recta que pasa por el origen y por $b = T(is)$. Orientando esta recta mediante el par $(0, b)$ se obtiene que $H = T(\Omega)$ es el semiplano izquierdo $\operatorname{Im}(z/b) > 0$ (el que contiene al punto ib). Obsérvese que

$$b = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} + i\frac{2s}{s^2 + 1}$$

está en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ y pertenece al primer o segundo cuadrante según sea $s > 1$ o $s < 1$ y que $b = i$ cuando $s = 1$.



Con z^2 se establece una biyección entre H y $U = \mathbb{C} \setminus \{tb^2 : t \geq 0\}$, luego $J(\Omega) = T^{-1}(U) = \mathbb{C}_\infty \setminus C_t$, donde C_t es el arco de circunferencia, de extremos $+1$ y -1, que pasa por $it = \frac{i}{2}(s - 1/s) = J(is) = T^{-1}(b^2)$. Para $s > 1$ (resp. $s < 1$) el arco queda en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (resp. $\operatorname{Im} z < 0$), y para $s = 1$ el arco es el segmento $[-1, 1]$ (un resultado análogo se obtendrá en el ejercicio 3.36).

Ejercicio 2.28.

Sea $J : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ *la transformación de Joukowski definida en el ejercicio 2.26. Sea* $T(z) = (z-1)/(z+1)$*, utilice la descomposición* $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$ *para obtener fórmulas explícitas para las inversas de* $J|_P$ *y* $J|_D$*, donde* $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ *y* $D = D(0, 1)$ *(véase el ejercicio 2.27).*

SOLUCIÓN.

En el ejercicio 2.27 se ha demostrado que J es inyectiva sobre P y sobre D y se han calculado las imágenes

$$J(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \quad J(D) = \mathbb{C}_\infty \setminus [-1, 1].$$

Utilizando la descomposición $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$, es fácil calcular fórmulas explícitas para las inversas de $J|_P$ y $J|_D$.

Con las notaciones del ejercicio 2.27 y teniendo en cuenta que la inversa de $P \xrightarrow{z^2} \Omega_{-1}$ es $h(z) = i\sqrt{-z}$, se obtiene que la inversa de $J|_P$ viene dada por la fórmula

$$w = (T^{-1} \circ h \circ T)(z) = \frac{1 + h(T(z))}{1 - h(T(z))} = z + (z+1)h(T(z)).$$

Multiplicando numerador y denominador por $1 + h(T(z))$ esta fórmula se simplifica en la forma

$$w = z + i(1+z)\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Análogamente, usando la descomposición

$$J|_D : D \xrightarrow{T} H \xrightarrow{z^2} \Omega_1 \xrightarrow{T^{-1}} J(D)$$

y teniendo en cuenta que $g(z) = -\sqrt{z}$ es la inversa de $H \xrightarrow{z^2} \Omega_1$ se obtiene una fórmula para la inversa de $J|_D$:

$$w = (T^{-1} \circ g \circ T)(z) = \frac{1 + g(T(z))}{1 - g(T(z))} = z + (z+1)g(T(z)),$$

que se simplifica en la forma

$$w = z - (z+1)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

Nota. En el ejercicio 3.9 se se pueden ver otras fórmulas para las inversas de $J|_P$ y $J|_D$, las cuales, según el ejercicio 3.8, definen las mismas funciones que las fórmulas obtenidas aquí.

Ejercicio 2.29.

Sea J la transformación de Joukowski definida en el ejercicio 2.26 y Ω una de las regiones del plano limitadas por una circunferencia que pasa por $+1$ y -1. Utilice la descomposición $J(z) = T^{-1}(T(z)^2)$, con $T(z) = (z-1)/(z+1)$, para obtener fórmulas explícitas de la inversa de $J|_\Omega$. (En el ejercicio 2.27 se ha visto que J es inyectiva sobre Ω y se ha calculado $J(\Omega)$).

SOLUCIÓN.

Sea Γ es una circunferencia que pasa por los puntos $+1$ y -1; ya sabemos que las dos regiones limitadas por Γ tienen la misma imagen, que es es el complemento de un arco de circunferencia de extremos $+1, -1$. Suponemos en lo que sigue que Ω es la región acotada, es decir, el disco abierto limitado por Γ (el otro caso es análogo y se deja al cuidado del lector). En lo que sigue continuamos con la notación introducida en el ejercicio 2.27, suponiendo que Γ es la circunferencia que pasa por los tres puntos $\{+1, is, -1\}$, donde $s > 0$, de modo que $H = T(\Omega)$ es el semiplano $\operatorname{Im}(z/b) > 0$, donde

$$b = T(is) = \frac{s^2-1}{s^2+1} + i\frac{2s}{s^2+1}$$

es un punto que queda en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ y pertenece al primer o segundo cuadrante, según sea $s > 1$ o $s < 1$, y que $b = i$ cuando $s = 1$.

Como la aplicación z^2 establece una biyección entre el semiplano H y el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{tb^2 : t \geq 0\}$, resulta $J(\Omega) = T^{-1}(U) = \mathbb{C}_\infty \setminus C_t$, donde C_t es el arco de circunferencia de extremos $+1$ y -1 que pasa por el punto

$$it = \frac{i}{2}(s - 1/s) = J(is) = T^{-1}(b^2).$$

Obsérvese que para $s > 1$ (resp. $s < 1$) el arco queda en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ (resp. $\operatorname{Im} z < 0$) y que para $s = 1$ el arco es el segmento $[-1, 1]$ (véase el ejercicio 3.36).

Como T es biyectiva, se consigue una fórmula explícita para la inversa de

$$J|_\Omega : \Omega \xrightarrow{T} H \xrightarrow{z^2} U \xrightarrow{T^{-1}} V = J(\Omega)$$

eligiendo, entre las dos ramas de la raíz cuadrada de z que hay definidas en U, la que corresponde a la inversa de $H \xrightarrow{z^2} U$. En este caso, si h es la rama apropiada, la inversa de $J|_\Omega$ vendrá dada por

$$w = (T^{-1} \circ h \circ T)(z) = \frac{1 + h(T(z))}{1 - h(T(z))} = z + (z+1)h(T(z)).$$

Teniendo en cuenta que $H = \{z : \operatorname{Im} z/b > 0\}$ y $U = \mathbb{C} \setminus \{tb^2 : t \geq 0\}$ es claro que debemos elegir $h(z) = ib\sqrt{-z/b^2}$ (la rama de la raíz cuadrada de z, definida en U, que cumple $h(-b^2) = ib$). Así se obtiene una fórmula para la inversa de $J|_\Omega$:

$$w = -ib(z+1)\sqrt{\frac{1-z}{b^2(1+z)}}$$

El caso $s = \infty$ se puede considerar como un caso límite, para el cual Ω es el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Este caso, y el caso $s = 1$, ya han sido considerados en los ejercicios 2.27 y 2.28. Véase también el ejercicio 3.9.

Nota. El lector que ya conozca la noción de transformación conforme advertirá que J establece un isomorfismo conforme de Ω sobre el complemento de un arco de circunferencia de extremos $+1, -1$. Obsérvese que $J'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{+1, -1\}$ ($J'(0) = J'(\infty) = 2$). Se puede continuar consultando los ejercicios 3.36 y 3.37 donde se consideran otras propiedades de la transformación de Joukowski.

2.2.4. Complementos sobre la esfera de Riemann

En los ejercicios de este tramo se obtienen diversos resultados relacionados con la esfera de Riemann y la proyección estereográfica. Entre otras cosas se obtienen interpretaciones geométricas, a través de la proyección estereográfica, de algunas cuestiones geométricas consideradas previamente en el plano. Ciertas transformaciones del plano se interpretan de modo muy simple (véase el ejercicio 2.31). En el ejercicio 2.32 se obtiene una notable propiedad de la proyección estereográfica. Véase también el ejercicio 2.36.

Ejercicio 2.30.

Sea $\sigma : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ una isometría para la distancia cordal que verifica $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(\infty) = \infty$. Demuestre que existe $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ tal que, o bien $\sigma(z) = uz$, o bien $\sigma(z) = u\overline{z}$.

Indicación. Utilice el ejercicio 2.8.

SOLUCIÓN.

Para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene $d_\infty(z, 0) = d_\infty(\sigma(z), \sigma(0)) = d_\infty(\sigma(z), 0)$, es decir

$$\frac{2|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = \frac{2|\sigma(z)|}{\sqrt{1 + |\sigma(z)|^2}}$$

luego $|\sigma(z)| = |z|$. Análogamente, la igualdad $d_\infty(z, w) = d_\infty(\sigma(z), \sigma(w))$ se escribe en la forma

$$\frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{2|\sigma(z) - \sigma(w)|}{\sqrt{1 + |\sigma(z)|^2}\sqrt{1 + |\sigma(w)|^2}}$$

luego $|z - w| = |\sigma(z) - \sigma(w)|$ para todo par de números complejos $z, w \in \mathbb{C}$.

Como σ es biyectiva y $\sigma(\infty) = \infty$ se sigue que $\sigma(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y utilizando lo que se ha establecido en el ejercicio 2.8 se obtiene el resultado.

Ejercicio 2.31.

¿Cuál es la interpretación geométrica de la transformación del plano $\sigma(z) = 1/z$, y de la transformación inducida en la esfera de Riemann mediante la proyección estereográfica?

SOLUCIÓN.

Componiendo las aplicaciones $z \to \overline{z}$ y $z \to 1/\overline{z}$ se obtiene la transformación σ. La primera es una simetría respecto al eje real y la segunda una simetría respecto a la circunferencia unidad $|z| = 1$.

Por otra parte, si $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ y $(x_1, x_2, x_3) = \Psi(z)$ se verifica

$$\frac{1}{z} = \frac{1 - x_3}{x_1 + ix_2} = \frac{(1 - x_3)(x_1 - ix_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(1 - x_3)(x_1 - ix_2)}{1 - x_3^2} = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}$$

Es decir $1/z = \Psi(x_1, -x_2, -x_3)$, luego la transformación inducida en la esfera de Riemann

$$\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$$

es un giro de amplitud π alrededor del eje Ox_1.

Ejercicio 2.32.

Demuestre que, mediante la proyección estereográfica, las circunferencias del plano complejo se corresponden con las circunferencias de la esfera de Riemann tal y como se indica a continuación.

Una recta del plano se transforma en una circunferencia de la esfera que pasa por el polo de proyección $(0, 0, 1)$, y una verdadera circunferencia de ecuación

$$A\overline{z}z + Bz + C\overline{z} + D = 0$$

donde $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$, $AD - BC < 0$ y $A \neq 0$ (véase el ejercicio 2.5) se transforma en la circunferencia de la esfera determinada por el plano de ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0,$$

donde $a = B + C$, $b = i(B - C)$, $c = A - D$ y $d = A + D$. (Observe que a, b, c y d son reales y que si Δ es la distancia del origen al plano entonces $\Delta < 1$, por lo que el plano corta efectivamente a la esfera).

SOLUCIÓN.

Es geométricamente evidente que las rectas del plano complejo se corresponden con las circunferencias de la esfera que pasan por $(0, 0, 1)$.

Consideremos una verdadera circunferencia en el plano, de ecuación

$$Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D = 0$$

donde $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$, $AD - BC < 0$ y $A \neq 0$. Usando las ecuaciones de la proyección estereográfica $z = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$ se obtiene que un punto (x_1, x_2, x_3) de la esfera de Riemann corresponde a un punto de la circunferencia si y sólo si

$$A(x_1^2 + x_2^2)/(1 - x_3) + B(x_1 + ix_2) + C(x_1 - ix_2) + D(1 - x_3) = 0.$$

Como $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$ y $1 - x_3 \neq 0$, la condición anterior equivale a

$$A(1 + x_3) + B(x_1 + ix_2) + C(x_1 - ix_2) + D(1 - x_3) = 0,$$

es decir, $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Como los coeficientes $a = B + C$, $b = i(B - C)$, $c = A - D$ y $d = A + D$ son reales, ésta es la ecuación de un plano cuya distancia al origen es $\Delta = |d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < 1$, ya que $d^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 4(AD - BC) < 0$.

Recíprocamente, si una circunferencia sobre la esfera está determinada por el plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$, con $d^2 - (a^2 + b^2 + c^2) < 0$ (para que el plano corte efectivamente a la esfera), efectuando las sustituciones

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

se obtiene la ecuación

$$Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$$

donde $A = (c + d)/2$, $B = (a - ib)/2$, $C = (a + ib)/2$ y $D = (d - c)/2$. Como $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC = \big(d^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\big)/4 < 0$, según el ejercicio 2.5, la última ecuación representa una circunferencia.

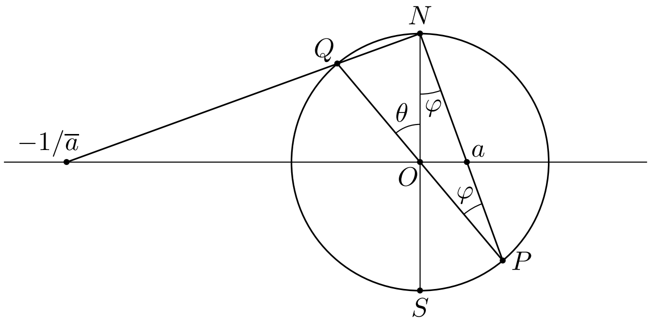
Ejercicio 2.33.

Demuestre que la transformación de Möbius $T(z) = (z - a)/(\overline{a}z + 1)$ corresponde a un giro sobre la esfera de Riemann. Obtenga el eje de giro y la amplitud del mismo.

SOLUCIÓN.

Suponemos $a \neq 0$ ya que el resultado es evidente cuando $a = 0$. Empezaremos suponiendo que T induce un giro en la esfera y bajo esta hipótesis determinaremos el giro G y la transformación G^* que el giro induce en el plano. El resultado se obtendrá comprobando que $G^* = T$.

Si T induce un giro en la esfera de Riemann, debe tener dos puntos fijos que se obtienen resolviendo la ecuación $T(z) = z$. Las soluciones, $\alpha = ia/|a|$ y $\beta = -ia/|a|$, son puntos diametralmente opuestos de la circunferencia unidad. El eje del giro debe ser la recta determinada por los puntos A, B de la esfera que corresponden a estos puntos mediante la proyección estereográfica. Es claro que A y B son puntos antipodales del ecuador de la esfera, luego el eje de giro está contenido en el plano del ecuador. El plano ortogonal al eje de giro, que pasa por el origen, corta a la esfera en un meridiano que es el que aparece en la figura.



Para determinar el ángulo de giro consideramos los puntos antipodales de este meridiano P, Q que verifican $G(P) = S$, $G(Q) = N$. Estos puntos corresponden a los puntos del plano a, $-1/\overline{a}$, ya que $T(a) = 0$ y $T(-1/\overline{a}) = \infty$.

Un sencillo razonamiento geométrico, basado en la figura, proporciona la amplitud θ del ángulo de giro: la suma de los ángulos del triángulo isósceles NOP es $\pi = (\pi - \theta) + 2\varphi$, luego $\theta = 2\varphi$ y teniendo en cuenta que el triángulo NOa es rectángulo resulta $\operatorname{tg}\varphi = |a|$, es decir, $\theta = 2 \operatorname{arc\,tg} |a|$.

Si G es el giro de la esfera de eje AB y amplitud θ, que lleva el punto P al punto S y G^* es la transformación que G induce en el plano, debemos comprobar que $T = G^*$. Comenzemos con el caso particular $a = it$, donde $t > 0$.

En este caso $\alpha = -1$, $\beta = 1$,

$$A = (-1, 0, 0),\ B = (1, 0, 0),\ P = (0, \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta),\ Q = (0, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

y las ecuaciones del giro $G(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$ vienen dadas por

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_2 \cos\theta + x_3 \operatorname{sen}\theta; \quad y_3 = -x_2 \operatorname{sen}\theta + x_3 \cos\theta.$$

Usando estas ecuaciones es fácil comprobar que $T = G^*$:

$$T(z) = \frac{z - it}{1 - itz} = \frac{(z - it)(1 + it\overline{z})}{(1 - itz)(1 + it\overline{z})} = \frac{it|z|^2 + z + t^2\overline{z} - it}{t^2|z|^2 - itz + it\overline{z} + 1}$$

Si (x_1, x_2, x_3) es el punto de la esfera que corresponde a z se tiene

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}; \qquad |z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

y sustituyendo arriba estas expresiones resulta

$$T(z) = \frac{(1 + t^2)x_1 + i(1 - t^2)x_2 + i2tx_3}{1 + 2tx_3 + (t^2 - 1)x_3}$$

En el caso que estamos considerando $t = |a| = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\theta/2)$, luego

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

y se obtiene

$$T(z) = \frac{x_1 + ix_2\cos\theta + ix_3\operatorname{sen}\theta}{1 + x_2\operatorname{sen}\theta - x_3\cos\theta} = \frac{y_1 + iy_2}{1-y_3} = G^*(z).$$

Consideremos ahora el caso general, donde $a \in \mathbb{C}$ es arbitrario. Si $u = i|a|/a$ se comprueba fácilmente que

$$uT(z) = \frac{uz - i|a|}{-i|a|uz + 1} = S(uz)$$

donde $S(z) = (z - i|a|)/(-i|a|z + 1)$, según el caso particular considerado anteriormente, induce sobre la esfera un giro de eje OX_1. La transformación $z \to uz$ corresponde a un giro de la esfera de eje OX_3 (pues $|u| = 1$). Se sigue que $T(z) = u^{-1}S(uz)$ induce en la esfera el giro que resulta de componer tres giros: el primer giro es de eje OX_3, el segundo de eje OX_1 y el tercer giro es el opuesto del primero.

Ejercicio 2.34.

Demuestre que un giro de la esfera de Riemann induce en el plano, mediante la proyección estereográfica, una transformación Möbius y que la forma general de las transformaciones de Möbius que corresponden a los giros de la esfera es

$$T(z) = \mu\frac{z-p}{\overline{p}z+1} \quad \textit{con} \quad |\mu| = 1.$$

SOLUCIÓN.

En el ejercicio 2.33 se ha establecido que los giros de la esfera cuyo eje está en el plano del ecuador, y en particular los giros de eje OX_1, inducen en el plano transformaciones de Möbius. Los giros de eje OX_3 también inducen en el plano transformaciones de Möbius (giros alrededor del origen). Para concluir que cualquier giro G de la esfera induce en el plano una transformación de Möbius basta, tener en cuenta que G se puede descomponer en tres giros: uno de eje OX_3, otro de eje OX_1 y finalmente otro giro de eje OX_3. (Veamos esto. Si (e_1, e_2, e_3) es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, el giro G queda determinado mediante la terna (v_1, v_2, v_3) donde $v_i = G^{-1}(e_i)$. Con un primer giro de eje OX_3 la terna (v_1, v_2, v_3) se puede transformar en (v_1', v_2', v_3') donde v_3' cae en el plano OX_2X_3. Con un segundo giro de eje OX_1 esta terna se transforma en (v_1'', v_2'', v_3'') con $v_3'' = e_3$. Finalmente, con un último giro de eje OX_3, la terna (v_1'', v_2'', e_3) se transforma en (e_1, e_2, e_3)).

Así queda establecido que los giros de la esfera de Riemann inducen en el plano transformaciones de Möbius y sólo queda obtener la forma general de las transformaciones de Möbius que corresponden a los giros de la esfera.

Usando las ecuaciones de la proyección estereográfica es fácil ver que dos puntos p, q del plano complejo corresponden a puntos antipodales de la esfera si y sólo si $1 + \overline{p}q = 0$.

Si p, $q = -1/\overline{p}$ son los puntos del plano que corresponden, respectivamente, a los puntos antipodales $P = G^{-1}(0,0,-1)$, $Q = G^{-1}(0,0,1)$, se debe cumplir $T(p) = 0$ y $T(q) = T(-1/\overline{p}) = \infty$, luego T es de la forma

$$T(z) = \mu\frac{z-p}{\overline{p}z+1}$$

Por otra parte, T tiene dos puntos fijos, α, $-1/\overline{\alpha}$, que corresponden a los puntos antipodales donde el eje de giro corta a la esfera. Las condiciones $T(\alpha) = \alpha$, $T(-1/\overline{\alpha}) = -1/\overline{\alpha}$ se traducen en

$$\alpha(\overline{p}\alpha + 1) = \mu(\alpha - p); \qquad (\overline{\alpha} - \overline{p}) = \mu\overline{\alpha}(1 + \overline{\alpha}p)$$

de donde se obtiene que $|\mu| = 1$.

Recíprocamente, en virtud del ejercicio 2.33, cada transformación del tipo considerado en el enunciado corresponde al giro de la esfera que se obtiene componiendo un giro con eje en el plano del ecuador y un giro de eje OX_3.

Ejercicio 2.35.

Sea Γ una circunferencia en la esfera de Riemann y C la circunferencia que le corresponde en el plano complejo mediante la proyección estereográfica.

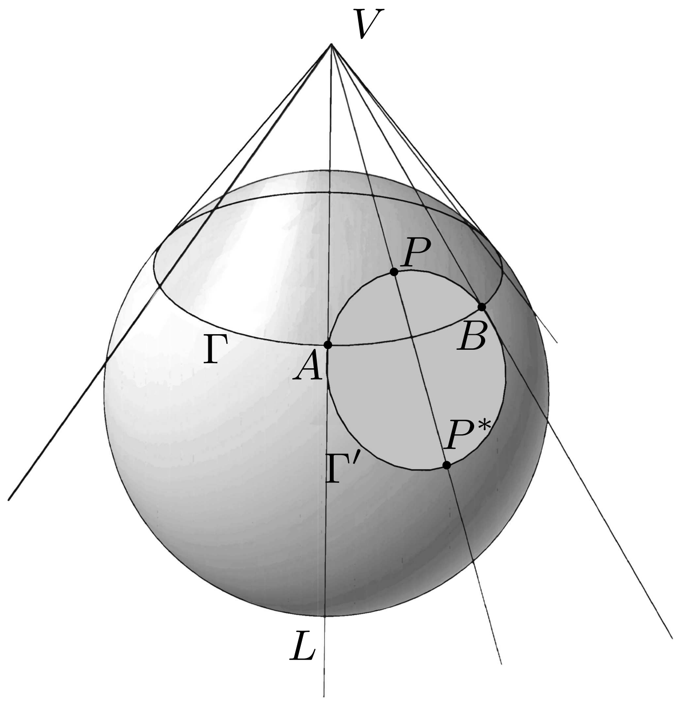
Dos puntos P, P^* de la esfera se dice que son simétricos respecto a Γ cuando los puntos que les corresponden en el plano complejo son simétricos respecto a C.

Si $P \neq P^*$ son simétricos respecto a Γ demuestre que las circunferencias de la esfera que pasan por P y P^* son ortogonales a Γ. Deduzca que el vértice V del cono tangente a la esfera a lo largo de Γ está alineado con P y P^* (luego el simétrico de P respecto a Γ es el otro punto donde la recta VP corta a la esfera).

SOLUCIÓN.

Los puntos z, z^* que corresponden a P, P^* por la proyección estereográfica, son simétricos respecto a la circunferencia C luego, según el ejercicio 2.6, las circunferencias del plano que pasan por z y z^* son ortogonales a C.

Como la proyección estereográfica transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales (ejercicio 2.36) se sigue que las circunferencias de la esfera que pasan por P y P^* son ortogonales a Γ.



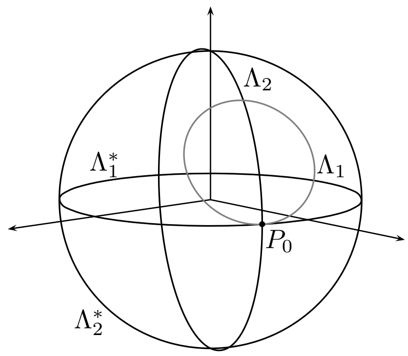
Para demostrar que V está alineado con P y P^* basta ver que si Π es un plano que pasa por P y P^* entonces V está en ese plano. Para ver esto consideremos la circunferencia Γ' que Π determina en la esfera. Esta circunferencia pasa por P y P^*, luego corta ortogonalmente a Γ en dos puntos A y B. La recta L tangente a Γ' en A es ortogonal a Γ y es tangente a la esfera (porque es tangente a una curva contenida en ella) luego es una de las generatrices del cono y por lo tanto pasa por V. Como esta recta está contenida en Π (el plano de Γ') se concluye que V está en el plano Π.

Ejercicio 2.36.

Demuestre que la proyección estereográfica transforma circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales.

SOLUCIÓN.

Sean Γ_i $(i = 1, 2)$ dos circunferencias en el plano complejo que se cortan de modo ortogonal en z_0. Las circunferencias Λ_i $(i = 1, 2)$ que les corresponden en la esfera de Riemann se cortan en el punto P_0 que corresponde a z_0. La comprobación directa de que Λ_1 y Λ_2 son ortogonales en P_0 es complicada analíticamente. Los cálculos se simplifican reemplazando las circunferencias Λ_i por los círculos máximos Λ_i^* que pasan por P_0 con la misma tangente que Λ_i.



Las circunferencias Γ_i^* del plano complejo que corresponden a Λ_i^* siguen siendo ortogonales en z_0 ya que Γ_i^* y Γ_i tienen la misma tangente en ese punto (recuérdese que, en virtud de la regla de la cadena, si dos caminos tienen la misma tangente en un punto, sus imágenes mediante una aplicación diferenciable también tienen la misma tangente en la imagen del punto).

Sean $A_i z\overline{z} + B_i z + C_i \overline{z} + D_i = 0$ las ecuaciones de Γ_i^*, donde A_i, B_i, C_i, D_i verifican las condiciones indicadas en el apartado a) del ejercicio 2.5. Según lo establecido en el apartado b) de este ejercicio

$$B_1C_2 + B_2C_1 = A_1D_2 + A_2D_1. \qquad [\star]$$

Los círculos máximos Λ_i^*, determinados por los planos $a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 = 0$ son ortogonales si y sólo si los planos son ortogonales, es decir $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. Utilizando lo que se ha obtenido en el ejercicio 2.32, esta condición se expresa, en términos de los coeficientes A_i, B_i, C_i, D_i, mediante la igualdad

$$(B_1 + C_1)(B_2 + C_2) - (B_1 - C_1)(B_2 - C_2) + (A_1 - D_1)(A_2 - D_2) = 0$$

que es equivalente a $[\star]$ debido a que $A_i + D_i = d_i = 0$.

Ejercicio 2.37.

Sea E un espacio euclídeo bidimensional orientado y $\beta = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ una base ortonormal positiva de E. Se identifica E con $\mathbb{C}$ mediante la aplicación

$$T_\beta(x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}) = x + iy$$

y se define el ángulo orientado de un par ordenado de vectores no nulos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E$ como el número $\operatorname{Arg}(T_\beta(\mathbf{v})/T_\beta(\mathbf{u}))$. Demuestre que la definición no depende de la base ortonormal positiva elegida en E.

Para cada $p \in S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ sea E_p el espacio tangente a S en p, dotado de la estructura euclídea inducida por la de $\mathbb{R}^3$, orientado mediante el vector normal entrante en p. Si $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{C}$ es la inversa de la proyección estereográfica

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

y $p \neq (0, 0, 1)$, compruebe que $d\Phi(p)|_{E_p}$ conserva ángulos orientados.

SOLUCIÓN.

Si consideramos otra base ortonormal positiva β' entonces la aplicación lineal $L = T_{\beta'} \circ T_\beta^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ proporciona el cambio de coordenadas entre dos bases ortonormales positivas, luego su matriz (respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$) es de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

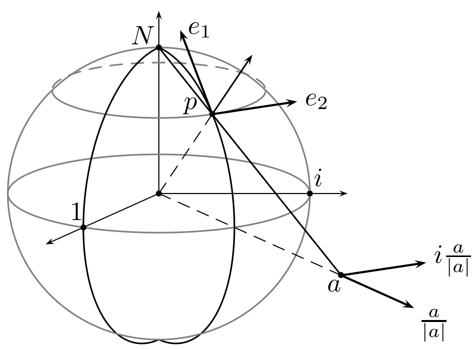
es decir, $L(z) = e^{i\theta} z$. Por lo tanto dados $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E \times E$ se cumple

$$\operatorname{Arg}(T_\beta(\mathbf{v})/T_\beta(\mathbf{u})) = \operatorname{Arg}(T_{\beta'}(\mathbf{v})/T_{\beta'}(\mathbf{u})).$$

Para demostrar que $d\Phi(a)|_{E_p}$ conserva ángulos orientados basta ver que su matriz, respecto a una base ortonormal positiva de E_p y una base ortonormal positiva de $\mathbb{C}$, corresponde a una transformación $\mathbb{C}$-lineal del plano complejo (véase el ejercicio 2.9).

Para obtener una base ortonormal positiva de E_p, formada por vectores tangentes al meridiano y al paralelo en p, consideremos la parametrización usual de la esfera S, en términos de la longitud θ y la latitud φ:

$$F(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi).$$



Los vectores unitarios tangentes a S en $p = F(\theta, \varphi)$ según el meridiano y el paralelo, son

$$\mathbf{e_1}(p) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi);$$
$$\mathbf{e_2}(p) = \left\|\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, \varphi)\right\|^{-1}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\cos\varphi}(-\cos\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0).$$

Como $-p$ es el vector entrante a S en p y $\det(\mathbf{e_1}(p), \mathbf{e_2}(p), -p) = +1$, resulta que la base ortonormal $(\mathbf{e_1}(p), \mathbf{e_2}(p))$ es positiva para la orientación de E_p.

Por otra parte, teniendo en cuenta el significado geométrico de la proyección estereográfica, es claro que $a/|a| = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$.

En lo que sigue, con el fin de simplificar el cálculo de la matriz de la aplicación lineal $d\Phi(p)|_{E_p} : E_p \longrightarrow \mathbb{C}$, se considera en $\mathbb{C}$ la base ortonormal positiva $(a/|a|, ia/|a|)$. Usando la regla de la cadena

$$d\Phi(p)\mathbf{e}_1(p) = d\Phi(p)\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \frac{\partial(\Phi \circ F)}{\partial \varphi}(\varphi, \theta);$$
$$d\Phi(p)\mathbf{e}_2(p) = \frac{1}{\cos\varphi}d\Phi(p)\frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(\Phi \circ F)}{\partial \theta}(\varphi, \theta);$$

y después de un cálculo sencillo se llega a

$$d\Phi(p)\mathbf{e}_1(p) = \frac{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\varphi} = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}\varphi}\frac{a}{|a|};$$
$$d\Phi(p)\mathbf{e}_2(p) = \frac{i}{1 - \operatorname{sen}\varphi}\frac{a}{|a|}$$

luego la matriz de la aplicación lineal $d\Psi|_{E_p}$, respecto a las bases ortonormales positivas que hemos elegido en E_p y $\mathbb{C}$, es

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

con $\mu = 1/(1 - \operatorname{sen}\varphi)$. Como la aplicación lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ asociada a esta matriz es $\mathbb{C}$-lineal, se concluye que $d\Phi|_{E_p}$ conserva ángulos orientados.

Obsérvese que para la validez de los cálculos anteriores, basados en una parametrización particular de la esfera, debe suponerse $a \neq 0$ (es decir, $p \neq (0, 0, -1)$). El caso $a = 0$ es geométricamente evidente y su verificación analítica se deja al cuidado del lector.

2.2.5. Complementos sobre compacidad y conexión

Los siguientes ejercicios versan sobre algunos resultados concretos de conexión y compacidad que intervienen al estudiar las funciones de variable compleja.

Ejercicio 2.38.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto demuestre que

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n,\ d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\}$$

es una sucesión de compactos que recubre Ω y verifica $K_n \subseteq \overset{o}{K}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre también que cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. (Una sucesión de compactos que cumple las condiciones anteriores se dice que es una sucesión fundamental de compactos en Ω).

SOLUCIÓN.

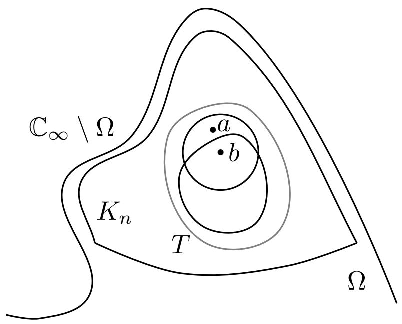
Es claro que la sucesión K_n es creciente y que su unión es Ω. En virtud de la continuidad de la función $z \to d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, el conjunto acotado K_n es cerrado y por lo tanto compacto. Como el conjunto

$$V_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n+1, \ d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 1(n+1)\}$$

es abierto y $K_n \subset V_n \subset K_{n+1}$ se sigue que K_n está contenido en $\overset{o}{K}_{n+1}$.

Sea T una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$. Para ver que T contiene alguna componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ basta encontrar un punto $b \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ que pertenezca a T pues, en ese caso, la componente conexa de b en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ estará contenida en la componente conexa de b en $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, que es T.

Si T_∞ es la componente conexa de ∞ en $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ podemos tomar $b = \infty$. En otro caso T es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ y para encontrar b se puede proceder como sigue.



Como $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > n\} \subset T_\infty$ y $T \cap T_\infty = \emptyset$, entonces para todo $z \in T$ se cumple $|z| \leq n$ luego, en virtud de la definición de K_n, $d(z, \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega) < 1/n$.

Fijado $a \in T$ existe $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $d(a, b) < 1/n$. Los puntos de $D(b, 1/n)$ distan de $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ una cantidad menor que $1/n$, por lo tanto $D(b, 1/n) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$. Como a pertenece al disco $D(b, 1/n)$ se concluye que a y b están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, luego $b \in T$.

Ejercicio 2.39.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $M \subset \Omega$ un subconjunto que verifica $M' \cap \Omega = \emptyset$. Demuestre que M es numerable, que $\Omega \setminus M$ es abierto y que si Ω es conexo entonces $\Omega \setminus M$ también lo es.

SOLUCIÓN.

Sea K_n una sucesión de compactos cuya unión es Ω (véase el ejercicio 2.38). Como $(M \cap K_n)' \subset M' \cap K_n = \emptyset$, aplicando el apartado $c)$ de la proposición 2.1.1 se obtiene que cada $M \cap K_n$ es finito y por lo tanto $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M \cap K_n)$ es numerable.

$\Omega \setminus M$ es abierto: dado $a \in \Omega \setminus M$, en virtud de la hipótesis $M' \cap \Omega = \emptyset$, a no es punto de acumulación de M y por lo tanto existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \cap M = \emptyset$. Como Ω es abierto se puede suponer también $D(a,r) \subset \Omega$ y así $D(a,r) \subset \Omega \setminus M$.

Si Ω es conexo, $\Omega \setminus M$ también lo es: basta ver que es conexo por caminos. Si $z, w \in \Omega \setminus M$, usando que Ω es conexo por poligonales, se obtiene un camino poligonal γ en Ω, de origen z y extremo w. Usando que Imagen(γ) es compacto y el apartado $c)$ de la proposición 2.1.1, podemos asegurar que $F = M \cap \text{Imagen}(\gamma)$ es finito. Este hecho permite modificar el camino γ para obtener un nuevo camino γ^* en $\Omega \setminus M$ con los mismos extremos que γ. (Avanzando sobre la poligonal γ desde z hasta w, cada vez que aparece un punto del conjunto finito F lo rodeamos con un pequeño arco en $\Omega \setminus M$ y así se fabrica γ^*).

Ejercicio 2.40.

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $E \subset U$ un subconjunto que contiene al menos un punto de cada componente conexa de U. Si $V \subset U$ es un abierto que verifica

$$E \subset V \subset U, \quad \partial V \cap U = \emptyset$$

demuestre que $V = U$.

SOLUCIÓN.

Sea T una componente conexa de U. Los conjuntos disjuntos $T \cap V$, $T \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{V})$, son abiertos en T (con la topología relativa) y su unión es T (porque $T \cap \partial V = \emptyset$). Como T es conexo, uno de estos conjuntos es vacío y el otro coincide con T.

Por hipótesis $\emptyset \neq T \cap E \subset T \cap V$, luego $T \cap V = T$, es decir $T \subset V$. Como cada componente conexa T de U está contenida en V resulta $U \subset V$, luego $U = V$.

Ejercicio 2.41.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $V \subset \Omega$ un subconjunto abierto no vacío que cumple $V' \cap \Omega \subset V$. Demuestre que $V = \Omega$.

SOLUCIÓN.

Si $a \in \Omega \setminus V$ entonces $a \in \Omega \setminus \overline{V}$ pues en caso contrario, si fuese $a \in \overline{V}$, se tendría $a \in V' \cap \Omega$, lo que es imposible por la hipótesis del enunciado.

Esto prueba que $\Omega \setminus V = \Omega \setminus \overline{V}$ y con ello que $\Omega \setminus V$ es abierto y cerrado en Ω (con su topología relativa). Como V no es vacío y Ω es conexo se concluye que $V = \Omega$.

Ejercicio 2.42.

Sea A la intersección de una sucesión decreciente $A_n \subset \mathbb{C}$.

a) Si cada A_n es compacto, conexo y no vacío demuestre que A es compacto, conexo y no vacío.

b) Si A es compacto, no vacío y cada A_n es cerrado y conexo demuestre que algún A_n es compacto y A es conexo.

SOLUCIÓN.

Recordemos en primer lugar que si la intersección de una sucesión decreciente de compactos está contenida en un abierto entonces algún compacto de la sucesión está contenido en el abierto.

a) A es compacto porque es un subconjunto cerrado del compacto A_1 y demostraremos que es conexo por reducción al absurdo, suponiendo que existen cerrados F_1, F_2 tales que

$$A \cap F_1 \neq \emptyset, \quad A \cap F_2 \neq \emptyset, \quad A \cap F_1 \cap F_2 = (A \cap F_1) \cap (A \cap F_2) = \emptyset.$$

Considerando el abierto $\mathbb{C} \setminus (F_1 \cup F_2)$ y la propiedad recordada al principio se obtiene que $A_n \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ para algún n. Como los conjuntos $A_n \cap F_1$, $A_n \cap F_2$ no son vacíos (porque $A_n \supset A$) se llega a que A_n no es conexo, en contra de la hipótesis.

b) Si $A \neq \emptyset$ es compacto existe un abierto acotado $G \subset \mathbb{C}$ tal que $A \subset G$. La intersección de la sucesión decreciente de compactos $A_n \cap \overline{G}$ es $A \neq \emptyset$, y aplicando otra vez la propiedad recordada al principio podemos asegurar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap \overline{G} \subset G$. El conjunto no vacío $A_n \cap \overline{G} = A_n \cap G$ es abierto y cerrado respecto al conexo A_n, luego $A_n = A_n \cap \overline{G}$. Se sigue de esto que A_n es compacto, luego A_k es compacto para todo $k \geq n$ y, aplicando *a*), se concluye que A es conexo.

Ejercicio 2.43.

Sea T un espacio compacto y $\mathscr{H}$ la familia de los subconjuntos abiertos y cerrados de T. Demuestre que $T_x = \bigcap\{F : x \in F \in \mathscr{H}\}$ es la componente conexa de $x \in T$.

SOLUCIÓN.

Sea C_x la componente conexa de x. Si $x \in F \in \mathscr{H}$, el conjunto no vacío $F \cap C_x$ es abierto y cerrado respecto a C_x, luego coincide con C_x, es decir $C_x \subset F$. Como esto es cierto para todo $F \in \mathscr{H}$ con $x \in F$ se sigue que $C_x \subset T_x$. Concluiremos que $T_x = C_x$ viendo que T_x es conexo: como T_x es cerrado basta demostrar que si $T_x = A \cup B$, donde A, B son cerrados disjuntos y $x \in A$, entonces $B = \emptyset$.

Como A, B son compactos disjuntos, existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Recordemos que en un espacio compacto, si la intersección de una familia de cerrados está contenida en un abierto entonces hay una subfamilia finita cuya intersección está contenida en el abierto. Según esta propiedad de $T_x \subset U \cup V$ se sigue que existe una familia finita $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\} \subset \mathscr{H}$ tal que

$$T_x \subset F = \bigcap_{n=1}^{m} F_n \subset U \cup V.$$

El conjunto $U \cap F$ es abierto (ya que F lo es) y teniendo en cuenta que $\overline{U} \cap V = \emptyset$ se obtiene

$$\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F,$$

luego $U \cap F$ también es cerrado. Como $x \in U \cap F$, en virtud de la definición de T_x, resulta $T_x \subset U \cap F$, luego $B \subset T_x \cap V = \emptyset$.

2.3. Ejercicios propuestos

2.1 La relación $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$ entre los números complejos z_1, z_2, z_3 y z_4 se puede escribir de varias formas equivalentes:

a) $z_1 - z_2 = z_4 - z_3$;
b) $z_1 - z_4 = z_2 - z_3$;
c) $(z_1 + z_3)/2 = (z_2 + z_4)/2$;
d) $(z_1 + z_3)/2 = \frac{1}{2}\left((z_1 + z_2)/2 + (z_3 + z_4)/2\right)$.

Indique la interpretación geométrica de cada una de ellas.

2.2 Sobre cada lado de un cuadrilátero (arbitrario) se coloca un cuadrado exterior al mismo de modo que uno de sus lados coincide con el lado del cuadrilátero. Se consideran los dos segmentos determinados por el centro de cada cuadrado y el centro del cuadrado opuesto. Utilice los números complejos para demostrar que los dos segmentos tienen la misma longitud y son perpendiculares.

2.3 Se considera, inscrito en la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$, un polígono regular de n lados. Demuestre que el producto de las longitudes de los segmentos que unen un vértice con los restantes vértices es n.

2.4 Se considera, inscrito en la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$, un polígono regular de n lados. Un punto z_0 con $|z_0| \leq 1$ se une mediante segmentos con cada uno de los vértices. Determine z_0 para que el producto de las longitudes de dichos segmentos sea máximo y calcule el valor máximo.

2.5 Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que los números complejos z_1, z_2, z_3 correspondan a los vértices de un triángulo equilátero es que se cumpla $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

2.6 Si C_1, C_2 son circunferencias del plano, demuestre que por cada punto $a \notin C_1 \cup C_2$ pasa una circunferencia ortogonal a ambas.

2.7 La polar de un punto a respecto a la circunferencia $|z| = R$ es la recta de ecuación $\overline{a}z + a\overline{z} = 2R^2$. Demuestre que la polar de a pasa por a^* (el simétrico de a respecto a la circunferencia) y es perpendicular a la recta determinada por a y el origen.

2.8 Obtenga la forma general de una transformación de Möbius T, con $T(i) = i$, que deje invariante el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

2.9 Sea S una transformación de Möbius con dos puntos fijos distintos z_1, z_2 y sean $z_\infty = S^{-1}(\infty)$ y $w_\infty = S(\infty)$. Demuestre que z_1, z_2, z_∞, w_∞ son los vértices de un paralelogramo en el cual z_∞, w_∞ son vértices opuestos.

2.10 Obtenga una transformación de Möbius que lleve

$$\{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - 2| > 1\}$$

a una corona de la forma $\{w : r < |w| < 1\}$, de modo que el eje imaginario se transforme en la circunferencia $\{w : |w| = 1\}$. Determine las circunferencias que son ortogonales al eje imaginario y a la circunferencia $\{z : |z - 2| = 1\}$.

2.11 Sea $T(z) = (iz + i)/(1 - z)$. Obtenga la imagen de $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ mediante la función $f(z) = (T(z)^2 - i)/(T(z)^2 + i)$.

2.12 Determine las imágenes de

$$\{z\colon |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{y} \quad \{z\colon |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$$

mediante la transformación de Joukowski.

2.13 Si $f : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una biyección que transforma circunferencias en circunferencias, demuestre que una de las dos funciones f, $\overline{f}$ es una transformación de Möbius. ([15, pág.106, Th. A.]).

Capítulo 3

Funciones de variable compleja

3.1. Preliminares teóricos

3.1.1. Las funciones elementales

La función exponencial

La *función exponencial* $\exp(z) = e^z$ es la definida en $\mathbb{C}$ mediante la serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

que converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$. Usando el producto de convolución de series (corolario 1.1.4) se establece que para cada $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple la ecuación funcional

$$e^{z+w} = e^z e^w. \tag{3.1}$$

(Otra forma de obtenerla se puede ver en el ejercicio 4.43). En particular, cuando $x, y \in \mathbb{R}$ y $z = x + iy$ se verifica

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

luego

$$|e^z| = e^x, \quad e^{iy} = (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

lo que justifica la expresión módulo argumental de un número complejo: $z = re^{i\alpha}$, donde $r = |z|$ y $\alpha \in \arg z$.

La función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$, $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es inyectiva sobre cada banda abierta de la forma

$$\{x + iy : \alpha < y < \beta\} \text{ con } 0 < \beta - \alpha < 2\pi$$

y establece una biyección entre la banda B_j y el abierto Ω_j $(j = 1, -1)$

$$B_1 = \{x + iy : |y| < \pi\}, \qquad \Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\},$$
$$B_{-1} = \{x + iy : 0 < y < 2\pi\}, \qquad \Omega_{-1} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

La inversa de la primera biyección viene dada por el logaritmo principal

$$\operatorname{Log} : \Omega_1 \longrightarrow B_1; \qquad \operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

En lo sucesivo, para tener garantizada la continuidad, cuando se considere la función logaritmo principal, Log, siempre se supondrá que su dominio es Ω_1.

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Se definen en términos de la función exponencial

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son periódicas con periodos $\{2m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$ y con los mismos ceros que las correspondientes funciones reales.

Las relaciones trigonométricas usuales

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= 1; \\
\operatorname{sen} z &= \cos(\pi/2 - z); \\
\cos z &= \cos(-z); \\
\operatorname{sen}(-z) &= -\operatorname{sen} z; \\
\operatorname{sen}(z + w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w; \\
\cos(z + w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w,
\end{aligned}$$

se pueden obtener a partir de la ecuación funcional (3.1) (en el ejercicio 4.43 se muestra una vía alternativa para obtenerlas).

Las *funciones hiperbólicas*, que también se definen en términos de la exponencial:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

están directamente relacionadas con funciones trigonométricas, ya que

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(iz) &= \cos z, & \operatorname{sh}(iz) &= i \operatorname{sen} z, \\
\cos(iz) &= \operatorname{ch} z, & \operatorname{sen}(iz) &= i \operatorname{sh} z.
\end{aligned}$$

Estas funciones siguen cumpliendo las relaciones usuales: $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, teoremas de adición, etc.

3.1.2. Multifunciones y la determinación de sus ramas

Al considerar argumentos, logaritmos, la exponenciación compleja y, más en general, inversas de funciones elementales, como $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$, aparecen funciones multiformes o multifunciones (es decir, funciones cuyos valores son subconjuntos del plano complejo) para las que se adopta la siguiente terminología:

Definición 3.1.1.

Sea T un subconjunto del plano complejo y $\mathscr{P}(\mathbb{C})$ el conjunto de las partes de $\mathbb{C}$. Una multifunción (o función multiforme) con dominio T y valores en $\mathbb{C}$ es una aplicación

$$G : T \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{C})$$

Se dice que g es una rama o determinación continua de G si $g : T \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $g(t) \in G(t)$ para cada $t \in T$.

Ejemplos notables de multifunciones son $\arg z$, $\log z$ y $\sqrt[n]{z}$. El argumento principal y el logaritmo principal son funciones continuas sobre el abierto

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

luego son ramas de las multifunciones $\arg z$ y $\log z$.

Dado un número complejo $a \neq 0$, si $c \in \log a$, la función $f_c(z) = e^{cz}$ es continua y $f_c(z) \in a^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, f_c es una rama de la función multiforme a^z. Según el ejercicio 3.38 toda rama de a^z es de esta forma. Con $c = \operatorname{Log} a$ se obtiene la rama o determinación principal de a^z. Para esta rama (función valor principal de la exponencial de base a) se suele utilizar el mismo símbolo a^z y, así, en lo que sigue se adopta el convenio de notación

$$a^z = e^{a \operatorname{Log} z}.$$

El único problema que ocasiona este convenio es que cuando se desee considerar la función multiforme a^z habrá que manifestarlo explícitamente.

Cuando $a = 1/n$, con $n \in \mathbb{N}$, también reservaremos la notación $\sqrt[n]{z}$ para la rama principal de la raíz n-ésima de z definida en Ω_1 por

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log} z}.$$

La mayor parte de las multifunciones de interés aparecen cuando $G(t) = f^{-1}(t)$ donde $f : \Omega \longrightarrow T$ está definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Las ramas continuas de multifunciones de la forma $\log f(t)$, $\arg f(t)$ reciben nombres especiales:

Definición 3.1.2.

Sea $f : T \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continua en un subconjunto T de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Si $g : T \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $g(t) \in \log f(t)$ para todo $t \in T$, se dice que g es un logaritmo continuo de f en T y también que es una rama de la función multiforme $\log f(t)$.

Si $\alpha : T \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\alpha(t) \in \arg f(t)$ para todo $t \in T$, se dice que α es un argumento continuo de f en T, y también que es una rama de la multifunción $\arg f(t)$.

Definición 3.1.3.

Sea $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $n \in \mathbb{N}$. Si $h : T \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $h(t)^n = f(t)$ para todo $t \in T$, se dice que h es una raíz n-ésima continua de f en T.

El problema natural que concierne a las multifunciones es el de la determinación y gestión de sus ramas y, en particular, el de determinar o caracterizar los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde existen ramas de una multifunción dada. En los ejercicios de esta capítulo se exponen las técnicas, basadas en argumentos de conexión, para determinar y manejar de manera precisa ramas de algunos tipos de multifunciones. También se consideran algunos casos particulares sencillos, donde se determinan ramas mediante fórmulas concretas.

Si g es un logaritmo continuo de f entonces $\alpha = \operatorname{Im} f$ es un argumento continuo de f y, recíprocamente, si α es un argumento continuo de f entonces $g = \log|f| + i\alpha$ es un logaritmo continuo de f. En el ejercicio 7.11 se demostrará que una condición necesaria y suficiente para que en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ exista un logaritmo continuo de la identidad z es que los dos puntos ∞ y 0 estén en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Si T es conexo y $L_1, L_2 : T \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $A_1, A_2 : T \longrightarrow \mathbb{R}$) son logaritmos (resp. argumentos) continuos de f, según el ejercicio 3.1, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$L_1(t) = L_2(t) + 2\pi mi; \quad (\text{resp. } A_1(t) = A_2(t) + 2\pi m) \quad \text{para todo } t \in T.$$

En las condiciones anteriores, si en $f(T)$ hay definido un logaritmo continuo L de la identidad z, entonces $g(t) = L(f(t))$ es un logaritmo continuo de f en T, pero en general no es cierto que todo logaritmo continuo de f en T admita una descomposición de este tipo (la función it es un logaritmo continuo de $f(t) = e^{it}$, definido en $T = [0, 2\pi]$, pero, según el ejercicio 3.4, en $f(T)$ no se puede definir un logaritmo continuo de z). En el ejercicio 3.5 se puede ver que, en las condiciones habituales, existe una descomposición local de este tipo.

Si $0 \notin f(T)$ y en T se puede definir un logaritmo continuo g de f entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe en T una raíz n-ésima continua dada por $h(t) = e^{\frac{1}{n}g(t)}$. Con los ejercicios 3.4 y 3.10 se pone de manifiesto que, aunque no exista un logaritmo continuo de f en T, puede ocurrir que para ciertos valores de $n \in \mathbb{N}$ existan raíces n-ésimas continuas de f en T.

En el ejercicio 3.2 se establece que si $T_0 = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$ es conexo no vacío y f posee en T una raíz n-ésima continua g, entonces posee exactamente n raíces n-ésimas continuas, que vienen dadas por

$$g_k(t) = \omega_k g(t) \;\text{ donde }\; \omega_k = e^{2\pi ik/n}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

En este caso, para determinar una rama continua g de $\sqrt[n]{f}$ basta elegir un punto $a \in T$ con $f(a) \neq 0$, indicando cuál de los n valores $\sqrt[n]{f(a)}$ es el que toma g en a. Cada $b \in \sqrt[n]{a}$ determina la rama g_k que cumple $g_k(a) = b$.

Se verá más adelante que la hipótesis sobre la conexión del conjunto T_0 que interviene en el resultado anterior se cumple cuando $T \subset \mathbb{C}$ es abierto conexo y f una función holomorfa no constante (véase el ejercicio 2.39).

En la proposición 5.1.5 y en el ejercicio 7.36 se verán criterios útiles, en términos de integrales curvilíneas, para discutir la existencia de ramas de logaritmos y de raíces n-ésimas de funciones complejas. Sin embargo, para el caso de las funciones polinómicas sencillas merece la pena ejercitarse en la búsqueda de fórmulas y de los dominios donde estas fórmulas definen ramas concretas de logaritmos y raíces del la función considerada.

3.1.3. Funciones holomorfas

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es *derivable* (en sentido complejo) en $a \in \Omega$ cuando existe el límite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a).$$

En este caso se dice que $f'(a)$ es la derivada de f en a. Para la derivación compleja se verifican los resultados usuales del cálculo diferencial: la derivabilidad en un punto implica la continuidad en el punto; valen las reglas usuales para el cálculo de derivadas de sumas y productos, así como la regla de la cadena para la derivada de la composición de funciones derivables, $f \circ g$, donde g es de variable real o compleja. Si Ω es conexo y $f'(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$ entonces f es constante.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en todo $z \in \Omega$ se dice que f es *holomorfa* en Ω. El conjunto de las funciones holomorfas en Ω se denota $\mathscr{H}(\Omega)$. A las funciones definidas y holomorfas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ se les llama *funciones enteras*.

Cada polinomio complejo $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ es una función entera y vale la fórmula usual para la derivada,

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

La función exponencial e^z, las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ y las funciones hiperbólicas de variable compleja son enteras y para todas ellas siguen valiendo las mismas reglas de derivación que en el caso real.

Proposición 3.1.4.
Sean $\Omega, V \subset \mathbb{C}$ abiertos, $\varphi \in \mathscr{H}(V)$ y $g : \Omega \longrightarrow V$ una función continua tal que $\varphi(g(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$. Si φ' no se anula sobre $g(\Omega)$ entonces g es holomorfa y $g' = 1/(\varphi' \circ g)$.

En particular, el logaritmo principal $\operatorname{Log} z$ es holomorfo en su dominio, con derivada $1/z$. Más aún, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ y g es un logaritmo continuo (resp. una raíz m-ésima continua) de f entonces g es holomorfo con derivada $g' = f'/f$ (resp. $mg'f = gf'$). Cuando f se anula en algún punto de Ω, si g es una raíz m-ésima continua de f en Ω, también se cumple que g es holomorfa en Ω. En este caso, si a es un cero aislado de f, la igualdad $mg'f = gf'$ no proporciona el valor $g'(a)$, y se puede usar (véase el ejercicio 5.24) la fórmula

$$g'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)g(z)}{mf(z)}$$

Proposición 3.1.5.
Una condición necesaria y suficiente para que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ posea logaritmo holomorfo en Ω es que $0 \notin f(\Omega)$ y que la función f'/f tenga primitiva en Ω. En este caso, si Ω es conexo y g es una primitiva de f'/f, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g - c$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω.

Es fácil ver que en una corona circular $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$ no existe un logaritmo continuo de z (véase el ejercicio 3.4) luego, en virtud de los resultados anteriores, $1/z$ no tiene primitiva en Ω.

Condiciones de Cauchy-Riemann

Cuando $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada mediante sus componentes

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy),$$

el siguiente teorema sirve para reconocer, entre las aplicaciones diferenciables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, las que son holomorfas.

Teorema 3.1.6.
Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dado un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, son equivalentes:

a) *f es derivable en z_0.*

b) *f es diferenciable en z_0 y sus componentes $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, cumplen en $z_0 = x_0 + iy_0$ las condiciones de Cauchy-Riemann:*

$$D_1u(x_0, y_0) = D_2v(x_0, y_0), \qquad D_2u(x_0, y_0) = -D_1v(x_0, y_0).$$

En este caso: $f'(z_0) = D_1u(x_0, y_0) + iD_1v(x_0, y_0)$.

El conjunto de las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, denotado $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ en lo que sigue, se puede considerar como espacio vectorial de dimensión dos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, mediante la ley externa $\mathbb{C} \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, dada por $(\mu L)(h) = \mu \cdot L(h)$. Una base de este espacio vectorial es la formada por las proyecciones

$$dx : z \to x = \operatorname{Re} z; \qquad dy : z \to y = \operatorname{Im} z.$$

Respecto a esta base una aplicación lineal $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matriz $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right)$ se expresa en la forma $L = pdx + qdy$, donde $p = \alpha + i\beta$, $q = \gamma + i\delta$. Otra base de este espacio vectorial complejo la forman las aplicaciones lineales

$$dz : z \to z; \qquad d\overline{z} : z \to \overline{z}.$$

En términos de esta base, $L = rdz + sd\overline{z}$ donde $r = (p-iq)/2$, $s = (p+iq)/2$, y la condición de que L sea $\mathbb{C}$-lineal equivale a que $s = 0$.

En términos de estas bases la diferencial $df(z_0)$ se expresa así:

$$df(z_0) = D_1f(z_0)dx + D_2f(z_0)dy = \partial f(z_0)dz + \overline{\partial} f(z_0)d\overline{z}$$

donde

$$\partial f(z_0) = \frac{D_1f(z_0) - iD_2f(z_0)}{2} = \frac{1}{2}[D_1u(z_0) + D_2v(z_0) + iD_1v(z_0) - iD_2u(z_0)]$$

$$\overline{\partial} f(z_0) = \frac{D_1f(z_0) + iD_2f(z_0)}{2} = \frac{1}{2}[D_1u(z_0) - D_2v(z_0) + iD_1v(z_0) + iD_2u(z_0)]$$

Según el teorema 3.1.6, f es derivable en z_0 si y sólo si $\overline{\partial} f(z_0) = 0$, y en este caso $f'(z_0) = \partial f(z_0)$. También se suele emplear la notación

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \partial f(z_0); \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\partial} f(z_0);$$

con la que las condiciones de Cauchy-Riemann en z_0 se resumen así:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$$

y la condición para que una función diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sea holomorfa se expresa en la forma $(\partial f/\partial \overline{z}) \equiv 0$, que se suele interpretar diciendo que

$$f^*(z, \overline{z}) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)$$

no depende de $\overline{z}$. Las funciones diferenciables en Ω que cumplen $(\partial f/\partial z) \equiv 0$ sólo dependen de $\overline{z}$ y se les llama *antiholomorfas* (véase el ejercicio 3.26).

3.1.4. Transformaciones conformes

Dado un par ordenado de vectores no nulos (w_1, w_2) del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ (que se supone identificado con $\mathbb{C}$) se llama *ángulo orientado* del par (w_1, w_2) al número real $\operatorname{Arg}(w_2/w_1) \in (-\pi, \pi]$.

Definición 3.1.7.

Se dice que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$ cuando para cada w, con $|w| = 1$, existe $\delta_w > 0$ tal que $D(a, \delta_w) \subseteq \Omega$, $f(a + tw) - f(a) \neq 0$ si $0 < t < \delta_w$ y el límite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(a + tw) - f(a)}{w|f(a + tw) - f(a)|} = c$$

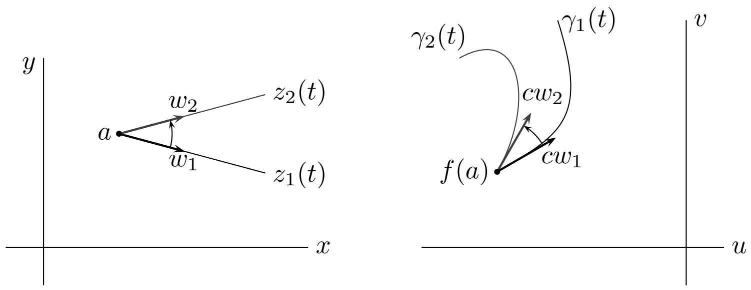
existe y no depende de w.

La interpretación geométrica de esta definición es sencilla. El vector unitario cw señala la dirección límite de las direcciones de las cuerdas $f(a + tw) - f(a)$, de modo que cw es un vector unitario tangente a la curva $t \to f(a + tw)$ en el punto $f(a)$ (este vector tangente unitario puede existir cuando $f'(a) = 0$, por lo que esta noción de vector tangente es más general que la usual).

Dadas dos semirrectas que surgen de a, de ecuaciones paramétricas

$$z_1(t) = a + tw_1, \qquad z_2(t) = a + tw_2, \quad t \geq 0$$

con $|w_1| = |w_2| = 1$, sus imágenes mediante f son dos curvas que surgen de $f(a)$ con la propiedad de que sus vectores unitarios tangentes forman un par ordenado (cw_1, cw_2), cuyo ángulo orientado coincide con el del par (w_1, w_2).



Una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ conserva ángulos orientados en 0 si y sólo si los conserva en todos los puntos y esto ocurre si y sólo si es $\mathbb{C}$-lineal no nula (véase el ejercicio 2.9).

Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$ es fácil comprobar que f conserva ángulos orientados en a. Recíprocamente, se tiene

Teorema 3.1.8.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$ con $df(a) \neq 0$ y conserva ángulos orientados en a entonces f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$.

Así pues, una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$ si y sólo si $f'(a) \neq 0$. Cuando f es holomorfa el comportamiento del camino $w(t) = f(z(t))$ cuando el camino $z(t)$ pasa por un punto (o cerca de un punto) a con $f'(a) = 0$, permite localizar los puntos con derivada nula (véase el ejercicio 4.52).

Las funciones holomorfas con derivada no nula en todos los puntos de su dominio conservan ángulos orientados en todo punto y por ello reciben un nombre especial:

Definición 3.1.9.

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es conforme en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si es derivable en cada $z \in \Omega$ con $f'(z) \neq 0$.

Un isomorfismo conforme del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

Obsérvese que, en virtud del teorema 3.1.8, toda función biyectiva y diferenciable con inversa diferenciable $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ que sea conforme debe ser holomorfa.

Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ designará el conjunto de los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Cuando $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) \neq \emptyset$ se dice que los abiertos Ω_1, Ω_2 son *conformemente equivalentes*. Por definición, $\Gamma(\Omega_1) = \Gamma(\Omega_1, \Omega_1)$.

El problema central de la representación conforme es el de determinar cuándo dos abiertos dados Ω_1, Ω_2 son conformemente equivalentes y en su caso describir el conjunto $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$. Cuando se conoce uno de los dos grupos de transformaciones $\Gamma(\Omega_1)$, $\Gamma(\Omega_2)$ basta conocer un elemento particular $f \in \Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ para describir el conjunto

$$\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) = \{f \circ \varphi : \varphi \in \Gamma(\Omega_1)\} = \{\varphi \circ f : \varphi \in \Gamma(\Omega_2)\}.$$

Según la proposición 3.1.4, una biyección $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es un isomorfismo conforme cuando es holomorfa con inversa continua. De esta afirmación se puede eliminar el requerimiento de que la inversa sea continua porque los recursos más avanzados de la teoría (corolario 6.1.3) permiten afirmar que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, la imagen $V = f(\Omega)$ es abierta y la inversa $f^{-1} : V \longrightarrow \Omega$ es holomorfa. Es decir, toda función holomorfa e inyectiva es un isomorfismo conforme entre su dominio y su imagen, que necesariamente es abierta. En la práctica, como sucede en los ejercicios de este capítulo, se puede prescindir de este resultado ya que, en las transformaciones concretas que se consideran suele ser fácil comprobar que su imagen es abierta y que la inversa es derivable.

La transformación $z \to z^2$

La derivada de z^2 sólo se anula en $z = 0$ donde se aprecia claramente que no se conservan ángulos orientados. En este caso se duplican. Este fenómeno, que se analiza con detalle en el ejercicio 4.52, lo presenta en $z = a$ cualquier función holomorfa con $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$.

Para cada $w \neq 0$ la ecuación $z^2 = w$ tiene exactamente dos soluciones, una opuesta de la otra. Por lo tanto z^2 es inyectiva y conforme sobre cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que verifique $z \in \Omega \Rightarrow -z \notin \Omega$. Los abiertos

$$A = \{x + iy : x > 0,\, y > 0\}; \quad P = \{x + iy : y > 0\}; \quad H = \{x + iy : x > 0\}$$

tienen esta propiedad, luego z^2 establece isomorfismos conformes entre cada uno de ellos y su imagen. Las imágenes de estos abiertos se obtienen fácilmente usando coordenadas polares $z = re^{i\alpha}$, y son, respectivamente,

$$P, \quad \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}, \quad \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Conviene observar que la inversa de $f|_H$ es la raíz cuadrada principal $\sqrt{z}$, pero la inversa de $f|_P$ es $i\sqrt{-z}$. El siguiente cuadro resume algunos isomorfismos conformes que se establecen mediante la función z^2 (véanse los ejercicios 2.22 y 2.23). En cada caso la inversa es la restricción, al abierto Ω_2, de la raíz cuadrada principal $\sqrt{z}$.

$\Omega_1 \xrightarrow{z^2} \Omega_2$	
$\{x + iy : x > 0, y > 0\}$	$\{u + iv : v > 0\}$
$\{x + iy : x > 0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} : u \leq 0\}$
$\{x + iy : x > t\}$	$\{u + iv : v^2 > 4t^2(t^2 - u)\}$
$\{x + iy : x^2 - y^2 > t\}$	$\{u + iv : u > t\}$

La transformación $z \to e^z$

La derivada de la función exponencial no se anula nunca, luego la transformación $z \to e^z$ es conforme e inyectiva sobre cualquier abierto Ω que no contenga parejas de puntos z_1, z_2 verificando $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Usando coordenadas polares para $w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ se observa que la función exponencial establece isomorfismos conformes entre las siguientes parejas de abiertos Ω_1, Ω_2 (donde $t - s < 2\pi$):

$\Omega_1 \xrightarrow{\exp} \Omega_2$	
$\{x + iy : s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : r > 0,\ s < \theta < t\}$
$\{x + iy : x < 0,\ s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : 0 < r < 1,\ s < \theta < t\}$

En particular, cuando $t - s = \pi$, la función exponencial proporciona un isomorfismo conforme entre una banda y un semiplano y entre una semibanda y un disco. Para $t - s = \pi/2$ se consigue un isomorfismo conforme de una banda sobre un cuadrante y de una semibanda sobre un cuadrante de un disco.

Transformaciones conformes en $\mathbb{C}_\infty$

Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se dice que es derivable en $\infty \in \Omega$ cuando la función $F(z) = f(1/z)$, definida en un entorno de 0, es derivable en $z = 0$ (se usa el convenio usual $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$). En ese caso se define $f'(\infty) = F'(0)$.

La noción de derivada en el punto ∞ permite introducir la noción de función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$: si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en todos los puntos de $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se dice que f es holomorfa en Ω y se escribe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Con una una idea parecida se extiende la noción de derivada al caso de funciones con valores en $\mathbb{C}_\infty$.

Definición 3.1.10.
Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, y $a \in \Omega$.

Si $f(a) \neq \infty$, se dice que f es derivable en $a \in \Omega$ cuando existe $r > 0$ tal que $f(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$ y $f|_{D(a,r)}$ es derivable en a.

Si $f(a) = \infty$, se dice que f es derivable en a cuando existe $r > 0$ tal que $(1/f)(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$ y $(1/f)|_{D(a,r)}$ es derivable en a. En este caso se adopta el valor $f'(a) = (1/f)'(a)$.

Obsérvese que en la definición anterior está considerada la posibilidad de que sea $a = \infty \in \Omega$. En este caso la definición remite a la definición de derivada en ∞ dada anteriormente. En particular, cuando $f(\infty) = \infty$, la derivabilidad de f en ∞ significa que $h(z) = 1/f(1/z)$ es derivable en 0, con $f'(\infty) = h'(0)$.

Si f es derivable en $a \in \Omega$ entonces es continua en a, pero en el caso $a = \infty$ la derivada f' puede ser discontinua en ∞ (obsérvese que cuando $f(z) = 1/z$, se tiene $f'(\infty) \neq \lim_{z\to\infty} f'(z)$). A pesar de este hecho, la definición de derivada $f'(a)$ cuando $a = \infty$ o $f(a) = \infty$ tiene interés porque con ella, en todos los casos, la condición $f'(a) \neq 0$ tiene una interpretación geométrica interesante sobre la esfera de Riemann (véase el ejercicio 3.42).

Ahora, las nociones de transformación conforme e isomorfismo conforme, formuladas en la definición 3.1.9, se pueden extender al caso de abiertos Ω_1, Ω_2 en $\mathbb{C}_\infty$. Es fácil comprobar que las transformaciones de Möbius son automorfismos conformes de $\mathbb{C}_\infty$ por lo que las transformaciones inducidas en la esfera de Riemann tienen la propiedad de conservar ángulos orientados en todos los puntos.

3.2. Ejercicios resueltos

3.2.1. Sobre la determinación de ramas

Los requisitos teóricos para abordar los primeros ejercicios de este bloque son los básicos referentes a conexión y continuidad en el ámbito del plano complejo con la distancia usual. En ellos se establecen los resultados básicos que se suelen usar para determinar ramas continuas de algunas funciones multiformes (raíces y logaritmos de funciones). Estos resultados se usan sistemáticamente en los siguientes ejercicios referentes a la determinación de ramas de logaritmos y raíces de algunos polinomios. A su vez estos ejercicios intervienen más adelante a la hora de definir ramas concretas de la inversa de la transformación de Joukowski y de la multifunción $\operatorname{arc}\cos z$ (véanse los ejercicios 3.9, 3.21, 2.27, 2.28 y 2.29).

Ejercicio 3.1.
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua definida en un conjunto conexo $X \subset \mathbb{C}$.

a) Si $L_1, L_2 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ son logaritmos continuos de f en X (funciones continuas que verifican $e^{L_1(x)} = e^{L_2(x)} = f(x)$ para todo $x \in X$) demuestre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $L_1(x) = L_2(x) + 2\pi m i$ para todo $x \in X$.

b) Si $A_1, A_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ son argumentos continuos de f en X (funciones continuas que verifican $e^{iA_1(x)} = e^{iA_2(x)} = f(x)/|f(x)|$ para todo $x \in X$) demuestre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $A_1(x) = A_2(x) + 2\pi m$ para todo $x \in X$.

SOLUCIÓN.

La función $h = L_1 - L_2$ es continua y cumple $e^{h(x)} = 1$ para todo $x \in X$, luego $h(X)$ es un subconjunto conexo del conjunto discreto $\{2\pi n i : n \in \mathbb{Z}\}$.

Los subconjuntos conexos no vacíos de los conjuntos discretos son los que sólo tienen un elemento, y así se obtiene el resultado referente a los logaritmos. Análogamente se obtiene el relativo a los argumentos

Ejercicio 3.2.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua definida en $X \subset \mathbb{C}$ y $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una raíz n-ésima continua de f en X (una función continua que verifica $f(x) = g(x)^n$ para todo $x \in X$). Si $X_0 = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es conexo no vacío demuestre que f tiene en X exactamente n raíces n-ésimas continuas, dadas por

$$g_k(x) = \omega_k g(x) \quad \textit{donde} \quad \omega_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Muestre con un ejemplo que el resultado es falso cuando X_0 no es conexo.

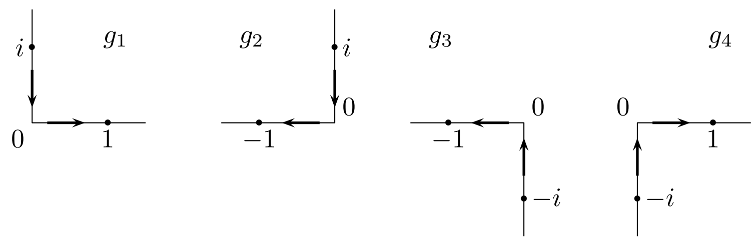
SOLUCIÓN.

Es evidente que cada g_k es una raíz n-ésima continua de f en X y basta demostrar que si h es una raíz n-ésima continua de f en X entonces $h = g_k$ para algún $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. La función $F(x) = h(x)/g(x)$ está definida y es continua en el conjunto conexo X_0, luego $F(X_0)$ es un subconjunto conexo del conjunto finito $\{z : z^n = 1\} = \{\omega_k : k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ y por lo tanto se reduce a un punto. Queda demostrado así que existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $h(x) = \omega_k g(x)$ para todo $x \in X_0$. Obsérvese que $h(x) = g(x) = 0$ cuando $f(x) = 0$, de modo que $h(x) = g_k(x)$ para todo $x \in X$.

Para poner de manifiesto que el resultado anterior puede ser falso cuando X_0 no es conexo consideremos el siguiente ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$, considerado como subconjunto de $\mathbb{C}$, y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ la función continua $f(x) = x$. Esta función tiene cuatro raíces cuadradas $g_1, g_2, g_3, g_4 : X \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas y distintas, definidas por

$$\begin{array}{llll}
g_1(x) = i\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, & g_1(x) = x & \text{si } x \geq 0; \\
g_2(x) = i\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, & g_2(x) = -x & \text{si } x \geq 0; \\
g_3(x) = -i\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, & g_3(x) = -x & \text{si } x \geq 0; \\
g_4(x) = -i\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, & g_4(x) = x & \text{si } x \geq 0.
\end{array}$$

Sus respectivas imágenes son las trayectorias que se indican gráficamente.



Ejercicio 3.3.

Dado $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, obtenga fórmulas con las que queden definidos un logaritmo continuo y un argumento continuo de z en el abierto

$$\Omega_b = \mathbb{C} \setminus \{tb : t \in \mathbb{R},\ t \leq 0\}.$$

SOLUCIÓN.

Si $a \in \log b$ la función $\operatorname{Log}_b z = \operatorname{Log}(z/b) + a$, que está definida y es continua en Ω_b, verifica $e^{\operatorname{Log}_b z} = z$ para todo $z \in \Omega_b$, luego $\operatorname{Log}_b z$ (resp. $\operatorname{Im}(\operatorname{Log}_b z)$) es un logaritmo (resp. argumento) continuo de z, en Ω_b.

Ejercicio 3.4.

Si $\{z : |z| = r\} \subset V \subset \mathbb{C}$ y $1 < m \in \mathbb{N}$, demuestre que una condición necesaria y suficiente para que exista en V una raíz m-ésima continua de z^n, ($n \in \mathbb{N}$), es que n sea un múltiplo de m. Obtenga como consecuencia que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, no existe un logaritmo continuo de z^n en V.

SOLUCIÓN.

Si n es múltiplo de m es obvio que existe una raíz m-ésima continua de z^n. Recíprocamente, supongamos que existe una función continua $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z)^m = z^n$ para todo $z \in V$. Entonces, sobre $[0, 2\pi]$, las funciones $\theta \to f(re^{i\theta})$ y $\theta \to \sqrt[m]{r^n} e^{\frac{n}{m} i\theta}$ son raíces m-ésimas continuas de la función $\theta \to r^n e^{in\theta}$. Por lo tanto, en virtud del ejercicio 3.2, existe $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^m = 1$ y

$$f(re^{i\theta}) = \omega \sqrt[m]{r^n} e^{\frac{n}{m} i\theta} \text{ para todo } \theta \in [0, 2\pi].$$

Esta igualdad, aplicada para $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, conduce a $1 = e^{\frac{n}{m} 2\pi i}$, luego n ha de ser un múltiplo de m.

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ existiese en V un logaritmo continuo de z^n entonces existirían raíces m-ésimas de z^n para todo $m \in \mathbb{N}$, lo que es imposible en virtud de lo que se acaba de establecer.

Ejercicio 3.5.

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función continua que posee un logaritmo continuo g (resp. una raíz m-ésima continua h) en $X \subset \mathbb{C}$.

a) Muestre que, en general, no se puede asegurar la existencia de un logaritmo continuo de z, definido en $f(X)$, tal que

$$g(x) = L(f(x)) \quad \textit{(resp. } h(x) = e^{\frac{1}{m} L(f(x))}\textit{)} \quad \textit{para todo } x \in X.$$

b) Si X es localmente conexo (cada punto posee una base de entornos conexos) demuestre que cada $a \in X$ posee un entorno V_a tal que en $f(V_a)$ hay definido un logaritmo continuo L de z verificando

$$g(x) = L(f(x)) \quad \textit{(resp. } h(x) = e^{\frac{1}{m} L(f(x))}\textit{)} \quad \textit{para todo } x \in V_a.$$

SOLUCIÓN.

a) $g(x) = ix$ es un logaritmo continuo de $f(x) = e^{ix}$ en $X = [0, 2\pi]$. Sin embargo sobre $f(X) = \{z : |z| = 1\}$ es imposible definir un logaritmo continuo de la identidad (véase el ejercicio 3.4). Análogamente $h(x) = e^{ix/m}$ es una raíz m-ésima continua de f en $X = [0, 2\pi]$ que no se puede expresar en la forma indicada.

b) Dado $a \in X$, existe un entorno abierto Ω_b de $b = f(a) \neq 0$ donde hay definido un logaritmo continuo de la identidad L_b. Como X es localmente conexo y f es continua existe un entorno conexo V_a de a, relativo a X, tal que $f(V_a) \subseteq \Omega_b$. Entonces con la composición $L_b(f(x))$ queda definido en V_a un logaritmo continuo de f, y según el ejercicio 3.1, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$g(x) - L_b(f(x)) = 2\pi m i \quad \text{para todo } x \in V_a.$$

Se sigue que $L(z) = L_b(z) + 2\pi m i$ es un logaritmo continuo de la identidad que verifica la condición requerida: $g(x) = L(f(x))$ para todo $x \in V_a$.

Análogamente, $e^{\frac{1}{m}L_b(f(x))}$ es una raíz m-ésima continua de f en V_a y, según el ejercicio 3.2, existe $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ tal que

$$h(x) = e^{i2\pi k/m} e^{\frac{1}{m}L_b(f(x))}$$

luego $L(z) = L_b(z) + 2\pi k i$ es un logaritmo continuo de z tal que $h(x) = e^{\frac{1}{m}L(f(x))}$ para todo $x \in V_a$.

Ejercicio 3.6.

Obtenga los abiertos en los que las siguientes fórmulas definen raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$ e indique las relaciones entre las mismas.

a) $f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1}$

b) $f_2(z) = z\sqrt{1 - \dfrac{1}{z^2}}$

c) $f_3(z) = i\sqrt{1 - z^2}$

Aquí $\sqrt{\ }$ designa la raíz cuadrada principal, definida en el complemento del eje real negativo.

SOLUCIÓN.

Para $i = 1, 2, 3$, la función $f_i(z)$ está definida en $\mathbb{C} \setminus T_i$ donde T_i es el conjunto de los puntos z donde la correspondiente expresión que aparece bajo el símbolo de la raíz cuadrada es real menor o igual que 0.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{z : z^2 \leq 0\} \cup \{z : z^2 \in [0,1]\} = i\mathbb{R} \cup [-1,1];\\
T_2 &= \{z : 1/z^2 \geq 1\} = [-1,1];\\
T_3 &= \{z : z^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}
\end{aligned}$$

Vemos así que el dominio de f_2 es el abierto $V = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ y que el dominio de f_3 es el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. El dominio de f_1 está contenido propiamente en el de f_2, y tiene dos componentes conexas

$$A = \{z : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus (0,1]; \qquad B = \{z : \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-1,0).$$

Sobre A coinciden f_1 y f_2 pues $2 \in A$ y $f_1(2) = \sqrt{3} = f_2(2)$ mientras que sobre B coinciden f_1 y $-f_2$ ya que $f_1(-2) = -\sqrt{3} = -f_2(-2)$.

Por otra parte, la intersección $V \cap U$ de los dominios de f_2 y f_3 tiene dos componentes conexas, que son los semiplanos

$$P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}; \qquad -P = \{z : \operatorname{Im} z < 0\};$$

y se tiene que f_2 coincide en P con f_3 y en $-P$ con $-f_3$ pues $f_2(i) = f_3(i)$ y $f_2(-i) = -f_3(i)$.

Nota. Este ejercicio muestra que la expresión $\sqrt{z^2 - 1}$ no es la forma natural de definir una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$. Observe que al usar esta fórmula se introduce una restricción artificial e innecesaria sobre el dominio de la raíz cuadrada, que ni siquiera resulta conexo. Además, al atravesar el eje imaginario la función definida mediante la fórmula $\sqrt{z^2 - 1}$ cambia de f_2 a $-f_2$, las dos ramas continuas de la raíz cuadrada de $z^2 - 1$, definidas en $V = \Omega \setminus T_2$. Obsérvese también que el dominio de f_1, al ser un subconjunto propio del dominio de f_2, no es maximal respecto a la propiedad: «existe en él una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$». Los dominios de f_2 y f_3 sí son maximales respecto a esta propiedad. Esta afirmación se podrá justificar después de haber visto el ejercicio 7.13 donde se demuestra que una condición necesaria y suficiente para que exista en Ω una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$ es que los puntos $+1$ y -1 estén en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Ejercicio 3.7.

Compruebe que las fórmulas

$$\varphi(z) = -i(z+1)\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \qquad \psi(z) = (z+1)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

definen, respectivamente, raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$ en los abiertos

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} \qquad V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}.$$

Obtenga su relación con las obtenidas en el ejercicio 3.6.

SOLUCIÓN.

El dominio de φ es $\mathbb{C} \setminus E$ donde E es el conjunto de los números complejos z tales que el cociente $T(z) = (1-z)/(1+z)$ es real ≤ 0. El cociente es real negativo si y sólo si los vectores $z - 1$ y $z + 1$ tienen la misma dirección, lo que ocurre si y sólo si $z \in \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$. Además $T(1) = 0$ y $T(-1) = \infty$, luego $E = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ (también se puede calcular $E = T^{-1}(\{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\})$ usando la teoría de transformaciones de Möbius). Se obtiene así que el dominio de φ es U. Con un razonamiento similar se obtiene que el dominio de ψ es V.

La función f_3 considerada en el ejercicio 3.6 también tiene como dominio el abierto U. Puesto que φ y f_3 son raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$ en el abierto conexo U, y ambas toman el mismo valor en $z = 0$, en virtud del ejercicio 3.2, se concluye que $\varphi = f_3$. Con un razonamiento similar, considerando el punto $z = 2$ del abierto conexo V, se obtiene que $\psi = f_2$.

Nota. Disponemos de dos fórmulas distintas para la función $\psi = f_2$ (resp. $\varphi = f_3$) y según los propósitos convendrá elegir la más apropiada. Veremos más adelante, en el ejercicio 4.22, que, para escribir el desarrollo de Laurent de ψ en $|z| > 1$, la más adecuada es la fórmula $\psi(z) = f_2(z) = \sqrt{1 - 1/z^2}$.

Ejercicio 3.8.

Utilice la teoría de las transformaciones de Möbius para obtener una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$, definida en el complemento de un arco de circunferencia de extremos $+1, -1$.

SOLUCIÓN.

Sea C_t el arco de circunferencia de extremos $+1, -1$ que pasa por el punto it (casos particulares son $C_0 = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ y $C_\infty = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$). Este arco se transforma en el eje real negativo mediante la transformación de Möbius

$$T(z) = a\frac{z-1}{z+1}, \qquad \text{con } a = \frac{1+it}{1-it}$$

(el valor de a ha sido elegido para que se cumpla $T(it) = -1$). Tomando $b = \sqrt{a}$, se comprueba fácilmente que la expresión

$$g_t(z) = \frac{z+1}{b}\sqrt{T(z)}$$

define en el abierto $\mathbb{C} \setminus C_t$ una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$.

En particular, en $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, $V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$ quedan definidas, espectivamente, las funciones

$$g_\infty(z) = -i(z+1)\sqrt{\frac{1-z}{z+1}} \qquad g_0(z) = (z+1)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$$

que ya han sido consideradas en el ejercicio 3.7.

Nota. Un resultado más general que el obtenido aquí se verá en el ejercicio 7.13.

Ejercicio 3.9.

Demuestre que en cada uno de los abiertos

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \qquad V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

se pueden definir exactamente dos ramas continuas de la inversa de la transformación de Joukowski $J(z) = (z + 1/z)/2$. Para cada una de ellas obtenga una fórmula explícita y la imagen.

SOLUCIÓN.

La condición $J(f(z)) = z$ equivale a $f(z)^2 - 2zf(z) + 1 = 0$, es decir, $(f(z) - z)^2 = z^2 - 1$, luego f es una rama continua de J^{-1} si y sólo si $f(z) - z$ es una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$.

Según el ejercicio 3.6, en U se pueden definir exactamente dos raíces cuadradas continuas de $z^2 - 1$, que son $i\sqrt{1-z^2}$ y $-i\sqrt{1-z^2}$, luego también se pueden definir dos (y sólo dos) ramas continuas de $J^{-1}(z)$, que son

$$f_1(z) = z + i\sqrt{1-z^2}, \qquad f_2(z) = z - i\sqrt{1-z^2}.$$

Análogamente, en V hay definidas exactamente dos raíces cuadradas continuas de z^2-1, a saber $z\sqrt{1-1/z^2}$ y $-z\sqrt{1-1/z^2}$, con las que se obtienen las dos ramas continuas de $J^{-1}(z)$ que se pueden definir en V

$$g_1(z) = z + z\sqrt{1-1/z^2}, \qquad g_2(z) = z - z\sqrt{1-1/z^2}.$$

Determinación de $f_1(U)$ y $f_2(U)$.

Es fácil ver que $f_1(U)$ no corta al eje real. Efectivamente, $f_1(z)f_2(z) = 1$ y si fuese $f_1(z) = x \in \mathbb{R}$ debería ser $x \neq 0$ y $f_2(z) = 1/x$, por tanto $z = (f_1(z) + f_2(z))/2$ sería real y también lo sería $2i\sqrt{1-z^2} = f_1(z) - f_2(z)$, con lo cual su cuadrado, $4(z^2-1)$, sería real positivo y se tendría que $z \notin U$.

Como $f_1(U)$ es un conexo que no corta al eje real y $f_1(0) = i$ se concluye que $f_1(U) \subset \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$. Análogamente $f_2(U) \subset \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$.

Por otra parte, cuando $\operatorname{Im} w > 0$ se cumple $z = J(w) \in U$ (pues si fuese $z = x \in \mathbb{R}$ con $|x| \geq 1$, entonces $w \in \{x - \sqrt{x^2-1}, x + \sqrt{x^2-1}\}$ sería real). Teniendo en cuenta que $w \in \{f_1(z), f_2(z)\}$ y que $\operatorname{Im} f_2(z) < 0$, se concluye que $w = f_1(z) \in f_1(U)$. Análogamente se prueba que $\{w : \operatorname{Im} w < 0\} \subset f_2(U)$, luego

$$f_1(U) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}, \qquad f_2(U) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}.$$

Determinación de $g_1(V)$ y $g_2(V)$.

$g_1(V)$ no corta a la circunferencia $C = \{w : |w| = 1\}$ pues si $g_1(z) = w$, con $|w| = 1$, se tendría $z = (w + 1/w)/2 = (w + \overline{w})/2 = \operatorname{Re} w \in [-1, 1]$.

Como el conexo $g_1(V)$ no corta a la circunferencia C y $|g_1(2)| > 1$ resulta $g_1(V) \subset \{w : |w| > 1\}$. Análogamente $g_2(V) \subset \{w : 0 < |w| < 1\}$.

Cuando $|w| > 1$ se cumple que $z = J(w) \in V$ (si fuese $z = x \in [-1, 1]$ se tendría $w \in \{x - i\sqrt{1-x^2}, x + i\sqrt{1-x^2}\} \subset C$). Como $w \in \{g_1(z), g_2(z)\}$ y $|g_2(z)| < 1$, se concluye que $w = g_1(z) \in g_1(V)$. Análogamente se prueba que $\{w : 0 < |w| < 1\} \subset g_2(V)$, luego

$$g_1(V) = \{w : |w| > 1\}, \qquad g_2(V) = \{w : 0 < |w| < 1\}.$$

Nota. En el ejercicio 2.28 se obtienen, por otro procedimiento, ramas continuas de la inversa J^{-1}, mediante fórmulas distintas de las obtenidas aquí. El ejercicio 3.8 sirve para confirmar que se trata de las mismas ramas, aunque estén definidas mediante fórmulas diferentes.

Ejercicio 3.10.

Demuestre que z^2-1 tiene logaritmo continuo en $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, no tiene logaritmo continuo en $V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$, pero posee raíz cuadrada continua en V.

SOLUCIÓN.

Obsérvese que

$$z \in U \Leftrightarrow z^2 \notin [1, +\infty) \Leftrightarrow z^2 - 1 \notin [0, +\infty).$$

Se sigue que en el abierto $\Omega_{-1} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ se puede definir un logaritmo continuo de z mediante la fórmula $\operatorname{Log}_{-1}(z) = \pi i + \operatorname{Log}(-z)$, (véase el ejercicio 3.3), luego $g(z) = \pi i + \operatorname{Log}(1 - z^2)$ es un logaritmo continuo de $z^2 - 1$ en U.

En V no existe un logaritmo continuo de $z^2 - 1$. Si existiese una función continua $h : V \longrightarrow \mathbb{C}$ con $e^{h(z)} = z^2 - 1$ para todo $z \in V$ entonces

$$h(z) - \operatorname{Log}(1 - 1/z^2)$$

sería un logaritmo continuo de z^2 definido en V, lo que es imposible en virtud del ejercicio 3.4.

Aunque en V no existe un logaritmo continuo de $z^2 - 1$, con la fórmula $z\sqrt{1 - 1/z^2}$ queda definida en V una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$ (véase el ejercicio 3.6).

Nota. Si $g(z) = \pi i + \operatorname{Log}(1 - z^2)$ es el logaritmo continuo de $z^2 - 1$ considerado anteriormente entonces $e^{g(z)/2}$ define en U una raíz cuadrada continua de $z^2 - 1$ que coincide con la función $i\sqrt{1 - z^2}$ considerada en el ejercicio 3.6.

Ejercicio 3.11.

Se considera el polinomio $p(z) = z^2 - 2z + 2$, con ceros $a = 1 + i$, $\overline{a} = 1 - i$.

Compruebe que las siguientes fórmulas definen ramas continuas de la raíz cuadrada del polinomio $p(z)$.

$$a)\ f_1(z) = (z-1)\sqrt{1 + \frac{1}{(z-1)^2}} \qquad b)\ f_2(z) = (z - \overline{a})\sqrt{\frac{z-a}{z-\overline{a}}}$$

$$c)\ f_3(z) = \sqrt{2}\sqrt{1 - z/a}\sqrt{1 - z/\overline{a}} \qquad d)\ f_4(z) = z\sqrt{1 - a/z}\sqrt{1 - \overline{a}/z}$$

Determine el dominio de cada una y estudie la relación entre cada dos ramas en la intersección de sus dominios.

SOLUCIÓN.

a) $1 + 1/(z-1)^2$ es infinito para $z = 1$ y real ≤ 0 cuando $(z-1)^2 \in [-1, 0)$, lo que ocurre si y sólo si $z - 1 = it$ con $0 < |t| \leq 1$, luego el dominio de f_1 es

$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus T_1 \ \text{ donde } \ T_1 = \{1 + it : |t| \leq 1\}.$$

b) $(z - a)/(z - \overline{a})$ es infinito para $z = \overline{a} = 1 - i$ y es real menor o igual que 0 para $z = 1 + it$ con $t \in (-1, 1]$, luego Ω_1 también es el dominio de f_2.

c) $1 - z/a$ es real ≤ 0 cuando $z = ta$ con $t \in [1, +\infty)$ y $1 - z/\overline{a}$ es real menor o igual que 0 cuando $z = t\overline{a}$ con $t \in [1, +\infty)$, luego el dominio de f_3 es

$$\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus T_3 \ \text{ donde } \ T_3 = \{ta : t \geq 1\} \cup \{t\overline{a} : t \geq 1\}.$$

d) $1 - a/z$ es infinito para $z = 0$ y es real ≤ 0 cuando $z = ta$ con $t \in (0, 1]$; análogamente $1 - \overline{a}/z$ es infinito cuando $z = 0$ y es real menor o igual que 0 para $z = t\overline{a}$ con $t \in (0, 1]$. Por lo tanto el dominio de f_4 es

$$\Omega_4 = \mathbb{C} \setminus T_4 \ \text{ donde } \ T_4 = \{ta : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{t\overline{a} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

El dominio común Ω_1 de las funciones f_1, f_2 es conexo y se comprueba fácilmente que $f_1(0) = -\sqrt{2} = f_2(0)$, luego $f_1 = f_2$.

El abierto $\Omega_1 \cap \Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (T_1 \cup T_3)$ tiene dos componentes conexas: U_0, la componente conexa de 0, y U_2, la componente conexa de 2. Puesto que $f_1(0) = -f_3(0)$ se sigue que

$f_1(z) = -f_3(z)$ para todo $z \in U_0$. Por otra parte $f_1(2) = \sqrt{2} = f_3(2)$, luego $f_1(z) = f_3(z)$ para todo $z \in U_2$.

El abierto $\Omega_1 \cap \Omega_4 = \mathbb{C} \setminus (T_1 \cup T_4)$ tiene dos componentes conexas: $V_{1/2}$, la componente conexa de $1/2$, y V_2, la componente conexa de 2. Puesto que $f_1(1/2) = -\sqrt{5}/2 = -f_4(1/2)$ se sigue que $f_1(z) = -f_4(z)$ para todo $z \in V_{1/2}$. Por otra parte $f_1(2) = \sqrt{2} = f_4(2)$ luego $f_1(z) = f_4(z)$ para todo $z \in V_2$.

Por último, $\Omega_3 \cap \Omega_4 = \mathbb{C} \setminus (T_3 \cup T_4)$ tiene dos componentes conexas: $W_1 = \{x + iy : x > 0, |y| < x\}$ y $W_{-1} = \{x + iy : x < |y|\}$, componentes conexas de 1 y -1, respectivamente. Como $f_3(1) = 1 = f_4(1)$ se cumple que $f_1(z) = f_4(z)$ para todo $z \in W_1$. Finalmente, $f_3(-1) = \sqrt{5} = -f_4(-1)$, luego $f_1(z) = -f_4(z)$ para todo $z \in W_{-1}$.

Nota. En los ejercicios 4.25 y 4.26 se obtendrán desarrollos en serie de potencias y de Laurent de raíces cuadradas holomorfas de $p(z) = z^2 - 2z + 1$.

Ejercicio 3.12.

Sea $\Omega_0 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus J$ donde $J = \{1 + it : 0 < t \leq 1\}$. Compruebe que con la fórmula $g(z) = i\sqrt{-p(z)}$ queda definida en Ω_0 una raíz cuadrada continua del polinomio $p(z) = z^2 - 2z + 2$. Demuestre que g es inyectiva sobre Ω_0, Calcule la imagen $G = g(\Omega_0)$ y una fórmula explícita para la inversa $g^{-1} : G \longrightarrow \Omega_0$.

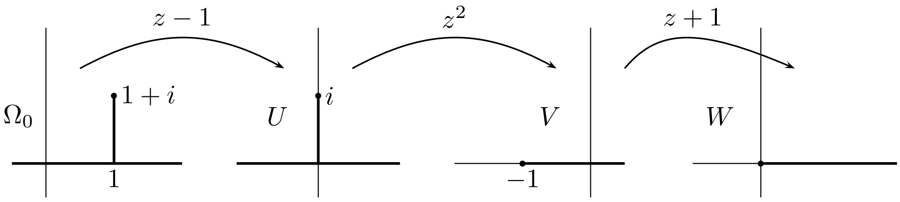
SOLUCIÓN.

Observemos en primer lugar que $p(z) = 1 + (z-1)^2$ establece una biyección entre Ω_0 y $W = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ que se puede obtener como composición de las siguientes transformaciones:

$z \to z - 1$, que transforma Ω_0 en $U := \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{it : 0 < t \leq 1\}$;

$z \to z^2$, que establece una biyección entre U y $V := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$;

$z \to z + 1$, que lleva V al abierto $W := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.



Se sigue que para cada $z \in \Omega_0$ el punto $-p(z)$ está en el dominio de la raíz cuadrada principal, luego $g(z) = i\sqrt{-p(z)}$ está definida y es continua en Ω_0. Es evidente que $g^2 = p$. Como la función $i\sqrt{-z}$ transforma $p(\Omega_0) = W$ en el semiplano $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, resulta $g(\Omega_0) = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

La inversa de la función $p|_{\Omega_0}$ viene dada por la composición de las inversas de las tres transformaciones elementales en que la hemos descompuesto. Como la inversa de $U \xrightarrow{z^2} V$ es $i\sqrt{-z}$ se obtiene que la inversa de $p|_{\Omega_0}$ es $h(w) := 1 + i\sqrt{1-w}$. Por lo tanto $g^{-1}(w) = h(-(w/i)^2) = h(w^2)$ es decir

$$g^{-1}(w) = 1 + i\sqrt{1 - w^2}$$

Nota. En el ejercicio 3.11 se ha obtenido una raíz cuadrada continua del polinomio $p(z)$, definida en un abierto $\Omega_1 \supset \Omega_0$. Es fácil ver que f_1 también es inyectiva y que $g(i) = f_1(i)$, luego g coincide con la restricción de f_1 al abierto Ω_0.

Ejercicio 3.13.

Justifique que en $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x|\}$ *y* $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ *existen raíces cuadradas continuas* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$*,* $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ *de la función* $\varphi(z) = z^2/(1 - z^2)$ *y obtenga fórmulas para las determinadas por* $f(i) = g(i) = i/\sqrt{2}$*. Compruebe que* f *y* g *coinciden y son inyectivas en el semiplano* $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$*, calcule la imagen* $A = f(P) = g(P)$ *y una fórmula para la inversa de* $f|_P$*.*

SOLUCIÓN.

Teniendo en cuenta el ejercicio 3.6 es claro que

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{i}{\sqrt{1 - 1/z^2}}$$

son raíces cuadradas continuas de φ definidas, respectivamente, en U y V, que verifican $f(i) = g(i) = i/\sqrt{2}$. Obsérvese que U y V son conexos, por lo que esta condición determina unívocamente estas raíces cuadradas.

Además, f es inyectiva sobre P porque su cuadrado $f^2 = \varphi$ lo es: si $z, w \in P$ y $\varphi(z) = \varphi(w)$ se tiene $z^2(1 - w^2) = w^2(1 - z^2)$, luego $z^2 = w^2$ y la condición $w, z \in P$ implica que $z = w$.

Como $P \subset U \cap V$ es conexo y $f(i) = g(i)$, con $i \in P$, se obtiene que f y g coinciden sobre P, mientras que f y $-g$ coinciden sobre $-P = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Se sigue de esto que

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{i}{\sqrt{1 - 1/z^2}} \quad \text{si} \quad z \in P$$

son fórmulas válidas para $f|_P$. Usando la segunda fórmula se puede descomponer $f|_P$ en transformaciones elementales que permiten calcular la imagen $f(P)$: con la cadena de transformaciones

$$z \to -z^2; \quad z \to 1/z; \quad z \to 1 + z; \quad z \to \sqrt{z}$$

se obtiene que $\sqrt{1 - 1/z^2}$ transforma P en

$$E = \{z : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}.$$

Como la imagen de E mediante $z \to i/z$ es $A = P \setminus \{iy : y \geq 1\}$ se sigue que la inversa de $f|_P$ es una función $h : A \longrightarrow P$ que se puede calcular componiendo las inversas de las transformaciones elementales consideradas anteriormente.

Teniendo en cuenta que la inversa de la primera transformación $z \to -z^2$, entre P y su imagen $\mathbb{C} \setminus \{x :\in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ viene dada por $z \to i\sqrt{z}$ se obtiene la fórmula

$$h(w) = i\sqrt{\frac{-w^2}{1 + w^2}}$$

con la que se pone de manifiesto que h es continua y que $h(i/\sqrt{2}) = i$.

Por otra parte, elevando al cuadrado la igualdad $w = f(z)$ se llega a

$$w^2 = \frac{z^2}{1 - z^2} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{w^2}{1 + w^2}$$

luego $h(w)$ es la raíz cuadrada continua $w^2/(1 + w^2)$, definida en A, que vale i cuando $w = i/\sqrt{2}$. Obsérvese que con la fórmula $H(w) = w/\sqrt{1 + w^2}$ queda definida en $G = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\} \supset A$ una raíz cuadrada continua de $w^2/(1 + w^2)$, que vale i cuando $w = i/\sqrt{2}$, luego $h = H|_A$.

3.2.2. Propiedades de las funciones elementales

En los siguientes ejercicios se consideran propiedades sencillas y básicas de las funciones elementales que son consecuencia directa de su definición (ceros, inyectividad, cálculo de imágenes).

Ejercicio 3.14.

Obtenga los ceros de las funciones $\cos z$*,* $\operatorname{sen} z$*,* $\operatorname{ch} z$ *y* $\operatorname{sh} z$*.*

SOLUCIÓN.

Es inmediato que $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$, luego $|\cos z|^2 = \cos z\, \overline{\cos z} = \cos z \cos \overline{z}$, y usando la fórmula $2\cos z \cos w = \cos(z+w) + \cos(z-w)$, se obtiene

$$2|\cos z|^2 = \cos(z+\overline{z}) + \cos(z-\overline{z}) = \cos 2x + \operatorname{ch} 2y.$$

$\operatorname{ch} 2y \geq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, luego $\cos z$ sólo se anula cuando $\operatorname{ch} 2y = 1$ y $\cos 2x = -1$, es decir, cuando $y = 0$ y $\cos x = 0$. Es decir, los ceros de la función compleja $\cos z$ están en el eje real y coinciden con los de la función real $\cos x$. Con la relación $\operatorname{sen} z = \cos(\pi/2 - z)$ se deduce que los ceros de $\operatorname{sen} z$ también son reales, luego

$$\mathscr{Z}(\cos) = \left\{\frac{\pi}{2} + m\pi : m \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \mathscr{Z}(\operatorname{sen}) = \{m\pi : m \in \mathbb{Z}\},$$

y teniendo en cuenta que $\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz$, se obtiene

$$\mathscr{Z}(\operatorname{ch}) = \left\{\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right)i : m \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \mathscr{Z}(\operatorname{sh}) = \{m\pi i : m \in \mathbb{Z}\}.$$

($\mathscr{Z}(f)$ denota el conjunto de los ceros de la función f).

Ejercicio 3.15.

Determine los periodos de la función $\cos z$*.*

SOLUCIÓN.

Es inmediato que $2m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$, es periodo de $\cos z$. No hay más periodos, pues si p es un periodo de $\cos z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple

$$0 = \cos z - \cos(z+p) = 2\operatorname{sen}(p/2)\operatorname{sen}(z+p/2).$$

Eligiendo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen}(z+p/2) \neq 0$ se obtiene que $\operatorname{sen}(p/2) = 0$ luego, según el ejercicio 3.14, $p \in \{2m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 3.16.

Dado $0 < \varepsilon < 1$ *sea* A_ε *el complementario en* $\mathbb{C}$ *de la unión de los discos* $D(n\pi, \varepsilon)$*,* $n \in \mathbb{Z}$*. Demuestre que existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$|\operatorname{sen} z| \geq C_\varepsilon, \quad |\operatorname{tg} z| \geq C_\varepsilon \quad \textit{para todo } z \in A_\varepsilon.$$

SOLUCIÓN.

Como la función $|\operatorname{sen} z|$ es periódica de periodo π, basta demostrar que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que para cada z en $H(\varepsilon) = \{z : -\pi/2 \le \operatorname{Re} z \le \pi/2,\ |z| \ge \varepsilon\}$ se cumple $|\operatorname{sen} z| \ge C_\varepsilon$. Para ello consideremos la desigualdad

$$|\operatorname{sen} z| = \left|\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\right| \ge \frac{1}{2}\big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big| = \frac{1}{2}(|e^{-y} - e^{y}|).$$

La función $h(y) = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^{y}|$ es par y creciente en $[1, +\infty]$, luego

$$|\operatorname{sen} z| \ge h(y) \ge h(1) \quad \text{cuando} \quad z = x + iy \in H(\varepsilon) \text{ con } |y| \ge 1.$$

Por otra parte, la función continua $|\operatorname{sen} z|$ no se anula y alcanza un mínimo absoluto sobre el compacto $K(\varepsilon) = \{x + iy \in H(\varepsilon) : |y| \le 1\}$, luego existe $a \in K(\varepsilon)$ tal que $|\operatorname{sen} z| \ge |\operatorname{sen} a| > 0$ para todo $z \in K(\varepsilon)$.

La constante $C_\varepsilon = \text{mín}\{h(1), |\operatorname{sen} a|\}$ cumple el requisito del enunciado para la función $|\operatorname{sen} z|$.

Con la función $\operatorname{tg} z$ se razona de modo análogo, usando que

$$|\operatorname{tg} z| \ge \frac{|e^{y} - e^{-y}|}{|e^{y} + e^{-y}|} \ge |e^{y} - e^{-y}|.$$

Ejercicio 3.17.

Compruebe que la función $\operatorname{tg} z$ *es inyectiva sobre* $\Omega = \{x + iy : |x| < \pi/4\}$ *y obtenga la imagen* $\operatorname{tg}(\Omega)$.

SOLUCIÓN.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = T(e^{2iz}), \quad \text{donde} \quad T(z) = i\frac{1 - z}{1 + z}.$$

La función $e^{2iz} = e^{-2y}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$ es inyectiva sobre el abierto Ω y lo transforma en el semiplano $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. La transformación de Möbius T es inyectiva y por lo tanto $\operatorname{tg} z$ es inyectiva sobre Ω. Por otra parte, como $T(1) = 0$ y $T(-1) = \infty$, en virtud del principio de simetría T transforma el eje imaginario en la circunferencia de centro 0 y radio 1 (porque $T(0) = i$). Como $0 = T(1) \in T(H)$ obtiene que $T(H) = D(0, 1)$, luego $\operatorname{tg}(\Omega) = T(H) = D(0, 1)$.

Según lo que se ha establecido, $\operatorname{tg}|_\Omega$ tiene inversa definida en $D(0, 1)$. Esta inversa es una rama de la multifunción $\operatorname{arc\,tg} z$. Fórmulas para esta y otras ramas de $\operatorname{arc\,tg} z$ se pueden ver en los ejercicios 3.18 y 3.19.

Ejercicio 3.18.

Compruebe que en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \ge 1\}$ *se pueden definir ramas continuas de* $\operatorname{arc\,tg} z$. *Si* f *es la rama determinada por* $f(0) = 0$, *obtenga* $f(\Omega)$ *y* $f(D(0, 1))$.

SOLUCIÓN.

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = T(e^{2iw}) \quad \text{donde} \quad T(z) = i\frac{1 - z}{1 + z}$$

luego $\operatorname{tg} w = z$ si y sólo si $e^{2iw} = S(z)$, donde

$$S(z) = T^{-1}(z) = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z}$$

Entonces, para definir en Ω una rama continua de $\operatorname{arc\,tg} z$, basta definir un logaritmo continuo de $S(z)$ y dividirlo luego por $2i$.

Utilizando la teoría de las transformaciones de Möbius, se obtiene que $S(\Omega) = \Omega_1$, donde $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ es el dominio del logaritmo principal. Por lo tanto, en el abierto Ω está definida la función

$$f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} S(z)$$

que verifica $\operatorname{tg} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$ podemos afirmar que $2if(z)$ es el único logaritmo continuo de $S(z)$, definido en Ω, que se anula en $z = 0$. Como $S(\Omega) = \Omega_1$ y $\operatorname{Log}(\Omega_1) = \{x + iy : |y| < \pi\}$, resulta

$$f(\Omega) = \{x + iy : |x| < \pi/2\}.$$

Análogamente, $S\big(D(0,1)\big) = \{x + iy : x > 0\}$ cuya imagen mediante el logaritmo principal es $\{x + iy : |y| < \pi/2\}$, luego

$$f\big(D(0,1)\big) = \{x + iy : |x| < \pi/4\}.$$

Nota. Obsérvese que, de acuerdo con lo obtenido en el ejercicio 3.17, la rama f es la inversa de $\operatorname{tg}|_D(0,1)$. Por otra parte, si E es un arco de circunferencia de extremos i, $-i$, en el ejercicio 3.19 se muestra que en $\mathbb{C} \setminus E$ también se puede definir un logaritmo continuo de $S(z)$, y por lo tanto una rama continua de $\operatorname{arc\,tg} z$. Un resultado más general se verá en el ejercicio 7.15.

Ejercicio 3.19.

Utilice la teoría de las transformaciones de Möbius para obtener una fórmula explícita para una rama continua de $\operatorname{arc\,tg} z$ *definida en el complemento de un arco de circunferencia de extremos* $+i$, $-i$.

SOLUCIÓN.

Según se ha visto en el ejercicio 3.18, para definir una rama continua de $\operatorname{arc\,tg} z$ basta definir un logaritmo continuo de $T^{-1}(z) = (i - z)/(i + z)$ y dividirlo por $2i$.

Sea E_t el arco de circunferencia de extremos $+i$, $-i$ que pasa por el punto t ($E_0 = \{iy\colon y \in \mathbb{R},\, |y| \leq 1\}$, $E_\infty = \{iy\colon y \in \mathbb{R},\, |y| \geq 1\}$). Es claro que $T^{-1}(E_t)$ es la semirrecta que surge de 0 y pasa por $a = T^{-1}(t)$. En el complemento de esta semirrecta está definido el logaritmo continuo $L(z) = \operatorname{Log}(-z/a) + \operatorname{Log}(-a)$ y por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{2i} L\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

es una rama continua de $\operatorname{arc\,tg} z$ definida en $\mathbb{C} \setminus E_t$.

Nota. Con recursos avanzados de la teoría de funciones holomorfas, en el ejercicio 7.15 se caracterizan los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre los que se puede definir una rama holomorfa de $\operatorname{arc\,tg} z$.

Ejercicio 3.20.

Compruebe que $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. *Estudie la clase de los abiertos sobre los que la función* $\cos z$ *es inyectiva y obtenga que es inyectiva sobre los abiertos*

$$A = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \quad y \quad B = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

SOLUCIÓN.

Usaremos que $\cos z = J(e^{iz})$ donde $J(z) = (z + 1/z)/2$. Dado $w \in \mathbb{C}$ la ecuación $w = J(z)$ tiene dos soluciones z_1, z_2 que verifican $z_1 z_2 = 1$ (las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2 - 2wz + 1 = 0$). Se sigue de esto que la ecuación $\cos z = w$ tiene infinitas soluciones que se obtienen dividiendo por i los logaritmos de z_1 y de $z_2 = 1/z_1$:

$$\{z : \cos z = w\} = \{-i \log z_1\} \cup \{-i \log z_2\} = \{\pm i \log z_1\}.$$

Como la función real $\cos x$ no es inyectiva en ningún abierto $V \subset \mathbb{R}$ que contenga puntos del conjunto $\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ podemos afirmar que si $\cos z$ es inyectiva sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces se ha de cumplir la condición $\Omega \cap \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ (que también se puede obtener como consecuencia de un resultado general según el cual la derivada de una función holomorfa inyectiva no se anula nunca; véase el ejercicio 4.52). Obsérvese que si Ω cumple esta condición y $w \in \cos(\Omega)$ entonces $w \notin \{+1, -1\}$, lo que garantiza que son distintas las soluciones $z_1, z_2 = 1/z_1$ de la ecuación $J(z) = w$.

Con el fin de caracterizar las regiones del plano sobre las que $\cos z$ es inyectiva conviene describir con detalle el conjunto

$$\arccos w = \{z : \cos z = w\}.$$

Si $r = |z_1|$ y $\alpha \in \arg z_1$ se tiene

$$\arccos w = \{\pm a_n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ con } a_n = (\alpha + 2n\pi) - i \log r.$$

Es decir, $\arccos w$ es un conjunto numerable contenido en dos rectas paralelas simétricas respecto al eje real; en cada recta sus puntos se distribuyen igualmente espaciados, a distancia 2π, siendo los puntos de una recta opuestos a los de la otra (cuando $w \in \mathbb{R}$, las dos rectas se confunden con el eje real). Según esto, si $z \notin \{+1, -1\}$ el conjunto $M(z) = \{z' : \cos z' = \cos z\}$ es de la forma

$$M(z) = \{\pm(x + 2n\pi + iy) : n \in \mathbb{Z}\},$$

luego una condición necesaria y suficiente para que la función $\cos z$ sea inyectiva sobre Ω es que se cumpla la condición

$$z \in \Omega \Rightarrow M(z) \cap \Omega = \{z\}.$$

Es claro que los abiertos A y B del enunciado cumplen la condición de inyectividad que acabamos de obtener.

Nota. Obsérvese que esta condición de inyectividad implica la condición necesaria ya mencionada, según la cual Ω no puede contener ceros de la derivada $\operatorname{sen} z$. En el ejercicio 3.21 se calculan las imágenes $\cos(A), \cos(B)$, y en el ejercicio 3.22 se obtienen fórmulas para las inversas de $\cos|_A$, $\cos|_B$. Estas inversas son ramas concretas de la multifunción $\arccos z$.

Ejercicio 3.21.

Obtenga las imágenes, mediante la función $\cos z$*, de los abiertos*

$$A = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}; \quad B = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\};$$
$$A^+ = \{z \in A : \operatorname{Im} z > 0\}; \quad A^- = \{z \in A : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

SOLUCIÓN.

Utilizando que $\cos z = J(e^{iz})$, con $J(z) = (z + 1/z)/2$, las imágenes se pueden obtener usando los resultados obtenidos en el ejercicio 2.27. La función e^{iz} transforma A en $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, luego

$$\cos(A) = J(P) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

Las imágenes de A^+ y A^-, mediante e^{iz}, son $\{z \in P : |z| < 1\}$ y $\{z \in P : |z| > 1\}$, respectivamente, que se transforman mediante J en

$$\cos(A^+) = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}; \qquad \cos(A^-) = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Por otra parte, e^{iz} transforma B en $G = D(0,1) \setminus [0,1)$, luego

$$\cos(B) = J(G) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}.$$

Ejercicio 3.22.

Obtenga fórmulas explícitas para las inversas de $\cos z|_A$ *y* $\cos|_B$ *donde*

$$A = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \quad y \quad B = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, , \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Muestre que en los abiertos

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\},$$
$$G_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}, \quad G_2 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$$

se pueden definir ramas continuas de $\arccos z$ *(véase el ejercicio 3.21, donde se obtuvieron las imágenes* $\cos(A), \cos(B)$*).*

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 3.21 $\cos(A) = U$ y $\cos(B) = G_1$. La función inversa de $\cos|_A : A \longrightarrow U$ se obtiene componiendo las inversas de las aplicaciones

$$A \xrightarrow{e^{iz}} P \xrightarrow{J} U.$$

La inversa de la primera es $-i \operatorname{Log} z$ y la inversa de la segunda fué obtenida en el ejercicio 2.27. Con ellas se llega a la siguiente rama continua de $\arccos z$ definida en U:

$$w = -i \operatorname{Log}(z + i\sqrt{1 - z^2}\,), \quad z \in U$$

Por otra parte, la inversa de $B \xrightarrow{e^{iz}} G = D(0,1) \setminus [0,1)$ viene dada por $\pi - i \operatorname{Log}(-z)$ y la inversa de $G \xrightarrow{J} G_1$ es la restricción a G_1 de la inversa de $D(0,1) \xrightarrow{J} J(D)$, obtenida en el ejercicio 2.27. Así se obtiene la siguiente rama continua de $\arccos z$ definida en G_1:

$$w = \pi - i \operatorname{Log}(-z + z\sqrt{1 - 1/z^2}\,), \quad z \in G_1.$$

En G_2 se puede obtener una rama continua de $\operatorname{arc}\cos z$ usando los resultados del ejercicio 3.9. La función $g_1(z) = z + z\sqrt{1-1/z^2}$ define en $V = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ una rama continua de la inversa $J^{-1}(z)$ cuya imagen es $g_1(V) = \{w : |w| > 1\}$. Cuando $z \in G_2 \subset V$ el valor $g_1(z)$ no es real negativo por lo que se puede usar la fórmula

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z + z\sqrt{1-1/z^2}\,)$$

para definir en G_2 una rama continua de $\operatorname{arc}\cos z$.

Nota. Con recursos avanzados de la teoría de funciones holomorfas, razonando como en el ejercicio 7.16, se podrán caracterizar los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre los que se puede definir una ramas de $\operatorname{arc}\cos z$.

3.2.3. Funciones holomorfas y transformaciones conformes

En las soluciones de los ejercicios de este tramo, donde interviene la noción de derivada compleja y las condiciones de Cauchy-Riemann, se utilizan pocos recursos teóricos; no requieren los potentes recursos de la teoría de funciones holomorfas y la derivación compleja aún no desempeña un papel espectacular. Los últimos ejercicios, sobre representación conforme, se resuelven componiendo transformaciones definidas mediante funciones elementales.

Ejercicio 3.23.

Si p es un polinomio complejo, demuestre que los ceros de su derivada p' pertenecen a la envoltura convexa de los ceros de p. Si cada cero se dota de un peso igual a su multiplicidad, compruebe que los ceros de p tienen el mismo baricentro que los de p' (teorema de Gauss-Lucas).

SOLUCIÓN.

Sea $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + z^{n+1} = \prod_{j=1}^m (z-a_j)^{n_j}$, con ceros a_j y multiplicidades n_j, $1 \le j \le m$. Obsérvese que debe ser

$$n+1 = \sum_{j=1}^m n_j, \qquad c_n = -\sum_{j=1}^m n_j a_j.$$

Si $p'(a) = 0$, para establecer que a pertenece a la envoltura convexa de los ceros de p basta considerar el caso $p(a) \neq 0$. Considerando la derivada logarítmica

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{z-a_j} = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{|z-a_j|^2}(\overline{z} - \overline{a}_j)$$

y haciendo $z = a$, se obtiene

$$\overline{a}\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{|a-a_j|^2} = \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{|a-a_j|^2}\overline{a}_j$$

Si definimos

$$\alpha_j = \frac{n_j}{|a-a_j|^2}, \quad \alpha = \sum_{j=1}^m \alpha_j, \quad \mu_j = \frac{\alpha_j}{\alpha}$$

la igualdad anterior se escribe en la forma

$$a = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j, \quad \text{con} \quad \mu_j \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$$

luego a pertenece a la envoltura convexa de los ceros de p.

Usando las multiplicidades como pesos, el baricentro de los ceros de p es

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_j a_j}{n+1} = -\frac{c_n}{n+1}$$

Aplicando lo que se acaba de demostrar al polinomio normalizado

$$\frac{1}{n+1} p'(z) = d_0 + d_1 z + \cdots + d_{n-1} z^{n-1} + z^n, \quad \text{con} \quad d_{k-1} = \frac{k c_k}{n+1}$$

se obtiene que el baricentro de los ceros de p' es

$$b^* = \frac{-d_{n-1}}{n} = \frac{-n c_n}{(n+1)n} = b.$$

Ejercicio 3.24.

Obtenga todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifican

$$[\mathscr{E}] : f(z+w) = f(z) f(w) \quad \textit{para cada} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Obtenga una función continua $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifique $[\mathscr{E}]$ y no sea holomorfa.

SOLUCIÓN.

Las funciones de la forma e^{cz}, con $c \in \mathbb{C}$, son soluciones holomorfas de la ecuación funcional $[\mathscr{E}]$. A continuación demostramos que toda solución holomorfa no idénticamente nula es de este tipo.

Si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ no es idénticamente nula y cumple $[\mathscr{E}]$ entonces $f(0) = 1$, pues si $f(w) \neq 0$ se tiene $f(w) = f(w) f(0)$. Para $z, h \in \mathbb{C}$, con $h \neq 0$, se verifica

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z) \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

y pasando al límite cuando $h \to 0$, se obtiene que $f'(z) = c f(z)$ con $c = f'(0)$.

La función $g(z) = e^{-cz} f(z)$ es constante (porque su derivada es idénticamente nula) y su valor constante es $g(0) = 1$, luego $f(z) = e^{cz}$.

La función $f(x+iy) = e^{2x+iy} = e^{2x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es una solución continua de $[\mathscr{E}]$ que no es holomorfa. Si lo fuese, también lo sería $g(x+iy) = f(z) e^{-z} = e^x$, y esto es imposible porque en ese caso, para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumpliría

$$g'(z) = \lim_{y \to 0} \frac{g(z+iy) - g(z)}{iy} = 0$$

y por lo tanto g sería constante (también se puede razonar con las ecuaciones de Cauchy Riemann).

Nota. En el ejercicio 3.40 se establece que las soluciones continuas de $[\mathscr{E}]$ son las de la forma $f(x+iy) = e^{ax+by}$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 3.25.

Se supone que $f = u + iv$ es una función holomorfa en un abierto conexo Ω y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Demuestre que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante:

a) $\alpha u + \beta v$ *es constante,* *b)* u *es constante,* *c)* v *es constante,*

d) $\overline{f}$ *es holomorfa,* *e)* $|f|$ *es holomorfa,* *f)* $|f|$ *es constante.*

SOLUCIÓN.

Si se cumple *a*) para cada $z \in \Omega$ se verifica

$$\alpha D_1 u(z) + \beta D_1 v(z) = 0; \qquad \alpha D_2 u(z) + \beta D_2 v(z) = 0,$$

y utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, se obtiene que

$$\alpha D_1 u(z) - \beta D_2 u(z) = 0; \qquad \beta D_1 u(z) + \alpha D_2 u(z) = 0.$$

La única solución del sistema lineal $\alpha x - \beta y = 0$, $\beta x + \alpha y = 0$ es la trivial, pues su determinante es $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Se obtiene así que $D_1 u(z) = D_2 u(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Como Ω es conexo se concluye que u es constante. Análogamente se demuestra que v es constante, con lo cual $f = u + iv$ también lo es.

Las condiciones *b*) y *c*) son casos particulares de *a*), luego ambas implican que f es constante.

A continuación vemos que *e*) $\Rightarrow$ *f*) $\Rightarrow$ *d*) $\Rightarrow$ *c*).

e) $\Rightarrow$ *f*) Si se cumple *e*) la función $|f|$ es holomorfa con parte imaginaria constante, lo que implica, en virtud de *c*), que $|f|$ es constante.

f) $\Rightarrow$ *d*) Si $|f(z)| = c$ para todo $z \in \Omega$ y $c \neq 0$ entonces $\overline{f(z)} = c^2/f(z)$ es holomorfa (si $c = 0$ el resultado es trivial).

d) $\Rightarrow$ *c*) Si se cumple *d*) la función $2iv(z) = f(z) - \overline{f(z)}$ es holomorfa con parte real constante, y por lo tanto constante.

Ejercicio 3.26.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante en el abierto conexo Ω, compruebe que $g(z) = \overline{f(z)}$ no es holomorfa en Ω pero $G(z) = \overline{f(\overline{z})}$ sí es holomorfa en $\Omega^- = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$.

SOLUCIÓN.

En virtud de las hipótesis f' no es idénticamente nula, luego existe $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$. Si $h = h_1 + ih_2$, el cociente incremental

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \overline{\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)} \frac{\overline{h}}{h}$$

tiende hacia $\overline{f'(a)}$ cuando $h = h_1$ tiende hacia 0 sobre el eje real y tiende hacia $-\overline{f'(a)}$ cuando $h = ih_2$ tiende hacia 0 sobre el eje imaginario. Por lo tanto g no es derivable en $z = a$.

Por otra parte, si $w_0 = \overline{z_0} \in \Omega^-$, cuando $k = \overline{h} \to 0$ el cociente incremental

$$\frac{G(w_0 + k) - G(w_0)}{k} = \frac{\overline{f(z_0 + h)} - \overline{f(z_0)}}{\overline{h}} = \overline{\left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right)}$$

tiende hacia $\overline{f'(z_0)}$, luego G es derivable en $w_0 \in \Omega^-$.

Ejercicio 3.27.

Sea $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f(z_0) = \alpha + i\beta$. Si $f'(z_0) \neq 0$ compruebe que las curvas de nivel $u(x, y) = \alpha$, $v(x, y) = \beta$ se cortan ortogonalmente en z_0.

SOLUCIÓN.

Los vectores normales a las curvas $u(x, y) = \alpha$, $v(x, y) = \beta$ en el punto (x_0, y_0) son respectivamente $\nabla u(x_0, y_0)$, $\nabla v(x_0, y_0)$. Estos vectores no son nulos (pues $f'(z_0) \neq 0$) y en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann son ortogonales:

$$D_1u(x_0, y_0)D_1v(x_0, y_0) + D_2u(x_0, y_0)D_2v(x_0, y_0) = 0.$$

Ejercicio 3.28.

A una función holomorfa $f = u + iv \in \mathscr{H}(\Omega)$ se le asocia el campo de vectores

$$A(x, y) = (A_1(x, y), A_2(x, y)) = (u(x, y), -v(x, y)).$$

Si $F = U + iV$ es una primitiva de f compruebe que las curvas de nivel $U(x, y) = c$ son ortogonales al campo A (e.d. son líneas equipotenciales del campo) y las curvas de nivel $V(x, y) = c$ son tangentes al campo (e.d. son líneas de corriente del campo).

SOLUCIÓN.

Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann para F,

$$u(z) + iv(z) = f(z) = F'(z) = D_1U(z) + iD_1V(z) = D_2V(z) - iD_2U(z),$$

luego $\nabla U = (u, -v)$ y $\nabla V = (v, u)$ con lo cual

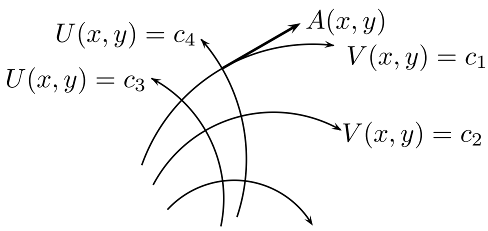
$$A(x, y) = \nabla U(x, y), \qquad \langle A(x, y)|\nabla V(x, y)\rangle = 0.$$

Esto significa que las curvas de nivel $U(x, y) = c$ son ortogonales al campo (líneas equipotenciales del campo) y que las curvas de nivel $V(x, y) = c$ son tangentes al campo (líneas de corriente del campo).

Una consecuencia de esto es que para obtener gráficamente las curvas de nivel $U(x, y) = c$, $V(x, y) = c$, asociadas a una función holomorfa F, basta considerar el campo $A(x, y) = \overline{f(x + iy)}$ asociado a su derivada $f = F'$ y dibujar (con un programa de ordenador adecuado) las trayectorias de las ecuaciones diferenciales

$$A_1(x, y)dx + A_2(x, y)dy = 0, \qquad A_2(x, y)dx - A_1(x, y)dy = 0,$$

que son, respectivamente, las curvas $U(x, y) = cte$, $V(x, y) = cte$.



Ejercicio 3.29.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Si $M \subset \Omega$ es compacto medible Jordan demuestre que $f(M)$ es medible Jordan y

$$\text{área}(f(M)) = \int_M |f'(x+iy)|^2 \, dx \, dy$$

SOLUCIÓN.

En virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann, el determinante jacobiano de la transformación $(x, y) \to f(x + iy) = (u(x, y), v(x, y))$ vale

$$\begin{vmatrix} D_1 u & D_2 u \\ D_1 v & D_2 v \end{vmatrix} = D_1 u D_1 u + D_1 v D_1 v = |f'(z)|^2 \neq 0$$

y utilizando la fórmula de cambio de variable para la integral de Riemann se obtiene el resultado.

Ejercicio 3.30.

Se supone que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable, en sentido real, en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y que $a \in \Omega$ es un punto donde existe el límite

$$L(a) = \lim_{z \to a} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right|$$

Demuestre que una de las dos funciones f, $\overline{f}$, es derivable en a y deduzca de ello el siguiente resultado: sea f una función de clase $C^1(\Omega)$ con diferencial no nula en el abierto conexo Ω, si existe el límite $L(a)$ en cada $a \in \Omega$ entonces una de las dos funciones f, $\overline{f}$ es holomorfa.

SOLUCIÓN.

Según la definición de diferencial $f(a+h) - f(a) = df(a)h + |h|\varepsilon(h)$ donde $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Expresando la diferencial en la forma $df(a) = r dz + s d\overline{z}$ con $r = \partial f(a)$ y $s = \overline{\partial} f(a)$ resulta

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = \left| r + s\frac{\overline{h}}{h} + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h) \right|.$$

Si hacemos que $h = \rho e^{i\alpha}$ tienda hacia 0 manteniendo α constante se obtiene

$$L(a) = \left| r + s e^{-2\alpha i} \right|.$$

Por hipótesis $L(a)$ no depende del ángulo α, lo que implica que o bien $s = 0$ o bien $r = 0$. La condición $s = \overline{\partial} f(a) = 0$ significa que f es derivable en a, mientras que la condición $r = \partial f(a) = 0$ significa que $\overline{f}$ es derivable en a.

Si para cada $a \in \Omega$ existe el límite $L(a)$, en virtud de lo que se acaba de probar, $\Omega = A \cup B$ con

$$A = \{z \in \Omega : \partial f(z) = 0\}, \qquad B = \{z \in \Omega : \overline{\partial} f(z) = 0\}.$$

Si f es de clase C^1 las funciones $\partial f(z)$, $\overline{\partial} f(z)$ son continuas y los conjuntos A, B son cerrados relativos en Ω. La condición $df(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$ implica que $A \cap B = \emptyset$, y si Ω es conexo se concluye que o bien $\Omega = B$ o bien $\Omega = A$. En el primer caso f es holomorfa y en el segundo lo es $\overline{f}$.

Ejercicio 3.31.

Obtenga un isomorfismo conforme entre cada uno de los abiertos

$$\Omega_1 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}, \qquad \Omega_2 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

y el disco $D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

a) Ω_1 es una de las cuatro regiones determinadas por dos circunferencias (en sentido amplio) que se cortan ortogonalmente en los puntos i, $-i$. Su imagen mediante la transformación de Möbius $S(z) = (z-i)/(z+i)$ es un cuadrante limitado por dos semirrectas ortogonales que surgen de 0, ya que $S(-i) = \infty$ y $S(i) = 0$, y se comprueba que $S(\Omega_1) = \{z : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0\}$ (véase el ejercicio 2.18).

La función z^2 lleva el cuadrante $S(\Omega_1)$ al semiplano $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ el cual se puede transformar en $D(0,1)$ mediante una transformación de Möbius adecuada, por ejemplo, la misma S (véase la solución del ejercicio 2.17). En definitiva

$$f(z) = S(S(z)^2) = -i\frac{z^2 + 2z - 1}{z^2 - 2z - 1}$$

establece un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre $D(0,1)$.

b) Con z^2 se establece un isomorfismo conforme de Ω_2 sobre el abierto $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ que se convierte en Ω_1 mediante el giro $z \to -iz$. Si f es el isomorfismo conforme entre Ω_1 y $D(0,1)$ obtenido en el apartado *a*) se obtiene que

$$g(z) = f(-iz^2) = -\frac{iz^4 - 2z^2 + i}{z^4 - 2iz^2 + 1}$$

establece un isomorfismo conforme de Ω_2 sobre $D(0,1)$.

Ejercicio 3.32.

Obtenga isomorfismos conformes entre cada uno de los abiertos

$$\Omega_1 = \{z : |z| < 1, |2z-1| > 1\}, \quad \Omega_2 = \{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$$

y el disco $D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

a) Ω_1 está limitado por dos circunferencias tangentes en $z = 1$ que se convierten en rectas paralelas mediante la transformación $R(z) = 1/(z-1)$. Obsérvese que R transforma la circunferencia $|z| = 1$ en la recta $\operatorname{Re} z = -1/2$ (una recta respecto a la que $R(0) = -1$ y $R(\infty) = 0$ son simétricos) y con un razonamiento similar se obtiene que R transforma la circunferencia $|2z-1| = 1$ en la recta $\operatorname{Re} z = -1$.

Como $-1/2 \in \Omega_1$ y $R(-1/2) = -2/3$ se concluye que

$$R(\Omega_1) = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < -1/2\}$$

cuya imagen mediante $S(z) = -2\pi i(z + 1/2)$ es $B = \{x + iy : 0 < y < \pi\}$.

La función e^z establece un isomorfismo conforme entre B y $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Para alcanzar la solución basta aplicar luego una transformación de Möbius que lleve este semiplano al disco $D(0,1)$, por ejemplo $(z-i)/(z+i)$ (véase la solución del ejercicio 2.17). Componiendo las transformaciones indicadas se obtiene que

$$\frac{e^{2\pi i/(z-1)}+i}{e^{2\pi i/(z-1)}-i}$$

establece un isomorfismo conforme entre Ω_1 y $D(0,1)$.

b) Con $S(z) = 1/z$ el abierto $\Omega = \{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$ se transforma en la banda $\{z : 1/4 < \operatorname{Re} z < 1/2\}$ y $\Omega_2 = \Omega \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ en la semibanda

$$A = \{z : 1/4 < \operatorname{Re} z < 1/2,\ \operatorname{Im} z < 0\}$$

que se convierte en $B = \{z : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z < 0\}$, mediante la transformación $T(z) = \pi i(3/2 - 4z)$. Finalmente, la función exponencial transforma B en $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$. Componiendo las transformaciones se llega a la función

$$f(z) = e^{T(S(z))} = e^{\pi i(3/2-4/z)}$$

que establece un isomorfismo conforme entre Ω_2 y $G = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Para terminar basta componer f con un isomorfismo conforme del semidisco G sobre $D(0,1)$ (véase el ejercicio 3.31).

Ejercicio 3.33.

En cada caso obtenga un isomorfismo de Ω sobre G:

a) $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $G = D(0,1)$.

b) $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/4\}$, $G = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

SOLUCIÓN.

a) Con la función exponencial e^z se consigue un isomorfismo conforme de la banda $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ sobre el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Un isomorfismo conforme de este semiplano sobre el disco $D(0,1)$ lo establece la transformación de Möbius $T(z) = (z-1)/(z+1)$ (véase el ejercicio 2.21). Se sigue que

$$\frac{e^z+1}{e^z-1} = \operatorname{th}\frac{z}{2}$$

establece un isomorfismo conforme de Ω sobre el disco $D(0,1)$.

b) Si $a = e^{i\pi/4}$, la función $ae^z = e^{z+i\pi/4}$ establece un isomorfismo conforme de la banda $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/4\}$ sobre el cuadrante $\{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ y con una transformación de Möbius adecuada se consigue un isomorfismo conforme de este cuadrante sobre el semidisco $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. La transformación T considerada en *a*) es apropiada para este fin porque transforma el semiplano $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ en sí mismo, y el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ en el disco $\{z : |z| < 1\}$.

Componiendo estas transformaciones se obtiene que

$$f(z) = \frac{ae^z-1}{ae^z+1}$$

establece un isomorfismo conforme de Ω sobre G.

Ejercicio 3.34.

Sea $G = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z-5| > 3\}$*. Obtenga un isomorfismo conforme que transforme* G *en un rectángulo abierto.*

SOLUCIÓN.

Teniendo en cuenta el ejercicio 2.15 es claro que $T(z) = (z-4)/(z+4)$ establece un isomorfismo conforme entre los abiertos

$$\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z-5| > 3\}, \qquad A = \{z : 1/3 < |z| < 1\}.$$

Como $T|_P$ es un automorfismo conforme de $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ (pues transforma el eje real en sí mismo y $\operatorname{Im} T(i) > 0$) se sigue que T establece un isomorfismo conforme entre $G = \Omega \cap P$ y su imagen

$$T(G) = T(\Omega) \cap T(P) = A \cap P = \{z : 1/3 < |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Componiendo con el logaritmo principal se obtiene que $\operatorname{Log} T(z)$ establece un isomorfismo conforme entre G y $\{x + iy : -\operatorname{Log} 3 < x < 0,\ 0 < y < \pi\}$.

Ejercicio 3.35.

Sea $\Omega = \{z : |z-1| < \sqrt{2},\ |z+1| < \sqrt{2}\}$*. Obtenga un isomorfismo conforme* $g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ *tal que* $g(x) \in \mathbb{R}$ *si* $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$*.*

SOLUCIÓN.

Las circunferencias $C_1 = \{z : |z-1| = \sqrt{2}\}$, $C_2 = \{z : |z+1| = \sqrt{2}\}$ se cortan ortogonalmente en los puntos $+i$, $-i$ (pues el triángulo de vértices -1, i, 1 es rectángulo). Con una transformación de Möbius adecuada el abierto Ω se puede llevar a uno de los cuadrantes determinados por dos rectas perpendiculares. Esto se consigue con la transformación de Möbius $T(z) = (z-i)/(z+i)$, ya que $T(i) = 0$ y $T(-i) = \infty$. La imagen $T(C_1)$ es una recta (porque $-i \in C_1$ y $T(-i) = \infty$) respecto a la que son simétricos $T(1) = -i$ y $T(\infty) = 1$, es decir, es la recta $R_1 = \{z = x + iy : y = -x\}$; además, como $T(1) = -i$, la imagen del disco $D_1 = \{z : |z-1| < \sqrt{2}\}$ es el semiplano $H_1 = \{z = x + iy : y < -x\}$. Con un razonamiento similar se obtiene que la imagen del disco $D_2 = \{z : |z+1| < \sqrt{2}\}$ es el semiplano $H_2 = \{z = x + iy : y > x\}$. Entonces, como T es una biyección,

$$T(\Omega) = T(D_1 \cap D_2) = H_1 \cap H_2 = \{x + iy : x < 0,\ |y| < -x\}.$$

Con la transformación z^2 el cuadrante $T(\Omega)$ se convierte en el semiplano $H = \{x + iy : x > 0\}$ que, a su vez, se transforma en $D(0,1)$ mediante $S(z) = (z-1)/(z+1)$ (obsérvese que $-1, 1$ son simétricos respecto al eje imaginario y $S(1) = 0$, $S(-1) = \infty$, por lo que la imagen de este eje es una circunferencia centrada en 0, que pasa por $S(0) = -1$). Componiendo las transformaciones consideradas se obtiene que

$$w = S\big(T(z)^2\big) = -\frac{2iz}{z^2 - 1}$$

establece un isomorfismo conforme de Ω sobre $D(0,1)$ que lleva el segmento del eje real $(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ al segmento del eje imaginario $\{iy : |y| \le 1\}$. Entonces, para conseguir un isomorfismo conforme $g : \Omega \to D(0,1)$ que lleve el segmento $(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ al segmento $(-1,1) = D(0,1) \cap \mathbb{R}$, basta tomar

$$g(z) = \frac{2z}{z^2-1}$$

Ejercicio 3.36.

Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$ *donde* $E = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$. *Obtenga un isomorfismo conforme de* Ω *sobre* $\{z : |z| > 1\}$.

SOLUCIÓN.

$T(z) = i(z+1)/(z-1)$ lleva la semicircunferencia E, de extremos $+1,-1$, a la semirrecta $T(E) = \{x : x \leq 0\} \cup \{\infty\}$ (obsérevese que $T(-i) = -1$). Teniendo en cuenta que $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una biyección se concluye que

$$T(\mathbb{C}_\infty \setminus E) = \mathbb{C}_\infty \setminus T(E) = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}.$$

Nótese que $T(\infty) = i$, luego $T(\mathbb{C} \setminus E) = G$, con $G = \mathbb{C} \setminus (\{x : x \leq 0\} \cup \{i\})$.

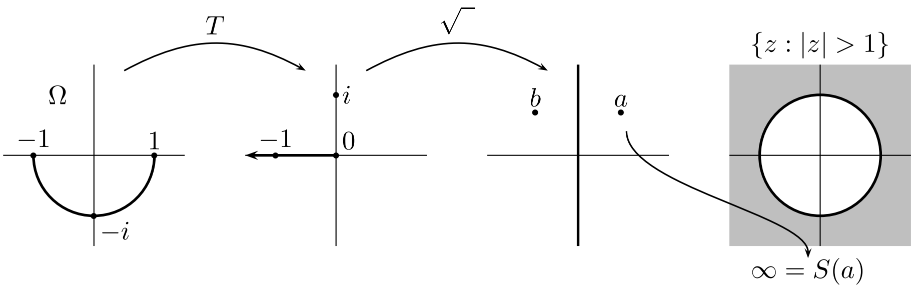
La raíz cuadrada principal $\sqrt{z}$ transforma G en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{a\}$, donde $a = \sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$. Para terminar tenemos que buscar una transformación de Möbius S que transforme el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ en

$$\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$$

verificando la condición $S(a) = \infty$, de forma que se tenga garantizado que $S(G) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

La transformación S que buscamos debe llevar el eje imaginario a la circunferencia unidad por lo que, en virtud del principio de simetría, debe ser $S(b) = 0$, donde $b = (-1+i)/\sqrt{2}$ es el simétrico de a respecto a este eje.

Como $S(z) = (z-b)/(z-a)$ cumple los requisitos deseados se sigue que $f(z) = S\big(\sqrt{T(z)}\,\big)$ es un isomorfismo conforme de Ω sobre $\{z : |z| > 1\}$.

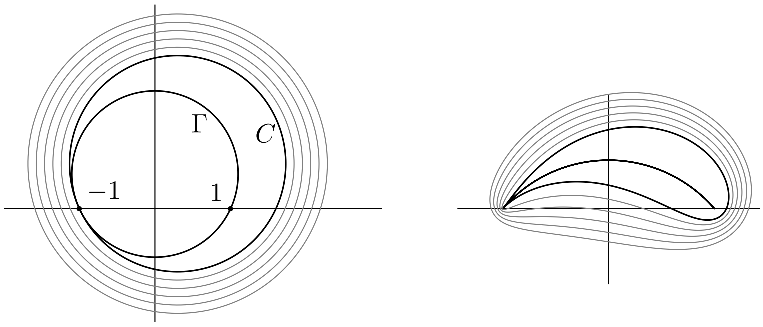


Ejercicio 3.37.

El perfil de Joukowsky es la imagen, mediante la transformación de Joukowski $J(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, *de una circunferencia que pasa por uno de los dos puntos* $+1, -1$ *y rodea al otro. Indique un procedimiento para conseguir un isomorfismo conforme entre* $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ *y el exterior del perfil de Joukowsky.*

SOLUCIÓN.

Sea Γ una circunferencia que pasa por 1 y -1 y C otra circunferencia que deja a Γ en su interior y es tangente a ella en el punto -1. Denotemos por Ω a la región exterior a la circunferencia Γ. Según el ejercicio 2.27, J establece un isomorfismo conforme entre Ω y el complemento de un arco de circunferencia, $J(\Gamma)$, de extremos $+1$ y -1. El perfil de Joukowsky $J(C)$ es una curva cerrada que rodea este arco pasando por el extremo $J(-1) = -1$, donde presenta un punto de retroceso ya que J duplica ángulos en $z = -1$ ($J'(-1) = 0$ y $J''(-1) \neq 0$). Cuando la circunferencia C pasa cerca del punto 1 quedando próxima a la circunferencia Γ el perfil de Joukowsky $J(C)$ resulta próximo al arco $J(\Gamma)$ y presenta el aspecto característico del perfil del ala de avión.



Es claro que J establece un isomorfismo conforme entre la región exterior a la circunferencia C y la región exterior al perfil de Joukowsky. Por otra parte, según el ejercicio 2.27 (ó 3.9), la función

$$f(z) = z + z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

proporciona un isomorfismo conforme entre $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y $A = \{z : |z| > 1\}$. Finalmente, A se puede transformar en Ω mediante una transformación elemental del tipo $T(z) = az + b$. Por lo tanto con la composición $J \circ T \circ f$ se consigue un isomorfismo conforme entre $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y el exterior del perfil de Joukowsky.

3.2.4. Complementos

En los ejercicios de carácter complementario reunidos en este bloque se ofrecen algunos resultados, naturales y poco sorprendentes, cuyas soluciones usan técnicas avanzadas de topología o geometría.

Ejercicio 3.38.

Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, determine las ramas continuas de la multifunción

$$a^z = \{e^{cz} : c \in \log a\}$$

(funciones continuas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifican $f(z) \in a^z$ para cada $z \in \mathbb{C}$).

SOLUCIÓN.

Para cada $c \in \log a$ la función $f(z) = e^{cz}$ es una rama continua de la multifunción a^z y cabe esperar que todas las ramas continuas sean de esta forma. Demostraremos que esto es así con un argumento topológico de conexión.

Por hipótesis $f(z) = e^{c(z)z}$ donde $c(z) = \operatorname{Log} a + m(z)2\pi i$, con $m(z) \in \mathbb{Z}$. Como la función $h(z) = f(z)e^{-z \operatorname{Log} a} = e^{zm(z)2\pi i}$ es continua también lo es

$$\operatorname{Log}|h(z)| = \operatorname{Log} e^{\operatorname{Re}(zm(z)2\pi i)} = -2\pi m(z) \operatorname{Im} z.$$

Se sigue que la función $m(z)$ es continua en los semiplanos $A = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y $B = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, luego $m(A)$ y $m(B)$ son subconjuntos conexos de $\mathbb{Z}$. Los subconjuntos conexos no vacíos de $\mathbb{Z}$ sólo tienen un elemento, y por lo tanto existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $m(A) = \{p\}$ y $m(B) = \{q\}$. Demostrando que $p = q$ se obtendrá el resultado ya que, en este caso,

$$f(z) = h(z)e^{z \operatorname{Log} a} = e^{zp2\pi i}e^{z \operatorname{Log} a} = e^{cz}, \quad \text{con} \quad c = \operatorname{Log} a + i2\pi p.$$

El límite de la función continua $h(z)/|h(z)| = e^{m(z)2\pi i \operatorname{Re} z}$ cuando z tiende hacia $x \in \mathbb{R}$ a través de A es $e^{xp2\pi i}$ y el límite a través de B es $e^{xq2\pi i}$. Los dos límites deben coincidir y se concluye que $e^{x(p-q)2\pi i} = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $p = q$.

Ejercicio 3.39.

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ determine, en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$, las ramas continuas de la multifunción

$$(1+z)^\alpha = \{e^{c\alpha} : c \in \log(1+z)\}.$$

SOLUCIÓN.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ la función $f_n(z) = e^{\alpha(\operatorname{Log}(1+z)+2\pi ni)}$ es una rama continua de $(1+z)^\alpha$ en Ω; demostraremos que todas las ramas continuas son de esta forma.

Efectivamente, sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua que verifica

$$f(z) \in \{e^{\alpha w} : w \in \log(1+z)\} \quad \text{para cada} \quad z \in \Omega.$$

La función $g(z) = f(z)e^{-\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$, definida en Ω, toma valores en un conjunto numerable discreto

$$g(z) \in \left\{e^{\alpha[w - \operatorname{Log}(1+z)]} : w \in \log(1+z)\right\} = \{e^{\alpha m2\pi i} : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Como g es continua y Ω es conexo, la imagen $g(\Omega)$ es un subconjunto conexo de este conjunto discreto y por lo tanto se reduce a un punto, luego existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z)e^{-\alpha \operatorname{Log}(1+z)} = e^{\alpha m2\pi i}$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $f = f_m$.

Ejercicio 3.40.

a) Determine todas las funciones continuas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

$$[\mathscr{E}]: \quad f(z+w) = f(z)f(w) \quad \textit{para cada } z, w \in \mathbb{C}.$$

b) Determine todas las funciones continuas $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{z : |z| = 1\}$ que verifican

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) \quad \textit{para cada } s, t \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN.

a) Las funciones de la forma $f(x+iy) = e^{ax+by}$, con $a, b \in \mathbb{C}$, son soluciones continuas de la ecuación funcional $[\mathscr{E}]$. Demostraremos que toda función continua no idénticamente nula $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, que sea solución de $[\mathscr{E}]$, es de esta forma.

Observemos en primer lugar que debe ser $f(0) = 1$, pues si $f(w) \neq 0$ se tiene $f(w) = f(w)f(0)$. Por la continuidad en $z = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \in D(1,1)$ si $|z| < 2\delta$. Dados $z_1, z_2 \in D(0,\delta)$, sus imágenes $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ pertenecen a $D(1,1)$; lo mismo le ocurre a $w = w_1 w_2 = f(z_1 + z_2)$, pues $|z_1 + z_2| < 2\delta$. Esto garantiza que $\operatorname{Log} w = \operatorname{Log} w_1 + \operatorname{Log} w_2$. Entonces la función $L(z) = \operatorname{Log} f(z)$, que está bien definida en $D(0, 2\delta)$, cumple

$$(\,|z_1| < \delta,\ |z_2| < |\delta|\,) \Rightarrow L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2) \tag{3.2}$$

y de aquí se deduce

$$(\,|z| < |\delta|,\ \alpha \in [-1,1]\,) \Rightarrow L(\alpha z) = \alpha L(z), \tag{3.3}$$

En efecto, como $L(z) + L(-z) = 0$, basta demostrar (3.3) para $\alpha > 0$, y en virtud de la continuidad de L basta considerar el caso $\alpha \in \mathbb{Q}$. Sea $\alpha = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq q$. En el caso particular $p = 1$ la relación $L(\frac{p}{q}z) = \frac{p}{q}L(z)$ se sigue de

$$L(z) = L\Big(\frac{z}{q} + \cdots \overset{q}{\smile} \cdots + \frac{z}{q}\Big) = qL\Big(\frac{z}{q}\Big)$$

y el caso $p > 1$ se reduce al anterior ya que, al ser $|\frac{p}{q}z| < \delta$, se cumple

$$\frac{1}{p}L\Big(\frac{p}{q}z\Big) = L\Big(\frac{1}{q}z\Big) = \frac{1}{q}L(z).$$

Fijados $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ con $0 < |x_0| < \delta$, $0 < |y_0| < \delta$, los números complejos $a = L(x_0)/x_0$, $b = L(iy_0)/y_0$, cumplen la condición

$$f(x+iy) = e^{ax+by} \text{ para todo } x + iy \in \mathbb{C}.$$

Efectivamente, dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x/n| < |x_0| < \delta, \quad |y/n| < |y_0| < \delta.$$

Según (3.2) podemos escribir $L(z/n) = L(x/n) + L(iy/n)$ y como los números $r = x/(nx_0)$, $s = y/(ny_0)$ verifican $|r| < 1$, $|s| < 1$, en virtud de (3.3) se cumple

$$L\Big(\frac{z}{n}\Big) = L(rx_0) + L(siy_0) = rL(x_0) + sL(iy_0) = rx_0 a + sy_0 b = \frac{ax+by}{n}$$

luego $f(z) = f(z/n)^n = e^{nL(z/n)} = e^{ax+by}$.

b) Las funciones de la forma $\varphi(t) = e^{i\beta t}$, con $\beta \in \mathbb{R}$ son las únicas funciones continuas que cumplen la condición requerida en el enunciado.

Efectivamente, si la función continua $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{z : |z| = 1\}$ cumple esta condición es fácil ver que $f(x+iy) = e^x \varphi(y)$ es solución de $[\mathscr{E}]$, luego existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$e^x \varphi(y) = e^{ax+by}.$$

De la igualdad $|e^{ax+by}| = |\varphi(y)|e^x = e^x$, válida para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se deduce, en primer lugar, que $\operatorname{Re} b = 0$ y luego que $\operatorname{Re} a = 1$. Sustituyendo $a = 1 + \alpha i$, $b = \beta i$, se obtiene que $\varphi(y) = e^{i\alpha x + i\beta y}$. Como esto es cierto para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ debe ser $\alpha = 0$, luego $\varphi(y) = e^{i\beta y}$.

Nota. Las únicas soluciones derivables de la ecuación $[\mathscr{E}]$ son las de la forma $f(z) = e^{cz}$ con $c \in \mathbb{C}$ (véase el ejercicio 3.24).

Ejercicio 3.41.

Sea $f = P/Q$ una función racional. Definiendo $f(a) = \lim_{z\to a} f(z)$ cuando $Q(a) = 0$ o $a = \infty$ se obtiene una función $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$. Compruebe que f es derivable en todo $a \in \mathbb{C}_\infty$.

SOLUCIÓN.

Comencemos considerando el caso $a \neq \infty$. En este caso no es restrictivo suponer que P y Q no tienen ceros comunes. Si $Q(a) \neq 0$ el resultado es obvio ya que f, al ser cociente de dos funciones derivables cuyo denominador no se anula en a, es derivable en a en sentido usual. Si $Q(a) = 0$ entonces $P(a) \neq 0$, luego $1/f = Q/P$ es derivable en a, lo que significa que f es derivable en a en sentido generalizado. El caso $a = \infty$ se reduce al anterior ya que $f(1/z)$ también es una función racional y por lo tanto es derivable en $z = 0$.

Ejercicio 3.42.

Se supone que $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es derivable en $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$. Demuestre que la transformación inducida por f en la esfera de Riemann conserva ángulos orientados en $p = \Psi(a)$. (Esto significa que dos curvas diferenciables sobre la esfera, que surgen de p con vectores tangentes u, v son transformadas en dos curvas, que surgen de $q = \Psi(f(a))$, cuyas tangentes forman el mismo ángulo orientado. En el ejercicio 2.37 se puede ver la noción de ángulo orientado de un par de vectores tangentes a la esfera).

SOLUCIÓN.

Si $\Psi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S$ es la proyección estereográfica sobre la esfera de Riemann S, la transformación que f induce en S es

$$F = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1} : U \longrightarrow S \;\text{ donde }\; U = \Psi(\Omega) \subset S.$$

Sea $b = f(a)$ y $q = \Psi(b) = F(p)$. Si los espacios tangentes a S en p y q, denotados respectivamente E_p, E_q, se orientan con el vector normal entrante, la condición de que F conserve ángulos orientados en p significa que la aplicación lineal $dF(p) : E_p \to E_q$ conserva ángulos orientados (según el ejercicio 2.37 los ángulos orientados en un espacio euclídeo orientado de dimensión dos se definen después de identificar el espacio con $\mathbb{C}$ mediante una base ortonormal positiva).

a) Si $a \neq \infty$ y $b \neq \infty$, utilizando que f conserva ángulos orientados en a (3.1.8) y la propiedad de la proyección estereográfica establecida en el ejercicio 2.37, es claro que F conserva ángulos orientados en p.

b) Si $a \neq \infty$ y $b = \infty$, según *a*), la transformación G que $g = 1/f$ induce en la esfera conserva ángulos orientados en p, pues $g'(a) = f'(a) \neq 0$. Por otra parte, la transformación que $\sigma(z) = 1/z$ induce en la esfera es un giro Σ de amplitud π alrededor del eje Ox_1, que evidentemente conserva ángulos orientados en todos los puntos. Por lo tanto $F = \Sigma \circ G$ conserva ángulos orientados en p.

c) Si $a = \infty$ y $b = \infty$, según *b*), la transformación H que $h(z) = f(1/z)$ induce sobre la esfera conserva ángulos orientados en $\Psi(0) = (0, 0, -1)$, pues $h'(0) = f'(\infty) \neq 0$. Razonando como en *b*) se concluye que $F = H \circ \Sigma$ conserva ángulos orientados en p.

3.3. Ejercicios propuestos

3.1 Determine todos los periodos de las funciones complejas e^z, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ y $\operatorname{th} z$. Compruebe que

$$\operatorname{sh}(z + \pi i) = -\operatorname{sh} z \quad \text{y que} \quad \operatorname{ch}(z + \pi i) = -\operatorname{ch} z.$$

3.2 Si $z = x + iy$, compruebe las desigualdades

$$|\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{sen} x|; \quad |\cos z| \geq |\cos x|; \quad \operatorname{ch} x \geq |\operatorname{ch} z| \geq |\operatorname{sh} x|.$$

3.3 Estudie la derivabilidad en sentido complejo de la función

$$f(x + iy) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

3.4 Compruebe que la función $f(x + iy) = y^2$, aunque es derivable en todos los puntos del eje real, no es holomorfa en ningún punto.

3.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, no vacío y simétrico respecto al eje real y $g \in \mathscr{H}(\Omega)$. Demuestre que $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y que si M es una componente conexa de $\Omega \cap \mathbb{R}$, son equivalentes

a) $g(\overline{z}) = \overline{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$;

b) $g(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in M$.

Demuestre que cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se puede representar de modo único en la forma $f = g + ih$, donde g, h son funciones holomorfas tales que $g(x) \in \mathbb{R}$, $h(x) \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$.

3.6 Si Ω es conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ verifica $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Re}(f)^2$, demuestre que f es constante.

3.7 Obtenga la imagen del abierto $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ mediante la transformación

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$$

y compruebe que f establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen.

3.8 Obtenga un isomorfismo conforme entre los abiertos

$$\{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \{z : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

3.9 Obtenga isomorfismos conformes entre los abiertos

$$\{x + iy : 0 < x < \pi/4,\ 0 < y\}, \quad \{z : |z| < 2,\ |z + 1| > 1\}, \quad \{z : |z| < 1\}.$$

3.10 Obtenga isomorfismos conformes entre los abiertos

$$\{x + iy : |x| < \pi/4\},\ \{re^{it} : 0 < r < 1,\ |t| < \pi\},\ \{x + iy : x > 0,\ y > 0\}.$$

Capítulo 4

Series de potencias

4.1. Preliminares teóricos

4.1.1. Convergencia uniforme

Sea $X \subset \mathbb{C}$ no vacío y $\mathbb{C}^X$ el conjunto de las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Para cada conjunto no vacío $K \subset X$ y cada $f \in \mathbb{C}^X$ se define

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\} \ (\leq +\infty).$$

Una sucesión $f_n \in \mathbb{C}^X$ *converge puntualmente* a $f \in \mathbb{C}^X$ cuando para cada $z \in X$ se cumple $\text{lím}_n f_n(z) = f(z)$. Si además $\text{lím}_n \|f_n - f\|_K = 0$ se dice que f_n *converge uniformemente* sobre K. Una condición necesaria y suficiente para ello es que se cumpla la *condición de Cauchy* para la convergencia uniforme sobre K:

$$\textit{para cada } \varepsilon > 0 \textit{ existe } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tal que } q > p \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_p - f_q\|_K < \varepsilon.$$

Si la sucesión f_n converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset X$ se dice que es *uniformemente convergente sobre compactos*.

Teorema 4.1.1.
Si una sucesión de funciones continuas $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces f es continua.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, converge puntualmente (resp. uniformemente) sobre $K \subset X$ si la sucesión de sumas parciales $S_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(z)$ tiene la correspondiente propiedad. En ese caso queda definida en K la función suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Proposición 4.1.2. Criterio de Weierstrass.
Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_K < +\infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente y uniformemente sobre K.

Al aplicar el criterio de Weierstrass, generalmente no es preciso calcular exactamente $\|f_n\|_K$. Basta encontrar una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ tal que, para $n \geq n_0$, y todo $z \in K$ se verifique $|f_n(z)| \leq M_n$.

El siguiente teorema recoge criterios útiles para establecer convergencia uniforme de series de funciones que no son absolutamente convergentes (véanse los ejercicios 4.7, 4.8 y 4.9). Su demostración se puede consultar en [16, A.3.5].

Teorema 4.1.3. Criterios de Abel y Dirichlet.

Sea $f_n(z) = a_n(z)b_n(z)$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto K. Cada una de las siguientes condiciones implica la convergencia uniforme sobre K de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

a) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge uniformemente sobre K y b_n es una sucesión de funciones reales uniformemente acotada sobre K tal que para cada $z \in K$ la sucesión $b_n(z)$ es monótona.*

b) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge uniformemente sobre K y existe $C > 0$ tal que*

$$|b_1(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)| \leq C \text{ para todo } z \in K.$$

c) *La sucesión $\sum_{n=1}^{m} a_n$ está uniformemente acotada sobre K y b_n es una sucesión de funciones reales, que converge hacia 0 uniformemente sobre K, tal que para cada $z \in K$ la sucesión $b_n(z)$ es monótona.*

d) *La sucesión $\sum_{n=1}^{m} a_n$ está uniformemente acotada sobre K, la sucesión b_n converge hacia 0 uniformemente sobre K y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(z) - b_{n+1}(z)|$ converge uniformemente sobre K.*

El apartado *a*) es el clásico criterio de Abel [2, ejer. 9.13] y el apartado *b*) una ligera mejora de éste. El apartado *c*) es el criterio de Dirichlet, [2, teo. 9.15], y el apartado *d*) una versión algo más general del mismo.

4.1.2. Series de potencias

Una *serie de potencias* compleja (resp. real) centrada en $a \in \mathbb{C}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ (resp. $a_n \in \mathbb{R}$) y z es una variable compleja (resp. real).

Los resultados que siguen, aunque se enuncian para series de potencias complejas, también son válidos para las reales.

Proposición 4.1.4.

Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, existe un único $\rho \in [0, +\infty]$, llamado radio de convergencia de la serie, que satisface la propiedad siguiente: la serie no converge si $|z-a| > \rho$ y converge absolutamente si $|z-a| < \rho$.

Además, la convergencia de la serie es uniforme sobre cada disco compacto $\overline{D(a,r)} \subseteq D(a,\rho)$ y su suma define una función continua en $D(a,\rho)$.

En general no se puede decir nada sobre la convergencia de una serie de potencias en la frontera de su disco de convergencia (vea los ejercicios 4.7, 4.28 y 4.29). El radio de convergencia viene dado por la fórmula

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(con los convenios habituales, $1/0 = +\infty$, $1/+\infty = 0$). También se puede calcular mediante el límite $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$, cuando este límite existe.

Dado $b \in \mathbb{C}$, es conocido que todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ se puede escribir en potencias de $z - b$:

$$p(z) = b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \cdots + b_n(z-b)^n.$$

Para las series de potencias vale un resultado análogo:

Teorema 4.1.5.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ la función definida en $D(a,\rho)$ por una serie de potencias de radio de convergencia $\rho > 0$. Para cada $b \in D(a,\rho)$ existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$, con radio de convergencia $\rho_b \geq \rho - |b-a|$, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n \quad \text{si } |z-b| < \rho - |b-a|,$$

donde $b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (b-a)^{m-n}$ y estas series son absolutamente convergentes.

En las condiciones del teorema anterior se dice que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ es una *reordenación* de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ alrededor del punto b. Puede ocurrir que el radio de convergencia ρ_b de la serie reordenada verifique $\rho_b > \rho - |b-a|$, de modo que la nueva serie sea convergente en puntos donde la serie inicial no lo era (vea el ejercicio 4.31.

Teorema 4.1.6.

La función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ definida por una serie de potencias es holomorfa en su disco de convergencia $D(a,\rho)$ y vale la regla de derivación término a término:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}.$$

El radio de convergencia de la serie derivada sigue siendo ρ.

En las condiciones del teorema anterior f es indefinidamente derivable, sus derivadas sucesivas se obtienen derivando la serie término a término y

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{para todo } n \geq 0,$$

luego los coeficientes a_n están unívocamente determinados por la restricción de f a un entorno, tan pequeño como se quiera, de a. Una consecuencia de esto es que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida en $D(0,\rho)$, es par (resp. impar) entonces $a_n = 0$ cuando n es impar (resp. par). Otra consecuencia del teorema 4.1.6 es que los coeficientes b_n de la serie reordenada en $b \in D(a,r)$ (teorema 4.1.5) vienen dados por

$$b_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Las funciones definidas por series de potencias se pueden sumar y multiplicar siguiendo reglas similares a las de los polinomios: si ρ' y ρ'' son los radios de convergencia de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z-a)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n(z-a)^n$$

respectivamente y $\rho = \min\{\rho', \rho''\}$, es inmediato que la suma $f+g$ es desarrollable en serie de potencias en $D(a,\rho)$. Usando el producto de convolución (corolario 1.1.3) se obtiene que el producto fg admite en $D(a,\rho)$ el desarrollo

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a''_n(z-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{con } a_n = \sum_{p+q=n} a'_p a''_q.$$

La composición de funciones definidas por series de potencias admite localmente el desarrollo en serie de potencias que se obtiene sustituyendo formalmente una serie en la otra:

Proposición 4.1.7.
Sean $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-a)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$, funciones definidas por series de potencias en sus respectivos discos de convergencia $D(a,\rho)$, $D(b,\rho')$, con $a = g(b)$. Si $r > 0$ se elige de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n < \rho$ entonces $f(g(z))$ está definida en el disco $D(b,r)$ en el que admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-b)^n \quad si \quad |z-b| < r.$$

(¡el radio de convergencia puede ser mayor que r!).

Los coeficientes c_n son los que resultan cuando se sustituye formalmente la expresión $w - a = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-b)^n$ en la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-a)^n$ y se ordena el resultado según las potencias de $(z-b)$:

$$c_0 = a_0, \qquad c_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n) a_n, \quad si \quad k \geq 1,$$

donde

$$b_k(n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_n}.$$

Sustituyendo $w = 1 - g(z)$ en la serie geométrica

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \cdots = \frac{1}{1-w}$$

y aplicando la proposición anterior resulta

Proposición 4.1.8.
Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ definida en $D(b,\rho)$. Si $b_0 = 1$ y se elige $r > 0$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n < 1$ entonces $g(z)$ no se anula en $D(b,r)$ y $1/g(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias en el disco $D(b,r)$.

En las condiciones de esta proposición, si se desean calcular los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de la función $1/g(z)$, en lugar de utilizar las fórmulas que se derivan de aplicar la proposición 4.1.7, conviene aplicar el método de los *coeficientes indeterminados*: la proposición 4.1.8 garantiza que en un cierto disco $D(b,r)$ se tiene $1/g(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(z-b)^k$, luego

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-b)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n\right)$$

Efectuando el producto de las dos series e igualando coeficientes se obtiene:

$$
\begin{aligned}
1 &= b_0 c_0, \\
0 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\
0 &= b_0 c_2 + b_1 c_2 + b_2 c_0, \\
&\dots \\
0 &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0.
\end{aligned}
$$

Como $b_0 \neq 0$, la primera ecuación permite calcular c_0, la segunda c_1, la tercera c_2, etc. En los ejercicios 4.23 y 4.15 se pueden ver aplicaciones concretas del teorema de sustitución 4.1.7 y del método de los coeficientes indeterminados respectivamente. Los ejercicios 4.8 y 4.9 recogen algunos resultados complementarios, sobre convergencia uniforme de series de potencias, que tienen interés por sí mismos.

Serie logarítmica

La función $\operatorname{Log}(1+z)$ admite en el disco $D(0,1)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad \text{si } |z| < 1.$$

Más generalmente, si g es un logaritmo continuo de f en Ω (que necesariamente ha de ser holomorfo, véase la proposición 3.1.4) y se conoce el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de un punto $a \in \Omega$, en virtud de la proposición 3.1.5, para obtener el desarrollo en serie de potencias de g en este punto se puede emplear el siguiente método: se calcula el desarrollo del cociente f'/f (para ello se puede usar el método de los coeficientes indeterminados) y luego se calcula una primitiva adecuada de este desarrollo (véanse los ejercicios 4.15 a 4.17).

Serie binomial

Si $\alpha \in \mathbb{C}$, sea $S_\alpha(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$ la determinación principal de $(1+z)^\alpha$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$. Su desarrollo en serie de potencias en el disco $D(0,1)$ lo proporciona la clásica serie binomial

$$S_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \text{si } |z| < 1.$$

Cuando $\alpha \notin \mathbb{N}$ el radio de convergencia es 1 y cuando $\alpha = m \in \mathbb{N}$ la serie se reduce a un polinomio. El significado de $\binom{\alpha}{n}$ es el habitual

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

La serie binomial es muy útil a la hora de calcular desarrollos en serie de potencias, alrededor de 0, de ramas holomorfas de $\sqrt[n]{1+(az)^k}$ (vea los ejercicios 4.24, 7.16 y 7.20).

Series de Laurent

Una *serie de Laurent* centrada en $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

con $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. La serie de Laurent se considera convergente en los puntos donde convergen las dos series

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Si R, $1/r$ son, respectivamente, los radios de convergencia de las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$$

y $0 \le r < R \le +\infty$, entonces la serie de Laurent converge en la corona

$$A(a;r,R) = \{z : r < |z-a| < R\}.$$

La convergencia es uniforme sobre compactos y la función suma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

es holomorfa en esta corona. El desarrollo de Laurent, en la misma corona, de f' se obtiene derivando término a término el desarrollo de Laurent de f.

Teniendo en cuenta que en una corona $\{z : r < |z-a| < R\}$ la función $1/z$ no tiene primitiva resulta

Corolario 4.1.9.

Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ la función definida por una serie de Laurent en su corona de convergencia. Una condición necesaria y suficiente para que f tenga primitiva en la corona es que $a_{-1} = 0$.

4.1.3. Funciones analíticas. Ceros y principio de identidad

Se dice que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en $a \in \Omega$ si existe $D(a,r) \subseteq \Omega$ donde f admite un desarrollo en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{si} \quad z \in D(a,r).$$

El radio de convergencia de la serie de potencias puede ser mayor que r y puede ocurrir que la serie de potencias sea convergente en puntos donde f no está definida (véase el ejercicio 4.31). Si f es analítica en cada $a \in \Omega$ se dice que f es *analítica* en Ω. El conjunto estas funciones, denotado $\mathscr{A}(\Omega)$ en lo que sigue, es un espacio vectorial estable frente a multiplicación. La función definida por una serie de potencias en su disco de convergencia es analítica y las funciones analíticas son indefinidamente derivables (esto es consecuencia de los teoremas 4.1.5 y 4.1.6). Las funciones analíticas son holomorfas y, con los teoremas de Cauchy, en el siguiente capítulo quedará establecido que el recíproco también es cierto, es decir, $\mathscr{H}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$. En este capítulo y, con el fin de no utilizar este resultado, mantendremos la distinción entre $\mathscr{A}(\Omega)$ y $\mathscr{H}(\Omega)$. El hecho de que la composición de funciones analíticas es una función analítica es consecuencia del teorema de sustitución 4.1.7 (anticipando el hecho de que las funciones holomorfas son analíticas este resultado se puede obtener como consecuencia directa de la regla de la cadena para la derivación compleja). Por otra parte, la proposición 4.1.8 tiene como consecuencia que si $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ y $\Omega_0 = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ entonces $1/f \in \mathscr{A}(\Omega_0)$.

Ceros y principio de identidad

Los ceros de las funciones analíticas tienen propiedades similares a los de los polinomios: son aislados y tienen multiplicidad.

Si $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ no es idénticamente nula en un abierto conexo Ω, el conjunto de sus ceros $\mathscr{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ verifica $\mathscr{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$, es decir, los ceros de f son aislados. Más aún, cada cero $a \in \mathscr{Z}(f)$ tiene asociada su multiplicidad:

$$\nu(f, a) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$m = \nu(f, a)$ es el único número natural para el que existe una función g, analítica en algún $D(a, r) \subset \Omega$, verificando $f(z) = (z - a)^m g(z)$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, r)$.

La propiedad de los ceros aislados implica que si $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ no es idénticamente nula y Ω es conexo entonces $\mathscr{Z}(f)$ es numerable (véase el ejercicio 2.39) y que se cumple el principio de identidad:

Teorema 4.1.10. Principio de identidad.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $M \subset \Omega$ tal que $\Omega \cap M' \neq \emptyset$. Si f y g son funciones analíticas en Ω y $f(z) = g(z)$ para cada $z \in M$ entonces $f = g$.

Al principio de identidad se le suele llamar *principio de prolongación analítica* porque garantiza la unicidad de las prolongaciones analíticas: si g es analítica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y existe una prolongación analítica $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ de g a un abierto conexo $\Omega \supset U$, entonces f es la única prolongación analítica posible de g a Ω.

Si Ω es conexo, como consecuencia del principio de identidad, el anillo $\mathscr{A}(\Omega)$ no tiene divisores de 0 (es decir, si $f, g \in \mathscr{A}(\Omega)$ y el producto fg es idénticamente nulo entonces uno de los factores es idénticamente nulo).

Usando el clásico teorema de la función inversa para transformaciones diferenciables del plano, en el ejercicio 4.52 se ofrece una demostración directa de un resultado que engloba al teorema de la aplicación abierta y al teorema de la función inversa en el contexto de las funciones analíticas.

Funciones analíticas reales

Usando series de potencias reales se puede definir de modo análogo la noción de función analítica real. Estas funciones son indefinidamente derivables en todos los puntos de su dominio. Sin embargo existen funciones reales indefinidamente derivables que no son analíticas. Un ejemplo típico es la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, que no admite un desarrollo en serie de potencias en un entorno de 0 porque $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con el ejercicio 4.48 se pone de manifiesto que el estudio de las funciones analíticas reales se reduce al de las complejas.

4.2. Ejercicios resueltos

4.2.1. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

Los siguientes ejercicios sobre convergencia uniforme de sucesiones sirven, entre otras cosas, para insistir en el manejo y las propiedades de las funciones elementales de variable compleja.

Ejercicio 4.1.

Se supone que la sucesión $f_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente sobre K hacia una función $f = u + iv$ cuya parte real u está acotada superiormente sobre K. Demuestre que la sucesión $e^{f_n(z)}$ converge uniformemente sobre K.

SOLUCIÓN.

Se supone que $u(z) \leq M$ para todo $z \in K$. Entonces cuando $z \in K$ se cumple

$$\begin{aligned}|e^{f_n(z)} - e^{f(z)}| &= |e^{f(z)}||e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq \\ &\leq e^{u(z)}|e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq e^M|e^{f_n(z)-f(z)} - 1|.\end{aligned}$$

Como e^z es continua en $z = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|w| < \delta \Rightarrow |e^w - 1| < \varepsilon e^{-M}.$$

Por la convergencia uniforme de f_n, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n(\delta)$ entonces para todo $z \in K$ se cumple $|f_n(z) - f(z)| < \delta$. Combinando las dos afirmaciones anteriores se concluye que para todo $n \geq n(\delta)$ y todo $z \in K$ se verifica

$$|e^{f_n(z)} - e^{f(z)}| \leq e^M|e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq e^M \varepsilon e^{-M} = \varepsilon.$$

Ejercicio 4.2.

Establezca las desigualdades

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{m}$$

Deduzca de ellas que, para cada $R > 0$, la sucesión $(1 + z/n)^n$ converge hacia e^z uniformemente sobre $\{z : |z| \leq R\}$.

SOLUCIÓN.

$e^z - (1 + z/m)^m = D_m + R_m$ donde

$$D_m(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!} - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m, \qquad R_m(z) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Usando la fórmula del binomio de Newton

$$D_m(z) = \frac{z^2}{2!}\Big(1 - \frac{m-1}{m}\Big) + \frac{z^3}{3!}\Big(1 - \frac{(m-1)(m-2)}{m^2}\Big) + \cdots + \frac{z^m}{m!}\Big(1 - \frac{m!}{m^m}\Big).$$

Aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que en la expresión anterior los paréntesis son positivos se obtiene que $|D_m(z)| \leq D_m(|z|)$.

Por otra parte, es inmediato que $|R_m(z)| \leq R_m(|z|)$, luego

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right| \leq D_m(|z|) + R_m(|z|) = e^{|z|} - \Big(1 + \frac{|z|}{m}\Big)^m.$$

En virtud de la desigualdad $1 + x \leq e^x$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leq e^x, \quad \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x},$$

y cuando $0 \leq x \leq m$ se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned}
0 \leq e^x - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m &\leq e^x\left[1 - e^{-x}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right] \leq \\
&\leq e^x\left[1-\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right] = e^x\left[1-\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^m\right] = \\
&= e^x\frac{x^2}{m^2}\left[1+\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)+\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^{m-1}\right] \leq \\
&\leq e^x\frac{x^2}{m^2}m = \frac{x^2e^x}{m}
\end{aligned}$$

Con $x = |z|$ se obtiene la segunda desigualdad del enunciado.

En virtud de las desigualdades establecidas, si $|z| \leq R$, se verifica

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \leq \frac{R^2e^R}{m}$$

luego

$$\lim_m \left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^z \quad \text{uniformemente en } \{z : |z| \leq R\}.$$

Nota. En el ejercicio 4.3 se puede ver un resultado algo más general que proporciona otra solución basada en el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log}(1+z)$

Ejercicio 4.3.

Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sea $f_w(z)$ la determinación principal de $(1+z/w)^w$, definida para $|z| < |w|$. Demuestre que $\lim_{w\to\infty} f_w(z) = e^z$ y que el límite es uniforme sobre compactos.

SOLUCIÓN.

La determinación principal de $(1+z/w)^w$ es $e^{w\operatorname{Log}(1+z/w)}$, luego

$$|f_w(z) - e^z| = |e^z||e^{h_w(z)} - 1|, \quad \text{donde } \ h_w(z) = w\operatorname{Log}(1+z/w) - z.$$

Si $|z| < |w|$, usando el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log}(1+z)$ en el disco $D(0,1)$, se obtiene

$$h_w(z) = -\frac{1}{2}\frac{z^2}{w} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{w^2} - \frac{1}{4}\frac{z^4}{w^3} + \cdots$$

Si $|w| > 2R$, para todo $z \in D(0,R)$ se cumple $|z|/|w| < 1/2$ luego

$$|h_w(z)| \leq \frac{R^2}{|w|}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{|z|}{|w|} + \frac{1}{4}\frac{|z|^2}{|w|^2} + \cdots\right) \leq \frac{C}{|w|}$$

con $C = R^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n2^{n-2}} < +\infty$. Como e^z es continua en $z=0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|a| < \delta \Rightarrow |e^a - 1| < \varepsilon/e^R.$$

Si $|w| > \max\{2R, C/\delta\}$ para todo $z \in \overline{D(0,R)}$ se cumple $|h_w(z)| < \delta$ luego

$$|f_w(z) - e^z| \leq e^R|e^{h_w(z)} - 1| \leq e^Re^{-R}\varepsilon = \varepsilon$$

es decir, $\lim_{w\to\infty} f_w(z) = e^z$ uniformemente sobre $\overline{D(0,R)}$. (Un resultado análogo se puede ver en el ejercicio 4.2).

Ejercicio 4.4.

Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} nz = -i$ *y que, para cada* $\varepsilon > 0$*, el límite es uniforme sobre el semiplano* $H_\varepsilon := \{z : \operatorname{Im} z < -\varepsilon\}$.

SOLUCIÓN.

$$\operatorname{tg} nz = \frac{\operatorname{sen} nz}{\cos nz} = \frac{1}{i}\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{e^{inz} + e^{-inz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2nz} + 1}$$

luego

$$|\operatorname{tg} nz + i| = \left|\operatorname{tg} nz - \frac{1}{i}\right| = \left|\frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2nz} + 1} - 1\right| = \left|\frac{2}{e^{i2nz} + 1}\right|$$

de donde se sigue que para todo $z \in H_\varepsilon$ se verifica

$$|\operatorname{tg} nz + i| \leq \frac{2}{|e^{i2nz}| - 1} = \frac{2}{e^{-2ny} - 1} \leq \frac{2}{e^{2n\varepsilon} - 1}$$

Como la sucesión $2/(e^{2n\varepsilon} - 1)$ converge hacia 0, la última desigualdad nos asegura que $\lim_n \operatorname{tg} nz = -i$, uniformemente sobre H_ε.

Ejercicio 4.5.

Demuestre que la sucesión $f_n(x) = \operatorname{cotg}(x+in)$ *converge hacia* $-i$ *uniformemente en* $\mathbb{R}$. *Deduzca que la sucesión* $\alpha_n(x) = [\cot(x + in)]^m$ *converge uniformemente sobre compactos hacia* $(-i)^m$*, para todo* $m \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

Para todo $z = x + iy$ vale la desigualdad

$$|\operatorname{cotg} z + i| = \left| i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} + i\right| = \left|\frac{2e^{i2z}}{e^{i2z} - 1}\right| \leq \frac{2e^{-2y}}{1 - e^{-2y}}$$

donde la función $h(y) = 2e^{-2y}/(1 - e^{-2y})$ converge hacia 0 cuando $y \to +\infty$. Como para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $|\cot(x+in)+i| \leq h(n)$ se concluye que la sucesión $f_n(x) = \cot(x+in)$ converge hacia $-i$ uniformemente respecto de $x \in \mathbb{R}$.

La segunda afirmación se obtiene, por inducción sobre m, utilizando que el producto de dos sucesiones de funciones continuas que convergen uniformemente sobre compactos también converge uniformemente sobre compactos.

4.2.2. Convergencia uniforme de series de potencias

Lo que sigue es un repertorio de ejercicios sobre series de potencias, series de funciones y su convergencia uniforme. Los recursos para resolverlos son, esencialmente, el criterio de Weierstrass y los criterios de Abel-Dirichlet

Ejercicio 4.6.

Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge uniformemente en cada conjunto donde la serie derivada* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ *es uniformemente convergente.*

SOLUCIÓN.

Basta aplicar el apartado a) del teorema 4.1.3.

Ejercicio 4.7.

Sea $a_n \in \mathbb{R}$ una sucesión decreciente que converge hacia cero. Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente sobre

$$A_\delta = \{z : |z| \leq 1, \ |z-1| \geq \delta\}, \quad 0 < \delta < 1$$

y que la convergencia no es uniforme sobre $B_\delta = \{z : |z| < 1, 0 < |z-1| \leq \delta\}$ cuando $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

SOLUCIÓN.

Para todo $z \in A_\delta$ se cumple

$$\left|1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1-z|} \leq \frac{2}{\delta}$$

y aplicando el criterio de Dirichlet (apartado c) del teorema 4.1.3) se obtiene la convergencia uniforme sobre A_δ. Por otra parte, la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre B_δ implica la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre $\overline{B_\delta}$. Por lo tanto, si la serie no converge en $z = 1 \in \overline{B_\delta}$, no puede haber convergencia uniforme sobre B_δ.

Ejercicio 4.8.

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente sobre $E \subset \{z : |z| = 1\}$, demuestre que también converge uniformemente sobre

$$H = \{tz : 0 \leq t \leq 1, \ z \in E\}.$$

Deduzca el teorema de Abel: si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Como aplicación calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$.

SOLUCIÓN.

La hipótesis implica que el radio de convergencia ρ de la serie de potencias es mayor o igual que 1. Si $\rho > 1$ entonces H está contenido en el disco compacto $\{z : |z| \leq 1\} \subset D(0, \rho)$ y por lo tanto hay convergencia uniformemente sobre H. Si $\rho = 1$ basta probar la convergencia uniformemente sobre $M = H \setminus \{0\}$, pues entonces también habrá convergencia uniforme sobre $H = \overline{M}$.

En virtud de la hipótesis, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z/|z|)^n$ converge uniformemente sobre M y aplicando el criterio de Abel (apartado a) del terorema 4.1.3) se obtiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z/|z|)^n |z|^n$$

converge uniformemente sobre M.

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, aplicando lo que se acaba de demostrar con $E = \{1\}$, se obtiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge uniformemente sobre $[0,1]$, luego $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ define en $[0,1]$ una función continua, y por ello

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1) = \lim_{r \to 1^-} f(r).$$

En particular, si $a_0 = 0$ y $a_n = (-1)^{n+1}/n$ para $n \geq 1$, resulta una serie alternada convergente (en virtud del criterio de Leibniz). En este caso

$$f(r) = r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \cdots = \ln(1+r)$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{r \to 1} f(r) = \ln 2.$$

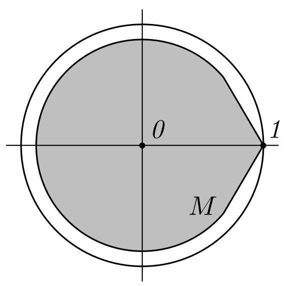
Ejercicio 4.9.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida en $D(0,\rho)$, donde ρ es el radio de convergencia de la serie de potencias. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y $r > 1$ demuestre que

$$\lim_{E_r \ni z \to 1} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

donde $E_r = \big\{z : |z| < 1,\ |1 - z| \leq r(1 - |z|)\big\}$.

Se dice que $M \subset D(0,1)$ es un conjunto de Stolz si $M \subset E_r$ para algún $r > 1$. Si M está contenido en un conjunto como el indicado en la figura, compruebe que M es un conjunto de Stolz.



SOLUCIÓN.

La convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implica que $\rho \geq 1$. Cuando $\rho > 1$ es inmediato que hay convergencia uniforme sobre el compacto $\overline{E_r} \subset D(0,\rho)$.

Si $\rho = 1$ la serie también converge uniformemente sobre $\overline{E_r}$. En efecto, para cada $z \in E_r$ se cumple

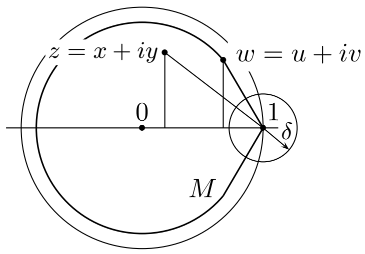
$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} |z^n - z^{n+1}| = 1 + |z-1| \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = 1 + \frac{|z-1|}{1-|z|} \leq 1 + r$$

y aplicando el criterio de Dirichlet (apartado c) del teorema 4.1.3) se obtiene la convergencia uniforme sobre E_r. Usando la condición de Cauchy es claro que la convergencia uniforme sobre E_r implica la convergencia uniforme sobre $\overline{E_r}$.

En virtud de la convergencia uniforme, la función suma f es continua sobre $\overline{E_r}$. Entonces, teniendo en cuenta que $1 \in \overline{E_r}$ (pues si $r > 1$ entonces $[0,1) \subset E_r$) se obtiene

$$\lim_{E_r \ni z \to 1} f(z) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Para demostrar que el conjunto M de la figura es un conjunto de Stolz basta ver que la función $h(z) = |z-1|/(1-|z|)$ está acotada sobre M. Como h es continua sobre el compacto $\overline{M} \setminus D(1,\delta)$, $0 < \delta < 1$, basta ver que h está acotada sobre $M \cap D(1,\delta)$ para algún $\delta > 0$.



Sea $w = u + iv$ el punto que se muestra en la figura anterior y sea $m = v/(1-u)$ la pendiente de la recta que pasa por w y 1. Razonando geométricamente es claro que $|y/(1-x)| \leq m$, luego, si $z = x + iy \in M$, entonces $z = x + i(1-x)p$ con $|p| \leq m$. Por lo tanto

$$h(z) = \frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{|1-x|\sqrt{1+p^2}}{1-\sqrt{x^2+(1-x)^2p^2}} \leq \frac{|1-x|\sqrt{1+m^2}}{1-\sqrt{x^2+(1-x)^2m^2}} = \varphi(x).$$

Como $\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \sqrt{1+m^2}$ existe $\delta \in (0,1)$ tal que h está acotada en $[1-\delta, 1)$, lo que lleva consigo que h está acotada sobre $M \cap D(1,\delta)$.

Ejercicio 4.10.

Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} z^n$ *converge absoluta y uniformemente sobre* $\{z : |z| \leq 1\}$. *Deduzca de ello que existe una sucesión de polinomios reales que converge hacia* $|x|$ *uniformemente sobre* $[-1,1]$.

SOLUCIÓN.

La sucesión $a_n = \binom{1/2}{n}$ verifica $\lim_n |a_n/a_{n+1}| = 1$, luego el radio de convergencia de la serie de potencias es 1. Según el criterio de Weierstrass para obtener la convergencia uniforme sobre $\{z : |z| \leq 1\}$ basta ver que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Para todo $n \geq 1$ se cumple $a_n = (-1)^{n+1}|a_n|$, lo que permite calcular, para $0 < r < 1$, la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-r)^n = 1 - \left(\sqrt{1-r} - 1\right) = 2 - \sqrt{1-r} \leq 2.$$

La desigualdad $\sum_{n=0}^{m} |a_n| r^n \leq 2$ es válida para todo $m \in \mathbb{N}$ y pasando al límite cuando $r \to 1$ se obtiene $\sum_{n=0}^{m} |a_n| \leq 2$, luego $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq 2$.

En virtud de lo que se acaba de establecer y del criterio de Weierstrass la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge uniformemente sobre $[-1, 1]$ donde define una función continua f que verifica $f(t) = \sqrt{1+t}$, si $|t| < 1$. Por continuidad también se cumple que $f(t) = \sqrt{1+t}$ para todo $t \in [-1, 1]$.

Cuando $x \in [-1, 1]$ se cumple $t = x^2 - 1 \in [-1, 1]$, luego

$$|x| = \sqrt{1 + (x^2 - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2 - 1)^n$$

es decir, $|x| = \lim_n S_m(x^2 - 1)$ donde $S_m(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n$. Como $S_m(t)$ converge hacia $f(t) = \sqrt{1+t}$ uniformemente en $[-1, 1]$ se sigue que la sucesión de polinomios $S_m(x^2 - 1)$ converge hacia $|x|$ uniformemente sobre $[-1, 1]$.

Ejercicio 4.11. Ejemplo de Porter.

Sea $\Omega = \{z : |z(1+z)| < 2\}$ *y* $f_n(z) = (z(1+z)/2)^{4^n}$.

a) Demuestre que la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de* Ω *y que su suma* f *admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de* 0 *con radio de convergencia* 1.

b) Sea $A_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ *la sucesión de las sumas parciales de la serie de potencias considerada en a). Compruebe que la subsucesión* $A_{m(n)}(z)$*, con* $m(n) = 2^{2n+1}$*, converge hacia* $f(z)$ *uniformemente sobre cada compacto* $K \subset \Omega$

SOLUCIÓN.

Dado un compacto $K \subset \Omega$, como está recubierto por la sucesión creciente de abiertos $\Omega_k = \{z : |z(z+1)| < 2 - 1/k\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \Omega_m$, luego para todo $z \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|f_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{m} \right) \right|^{4^n} = \rho^{4^n}$$

con $\rho < 1$. Aplicando el criterio de Weierstrass se concluye que la serie del enunciado converge uniformemente sobre K.

Desarrollando $f_n(z)$ mediante la fórmula del binomio, la serie se escribe:

$$\frac{1}{2}(z + z^2) + \frac{1}{2^4}(z^4 + 4z^5 + 6z^6 + 4z^7 + z^8) + \\ + \frac{1}{2^{16}}(z^{16} + 16z^{17} + \cdots + 16z^{31} + z^{32}) + \cdots$$

donde las potencias de z en los sucesivos paréntesis no se solapan. Quitando los paréntesis resulta una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que cumple

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = A_{m(n)}(z) \quad \text{con} \quad m(n) = 2^{2n+1}.$$

Si $0 < r < 1$ entonces $r \in \Omega$, luego

$$\sum_{k=0}^{m(n)} |a_k| r^k = \sum_{k=0}^{m(n)} a_k r^k = A_{m(n)}(r) = \sum_{k=0}^{n} f_k(r) \leq f(r) < +\infty.$$

Se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < +\infty$, de modo que el radio de convergencia es menor o igual que 1.

Por otra parte, como $A_{m(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} f_k(1) = n+1$, la serie de potencias no converge en $z = 1$, luego su radio de convergencia es exactamente 1. Obsérvese que en los puntos donde la serie de potencias converge se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \lim_n A_{m(n)}(z) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} f_k(z) = f(z).$$

Nota. La frontera de Ω es un óvalo de Casini (el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a los puntos 1 y -1 es constante e igual a 2) y es claro que $\Omega \supset \overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$. Aunque la serie de potencias no converge en $\Omega \setminus \overline{D(0,1)}$, existe una subsucesión de sumas parciales que converge uniformemente sobre compactos en Ω.

Ejercicio 4.12.

Obtenga la región de convergencia y la suma $f(z)$ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z^2)^n}{n}$$

Estudie la convergencia uniforme sobre compactos y obtenga el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$ alrededor de $z = 1$.

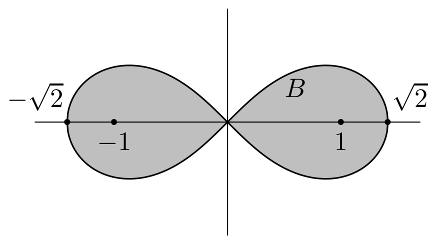
SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 4.7, para cada $\delta > 0$ la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} w^n$ converge uniformemente sobre $A_\delta = \{w : |w| \leq 1, \ |w-1| \geq \delta\}$. Como $\delta > 0$ es arbitrario, la región de convergencia de esta serie de potencias es

$$A = \{w : |w| \leq 1, \ w \neq 1\}$$

y la región de convergencia de la serie del enunciado es

$$B = \{z : |z^2 - 1| \leq 1, \ z \neq 0\}.$$



La convergencia es uniforme sobre cada compacto $K \subset B$. En efecto, como $H = \{1 - z^2 : z \in K\}$ es un subconjunto compacto de A, existe $\delta > 0$ tal que $H \subset A_\delta$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} w^n$ converge uniformemente sobre H y se sigue que la serie del enunciado converge uniformemente sobre K.

Por otra parte, utilizando que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} w^n = -\operatorname{Log}(1-w)$ se obtiene que para $z \in B$ la suma de la serie es

$$f(z) = -\operatorname{Log} z^2.$$

El desarrollo de $f(z)$ en serie de potencias alrededor de $z = 1$ coincide con el de la función $-\operatorname{Log} z^2$ definida en el complemento del eje imaginario. Se obtiene fácilmente a partir del desarrollo de la derivada

$$f'(z) = -\frac{2}{z} = \frac{-2}{1-(1-z)} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n \quad \text{si} \quad |z-1| < 1.$$

Como $f(1) = 0$, se concluye que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}(z-1)^n.$$

Obsérvese que esta serie de potencias tiene radio de convergencia 1 y por lo tanto converge en puntos donde no está definida la función f.

Ejercicio 4.13.

Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, definida para $|z| < \rho \leq 1$. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $D(0,\rho)$ y que su suma $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ es desarrollable en serie de potencias en $D(0,\rho)$. Obtenga los coeficientes del desarrollo en términos de los coeficientes a_n.

SOLUCIÓN.

Basta probar que para $0 < r < \rho$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ converge uniformemente sobre $\overline{D(0,r)}$. Cuando $0 < |w| \leq r$ se verifica

$$|f(w)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||w|^k = |w| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||w|^{k-1} \leq C(r)|w|,$$

con $C(r) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{k-1}$.

Si $|z| \leq r$ se cumple $|z^n| \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pues $r < \rho \leq 1$) y aplicando la desigualdad anterior con $w = z^n$ resulta

$$|f(z^n)| \leq C(r) r^n \quad \text{para todo} \quad z \in \overline{D(0,r)}$$

y, con el criterio de Weierstrass, se obtiene la convergencia uniforme sobre $\overline{D(0,r)}$.

Para obtener el desarrollo en serie de potencias de la función

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{nk}$$

definida para $|z| < \rho$, basta sumar la serie iterada por paquetes según las sucesivas potencias de z:

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{m=kn} a_k \right) z^m = \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m \quad \text{donde} \quad b_m = \sum_{k|m} a_k.$$

La sumación por paquetes queda justificada viendo que la suma $\sum_{n,k} a_k z^{nk}$ es conmutativamente convergente (o sumable): como $|z| = r < \rho \leq 1$ se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||z|^{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{n(k-1)} \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^{(k-1)} \leq C(r) \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

y basta aplicar la proposición 1.1.3.

Ejercicio 4.14.

Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$$

converge uniformemente sobre compactos en $\{z : |z| \neq 1\}$ *y que su suma admite un desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$*. Obtenga el desarrollo.*

SOLUCIÓN.

Dado un compacto $K \subset D(0,1)$, existe $0 < r < 1$ tal que $K \subset D(0,r)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $r^{2n} \leq 1/2$ para todo $n \geq m$. Entonces para cada $z \in K$ y cada $n \geq m$ se cumple

$$\left| \frac{z^n}{1+z^{2n}} \right| \leq \frac{r^n}{1-r^{2n}} \leq 2r^n$$

luego, en virtud del criterio de Weierstrass, la serie del enunciado converge uniformemente sobre K.

Si $w = 1/z$, teniendo en cuenta que $z^n/(1+z^{2n}) = w^n/(1+w^{2n})$, se concluye que la serie también converge uniformemente sobre compactos en $\{z : |z| > 1\}$.

La suma de la serie define en $\{z : |z| \neq 1\}$ la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(z^n) \quad \text{donde} \quad h(z) = \frac{z}{1+z^2}$$

Usando la serie geométrica de razón z^2 se obtiene, para $|z| < 1$, el desarrollo $h(z) = z - z^3 + z^5 - z^7 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^{2k-1}$ luego

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^{n(2k-1)}.$$

Razonando como en el ejercicio 4.13, la serie iterada se puede sumar por paquetes ya que, para $|z| \leq r < 1$, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k+1} z^{n(2k-1)}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r^{2n}} < +\infty.$$

Formando los paquetes según las sucesivas potencias de z se obtiene que para $|z| < 1$ vale el desarrollo

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

donde $a_m = \sum_{k \in E_m} (-1)^{k+1}$ y $E_m = \{k \in \mathbb{N} : m \text{ es múltiplo de } 2k-1\}$.

4.2.3. Desarrollos de funciones concretas

Los siguientes ejercicios están dedicados al cálculo de desarrollos en serie de potencias y desarrollos de Laurent de funciones concretas definidas en términos de las funciones elementales. Las herramientas son, esencialmente, la serie geométrica, la serie binomial, y los desarrollos básicos de las funciones elementales. En los ejercicios 4.18 y 4.19 se obtienen desarrollos en serie de potencias y en serie de Laurent de ramas holomorfas de $\operatorname{arc\,tg}$ y $\operatorname{arc\,cos}$.

Ejercicio 4.15.

Obtenga, mediante un desarrollo en serie de potencias, un logaritmo holomorfo de $f(z) = 1 + e^z$ definido en un disco $D(0, r)$.

SOLUCIÓN.

Por la continuidad de f en $z = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow f(z) \in \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$$

luego es posible componer f con el logaritmo principal y, por tanto, podemos definir $G(z) = \operatorname{Log} f(z)$. Esta función es un logaritmo holomorfo de f en $D(0, \delta)$ que verifica

$$G'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

Como $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$ y $f(0) \neq 0$, la teoría de las series de potencias garantiza que $f'(z)/f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias en un disco $D(0, r) \subset D(0, \delta)$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^z}{1 + e^z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \quad \text{si} \quad |z| < r.$$

Los coeficientes a_n se pueden calcular utilizando el método de los coeficientes indeterminados, que conduce a la fórmula recurrente

$$a_0 = 1/2; \quad 1 = a_0 + n a_1 + n(n-1) a_2 + \cdots + n!\, a_{n-1} + 2n!\, a_n.$$

Con la serie de potencias se calcula una primitiva g de f'/f en el disco $D(0, r)$

$$g(z) = c + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$$

Obsérvese que esta serie de potencias, al tener el mismo radio de convergencia que su derivada, sigue siendo convergente en $D(0, r)$. Eligiendo $c = \operatorname{Log} f(0) = \operatorname{Log} 2$, se obtiene que g es una primitiva de f'/f, en $D(0, r)$, que verifica $g(0) \in \log f(0)$ luego $g = G|_{D(0,r)}$, por lo que g es un logaritmo holomorfo de f en $D(0, r)$.

Nota. Con los resultados más profundos de la teoría de Cauchy del siguiente capítulo se puede asegurar que el desarrollo en serie de potencias de la función $e^z/(1+e^z)$ alrededor de 0 tiene radio de convergencia π, luego el máximo valor admisible de r es π.

Ejercicio 4.16.

Sea $T(z) = (1+z)/(1-z)$. Compruebe que el dominio de $f(z) = \operatorname{Log} T(z)$ es un abierto que contiene al disco $D(0, 1)$. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0, 1)$.

SOLUCIÓN.

f está definida en $U = T^{-1}(\Omega_1)$, donde $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ es el dominio del logaritmo principal Log. Obsérvese que $T^{-1}(w) = (w-1)/(w+1)$ transforma $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \cup \{\infty\}$ en $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} \cup \{\infty\}$ luego

$$U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

La función f queda caracterizada como la única rama de $\log T(z)$ definida en U, que cumple $f(0) = 0$, luego f es la primitiva de T'/T que se anula en $z = 0$. Para calcular el desarrollo en serie de potencias de f en el disco $D(0,1)$ basta hallar el de su derivada

$$f'(z) = \frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2} = 2 + 2z^2 + 2z^4 + \cdots \quad \text{si } |z| < 1$$

con el que se obtiene

$$f(z) = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \cdots \quad \text{si } |z| < 1.$$

Ejercicio 4.17.

Sea $[a,b]$ el segmento del plano complejo de extremos $a, b \in \mathbb{C}$, con $0 \notin [a,b]$, y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a,b]$. Justifique la existencia de una única $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ verificando

$$e^{f(z)} = \frac{z-a}{z-b} \quad \textit{para todo } z \in \Omega, \qquad \lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Sea $r = \min\{|z| : z \in [a,b]\}$ y $R = \max\{|a|, |b|\}$. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de f en $|z| < r$ y el desarrollo de Laurent de f en $|z| > R$.

Estudie el mismo problema cuando $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, donde S es un arco de circunferencia de extremos a y b que no pasa por 0.

SOLUCIÓN.

El cociente $T(z) = (z-a)/(z-b)$ es real negativo si y sólo si z pertenece al segmento $[a,b]$, luego en Ω se puede definir la función $f(z) = \operatorname{Log} T(z)$. Es obvio que f es un logaritmo holomorfo de T que cumple $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Como Ω es conexo f está unívocamente determinada y cualquier logaritmo holomorfo de T en Ω difiere de f en una constante.

El desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,r) \subset \Omega$ se obtiene a partir del desarrollo de su derivada

$$f'(z) = \frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \frac{1}{b}\frac{1}{(1-z/b)} - \frac{1}{a}\frac{1}{(1-z/a)}$$

Si $|z| < r$, se cumple $|z/a| < 1$, $|z/b| < 1$, y utilizando las series geométricas de razones z/a y z/b se obtiene

$$f'(z) = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{b^2} + \cdots + \frac{z^n}{b^n} + \cdots\right) - \frac{1}{a}\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \cdots + \frac{z^n}{a^n} + \cdots\right).$$

La hipótesis $0 \notin [a,b]$ garantiza que a/b no es real negativo, y por lo tanto está definido $\operatorname{Log}(a/b)$. Entonces, si $|z| < r$, se obtiene el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con } c_0 = f(0) = \operatorname{Log}(a/b),\ c_n = \frac{1}{nb^n} - \frac{1}{na^n} \ \text{ si } \ n \geq 1,$$

con radio de convergencia $\rho = \min\{|a|, |b|\}$. Obsérvese que puede ser $\rho > r$ (considere el caso $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, donde $r = 1 < \rho = \sqrt{2}$).

El desarrollo de Laurent de f en $\{z : |z| > R\}$ también se obtiene a partir del desarrollo de su derivada:

$$f'(z) = \frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{1-b/z}\right)$$

Si $|z| > R$, utilizando las series geométricas de razones a/z y b/z se obtiene

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{a-b}{z} + \frac{a^2-b^2}{z^2} + \cdots + \frac{a^n-b^n}{z^n} + \cdots\right)$$

luego

$$f(z) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n - a^n}{nz^n} \quad \text{si } |z| > R.$$

La constante c queda determinada por la condición $c = \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Si S es un arco de circunferencia de extremos a y b que no pasa por 0, entonces $E = T(S)$ es una semirrecta que surge de 0 (pues $T(a) = 0$, $T(b) = \infty$) que no pasa por $T(0) = a/b$. En el abierto $G = \mathbb{C} \setminus E$ hay definido un logaritmo holomorfo de la identidad $L \in \mathscr{H}(G)$, determinado por $L(a/b) = \operatorname{Log}(a/b)$, luego $g(z) = L(T(z))$ define en $\mathbb{C} \setminus S$ un logaritmo holomorfo de T que coincide con f en cada $D(0, \varepsilon) \subset \Omega \cap G$ (pues f y g valen lo mismo en 0). Se sigue que los desarrollos en serie de potencias de f y g alrededor de 0 coinciden. Es decir, la serie de potencias «no sabe» si procede de desarrollar f o de desarrollar g, en un entorno de 0. La única diferencia entre las definiciones de f y g son los cortes «artificiales» que hemos dado en el plano para poder definir, en sus complementos, logaritmos holomorfos de T.

Por ejemplo, cuando $a = 1+i$, $b = 1-i$ y S es un arco de la circunferencia centrada en 0, de extremos a y b, entonces la función $L(T(z))$ está definida en $D(0, \sqrt{2})$ y coincide con f en $D(0, 1)$. Esto explica que el disco de convergencia del desarrollo en serie de potencias de f alrededor de 0 se pueda «escapar» del abierto Ω donde inicialmente estaba definida f.

Se dejan al cuidado del lector las consideraciones análogas referentes al desarrollo de Laurent de g en $\{z : |z| > R\}$ donde $R = \max\{|z| : z \in S\}$.

Con recursos teóricos avanzados donde interviene la integral de línea se puede demostrar que si S es un conjunto cerrado conexo con $a, b \in S$, entonces en el abierto $\mathbb{C} \setminus S$ existe un logaritmo holomorfo de f (véase el ejercicio 7.11).

Ejercicio 4.18.

Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy \colon y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$ y $f(z)$ la rama de $\operatorname{arc\,tg} z$ definida en Ω, determinada por la condición $f(0) = 0$ (véase el ejercicio 3.18). Obtenga su desarrollo en serie de potencias.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 3.18, $2if(z) = \operatorname{Log} S(z)$ donde $S(z) = -(z-i)/(z+i)$, es decir, $g(z) = 2if(z)$ es el único logaritmo continuo de $S(z)$, definido en Ω, que se anula en $z = 0$. Según la proposición 3.1.4, g es una primitiva de S'/S que cumple $g(0) \in \log S(0)$, luego el desarrollo en serie de potencias de g en $D(0,1)$ se puede calcular considerando el de su derivada, válido para $|z| < 1$:

$$g'(z) = \frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{i}{1+iz} + \frac{i}{1-iz} = 2i(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots).$$

Usando este desarrollo se obtiene la primitiva con la propiedad requerida:

$$g(z) = 2i\left(z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots\right).$$

Se obtiene así

$$f(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots \quad \text{si } |z| < 1.$$

También se puede razonar derivando la igualdad $z = \operatorname{tg} f(z)$. Así se obtiene

$$1 = \left(\frac{\operatorname{sen} f(z)}{\cos f(z)}\right)' = \frac{f'(z)}{\cos^2 f(z)}$$

luego

$$f'(z) = \cos^2 f(z) = \frac{\cos^2 f(z)}{\operatorname{sen}^2 f(z) + \cos^2 f(z)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 f(z)} = \frac{1}{1+z^2}$$

Con la serie geométrica de razón $-z^2$ se consigue el desarrollo en serie de potencias de f' y con este desarrollo se calcula el de f.

Ejercicio 4.19.

Sea $f(z)$ la rama de $\arccos z$ definida en $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, determinada por la condición $f(0) = \pi/2$ (véase el ejercicio 3.22). Obtenga su desarrollo en serie de potencias en $D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 3.22, con la fórmula $f(z) = -i \operatorname{Log}(z + i\sqrt{1-z^2})$ queda definida en U una rama de $\arccos z$, que necesariamente es holomorfa en virtud de la proposición 3.1.4. Pero esta fórmula no es apropiada para calcular el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,1)$. El método adecuado consiste en considerar la derivada f'. Para todo $z \in U$ se cumple $z = \cos f(z)$ luego $1 = -f'(z) \operatorname{sen} f(z)$, y así

$$1 = f'(z)^2 \operatorname{sen}^2 f(z) = f'(z)^2(1 - \cos^2 f(z)) = f'(z)^2(1 - z^2)$$

luego f' es una de las dos raíces cuadradas holomorfas que $1/(1-z^2)$ tiene en U (vea los ejercicios 3.6 y 3.10). Es la que toma el valor $f'(0) = -1$ (ya que $f(0) = \operatorname{Log} i/i = \pi/2$, luego $1 = -f'(0) \operatorname{sen} f(0) = -f'(0)$).

Por otra parte, la fórmula $-S_{-1/2}(-z^2) = -e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)}$ también define una raíz cuadrada holomorfa de $1/(1-z^2)$ en U, que toma el valor -1 en $z = 0$, luego

$$f'(z) = -S_{-1/2}(-z^2) \text{ para todo } z \in U.$$

Usando la serie binomial se obtiene el desarrollo

$$f'(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n z^{2n}, \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = \pi/2$ se concluye que

$$f(z) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \binom{-1/2}{n} z^{2n+1} \quad \text{si} \quad |z| < 1.$$

Nota. Con recursos avanzados de la teoría de funciones holomorfas se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para que en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se pueda definir una rama holomorfa de $\arccos z$ es que los tres puntos $1, -1, \infty$ estén en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (véase el ejercicio 7.16).

Ejercicio 4.20.

Obtenga los desarrollos de Laurent de $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ *en las coronas*

$$A = \{z : 1 < |z| < 2\}; \qquad B = \{z : |z| > 2\}.$$

SOLUCIÓN.

Basta efectuar la descomposición

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

y utilizar la series geométricas

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1/2}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots\right) \quad \text{si} \quad |z| < 2;$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1/z}{1-1/z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots\right) \quad \text{si} \quad |z| > 1;$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1/z}{1-2/z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{z}\right)^n + \cdots\right) \quad \text{si} \quad |z| > 2;$$

Si a la primera (resp. tercera) serie se le resta la segunda se obtiene el desarrollo de Laurent en A (resp. en B).

Ejercicio 4.21.

Obtenga los desarrollos de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ *en las coronas*

a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$; $\{z : 1 < |z| < 2\}$; $\{z : 2 < |z|\}$

b) $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$; $\{z : 1 < |z-1|\}$

c) $\{z : 0 < |z-2| < 1\}$; $\{z : 1 < |z-2| < 2\}$; $\{z : 2 < |z-2|\}$.

Determine en cuál de estas coronas tiene primitiva la función f.

SOLUCIÓN.

El método de los coeficientes indeterminados conduce a la descomposición

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}$$

con $A = C = 1/2$, $B = -1$. El desarrollo de Laurent de f en cada una de las coronas se obtendrá sumando los desarrollos de cada uno de los sumandos.

a) Para los desarrollos centrados en 0 se tiene:

Si $|z| < 1$: $\dfrac{B}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$

Si $|z| > 1$: $\dfrac{B}{z-1} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-1/z} = -\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z^3} - \cdots$

Si $|z| < 2$: $\dfrac{C}{z-2} = -\dfrac{C}{2}\dfrac{1}{1-z/2} = -\dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{2^2} + \cdots\right)$

Si $|z| > 2$: $\dfrac{C}{z-2} = \dfrac{C}{z}\dfrac{1}{1-2/z} = \dfrac{1}{2z}\left(1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{2^2}{z^2} + \cdots\right)$

El desarrollo de Laurent en cada una de las coronas de este apartado se obtiene sumando los desarrollos de A/z, $B/(z-1)$ y $C/(z-2)$, en potencias enteras de z, eligiendo en cada caso los convergentes en la corona.

f tendrá primitiva en una de estas coronas cuando el coeficiente de $1/z$, en el correspondiente desarrollo, sea nulo. Por lo tanto, de las tres coronas de este apartado, f sólo tiene primitiva en $\{z : |z| > 2\}$.

b) Para los desarrollos centrados en 1, hay que empezar calculando los desarrollos de A/z y $C/(z-2)$ en potencias de $w = z - 1$:

Si $|z-1| < 1$: $\dfrac{A}{z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{w+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - w + w^2 - w^3 + \cdots\right)$

Si $|z-1| > 1$: $\dfrac{A}{z} = \dfrac{1}{2w}\dfrac{1}{1+1/w} = \dfrac{1}{2w}\left(1 - \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w^2} - \cdots\right)$

Si $|z-1| < 1$: $\dfrac{C}{z-2} = \dfrac{-C}{1-w} = -\dfrac{1}{2}\left(1 + w + w^2 + \cdots\right)$

Si $|z-1| > 1$: $\dfrac{C}{z-2} = \dfrac{C}{w}\dfrac{1}{1-1/w} = \dfrac{1}{2w}\left(1 + \dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w^2} + \cdots\right)$

Igual que antes, el desarrollo de Laurent en cada una de las coronas de este apartado se obtiene sumando los desarrollos de A/z, $B/(z-1)$ y $C/(z-2)$, en potencias enteras de $w = z - 1$, eligiendo los que convergen en la corona. Razonando como en el apartado *a*) se obtiene que, de las dos coronas de este apartado, f sólo tiene primitiva en $\{z : 1 < |z-1|\}$.

c) Se procede como en los casos anteriores y se deja al cuidado del lector.

Ejercicio 4.22.

Sean $f(z)$, $g(z)$ las ramas de la raíz cuadrada de z^2-1 definidas, respectivamente, en $U=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 1\}$ y $V=\mathbb{C}\setminus[-1,+1]$, determinadas por $f(0)=i$, $g(2)=\sqrt{3}$ (véase el ejercicio 3.6). Obtenga el desarrollo en serie de potencias de f en $\{z:|z|<1\}$ y el desarrollo en serie de Laurent de g en $\{z:1<|z|\}$.

SOLUCIÓN.

Si $\sqrt{}$ designa la raíz cuadrada principal, según el ejercicio 3.6, las funciones

$$R(z)=i\sqrt{1-z^2}=iS_{1/2}(-z^2), \qquad r(z)=z\sqrt{1-1/z^2}=zS_{1/2}(-1/z^2)$$

son ramas de la raíz cuadrada de z^2-1 definidas, respectivamente, en los abiertos U y V. Como z^2-1 no se anula en estos abiertos conexos, al ser $f(0)=R(0)$ y $g(2)=r(2)$, se puede afirmar que $f=R$ y $g=r$ (véase el ejercicio 3.2). Los desarrollos pedidos se consiguen utilizando la serie binomial:

$$f(z)=R(z)=i\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}i(-1)^n\binom{1/2}{n}z^{2n} \qquad \text{si } |z|<1.$$

$$g(z)=r(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\frac{(-1)^n}{z^{2n-1}} \qquad \text{si } |z|>1.$$

Ejercicio 4.23.

Obtenga el desarrollo de Laurent de $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ en $\{z:|z|>1\}$.

SOLUCIÓN.

Basta obtener el desarrollo en serie de potencias de $f(1/w)$ en $D(0,1)$ y sustituir luego $w=1/z$. Cuando $|w|<1$ se tiene

$$f(1/w)=e^{\frac{w}{w-1}}=e^{1+\frac{1}{w-1}}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(1-w)^{-n}.$$

El desarrollo en serie de potencias de $(1-w)^{-n}$ alrededor de 0 viene dado por la serie binomial

$$(1-w)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-w)^k$$

luego

$$f(1/w)=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-w)^k.$$

Según el principio de sustitución 4.1.7 el desarrollo en serie de potencias de $f(1/w)$ alrededor de 0 es

$$f(1/w)=e\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\binom{-n}{k}\right)(-w)^k.$$

Ejercicio 4.24.

Obtenga el desarrollo en serie de Laurent (resp. en serie de potencias) en $A = \{z : |z| > 1\}$ *(resp.* $B = \{z : |z-1| < 1\}$*) de una rama de la raíz cúbica de* $1 + z^3$.

SOLUCIÓN.

$1 + z^3 = z^3(1 + 1/z^3)$ luego con la fórmula $f(z) = zS_{1/3}(z^{-3})$ se consigue una rama de la raíz cúbica de $1 + z^3$, definida para $|z| > 1$.

Aunque no se requiere para la solución, es fácil determinar el dominio de f: en efecto, $S_{1/3}(w) = e^{\frac{1}{3}\operatorname{Log}(1+w)}$ está definida en $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{R} : w \leq -1\}$, luego el dominio de f es $\mathbb{C} \setminus X$, con $X = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1,\ e^{i3\theta} = -1\}$.

La serie binomial $S_{1/3}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} w^n$ proporciona en $D(0,1)$ el desarrollo en serie de potencias de la función $S_{1/3}(w)$, luego la serie

$$zS_{1/3}(z^{-3}) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} z^{-3n+1}$$

proporciona el desarrollo de Laurent de f en A.

Para obtener en B una rama de la raíz cúbica de $1 + z^3$ conviene expresar $1 + z^3$ en términos de $w = z - 1$. Resulta el polinomio $p(w) = w^3 + 3w^2 + 3w + 2$. Sus ceros (que se obtienen restando 1 a los ceros del polinomio $z^3 + 1$) son -2, $a = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $b = \overline{a}$, luego

$$p(w) = (w+2)(w-a)(w-b) = 2ab(1 + w/2)(1 - w/a)(1 - w/b).$$

$|a| = |b| = 1$, luego $|w| = |z-1| < 1$ implica $|w/a| < 1$, $|w/b| < 1$ y $|w/2| < 1$. Entonces, con la fórmula

$$g(w) = \sqrt[3]{2ab}\, S_{1/3}\Big(\frac{w}{2}\Big) S_{1/3}\Big(-\frac{w}{a}\Big) S_{1/3}\Big(-\frac{w}{b}\Big)$$

queda definida, en un dominio que contiene a $D(0,1)$, una rama de la raíz cúbica de $p(w)$. Su desarrollo en serie de potencias en $D(0,1)$ se consigue efectuando el producto de convolución de tres series binomiales. Reemplazando $w = z - 1$ se llega al desarrollo de Laurent en B de una rama de la raíz cúbica de $z^3 + 1$:

$$g(z-1) = \sqrt[3]{2ab} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

con

$$a_n = \sum_{i+j+k=n} \binom{1/3}{i}\binom{1/3}{j}\binom{1/3}{k} 2^{-i}(-a)^{-j}(-b)^{-k}$$

Se deja al cuidado del lector la determinación exacta del dominio de $g(z-1)$.

Ejercicio 4.25.

Sea $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$. *Compruebe que en* $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$ *se pueden definir ramas de la raíz cuadrada del polinomio* $p(z) = z^2 - 2z + 2$. *Si* f *es la rama determinada por* $f(0) = \sqrt{2}$, *obtenga su desarrollo en serie de potencias en* $D(0,1)$ *y calcule el radio de convergencia (véase el ejercicio 3.12).*

SOLUCIÓN.

Los ceros de p son $a = 1 + i$, y $\overline{a} = 1 - i$, luego $p(z) = (z - a)(z - \overline{a})$.

La imagen del segmento $T = \{1 + it : |t| \leq 1\}$ mediante la transformación de Möbius $S(z) = (z-a)/(z-\overline{a})$ es el semieje real negativo (pues $S(a) = 0$, $S(1) = -1$ y $S(\overline{a}) = \infty$). Como $S(\Omega)$ está contenido en el dominio de la raíz cuadrada principal, se puede definir en Ω la función

$$g(z) = (z - \overline{a})\sqrt{\frac{z-a}{z-\overline{a}}}$$

Para todo $z \in \Omega$ se cumple $g^2(z) = (z - \overline{a})(z - a) = p(z)$, luego g es una rama de la raíz cuadrada de p, definida en Ω.

En el abierto conexo Ω se pueden definir dos ramas de la raíz cuadrada de p, que son g y $-g$, y para determinar una de ellas basta indicar su valor en $z = 0$ (véase el ejercicio 3.2). Como $-g(0) = \sqrt{2} = f(0)$ se sigue que $f(z) = -g(z)$.

Para calcular el desarrollo en serie de potencias de f conviene escribir

$$p(z) = a\overline{a}(1 - z/a)(1 - z/\overline{a}) = 2(1 - z/a)(1 - z/\overline{a})$$

que conduce a la fórmula

$$\varphi(z) = \sqrt{2}\sqrt{1 - z/a}\sqrt{1 - z/\overline{a}}$$

con la que se obtiene una rama de la raíz cuadrada de p definida en el abierto

$$G = \mathbb{C} \setminus \big(\{at : t \geq 1\} \cup \{t\overline{a} : t \geq 1\}\big)$$

(véase el ejercicio 3.11). Como $D(0, 1) \subset G$ es conexo y $\varphi(0) = \sqrt{2}$ se sigue que $f(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in D(0, 1)$.

La serie binomial $S_{1/2}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} w^n$ proporciona el desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{1 + w}$ en el disco $|w| < 1$, y para calcular el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0, 1)$ basta efectuar el producto de convolución de dos series binomiales:

$$f(z) = \sqrt{2}\, S_{1/2}(-z/a)\, S_{1/2}(-z/\overline{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1$$

donde

$$a_n = (-1)^n \sqrt{2} \sum_{p+q=n} \binom{1/2}{p}\binom{1/2}{q} \frac{1}{a^p\, \overline{a}^q}$$

Las series binomiales multiplicadas convergen para $|z| < |a| = \sqrt{2}$, luego su producto de convolución también converge para $|z| < \sqrt{2}$, es decir, el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de 0 tiene radio de convergencia $\rho \geq \sqrt{2}$, luego el disco de convergencia no está contenido en Ω.

Este hecho se explica observando que el disco $D(0, \sqrt{2})$ está contenido en el dominio G de la función $\varphi(z)$. Como $f(z)$ y $\varphi(z)$ son raíces cuadradas continuas de $p(z)$ que toman el mismo valor en $z = 0$, deben coincidir en cualquier abierto conexo $V \subset \Omega \cap G$ con $0 \in V$, como es el caso del disco $D(0, 1)$, y por lo tanto tienen el mismo desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$ (obsérvese que φ y f no coinciden en $\Omega \cap G$ pues $f(2) \neq \varphi(2)$). Aunque f no está definida en el disco $D(0, \sqrt{2})$, φ sí lo está y por ello no es es sorprendente que la serie de potencias sea convergente en este disco.

Para demostrar que el radio de convergencia es $\rho = \sqrt{2}$ se puede razonar por reducción al absurdo: si fuese $\rho > \sqrt{2}$, la función $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sería holomorfa en $D(0, \rho)$ y para todo $z \in D(0, \sqrt{2})$ se cumpliría que $h(z)^2 = p(z)$, luego $2h'(z)h(z) = p'(z)$. Considerando el límite cuando $z \in D(0, \sqrt{2})$ tiende hacia a se llega a una contradicción, pues $h(a) = 0$ y $p'(a) \neq 0$. Así queda justificado que $\rho = \sqrt{2}$.

Ejercicio 4.26.

Sea f la rama de la raíz cuadrada de $p(z) = z^2 - 2z + 2$ considerada en el ejercicio 4.25. Calcule los desarrollos de Laurent de f en $A = \{z : |z| > \sqrt{2}\}$ y en $B = \{z : |z - 1| > 1\}$.

SOLUCIÓN.

Comenzamos factorizando el polinomio $p(z) = (z - a)(z - \overline{a})$ con $a = 1 + i$, y $\overline{a} = 1 - i$. En el desarrollo de Laurent de f en A intervienen potencias negativas de z por lo que conviene usar que

$$p(z) = z^2(1 - a/z)(1 - \overline{a}/z) \quad \text{si } z \neq 0,$$

lo que que conduce a la fórmula $\psi(z) = z\sqrt{1 - a/z}\sqrt{1 - \overline{a}/z}$, que define en A una rama de la raíz cuadrada de p (véase el ejercicio 3.11). En virtud del ejercicio 3.2, $f|_A$ es una de las dos funciones $\psi|_A$ o $-\psi|_A$. Como

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\psi(z)}{z} = 1 = \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z}$$

se concluye que $f|_A = \psi|_A$. Usando la serie binomial se obtiene

$$f(z) = \psi(z) = z \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{-a}{z} \right)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{-\overline{a}}{z} \right)^n \right] \quad \text{si } |z| > |a|.$$

El producto de convolución de las series proporciona el desarrollo de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} \binom{1/2}{p} \binom{1/2}{q} a^p \, \overline{a}^q \right) \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} = z - 1 + \frac{1}{2z} + \cdots \quad \text{si } |z| > \sqrt{2}.$$

Como en el desarrollo de Laurent de f en B intervienen potencias negativas de $z - 1$, comenzamos factorizando p en la forma:

$$p(z) = 1 + (z - 1)^2 = (z - 1)^2 \left(1 + \frac{1}{(z - 1)^2} \right) \quad \text{si } z \neq 1,$$

lo que conduce a la fórmula

$$\phi(z) = (z - 1)\sqrt{1 + \frac{1}{(z - 1)^2}}$$

con la que queda definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1 + it : |t| \leq 1\}$ una rama de la raíz cuadrada de p. Como $\phi(0) = -\sqrt{2} = -f(0)$, en virtud del ejercicio 3.2 se puede asegurar que $f = -\phi$, es decir,

$$f(z) = -(z - 1)\sqrt{1 + \frac{1}{(z - 1)^2}} \quad \text{para todo } z \in \Omega$$

(véase el ejercicio 3.11). Usando la serie binomial se obtiene el desarrollo de Laurent de f en B:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} = -(z-1) - \frac{1}{2(z-1)} + \cdots$$

para $|z-1| > 1$.

Ejercicio 4.27.

Sea $\Omega = \{z\colon |z-1| < \sqrt{2},\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ *y* $g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ *el isomorfismo conforme obtenido en el ejercicio 3.35, dado por la fórmula* $g(z) = 2z/(z^2-1)$*. Obtenga el desarrollo en serie de potencias de su inversa.*

SOLUCIÓN.

Si f es la inversa de g, para cada $w \in D(0,1)$, $f(w)$ es una de las dos soluciones de la ecuación $2z/(z^2-1) = w$, que son

$$(1+\sqrt{1+w^2})/w, \qquad (1-\sqrt{1+w^2})/w.$$

Se puede decidir cuál de estas soluciones es $f(w)$ observando que $wf(w) - 1$ es la raíz cuadrada continua de $1+w^2$ en $D(0,1)$ que toma el valor -1 para $w=0$, de modo que coincide con $-\sqrt{1+w^2}$, luego

$$f(w) = (1-\sqrt{1+w^2})/w.$$

Esto también se podría haber concluido observando que la otra solución, $(1+\sqrt{1+w^2})/w$, define una función que tiene límite ∞ cuando $w \to 0$).

Para $|w| < 1$ la serie binomial proporciona el desarrollo en serie de potencias

$$\sqrt{1+w^2} = 1 + \frac{1}{2}w^2 + \binom{1/2}{2} w^4 + \cdots$$

luego

$$f(w) = -\frac{1}{2}w - \binom{1/2}{2} w^3 - \binom{1/2}{3} w^5 - \cdots$$

Nota. Si se utiliza la descomposición de g obtenida en el ejercicio 3.35:

$$g(z) = iS\big(T(z)^2\big), \text{ donde } T(z) = (z-i)/(z+i), \quad S(z) = (z-1)/(z+1)$$

se llega a otra fórmula para f. Obsérvese que la función z^2, restringida a $T(\Omega)$, tiene por inversa $-\sqrt{z}$, luego $f(w) = T^{-1}\big(-\sqrt{S^{-1}(w/i)}\,\big)$. Utilizando las fórmulas

$$T^{-1}(z) = i(1+z)/(1-z); \qquad S^{-1}(z) = (1+z)(1-z)$$

se llega la expresión

$$f(w) = \frac{1}{w}\left(1 + i(i-w)\sqrt{\frac{i+w}{i-w}}\right).$$

Esta fórmula es distinta a la obtenida anteriormente, sin embargo define la misma función: esto se puede ratificar observando que

$$h(w) = i(i-w)\sqrt{\frac{i+w}{i-w}}$$

es una raíz cuadrada holomorfa de w^2+1, definida en $V = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$, que toma el valor -1 en $w=0$. Lo mismo le ocurre a $-\sqrt{1+w^2}$ y por lo tanto $h(w) = -\sqrt{1+w^2}$ para todo $w \in V$.

4.2.4. Funciones definidas por series de potencias

Los recursos teóricos para resolver los siguientes ejercicios son elementales: basta con la noción de radio de convergencia y de serie convergente.

Ejercicio 4.28.

Estudie el comportamiento de las series de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

en la frontera de su disco de convergencia.

SOLUCIÓN.

El radio de convergencia de las tres series es $\rho = 1$. La primera no converge en ningún z con $|z| = 1$, porque el término general no tiende hacia 0. La segunda converge en todo z con $|z| = 1$. La tercera diverge en $z = 1$ y converge cuando $|z| = 1$, $z \neq 1$. Esto último se puede obtener aplicando el criterio de Dirichlet (véase 4.1.3).

Ejercicio 4.29.

Se considera la serie de potencias

$$\frac{z^3}{1} - \frac{z^{2\cdot 3}}{1} + \cdots + \frac{z^{3^n}}{n} - \frac{z^{2\cdot 3^n}}{n} + \cdots$$

Si $m \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ es par (resp. impar) compruebe que la serie converge (resp. no converge) en $z = e^{i\pi k 3^{-m}}$. Por consiguiente el radio de convergencia es 1 y el conjunto de puntos de la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ donde la serie converge (resp. no converge) es denso en la circunferencia.

SOLUCIÓN.

Si $z \in A_m = \{e^{i\pi k 3^{-m}} : k \text{ par}\}$, para cada $n > m$ es $z^{3^n} = 1$ y $z^{2\cdot 3^n} = 1$, luego la serie converge porque coincide, desde un término en adelante, con la serie

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

Si $z \in B_m = \{e^{i\pi k 3^{-m}} : k \text{ impar}\}$, para cada $n > m$ es $z^{3^n} = -1$ y $z^{2\cdot 3^n} = 1$, luego la serie no converge porque coincide, a partir de un término, con la serie

$$-1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \cdots$$

$A = \cup_m A_m$ y $B = \cup_m B_m$ son densos en la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$. La serie converge en los puntos de A y no converge en los puntos de B, luego el radio de convergencia es 1.

Ejercicio 4.30.

Obtenga la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

SOLUCIÓN.

Es claro que el radio de convergencia es 1. Si $|z| < 1$, derivando la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$, se obtiene $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1/(1-z)^2$. Multiplicando por z y volviendo a derivar resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3} \qquad \text{luego} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

Ejercicio 4.31.

Obtenga la reordenación de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ alrededor de un punto $b \in D(0,1)$ y el radio de convergencia de la serie reordenada.

SOLUCIÓN.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-b)^n$ la reordenación de la serie geométrica alrededor de b. Podemos aprovechar el hecho de que conocemos la suma de la serie geométrica $f(z) = 1/(1-z)$ para calcular los coeficientes

$$b_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \frac{1}{(1-b)^{n+1}}$$

El radio de convergencia de la serie reordenada es

$$|b-1| = \left[\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}\right]^{-1}$$

También se puede obtener la reordenación usando la identidad

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-b)} \frac{1}{1 - (\frac{z-b}{1-b})}$$

y considerando la serie geométrica de razón $(z-b)/(1-b)$ que converge cuando $|z-b| < |1-b|$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-b}\left(1 + \frac{z-b}{1-b} + \left(\frac{z-b}{1-b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-b}{1-b}\right)^n + \cdots\right)$$

Obsérvese que si b no es real se cumple $|b-1| > 1-|b|$, luego el disco de convergencia de la serie reordenada no está contenido en el disco de convergencia de la serie inicial.

Nota. En el ejercicio 4.54 se puede ver la definición de punto singular de una serie de potencias. El resultado obtenido en este ejercicio significa que $z = 1$ es el único punto singular de la serie geométrica. Aplicando un resultado general que se expone en el ejercicio 4.55 también se puede obtener que $z = 1$ es punto singular de la serie geométrica.

Ejercicio 4.32.

Sea $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *y* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *para* $n \geq 0$. *Obtenga el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *la función suma y una fórmula para el término general* a_n.

SOLUCIÓN.

Suponiendo provisionalmente que el radio de convergencia ρ no es nulo, se observa que la suma de la serie es una función f, definida en $D(0, \rho)$, que cumple

$$zf(z) + z^2 f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} z^n = z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$$

luego

$$zf(z) + z^2 f(z) = z^2 + (f(z) - z - z^2) = f(z) - z,$$

de modo que la suma de la serie debe ser

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Empecemos entonces calculando el desarrollo en serie de potencias alrededor del origen de esta función racional. Para ello utilizaremos la descomposición

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b}$$

donde $a = (\sqrt{5} - 1)/2$, $b = -(\sqrt{5} + 1)/2$, $A = -B = -1/\sqrt{5}$. El primer término se desarrolla en serie geométrica de razón $|z/a| < 1$:

$$\frac{A}{z - a} = -\frac{A}{a} \frac{1}{1 - z/a} = -\frac{A}{a}(1 + z/a + (z/a)^2 + \cdots + (z/a)^n + \cdots)$$

Análogamente, $B/(z - b)$ se desarrolla en serie geométrica de razón $|z/b| < 1$. Sumando las dos series geométricas se concluye que si $|z| < \text{mín}\{|a|, |b|\} = a$ se verifica

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}} \right).$$

La identidad $f(z)(1 - z - z^2) = z$ se traduce en la relación $c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$, válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c_0 = 0 = a_0$ y $c_1 = 1 = a_1$ se sigue que $a_n = c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así queda justificado, a posteriori, que la serie del enunciado tiene radio de convergencia no nulo $\rho \geq a$. Teniendo en cuenta que $|a/b| < 1$ es fácil ver que la sucesión

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}\, a^{n+1}} (1 - (a/b)^{n+1}) \right)^{1/n}$$

converge hacia $1/a$, luego $\rho = a = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Ejercicio 4.33.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *definida para* $|z| < \rho$. *Demuestre:*

a) *si* $\rho \geq 1$, $a_1 = 1$ *y* $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$, *entonces* f *es inyectiva en* $D(0, 1)$;

b) si $a_1 \neq 0$ entonces f es inyectiva en $D(0,r)$ para algún $r \in (0,\rho)$.

SOLUCIÓN.

a) Si $|z| < 1$ y $|w| < 1$ se tiene

$$f(z) - f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - w^n) = (z-w)\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(z,w)\right)$$

donde $P_n(z,w) = z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + z^{n-i}w^i + \cdots + w^{n-1}$, luego

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(w)| &= |z-w|\left|1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(z,w)\right| \\
&\geq |z-w|\left(1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(z,w)\right|\right) \\
&\geq |z-w|\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||P_n(z,w)|\right) = |z-w|C(z,w).
\end{aligned}$$

Nótese que $|P_n(z,w)| < n$, luego

$$C(z,w) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||P_n(z,w)| > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 0.$$

Como $C(z,w) > 0$, la desigualdad $|f(z) - f(w)| \geq |z-w|C(z,w)$, válida para $z, w \in D(0,1)$, implica que f es inyectiva.

b) No es restrictivo suponer $a_1 = 1$. Si $0 < r < \rho$, $f_r(z) := f(rz)/r$ está definida en $D(0,\rho')$, con $\rho' = \rho/r > 1$. Obsérvese que

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{con } b_n = a_n r^{n-1}, \quad b_1 = 1.$$

Eligiendo $r > 0$ suficientemente pequeño se consigue que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|b_n| = \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq 1$$

y aplicando *a)* se obtiene que f_r es inyectiva en $D(0,1)$, lo que significa que f es inyectiva en $D(0,r)$.

Ejercicio 4.34.

Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, definida para $|z| < \rho$, donde $\rho > 0$ es el radio de convergencia. Demuestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que todas las funciones

$$F_u(t) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (tu)^n\right| \quad \textit{con } |u| = 1$$

son crecientes en $[0,\varepsilon]$.

SOLUCIÓN.

La derivada de $F_u(t)^2 = f(tu)\overline{f(tu)}$ es

$$2F_u(t)F_u'(t) = uf'(tu)\overline{f(tu)} + f(tu)\,\overline{u}\,\overline{f'(tu)} = 2\operatorname{Re}\big(uf'(tu)\,\overline{f(tu)}\,\big).$$

Como $u = 1/\overline{u}$, resulta

$$2F_u(t)F_u'(t) = 2t\operatorname{Re}\big(f'(tu)\overline{f(tu)/(tu)}\,\big).$$

Teniendo en cuenta que $F_u(t) > 0$ se obtiene que, para $t > 0$, la derivada $F_u'(t)$ tiene el mismo signo que $\operatorname{Re}\big(f'(tu)\overline{g(tu)}\,\big)$, donde $g(z) = f(z)/z$.

Si $a_1 \neq 0$ se puede suponer $1 = a_1 = f'(0) = g(0)$. Por la continuidad de $f'(z)\overline{g(z)}$ en $z = 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|z| < \varepsilon \Rightarrow \big|f'(z)\overline{g(z)} - 1\big| < 1.$$

Entonces si $|t| < \varepsilon$, para todo u con $|u| = 1$, se cumple $|f'(tu)\overline{g(tu)} - 1| < 1$ luego $f'(tu)\overline{g(tu)} \in \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, y por lo tanto $F_u'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \varepsilon)$.

Finalmente, si $a_1 = 0$ y $m = \min\{n : a_n \neq 0\}$, el resultado se obtiene aplicando lo que se acaba de probar a la función $\varphi(z) = f(z)/z^m$. (Obsérvese que si $|\varphi(tu)|$ es creciente en $(0, \varepsilon)$ entonces $t^m|\varphi(tu)|$ también lo es).

Ejercicio 4.35.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida en $D(0, \rho)$, donde $\rho > 0$ es el radio de convergencia. Si $u = e^{i\alpha}$, con α irracional, demuestre que

$$f(0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} f(zu^n) \quad \textit{para cada } z \in D(0, \rho).$$

Como aplicación obtenga las desigualdades de Cauchy:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

donde $0 < r < \rho$ y $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\}$.

SOLUCIÓN.

Sea $|z| < \rho$. Hay que demostrar que converge hacia 0 la sucesión

$$S_m = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\big(f(zu^n) - f(0)\big) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} a_k u^{kn} z^k$$

que se puede escribir en la forma

$$S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(m,k) a_k z^k, \quad \text{con} \quad \sigma(m,k) = \frac{\sum_{n=0}^{m} u^{kn}}{m+1}$$

Obsérvese que $|\sigma(m,k)| \leq 1$ y que si α irracional entonces $u^k \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego

$$\sigma(m,k) = \frac{1}{m+1}\frac{u^{(m+1)k} - 1}{u^k - 1}$$

y así $\lim_m \sigma(m,k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k < \varepsilon/2$, y con este valor de n se considera la descomposición $S_m = A_m + B_m$ donde

$$A_m = \sum_{k=1}^{n} \sigma(m,k) a_k z^k; \qquad B_m = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma(m,k) a_k z^k.$$

Es claro que

$$|B_m| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||z|^k < \varepsilon/2, \quad \lim_m A_m = \lim_m \sum_{k=1}^{n} \sigma(m,k) a_k z^k = 0.$$

Existe $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m(\varepsilon)$ implica $|A_m| < \varepsilon/2$, luego para todo $m \geq m(\varepsilon)$ se cumple $|S_m| < \varepsilon$, es decir, $\lim_m S_m = 0$.

Para obtener las desigualdades de Cauchy basta considerar la descomposición

$$g(z) = z^{-n} f(z) = p(1/z) + h(z)$$

donde

$$p(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1} w$$
$$h(z) = a_n + a_{n+1} z + \cdots + a_{n+k} z^k + \cdots$$

Según lo demostrado antes, aplicado al polinomio p y a la función h, la sucesión

$$I_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} g(zu^k) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} p(z^{-1}u^k) + \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} h(zu^k)$$

converge hacia $p(0) + h(0) = 0 + a_n = a_n$, y la desigualdad del enunciado se obtiene a partir de la desigualdad obvia

$$|I_m| \leq \sup\{|g(w)| : |w| = r\} = M(r) r^{-n}$$

que se transmite al límite.

Nota. Según [7, pág. 33] el resultado expuesto en este ejercicio se debe a Hurwitz, el cual observó que $u = (2-i)/(2+i)$ verifica la condición $u^n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (véase el ejercicio propuesto 14 del primer capítulo).

Ejercicio 4.36.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, definida para* $|z| < \rho$*, donde* $\rho > 0$ *es el radio de convergencia. Demuestre que para* $0 < r < \rho$ *se verifica*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

Como aplicación, obtenga las desigualdades de Cauchy (véase 5.1.13)

SOLUCIÓN.

Si $z = re^{it}$ se tiene

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(re^{it})} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p r^p e^{ipt}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \overline{a}_q r^q e^{-iqt}\right).$$

Las dos últimas series son absolutamente convergentes y su producto de convolución (véase 1.1.4) da lugar a la serie absolutamente convergente

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p\overline{a}_q r^n\right)e^{i(p-q)t}$$

Esta serie converge uniformemente respecto de t en el intervalo $[0, 2\pi]$ en virtud del criterio de Weierstrass:

$$\left|\sum_{p+q=n} a_p\overline{a}_q r^n e^{i(p-q)t}\right| \leq \sum_{p+q=n} |a_p|r^p|a_q|r^q = M_n$$

donde M_n es el término general de la serie convergente que se obtiene al formar el producto de convolución, consigo misma, de una serie convergente de términos no negativos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty}|a_p|r^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}|a_q|r^q\right) < +\infty.$$

La convergencia uniforme de la serie permite integrarla término a término:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p\overline{a}_q r^n\right)\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t}dt.$$

Como $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = 0$ (resp. $= 2\pi$) si $m \neq 0$ (resp. si $m = 0$) resulta

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

donde $A_n = 0$ si n es impar y $A_n = |a_p|^2 r^{2p}$ si $n = 2p$ es par, con lo cual

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|^2 r^{2p}$$

Si $M(r) = \text{máx}\{|f(re^{it}| : t \in [0, 2\pi]\}$, cada término de la última serie es menor o igual que la integral, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2, \text{ es decir } |a_n| \leq M(r)r^{-n}.$$

Nota. Si se calculan los coeficientes de Fourier $\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)e^{-int}dt$ de la función continua periódica $\varphi(t) = f(re^{it})$ se obtiene $\widehat{\varphi}(n) = 0$ si $n < 0$ y $\widehat{\varphi}(n) = a_n r^n$ si $n \geq 0$, luego la igualdad establecida no es otra cosa que la clásica identidad de Parseval aplicada a la serie de Fourier de la función φ.

4.2.5. Ceros y principio de identidad

La idea clave para resolver los siguientes ejercicios es el principio de identidad y el hecho de que los ceros de funciones analíticas no idénticamente nulas en un abierto conexo tienen multiplicidad.

Ejercicio 4.37.

Sea $f \in \mathscr{A}(\Omega_1)$ una función analítica con un cero aislado de multiplicidad m en $a \in \Omega_1$. Se supone que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y que $0 \in \Omega_2$ es un cero aislado, de multiplicidad p, de otra función analítica $g \in \mathscr{A}(\Omega_2)$. Compruebe que $g \circ f$ tiene en a un cero de multiplicidad mp.

SOLUCIÓN.

Por hipótesis, $f(z) = (z-a)^m F(z)$ donde $F \in \mathscr{A}(\Omega_1)$ y $F(a) \neq 0$. También se supone que $g(z) = z^p G(z)$ donde $G \in \mathscr{A}(\Omega_2)$ y $G(0) \neq 0$. Entonces

$$g(f(z)) = (z-a)^{mp} F(z)^p G((z-a)^m F(z)) = (z-a)^{mp} H(z)$$

donde $H(z) = F(z)^p G((z-a)^m F(z))$ es analítica en Ω_1 (ya que la composición y el producto de funciones analíticas es una función analítica). La función $f \circ g$ tiene en a un cero de multiplicidad mp porque $H(a) = F(a)^p G(0) \neq 0$.

Ejercicio 4.38.

Sea f una función definida en $D(0,1)$ mediante una serie de potencias tal que $|f(1/n)| < 1/2^n$ para todo $n \geq m$. Demuestre que f es idénticamente nula.

SOLUCIÓN.

Si se cumple la condición del enunciado, por la continuidad en 0, debe ser $f(0) = 0$. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que f no es idénticamente nula. En este caso f tendría en $z = 0$ un cero aislado con una multiplicidad $p \geq 1$, es decir, f se podría expresar en la forma $f(z) = z^p F(z)$, donde F es continua en $D(0,1)$ y $F(0) \neq 0$. Entonces para todo $n \geq m$ se cumpliría

$$\left| \frac{2^n}{n^p} F(1/n) \right| < 1 \quad \text{para todo} \;\; n \geq m$$

y esto es imposible, porque la sucesión en el miembro izquierdo de la desigualdad anterior tiende hacia $+\infty$.

Ejercicio 4.39.

En cada caso justifique que no existe una función $f : D(0,2) \longrightarrow \mathbb{C}$ desarrollable en serie de potencias, con la propiedad indicada:

a) $\sup\{|f(z)| : |z| = r\} = r^{7/2}$, *si* $0 < r < 2$*;*

b) $\lim\limits_{z \to 0} f(z)/\sqrt{|z|} = 1$.

SOLUCIÓN.

Si se cumple *a*) o *b*) f no puede ser idénticamente nula y ha de tener un cero aislado en $z = 0$. Si $m \geq 1$ es su multiplicidad, se tiene $f(z) = z^m g(z)$ donde g es continua en $D(0, 2)$ y $g(0) \neq 0$. Por lo tanto

$$M(r) = \sup\{|g(z)| : |z| = r\}$$

tiende hacia $|g(0)| \neq 0$ cuando $r \to 0$.

a) Si existiese f se tendría $r^{7/2} = r^m M(r)$, luego $r^{7/2-m} = M(r)$, lo que contradice que $M(r)$ tiene límite finito no nulo cuando $r \to 0$.

b) Si existiese f podríamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|z| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{|f(z)|}{\sqrt{|z|}}$$

Si $|z| = r < \delta$ se cumpliría la desigualdad $1/2 \leq r^{m-1/2} M(r)$ ($M(r)$ se ha definido anteriormente). Como $r^{m-1/2} M(r)$ tiende hacia 0 cuando $r \to 0$, se llega a un absurdo.

Ejercicio 4.40.

En cada caso justifique que no existe una función f analítica en $D(0, 2)$ con la propiedad indicada:

a) $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

b) $(-1)^n/n + e^{f(1/n)} = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

a) Si existiese, en virtud del principio de identidad, se obtendría la igualdad $f(z) = f(-z) = z^3$ para todo $z \in D(0, 2)$, lo que es absurdo.

b) Si existiese, considerando $\{1/2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{1/(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$, y aplicando dos veces el principio de identidad se llegaría a que para todo $z \in D(0, 2)$ se cumpliría $1 - z = e^{f(z)} = 1 + z$.

Ejercicio 4.41.

En cada caso estudie la existencia de una función f analítica en $D(0, 2)$, no constante y con la propiedad indicada:

a) $f(i/n) = f(i/n)^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

b) $f(i/n)^n = i$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

a) Si existiera, en virtud del principio de identidad, se cumpliría la igualdad $f(z) = f(z)^2$ para todo $z \in D(0, 2)$, luego $f(D(0, 2))$ sería un subconjunto conexo de $\{0, 1\}$ y por lo tanto f sería constante.

b) Si f cumple la condición *b*) entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f(i/n) \in \sqrt[n]{i} = e^{\frac{1}{n}\log i} = \{e^{\frac{i}{n}(2m+\frac{1}{2})\pi} : m \in \mathbb{N}\}.$$

Se observa así que las funciones $f_m(z) = e^{z(2m+\frac{1}{2})\pi}$, $m \in \mathbb{N}$, cumplen la condición requerida.

Ejercicio 4.42.

Justifique la no existencia de una serie de potencias, con disco de convergencia $D(0,2)$, cuya suma f verifique

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(1)|}{n!}} < \frac{1}{2}; \qquad f(2-1/n) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

SOLUCIÓN.

La primera condición significa que el radio de convergencia ρ de la reordenación alrededor de 1 cumple $2 < \rho < \infty$. La suma de esta reordenación define en $D(1,\rho)$ una función analítica g que coincide con f en $D(1,1) \subset D(0,2)$. En virtud del principio de identidad, g coincide con f en el abierto conexo $V = D(0,2) \cap D(1,\rho)$, luego $g(2-1/n) = f(2-1/n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $2 \in D(1,\rho)$ es un punto de acumulación de ceros de g, con el principio de identidad se obtiene que g es idénticamente nula. En particular $f(z) = 0$ para todo $z \in V$. Otra aplicación del principio de identidad conduce a que f debe ser idénticamente nula, lo que contradice la primera condición. Según esto, no puede existir una serie de potencias con los requisitos del enunciado.

Ejercicio 4.43.

Use el principio de identidad para demostrar que $e^{z+w} = e^z e^w$ para cada $z, w \in \mathbb{C}$. Obtenga con el mismo método las fórmulas clásicas para $\operatorname{sen}(z+w)$ y $\cos(z+w)$.

SOLUCIÓN.

Dado $x \in \mathbb{R}$, las funciones analíticas $w \to e^x e^w$, $w \to e^{x+w}$, coinciden cuando $w = y \in \mathbb{R}$ luego, en virtud del principio de identidad, $e^x e^w = e^{x+w}$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Si para cada $w \in \mathbb{C}$ se aplica otra vez el principio de identidad a las funciones $z \to e^z e^w$, $z \to e^{z+w}$, que coinciden cuando $z = x \in \mathbb{R}$, se obtiene el resultado. Con un razonamiento similar se establecen las fórmulas

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \cos w,$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w.$$

Ejercicio 4.44.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f, g \in \mathscr{A}(\Omega)$ funciones analíticas que cumplen $\cos f(z) = \cos g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Demuestre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que, o bien $f + g = 2\pi m$, o bien $f - g = 2\pi m$.

SOLUCIÓN.

Para todo $z \in \Omega$ se cumple

$$0 = \cos f(z) - \cos g(z) = -2 \operatorname{sen} \frac{f(z)+g(z)}{2} \operatorname{sen} \frac{f(z)-g(z)}{2}$$

luego $\Omega = A \cup B$ donde

$$A = \{z \in \Omega : f(z) + g(z) \in 2\pi\mathbb{Z}\}; \quad B = \{z \in \Omega : f(z) - g(z) \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Si $A = \Omega$, la imagen de Ω mediante la función continua $f + g$ es un subconjunto conexo de $2\pi\mathbb{Z}$, luego se reduce a un punto; es decir, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f + g = 2m\pi$. Si $A \neq \Omega$, como A es cerrado relativo a Ω, existe $D(a, r) \subset \Omega \setminus A \subset B$ y, razonando como antes, se obtiene $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) - g(z) = 2m\pi$ para todo $z \in D(a, r)$, luego, en virtud del principio de identidad, $f(z) - g(z) = 2m\pi$ para todo $z \in \Omega$.

Ejercicio 4.45.

Sea f una función analítica en el semiplano $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $z \in \Omega \cap \{z : |z| = 1\}$. Demuestre que $f(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ para cada $z \in \Omega$.

SOLUCIÓN.

$g(z) = f(1/z)$ es analítica en $\{z : 1/z \in \Omega\} = \Omega$. Utilizando la definición de función analítica es fácil ver que $\overline{g(\overline{z})}$ es analítica en $\{z : \overline{z} \in \Omega\} = \Omega$. Si $z = e^{it}$ con $|t| < \pi/2$, en virtud de la hipótesis

$$f(z) = \overline{f(e^{it})} = \overline{g(e^{-it})} = \overline{g(\overline{z})}.$$

Con el principio de identidad se concluye que $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $f(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega$.

Nota. Anticipando el resultado del capítulo 5 que afirma que las funciones holomorfas son analíticas, también se puede justificar que $\overline{g(\overline{z})}$ es analítica viendo que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann (véase el ejercicio 3.26).

4.2.6. Complementos sobre funciones analíticas

En los siguientes ejercicios, además de la caracterización de las funciones analíticas reales, se proponen demostraciones directas, sin utilizar los resultados generales del capítulo 5, de algunos resultados sobre funciones analíticas.

Ejercicio 4.46.

Sea $\rho > 0$ el radio de convergencia de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$. Para $0 < r < \rho$ se define $M(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Si $|b - a| < s < r < \rho$ demuestre que

$$|f^{(n)}(b)| \leq n! \frac{M(r)}{(r - s)^n} \quad \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

SOLUCIÓN.

Según el teorema 4.1.5 y lo indicado después del teorema 4.1.6, se verifica

$$\frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \binom{m}{n} (b - a)^{m-n}$$

Aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$|f^{(n)}(b)| \leq n! \sum_{m=n}^{\infty} |a_m| \binom{m}{n} |b - a|^{m-n} \leq n!\, C_n$$

donde $C_n = \sum_{m=n}^{\infty} |a_m| \binom{m}{n} s^{m-n}$.

Basta ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $C_n \leq M(r)(r-s)^{-n}$. Esta desigualdad es consecuencia inmediata de

$$\begin{aligned} M(r) = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|(s+(r-s))^m &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} |a_m| \binom{m}{n} (r-s)^n s^{m-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n (r-s)^n \end{aligned}$$

donde la última igualdad se ha obtenido conmutando los sumatorios en una suma iterada de términos no negativos (véase el corolario 1.1.3).

Ejercicio 4.47.

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ en un abierto $U \subset \mathbb{R}$. Demuestre que la siguiente condición es necesaria y suficiente para que f sea analítica en U.

Para cada $a \in U$ existen un entorno de a, $V_a \subset U$, y constantes $M_a > 0$, $C_a > 0$, tales que para todo $x \in V_a$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|f^{(n)}(x)| \leq n!\, M_a C_a^n.$$

SOLUCIÓN.

Necesidad. Si $a \in U$, por hipótesis, f admite un desarrollo en serie de potencias en un intervalo $(a-\rho, a+\rho) \subset U$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{si} \quad |x-a| < \rho.$$

Sean $0 < s < r < \rho$, $V_a = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < s\}$, $C_a = 1/(r-s)$ y $M_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. En virtud del ejercicio 4.46, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in V_a$ se cumple

$$|f^{(n)}(x)| \leq n!\, M_a C_a^n.$$

Suficiencia. Consideremos el resto del desarrollo de Taylor de f en a:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta x)(x-a)^n \quad \text{con } \theta \in [0,1].$$

Dado $0 < \delta < 1$, sea $0 < r < \delta/C_a$ tal que $x \in V_a$ cuando $|x-a| < r$. Entonces para todo $x \in (a-r, a+r)$ se cumple

$$|R_n(x)| \leq M_a (C_a)^n r^n = M_a\, \delta^n$$

luego $\lim_n R_n(x) = 0$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \;\; \text{para todo } x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Ejercicio 4.48.

Si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica real, definida en un abierto $V \subset \mathbb{R}$, demuestre que existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, con $V = \Omega \cap \mathbb{R}$, y una función analítica compleja $F \in \mathscr{A}(\Omega)$, tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in V$.

SOLUCIÓN.

Para cada $a \in V$ existe un intervalo $(a - r_a, a + r_a) \subset V$ donde f admite un desarrollo en serie de potencias con coeficientes reales

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{si} \quad |x-a| < r_a.$$

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ define en $D_a = D(a, r_a)$ una función analítica compleja F_a tal que

$$F_a(x) = f(x) \ \text{ para todo } x \in D(a, r_a) \cap \mathbb{R} = (a - r_a, a + r_a).$$

El abierto $\Omega = \bigcup_{a \in V} D_a$ cumple el requisito del enunciado.

Se define $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ poniendo $F(z) = F_a(z)$ si $z \in D_a$. Esta definición es consistente: si $D_a \cap D_b \neq \emptyset$ entonces F_a y F_b son analíticas en el abierto conexo $D_a \cap D_b$ y coinciden sobre el segmento $\mathbb{R} \cap D_a \cap D_b$, luego, en virtud del principio de identidad, $F_a(z) = F_b(z)$ para todo $z \in D_a \cap D_b$.

Ejercicio 4.49.

Demuestre directamente, sin utilizar que las funciones holomorfas son analíticas, el siguiente resultado: si $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ y g es un logaritmo continuo (resp. una raíz n-ésima continua) de f en Ω, entonces $g \in \mathscr{A}(\Omega)$.

SOLUCIÓN.

Como f' es analítica y $0 \notin f(\Omega)$, también es analítica f'/f (ya que $1/f$ es analítica (proposición 4.1.8) y el producto de dos funciones analíticas es una función analítica.

Supongamos, en primer lugar, que g es un logaritmo continuo de f. Entonces, según la proposición 3.1.4, podemos asegurar que g es derivable en Ω, con derivada $g' = f'/f$ analítica. Esto implica que g es analítica. En efecto, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ es un desarrollo en serie de potencias de g' en $D(a, r) \subset \Omega$, la serie

$$g(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

define en $D(a, r)$ una función analítica G tal que $G' = g'$. Como $G(a) = g(a)$, se sigue que $g|_{D(a,r)} = G|_{D(a,r)}$ y por lo tanto g admite un desarrollo en serie de potencias en $D(a, r)$.

Si $h(z)$ es una raíz n-ésima continua de $f(z)$, según el ejercicio 3.5, se puede expresar localmente en la forma $h(z) = e^{g(z)/n}$, donde $g(z)$ es un logaritmo continuo, y por lo tanto analítico, de $f(z)$. Teniendo en cuenta que la composición de dos funciones analíticas es otra función analíticas se obtiene que $h(z)$ es analítica.

Ejercicio 4.50.

Sea a un cero aislado, de multiplicidad m, de una función analítica f. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que en algún entorno de a se pueda definir una raíz n-ésima continua de f, es que m sea múltiplo de n.

SOLUCIÓN.

Como a es un cero aislado de f, de multiplicidad m, existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f(z) = (z-a)^m F(z)$, donde F admite un desarrollo en serie de potencias en $D(a,r)$ y $F(a) \neq 0$. Por continuidad podemos suponer que $F(D(a,r)) \subset D(b,|b|)$, donde $b = F(a) \neq 0$. Si Log_b es un logaritmo continuo de z definido en $D(b,|b|)$, se sigue que

$$h(z) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}_b F(z)}$$

es una función continua en $D(a,r) \subset \Omega$ que verifica

$$f(z) = (z-a)^m h(z)^n \quad \text{para todo} \quad z \in D(a,r).$$

Si $m = nk$ es claro que $(z-a)^k h(z)$ es una raíz n-ésima continua de f en $D(a,r)$.

Recíprocamente, si existe una función continua $\varphi \in C(D(a,\rho))$, definida en algún disco $D(a,\rho) \subset \Omega$, tal que $\varphi(z)^n = f(z)$ para todo $z \in D(a,\rho)$, entonces $(\varphi(z)/h(z))^n = (z-a)^m$ para todo $z \in D(a,\rho)$ y, teniendo en cuenta el ejercicio 3.4, se concluye que m es múltiplo de n.

Ejercicio 4.51.

Sea Ω un abierto conexo y $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ una función analítica no constante con una raíz n-ésima continua g. Demuestre que hay exactamente n raíces n-ésimas continuas de f en Ω, que necesariamente son analíticas, dadas por

$$g_k(x) = \omega_k\, g(x) \quad \textit{donde } \omega_k = e^{2\pi i k/n}, \ k = 0,1,2,\cdots n-1.$$

SOLUCIÓN.

Como los ceros de f son aislados, $\{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$ es un abierto conexo no vacío (véase el ejercicio 2.39), por lo que, en virtud del ejercicio 3.2, si g es una raíz n-ésima continua de f en Ω, entonces hay exactamente n raíces n-ésimas continuas de f dadas por

$$g_k(x) = \omega_k g(x) \ \text{ donde } \omega_k = e^{2\pi i k/n}, \ k = 0,1,2,\cdots n-1.$$

Para terminar basta ver que para cada $a \in \Omega$ hay un disco $D(a,r) \subset \Omega$ donde g es analítica. Dado $a \in \Omega$, existen $D(a,r) \subset \Omega$ y $m \in \{0,1,2,\dots\}$ tales que $f(z) = (z-a)^m F(z)$, donde F admite un desarrollo en serie de potencias en $D(a,r)$ y $b = F(a) \neq 0$ (si a es cero de f, m es su multiplicidad, y $m = 0$ si $f(a) \neq 0$). Por continuidad podemos suponer que $F(D(a,r)) \subset D(b,|b|)$, donde $b = F(a) \neq 0$. Si Log_b es un logaritmo continuo de z definido en $D(b,|b|)$ sabemos que Log_b es analítico (porque su derivada lo es) y se sigue que

$$h(z) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}_b F(z)}$$

es una función analítica en $D(a,r) \subset \Omega$ que verifica

$$f(z) = (z-a)^m h(z)^n \ \text{ para todo } z \in D(a,r).$$

Si $f(a) = 0$ entonces, según el ejercicio 4.50, m ha se der múltiplo de n, es decir, $m = nk$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y si $f(a) \neq 0$ tomamos $k = 0$. En ambos casos, $\varphi(z) = (z-a)^k h(z)$ es una raíz n-ésima analítica de f en $D(a,r)$. Por lo demostrado en la primera parte, existe una constante ω tal que $g(z) = \omega\varphi(z)$ para todo $z \in D(a,r)$, luego g es analítica en $D(a,r)$.

Ejercicio 4.52.

Sea f una función analítica no constante en $D(a,R)$. Demuestre que existe $D(a,r) \subset D(a,R)$ donde f se puede expresar en la forma

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \textit{para todo} \quad z \in D(a,r)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, φ es analítica en $D(a,r)$ y $\varphi'(a) \neq 0$. Obtenga como aplicación:

a) la derivada de una función analítica inyectiva no se anula nunca;

b) toda función analítica no constante en un abierto conexo es abierta.

Utilice b) para demostrar el teorema fundamental del álgebra.

SOLUCIÓN.

La función no idénticamente nula $f(z) - f(a)$ tiene en $z = a$ un cero aislado con una multiplicidad $m \in \mathbb{N}$, es decir,

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z)$$

donde g es analítica en $D(a,R)$ y $b = g(a) \neq 0$. Por continuidad, existe $0 < r < R$ tal que $g(D(a,r)) \subset D(b,|b|)$. Si $\operatorname{Log}_b : D(b,|b|) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una rama del logaritmo de z (véase el ejercicio 3.3). Como Log_b es analítica (porque su derivada lo es) se sigue que

$$\varphi(z) = (z-a)e^{\frac{1}{m}\operatorname{Log}_b g(z)}$$

es analítica en $D(a,r)$ y cumple los requisitos del enunciado.

La interpretación geométrica es la siguiente: en un entorno de $z = a$ la función f se descompone en una aplicación φ que conserva ángulos orientados en a, seguida de la función z^m y de una traslación. Para valores pequeños de $z - a$ la función φ se comporta como $z \to \varphi'(a)(z-a)$ cuya interpretación geométrica es clara, luego, en un entorno suficientemente pequeño de a, la función $f(z) - f(a)$ se comporta cualitativamente como $(z-a)^m$.

Para obtener a) basta observar que si $f'(a) = 0$ entonces $m > 1$ y por lo tanto f no es inyectiva en ningún entorno de a.

b) Sea f una función analítica no constante en un abierto conexo Ω. Hay que demostrar que si $V \subset \Omega$ es abierto entonces $f(V)$ también lo es, es decir, para cada $a \in V$ existe $\delta > 0$ tal que $D(f(a),\delta) \subset f(V)$.

Por lo que ya hemos demostrado existe $D(a,r) \subset V$ donde f se expresa en la forma descrita en el enunciado.

Como $\varphi(a) = 0$ y $\varphi'(a) \neq 0$, aplicando el teorema de la función inversa para funciones reales de dos variables reales, se obtienen un entorno abierto de a, $W_a \subset D(a,r)$, y un disco $D(0,\rho)$ tales que $\varphi(W_a) = D(0,\rho)$. La imagen de $D(0,\rho)$ mediante la función z^m es $D(0,\rho^m)$ de modo que con $\delta = \rho^m$ se verifica

$$f(V) \supset f(W_a) = f(a) + D(0,\rho)^m = D(f(a),\delta).$$

Si p es un polinomio complejo de grado ≥ 1, en virtud de lo anterior, p transforma abiertos en abiertos. Si se demuestra que p transforma cerrados en cerrados se tendrá que el conjunto no vacío $p(\mathbb{C})$ es abierto y cerrado en el espacio conexo $\mathbb{C}$, luego $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ y en particular $0 \in p(\mathbb{C})$.

Si F es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$, dado $w \in \overline{p(F)}$ existe una sucesión $z_n \in F$ tal que $w_n = p(z_n)$ converge hacia w. La sucesión z_n es acotada pues en caso contrario existiría una subsucesión $z_{n_k} \to \infty$ y se seguiría que $w = \lim_k w_{n_k} = \lim_k p(z_{n_k}) = \infty$. La sucesión acotada z_n posee una subsucesión convergente hacia un punto $z \in F$ que cumple $p(z) = w$. Queda demostrado que $w \in p(F)$ y con ello que $p(F)$ es cerrado.

4.2.7. Complementos sobre puntos singulares

En los siguientes ejercicios, sobre reordenación de las series de potencias, se estudia la noción de punto singular de un desarrollo.

Ejercicio 4.53.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ la función definida por una serie de potencias en su disco de convergencia $D(a,\rho)$. Se supone que el radio de convergencia ρ_b de la serie reordenada en $b \in D(a,\rho)$ verifica $\rho_b > \rho - |b-a|$. Demuestre que f se puede prolongar analíticamente al abierto $\Omega = D(a,\rho) \cup D(b,\rho_b)$.

SOLUCIÓN.

La suma de la serie reordenada en b, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-b)^n$, es analítica en $D(b,\rho_b)$. Si $r = \rho - |b-a| > 0$, el teorema de reordenación 4.1.5 asegura que f y g coinciden sobre $D(b,r) \subset D(a,\rho)$. Aplicando el principio de identidad se obtiene que f y g coinciden sobre $D(a,\rho) \cap D(b,\rho_b)$. Así podemos definir en Ω una función F tal que $F(z) = f(z)$ si $z \in D(a,\rho)$ y $F(z) = g(z)$ si $z \in D(b,\rho_b)$. Es obvio que F es analítica y, en virtud del principio de identidad, es la única prolongación analítica de f a Ω.

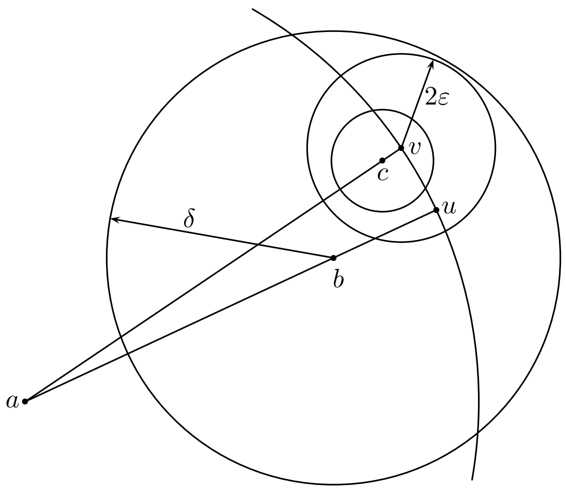
Ejercicio 4.54.

Se considera una serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ con radio de convergencia $0 < \rho < +\infty$. Se dice que $s \in \{z : |z-a| = \rho\}$ es un punto singular de la serie de potencias cuando para cada b en el segmento $[a,s)$ el radio de convergencia de la serie reordenada en b vale $\rho - |b-a|$. Demuestre que los puntos singulares forman un subconjunto cerrado de $\{z : |z-a| = \rho\}$. (En el ejercicio 5.23 se demuestra que hay al menos un punto singular).

SOLUCIÓN.

Hay que demostrar que si $|u-a| = \rho$ y u no es singular, existe un entorno abierto U de u tal que todos los puntos de $U \cap \{z : |z-a| = \rho\}$ no son singulares.

Por definición, existe $b \in [a,u]$ tal que la reordenación en b produce una serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ con radio de convergencia $\delta > |b-u|$. Veamos que tomando $U = D(b,\delta)$ se satisface la condición requerida.



Dado $v \in U \cap \{z : |z-a| = \rho\}$ sea $\varepsilon > 0$ tal que $D(v, 2\varepsilon) \subset D(b, \delta)$ y c un punto del segmento $[a, v]$ verificando $|c - v| < \varepsilon$. Entonces $D(c, \varepsilon) \subset D(v, 2\varepsilon) \subset D(b, \delta)$ y se sigue de estas inclusiones que la reordenación de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ alrededor de c produce una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ con radio de convergencia $\rho_c \geq \varepsilon > |c - v|$. Esta última serie coincide con la obtenida mediante reordenación directa de la serie inicial y por lo tanto v no es singular.

Ejercicio 4.55.

Se considera una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con coeficientes reales $a_n \geq 0$. Si $0 < \rho < +\infty$ es su radio de convergencia, demuestre que $z = \rho$ es un punto singular de la serie de potencias (véase la definición de punto singular en el ejercicio 4.54).

SOLUCIÓN.

Si $0 < b < \rho$, reordenando la serie alrededor de b resulta $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$, con coeficientes reales no negativos

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m b^{m-n} \geq 0.$$

Tenemos que demostrar que el radio de convergencia de esta serie es $\rho - b$.

Para ello razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que la reordenada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n$ converge en algún $x > \rho$. Sustituyendo b_n por la expresión de arriba, resulta una serie doble iterada convergente de términos no negativos, por lo que es lícito conmutar el orden de sumación (véase 1.1.3). Así se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m b^{m-n} \right) (x-b)^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} b^{m-n} (x-b)^n =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \big[(x-b) + b\big]^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

Sin embargo, la última serie no puede ser convergente porque $x > \rho$. Con esta contradicción termina la demostración.

Ejercicio 4.56.

Demuestre que todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ *son singulares para la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$*. Véase la definición de punto singular en el ejercicio 4.54.*

Indicación. El punto 1 *es singular en virtud del ejercicio 4.55. Además, la suma* $f(z)$ *de la serie verifica* $f(z) = z^2 + f(z^2)$ *para cada* $z \in D(0,1)$*, lo que implica que* $f(z) - f(wz)$ *es un polinomio cuando* $w^{2^n} = 1$*.*

SOLUCIÓN.

Es inmediato que el radio de convergencia de la serie es 1 y que la suma $f(z)$ de la serie verifica

$$f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots = z^2 + f(z^2), \quad \text{si } |z| < 1.$$

Aplicando repetidamente esta relación

$$f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^n} + f(z^{2^n}) = p_n(z) + f(z^{2^n}).$$

Si $w^{2^n} = 1$ y $f_w(z) = f(wz)$ entonces $f(z) - f_w(z) = p_n(z) - p_n(wz)$ es un polinomio de grado menor o igual que 2^n. Por lo tanto para $m > 2^n$

$$f^{(m)}(z) = f_w^{(m)}(z) = w^m f^{(m)}(wz).$$

Si $b \in D(0,1)$, la igualdad $|f^{(m)}(b)| = |f^{(m)}(wb)|$, válida para todo $m > 2^n$, implica que el radio de convergencia de la reordenación en b coincide con el de la reordenación en wb.

Según el ejercicio 4.55, 1 es punto es singular, es decir, para $0 < r < 1$ el radio de convergencia de la serie reordenada en r es $1 - r$. Por lo probado anteriormente el radio de convergencia de la serie reordenada en el punto wr también es $1 - r$, luego w es un punto singular.

El conjunto S de los puntos singulares es denso en la circunferencia $|z| = 1$ porque

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{w : w^{2^n} = 1\} \subset S.$$

Por otra parte, según el ejercicio 4.54, S es un subconjunto cerrado de la circunferencia $|z| = 1$, luego $S = \{z : |z| = 1\}$.

Ejercicio 4.57.

Obtenga una serie de potencias, con disco de convergencia $D(0,1)$*, cuya suma* f *verifique*

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}} = \frac{1}{1 - |a|} \quad \textit{para todo } a \in D(0,1).$$

SOLUCIÓN.

La condición del enunciado significa que el radio de convergencia de la reordenación en $a \in D(0,1)$ es $1 - |a|$, luego todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ son singulares (véase el ejercicio 4.54). En el ejercicio 4.56 se obtiene una serie de potencias con esta propiedad.

4.3. Ejercicios propuestos

4.1 Compruebe que la sucesión de funciones reales $f_n(x) = xe^{-n^2x^2/2}$ converge uniformemente sobre $(-\varepsilon, \varepsilon)$ pero la correspondiente sucesión de funciones complejas $f_n(z) = ze^{-n^2z^2/2}$ no converge uniformemente sobre $D(0, \varepsilon)$.

4.2 Sean $f_n, g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sucesiones de funciones continuas que convergen uniformemente sobre compactos. Demuestre que la sucesión producto $\varphi_n = f_n g_n$ también converge uniformemente sobre compactos.

4.3 Calcule los radios de convergencia de las series de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^{-n} z^n;$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn+h}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1} z^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(n!)^{-2} z^n;$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! n^{-n} z^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n.$$

4.4 Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida para $|z| < \rho$, donde $\rho > 0$ es el radio de convergencia. Utilice el resultado obtenido en el ejercicio 4.36 para demostrar que si f es acotada entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

4.5 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/(1 - z^n)$ converge uniformemente sobre compactos en $D(0, 1)$ y que su suma f es desarrollable en serie de potencias en $D(0, 1)$ con coeficientes $a_k = \tau(k)$, donde $\tau(k)$ es el número de divisores de k.

4.6 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^2/(n^2 - z^2)$ converge uniformemente sobre compactos en el disco $D(0, 1)$ y que su suma $f(z)$ es desarrollable en serie de potencias en este disco, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$, con coeficientes $a_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$.

4.7 Dada una función analítica $f \in \mathscr{A}(\Omega)$ se considera su desarrollo en serie de potencias en un disco $D(a, r) \subset \Omega$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k$ para $z \in D(a, r)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $g_k(z) = f(z)/(z - a)^k$ y

$$\alpha_k(r) = \int_0^{2\pi} g_k(a + re^{i\theta})\, d\theta,$$

definida para $0 < r < d = \text{ínf}\{|z - a| : z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$ (distancia de a al cerrado $\mathbb{C} \setminus \Omega$). Demuestre que la función $\alpha_k(r)$ es constante con valor constante a_k. Deduzca de ello que el radio de convergencia de la serie de potencias es mayor o igual que d y que el desarrollo anterior sigue siendo válido para $z \in D(a, d)$.

4.8 Demuestre que existe una única función analítica $f \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$ tal que $f(0) = 1$ y $f(2^{-(n+1)}) = f'(2^{-n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.9 Razone la existencia o no de una función $f : D(0, 2) \longrightarrow \mathbb{C}$, desarrollable en serie de potencias, tal que $f(1/n) = i^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.10 Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ definida para $|z| < 1$, con ceros

$$\mathscr{Z}(f) = \Big\{1 - \frac{1}{n} : n \geq 2\Big\}.$$

Justifique que el radio de convergencia de la serie de potencias reordenada en $a \in D(0,1)$ es menor o igual que $|a-1|$. Obtenga el radio de convergencia de la serie de potencias reordenada en $z = 1/2$.

4.11 Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ una serie de potencias convergente en el disco $D(a,r)$ (con $a_n \neq 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$). Si w es un punto de acumulación de ceros de f demuestre que $|w-a| = r$ y w es un punto singular de la serie de potencias.

4.12 Demuestre que el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^{n!}$ es 1 y que cada punto de la circunferencia $|u| = 1$ es un punto singular del desarrollo.

Indicación. Según el ejercicio 4.55, $u = 1$ es singular. Si $u = \exp\big(2\pi \frac{m}{n} i\big)$ y f es la función definida por la serie entonces $f(uz) - f(z)$ es un polinomio.

4.13 Compruebe que la función de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

es de clase C^∞, pero no es analítica.

4.14 Demuestre el siguiente teorema de Bernstein: si $f : [a, a+r] \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^∞ y $f^{(n)}(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, a+r]$ y todo $n \in \mathbb{N}$ entonces,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k, \text{ para todo } x \in [a, a+r].$$

Capítulo 5

Versión elemental de los teoremas de Cauchy

5.1. Preliminares teóricos

5.1.1. Integral de camino

Una función acotada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es integrable Riemann cuando sus componentes $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ lo son. En este caso se define

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Las funciones con un conjunto finito de puntos de discontinuidad son integrables y siguen valiendo los teoremas fundamentales del cálculo y sus consecuencias: Regla de Barrow, cambio de variable, integración por partes, etc.

Se verifican las dos propiedades siguientes:

a) si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable, $|f|$ también lo es y

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt;$$

b) si una sucesión de funciones integrables $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente hacia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces f es integrable y se cumple

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ es continua se dice que γ es un camino en Ω. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que γ es un camino cerrado. Un camino $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *regular a trozos* cuando existe una subdivisión de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, tal que cada $\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$ es de clase C^1.

Definición 5.1.1.
Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, dado un camino regular a trozos $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ se define la integral de línea

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Obsérvese que γ es derivable excepto en un conjunto finito de puntos de (a, b), $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, en los que existen las derivadas laterales. La función $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, aunque no está definida en estos puntos, coincide en cada intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) con la restricción de una función continua definida en $[x_{i-1}.x_i]$. Por lo tanto, definiendo g de modo arbitrario en los puntos $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, resulta una función integrable Riemann cuya integral no depende del valor asignado a g en esos puntos.

En lo que sigue $\sim\gamma$ designa el camino opuesto de γ, de origen $\gamma(-b)$ y extremo $\gamma(-a)$, definido en $[-b, -a]$, por $(\sim\gamma)(t) = \gamma(-t)$.

Dados dos caminos $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$, si $b_1 = a_2$, y el extremo del primero coincide con el origen del segundo, su *yuxtaposición*, $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, es el camino $\gamma : [a_1, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a_1, b_1]$ y $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [a_2, b_2]$. Iterando el procedimiento se define la yuxtaposición de un número finito de caminos.

Dos caminos regulares a trozos $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, se dice que son *equivalentes* cuando existe una función $\sigma : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ creciente y regular a trozos, tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$.

Proposición 5.1.2.
Sean f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, funciones continuas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ son caminos regulares a trozos en Ω se verifica:

a) $\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\, dz = \int_\gamma f_1(z)\, dz + \int_\gamma f_2(z)\, dz$.

b) $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ *si* $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$.

c) $\int_{\sim\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$.

d) $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ *si* γ_1, γ_2 *son equivalentes.*

e) $|\int_\gamma f(z)\, dz| \le M\mathrm{Long}(\gamma)$, *donde* $M = \sup\{|f(z)| : z \in \mathrm{Imagen}(\gamma)\}$ *y* $\mathrm{Long}(\gamma)$ *es la longitud de* γ.

f) $\int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz$ *si* f_n *converge hacia* f *uniformemente sobre* $\mathrm{Imagen}(\gamma)$.

El siguiente teorema revela el papel que desempeña la integral de camino como herramienta para determinar si una función holomorfa tiene primitiva.

Teorema 5.1.3.
Si f es una función compleja continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes

a) *existe* $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ *tal que* $F' = f$;

b) $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ *para cada camino cerrado regular a trozos* γ *en* Ω.

En las condiciones del teorema anterior, si se cumple b) y Ω es conexo, para obtener una primitiva F de f basta fijar un punto $a \in \Omega$ y definir

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$$

donde γ_z es cualquier camino en Ω, regular a trozos, con origen a y extremo $z \in \Omega$. Cuando Ω no es conexo se consigue la primitiva procediendo de esta forma en cada componente conexa.

Utilizando 5.1.3 se obtiene fácilmente que la función $1/z$ no tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para establecer este hecho sin utilizar la integral de camino basta utilizar el ejercicio 3.4 y aplicar la proposición 3.1.5 a la función $f(z) = z$.

Según el corolario 4.1.9 los desarrollos de Laurent sirven para determinar si una función holomorfa tiene primitiva en una corona. En los ejercicios 5.3, 5.5–5.10 y 5.12 se hace uso sistemático de este corolario reformulado en los siguientes términos:

Corolario 5.1.4.
Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ una serie de Laurent convergente en la corona $A = \{z : r < |z-a| < R\}$. Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en A se verifica

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-a}\, dz.$$

En particular, aplicando este resultado a la función $f(z)(z-a)^{m+1}$ y a la circunferencia $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ con $r < \rho < R$, resulta

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i a_m.$$

Dada una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(G)$, la caracterización 3.1.5 de los abiertos $\Omega \subset G$ en los que f posee logaritmo holomorfo se puede completar ahora en la forma siguiente

Proposición 5.1.5.
Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $0 \notin f(\Omega)$, son equivalentes

a) existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f = e^g$;

b) existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$;

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para cada camino cerrado regular a trozos γ en Ω.

En las condiciones de la proposición 5.1.5, si Ω es conexo, para obtener una primitiva F de f'/f en Ω basta considerar la integral

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

donde γ_z es un camino en Ω, regular a trozos, con origen fijo $a \in \Omega$ y extremo variable $z \in \Omega$. En este caso $g(z) = F(z) + c$, con $c \in \log f(a)$, es un logaritmo holomorfo de f en Ω (véase el ejercicio 7.36).

5.1.2. Los teoremas de Cauchy en versión elemental

En lo que sigue, cuando se hable de rectángulos en el plano complejo, se supondrá siempre que son cerrados y de lados paralelos a los ejes. Dado un rectángulo $R = \{x + iy : x \in [a, b],\ y \in [c, d]\}$ designaremos por ∂R el camino cerrado formado por sus cuatro lados, recorrido en el sentido

$$a + ic \to b + ic \to b + id \to a + id \to a + ic.$$

Diremos que Ω es un *abierto especial* si existe $z \in \Omega$ tal que para cada $w \in \Omega$ el rectángulo $R_{z,w}$ con vértices opuestos z, w está contenido en Ω ($R_{z,w}$ puede degenerar en un segmento si $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ o si $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$). Son abiertos especiales los discos, los semiplanos determinados por rectas paralelas a uno de los ejes y los cuadrantes. Para este tipo de abiertos se verifica

Teorema 5.1.6.
Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en un abierto especial $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes

a) existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$;

b) $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$.

Teorema 5.1.7. Cauchy-Goursat.
Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$. Por lo tanto f tiene primitiva en cada abierto especial (y en particular en cada disco) contenido en Ω.

Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es *holomórficamente conexo* si es conexo y para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$. En virtud de 5.1.7 los abiertos especiales son holomórficamente conexos, pero el recíproco es falso. En el ejercicio 5.13 se propone una técnica útil para demostrar, con recursos elementales, que ciertos abiertos concretos son holomórficamente conexos.

Lema 5.1.8.
Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino regular a trozos y $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua sobre $K = \gamma([0, 1])$. La función

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\, dw \quad \textit{definida en } \Omega = \mathbb{C} \setminus K$$

es desarrollable en serie de potencias en cada disco $D(a, r) \subset \Omega$:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad \textit{si } |z - a| < r, \quad \textit{donde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - a)^{n+1}}\, dw$$

y verifica $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$.

El siguiente teorema proporciona una versión preliminar de la fórmula integral de Cauchy, cuya versión general se verá en el teorema 7.1.7. De ella se desprenden los restantes resultados de este capítulo.

Teorema 5.1.9. Fórmula integral de Cauchy.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *y* $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, *para cada* $z \in D(a,r)$ *se verifica*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.1.3. Las primeras consecuencias. Teoremas de Morera, Liouville y Weierstrass

Teorema 5.1.10.

Las funciones holomorfas son analíticas.

Más concretamente, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *entonces* f *es desarrollable en serie de potencias en cada disco* $D(a,R) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \ \text{ si } |z-a| < R$$

y los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *con* $0 < r < R$.

Según el teorema anterior, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y ρ es el radio de convergencia de su desarrollo en serie de potencias alrededor de $a \in \Omega$, se cumple que $\rho \geq d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Este hecho, que no es evidente a partir de la definición de función analítica considerada en el capítulo 4, puede resultar útil para calcular radios de convergencia de series de potencias (vea los ejercicios 5.20 a 5.22 y 7.9).

Teorema 5.1.11.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *y* $A = \{z : r < |z-a| < R\} \subset \Omega$, *entonces* f *admite un desarrollo de Laurent en* A*:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \ \text{ si } r < |z-a| < R$$

cuyos coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

donde $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *con* $r < \rho < R$.

Según el teorema anterior los coeficientes del desarrollo de Laurent están unívocamente determinados por la suma del desarrollo. Se sigue de esto que si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de $f \in \mathscr{H}(A)$ en la corona

$A = \{z : r < |z| < R\}$ y f es par (resp. impar) entonces $a_n = 0$ si n es impar (resp. par). Por otra parte, si f es holomorfa en $A = \{z : r < |z-a| < R\}$ y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ es su desarrollo de Laurent en A, entonces $f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a}$ tiene primitiva en A (véase el corolario 4.1.9).

Teorema 5.1.12. Morera.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, es fácil ver que $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$, por lo que, en virtud del teorema de Morera f es holomorfa en Ω.

Teorema 5.1.13. Desigualdades de Cauchy.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, para cada $n \geq 0$ se verifica

$$\Big|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Big| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z-a| \leq r\}$.

Como consecuencia del teorema del módulo máximo (9.1.2) se puede asegurar que $M(r) = \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}$.

En las condiciones de 5.1.13, si $\rho = \operatorname{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, la mejor cota de $|f^{(n)}(a)|$ que proporcionan las desigualdades de Cauchy se consigue con el extremo inferior de la función $n! M(r) r^{-n}$ sobre $(0, \rho)$ (vea los ejercicios 5.38 y 5.43). Por otra parte, si $M = \sup\{|f(z)| : |z-a| < \rho\}$ es finito, como la función $r \to M(r)$ es creciente se verifica $\lim_{r\to\rho} M(r) = M$, luego

$$|f^n(a)| \leq n!\, M\rho^{-n}.$$

Teorema 5.1.14. Liouville.

Toda función entera y acotada es constante.

Combinando el teorema de Morera con la fórmula integral de Cauchy, se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 5.1.15. Weierstrass.

Si la sucesión $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces f es holomorfa y la sucesión de las derivadas f_n' converge uniformemente sobre compactos hacia la derivada f'.

Corolario 5.1.16.

Sea $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ una serie de funciones holomorfas en Ω que converge uniformemente sobre compactos y

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k (z-a)^n$$

el desarrollo en serie de potencias de f_k en $D(a,r) \subset \Omega$. Entonces todas las series numéricas $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^k = a_n$ son convergentes y el desarrollo en serie de potencias de f en $D(a,r)$ es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Teorema 5.1.17.

Se supone que $F : [\alpha, \beta] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y que todas las funciones parciales $z \to F(t,z)$ son holomorfas en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, con derivada denotada $D_2F(t,z)$. Entonces, la integral

$$f(z) = \int_\alpha^\beta F(t,z)\, dt$$

define en Ω una función holomorfa. Además, para cada $z \in \Omega$, la función parcial $t \to D_2F(t,z)dz$ es continua en $[\alpha, \beta]$ y

$$f'(z) = \int_\alpha^\beta D_2F(t,z)\, dt.$$

(Vea el ejercicio 5.48).

5.2. Ejercicios resueltos

5.2.1. Ejercicios con la integral de camino

Los recursos de integración que se requieren para los siguientes ejercicios son elementales

Ejercicio 5.1.

Si $f : \overline{D(0,r)} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\lim_n r_n = r$, $0 < r_n < r$, demuestre que

$$\int_{C_r} f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{C_{r_n}} f(z)\, dz$$

donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

Hay que demostrar que converge hacia 0 la sucesión

$$a_n = \int_{C_r} f(z)\, dz - \int_{C_{r_n}} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} [rf(re^{it}) - r_n f(r_n e^{it})] ie^{it} dt$$

Para ello utilizaremos que

$$|a_n| \leq \int_0^{2\pi} |h_n(t)|\, dt$$

donde $h_n(t) = rf(re^{it}) - r_n f(r_n e^{it})$. Si $M = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D(0,r)}\}$ se verifica

$$|h_n(t)| \leq |rf(re^{it}) - rf(r_n e^{it})| + |(r - r_n) f(r_n e^{it})| \leq$$
$$\leq r|f(re^{it}) - f(r_n e^{it})| + |r - r_n| M$$

Por la continuidad uniforme de f sobre el compacto $\overline{D(0,r)}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que si $z, w \in \overline{D(0,r)}$ y $|z - w| < \delta$ se cumple $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

Sea $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que tal que $|r - r_n| < \delta$ si $n \geq n_\delta$. Entonces, si $n \geq n_\delta$ podemos asegurar que para todo $t \in [0, 2\pi]$ se cumple $|f(re^{it}) - f(r_n e^{it})| \leq \varepsilon$ luego $|h_n(t)| \leq r\varepsilon + \delta M \leq (r + M)\varepsilon$ y se sigue que

$$n \geq n_\delta \Rightarrow |a_n| \leq 2\pi(r + M)\varepsilon.$$

Ejercicio 5.2.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado regular a trozos en Ω. Demuestre que

$$\operatorname{Re} \int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\, dz = 0.$$

SOLUCIÓN.

La integral $I = \int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\, dz$ se puede escribir en la forma

$$I = \int_\sigma \overline{w}\, dw = \int_0^1 \overline{\sigma(t)} \sigma'(t)\, dt$$

donde el camino cerrado $\sigma(t) = f(\gamma(t)) = x(t) + iy(t)$ se supone definido en $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I &= \int_0^1 \operatorname{Re}\big(\overline{\sigma(t)} \sigma'(t)\big)\, dt = \int_0^1 [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)]\, dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt}[x^2(t) + y^2(t)]\, dt. \end{aligned}$$

Es claro que la última integral vale 0 porque al ser σ un camino cerrado se cumple $x(1) = x(0)$, $y(1) = y(0)$.

Ejercicio 5.3.

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos, se define

$$\int_\gamma f(z)\, d\overline{z} = \int_a^b f(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)}\, dt.$$

Sea $P(z)$ un polinomio complejo y C_R la circunferencia $|z - a| = R$ ($R > 0$), con la orientación habitual. Demuestre que

$$\int_{C_R} P(z)\, d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

SOLUCIÓN.

Conviene escribir el polinomio en potencias de $z - a$:

$$P(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots + a_n(z - a)^n.$$

Como $C_R(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, resulta:

$$\begin{aligned} I := \int_{C_R} P(z)\, d\overline{z} &= \int_0^{2\pi} P(C_R(t)) \overline{C_R'(t)}\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k R^k e^{ikt} \right) (-iRe^{-it})\, dt. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = 0$ si $m \neq 0$ y que $a_1 = P'(a)$ se obtiene

$$I = 2\pi(-ia_1R^2) = -2\pi iR^2P'(a).$$

También se puede obtener el resultado escribiendo la integral en la forma:

$$\int_{C_R} P(z)\,d\overline{z} = \int_0^{2\pi} P(C_R(t))(-iRe^{-it})\,dt =$$
$$= -R^2\int_0^{2\pi} \frac{P(C_R(t))}{(C_R(t)-a)^2} iRe^{it}\,dt = -R^2\int_{C_R} \frac{P(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

Según el corolario 5.1.4, si consideramos el desarrollo

$$\frac{P(z)}{(z-a)^2} = \frac{a_0}{(z-a)^2} + \frac{a_1}{(z-a)} + a_2 + a_3(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^{n-2}$$

donde todos los términos, excepto $a_1/(z-a)$, tienen primitiva, se obtiene

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{(z-a)^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{a_1}{z-a}\,dz = 2\pi ia_1 = 2\pi iP'(a).$$

Ejercicio 5.4.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $|f(z)-1| < 1$ para cada $z \in \Omega$. Si γ es un camino cerrado regular a trozos en Ω demuestre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0.$$

SOLUCIÓN.

Como $f(\Omega) \subset D(1,1)$ está contenido en el dominio del logaritmo principal, se puede definir la composición $\operatorname{Log} f(z)$, que es una primitiva de f'/f en Ω. Por consiguiente el valor de la integral es 0.

5.2.2. Cálculo de integrales con desarrollos de Laurent

Las integrales que se proponen en el siguiente grupo de ejercicios se pueden calcular haciendo uso sistemático del resultado expuesto en el corolario 5.1.4.

Ejercicio 5.5.

Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en $A = \{z : r < |z| < R\}$ y la función $f \in \mathscr{H}(A)$ es par ($f(z) = f(-z)$ para cada $z \in A$) demuestre que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

SOLUCIÓN.

Según la observación que sigue al teorema 5.1.11, el desarrollo de Laurent de f en A es de la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_nz^n$ con $a_n = 0$ si n es impar, y en particular $a_{-1} = 0$. Esto garantiza que f tiene primitiva en A (corolario 4.1.9) y por lo tanto se cumple la condición requerida.

Ejercicio 5.6.

Demuestre que en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ se puede definir una rama de la raíz cuadrada de $T(z) = z/(z+1)$. Si $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ es la rama determinada por $g(1) = 1/\sqrt{2}$ obtenga el valor de la integral $I = \int_C g(z)\, dz$, donde $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

$T(z)$ no es real negativo cuando $z \notin [-1, 0]$ (véase el ejercicio 4.17), luego en Ω está definida su raíz cuadrada principal $g(z) = \sqrt{T(z)}$ que cumple $g(1) = 1/\sqrt{2}$.

El desarrollo de Laurent de g en $\{z : |z| > 1\}$ se calcula usando la serie binomial:

$$g(z) = \sqrt{\frac{1}{1 + 1/z}} = S_{-1/2}(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} z^{-n} \quad \text{si} \quad |z| > 1.$$

El coeficiente de $1/z$ es $a_{-1} = -1/2$ y, según el corolario 5.1.4,

$$I = 2\pi i a_{-1} = -\pi i.$$

Ejercicio 5.7.

Sea $\Omega = \{z : |z| > 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que existe $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que

$$f_n(z)^n = (z^n + 1)^2 \quad \textit{para todo } z \in \Omega.$$

Si $r > 1$ y $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, obtenga los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que

$$\int_{C_r} \frac{f_n(z)}{z}\, dz \neq 0.$$

SOLUCIÓN.

Es inmediata la existencia de $f_1(z) = (z+1)^2$ y $f_2(z) = z^2 + 1$. Consideremos ahora el caso $n \geq 3$. Si $|z| > 1$ podemos escribir

$$(z^n + 1)^2 = z^{2n} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right)^2 = z^{2n} \left[S_{2/n}(z^{-n})\right]^n$$

y, usando la serie binomial

$$S_{2/n}(w) = e^{(2/n)\operatorname{Log}(1+w)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2/n}{k} w^k \quad \text{si} \quad |w| < 1,$$

se obtiene que

$$f_n(z) = z^2 S_{2/n}(z^{-n}) = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2/n}{k} z^{-kn}$$

es una raíz n-ésima de $(z^n + 1)^2$, definida en Ω. Las otras raíces n-ésimas se obtienen multiplicando f_n por las raíces n-ésimas de 1. Por lo tanto, si la integral del enunciado no se anula para una de las raíces, tampoco se anula para las otras. Según el corolario 5.1.4 para que la integral no se anule es necesario y suficiente que no sea nulo el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent de $f_n(z)/z$ en Ω. Esto sólo ocurre para $n = 1$ y $n = 2$.

Ejercicio 5.8.

Obtenga el valor de $I = \int_\gamma z^2 e^{1/(z-1)} dz$, *donde* $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

Según el corolario 5.1.4, $I = 2\pi i a_{-1}$ donde a_{-1} es el coeficiente de $1/(z-1)$ en el desarrollo de Laurent de $z^2 e^{1/(z-1)}$ en $\{z : |z| > 1\}$. Para calcular el desarrollo conviene expresar z^2 en potencias de $h = z - 1$:

$$z^2 e^{1/(z-1)} = (h^2 + 2h + 1)e^{1/h} = (h^2 + 2h + 1)\left(1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{2!h^2} + \frac{1}{3!h^3} + \cdots\right)$$

Efectuando el producto se obtiene que el coeficiente de h^{-1} es

$$a_{-1} = \frac{1}{3!} + \frac{2}{2!} + 1 = \frac{13}{6}$$

luego $I = \frac{13}{3}\pi i$.

Ejercicio 5.9.

Sea $f(z)$ *la rama de la raíz cuadrada de* $1 - z^2$, *definida en* $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, *y determinada por* $f(2) = -\sqrt{3}i$ *(véase el ejercicio 3.6). Obtenga el valor de la integral*

$$\int_{C_\rho} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}\right) \frac{dz}{f(z)}$$

donde $\rho > 1$ *y* $C_\rho(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 3.6 la fórmula $f(z) = -iz\sqrt{1 - 1/z^2}$ define en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ la raíz cuadrada holomorfa de $1 - z^2$ que toma el valor $-\sqrt{3}i$ para $z = 2$.

Sea $g(z) = (1/z + 1/z^3)/f(z)$ y $\gamma = 1/C_\rho$. Es fácil ver que

$$\int_{C_\rho} g(z)\, dz = -\int_\gamma \frac{g(1/z)}{z^2}\, dz = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{i\sqrt{1 - z^2}}\, dz = 0,$$

donde la última integral es nula porque la función que aparece bajo la integral es holomorfa en $D(0, 1)$ y γ es un camino cerrado en $D(0, 1)$.

También se puede llegar al resultado usando el corolario 5.1.4: la función $g(z)$ es par, por lo que su desarrollo de Laurent en $\{z : |z| > 1\}$ es de la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ donde $a_n = 0$ cuando $n \in \mathbb{Z}$ es impar, en particular $a_{-1} = 0$.

Aunque no es preciso calcular explícitamente este desarrollo de Laurent, se podría obtener mediante la serie binomial $S_{-1/2}$ considerando el producto

$$g(z) = i\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) S_{-1/2}(-1/z^2).$$

Ejercicio 5.10.
Sean $r_1, r_2 > 0$ los radios de convergencia de las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Demuestre que la serie $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que $r_1 r_2$ y que si $|z| < r r_2$, con $0 < r < r_1$, se verifica

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right) dw, \text{ donde } C_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

SOLUCIÓN.

Si $0 < |z| < r_1 r_2$ sea $r > 0$ tal que $|z|/r_2 < r < r_1$. La condición $|z/r| < r_2$ garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n (z/r)^n|$ converge y por lo tanto $|b_n (z/r)^n|$ es una sucesión acotada. Si $C > 0$ es una cota superior de esta sucesión, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|a_n b_n z^n| \leq C |a_n| r^n$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$ (porque $0 < r < r_1$) se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ converge, luego su radio de convergencia es mayor o igual que $r_1 r_2$.

Si $|z| < r r_1$, con $0 < r < r_1$, la función

$$\varphi(w) = \frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right)$$

está definida y es holomorfa en la corona $\{w : |z|/r_2 < |w| < r_1\}$, donde admite un desarrollo de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w^n$ que se calcula efectuando el producto de las series absolutamente convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n w^{-n}\right)$$

y agrupando por paquetes según las potencias de w. Así se obtiene el valor

$$c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = h(z)$$

y aplicando el corolario 5.1.4 se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \varphi(w)\, dw = c_{-1} = h(z).$$

También se puede razonar considerando la serie

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \frac{f(w)}{w^{n+1}}$$

que converge uniformemente sobre la circunferencia $\{w : |w| = r\}$ en virtud del criterio de Weierstrass: efectivamente, si $M = \max\{|f(w)| : |w| = r\}$, para todo w con $|w| = r$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left| b_n z^n \frac{f(w)}{w^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r} |b_n| \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = \alpha_n$$

donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ converge, porque $|z|/r < r_2$.

La convergencia uniforme garantiza la integración término a término:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\varphi(w)\,dw=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n=h(z)$$

donde la última igualdad se obtiene usando la fórmula integral para los coeficientes de un desarrollo en serie de potencias (teorema 5.1.10).

Ejercicio 5.11.

Utilizando el desarrollo de Laurent de $e^{z+1/z}$ *en* $\{z : 0 < |z|\}$ *obtenga la igualdad*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos t}\cos nt\,dt=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(n+m)!}$$

SOLUCIÓN.

El desarrollo de Laurent de $e^{z+1/z}$ en $\{z : |z| > 0\}$ se puede calcular considerando el producto de las series absolutamente convergentes

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!z^k}\right)=e^z e^{1/z}.$$

Usando la proposición 1.1.1 se obtiene que

$$\sum_{(p,k)}\frac{z^{p-k}}{p!\,k!}$$

es conmutativamente convergente, luego, en virtud del teorema 1.1.2, su suma $e^{z+1/z}$ también se puede obtener sumando según los paquetes definidos mediante $M_n = \{(p,k) : p-k=n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$:

$$e^{z+1/z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n \quad \text{con} \quad a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+n)!}$$

Aplicando el corolario 5.1.4 a la función $e^{z+1/z}$ se obtiene

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{z+1/z}}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(e^{it}+e^{-it})}{e^{int}}\,dt.$$

Considerando la parte real de la última integral (cuya parte imaginaria es nula) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos t}\cos nt\,dt.$$

Otra alternativa para calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{z+1/z}}{z^{n+1}}\,dz$$

sin usar series de Laurent ni los resultados sobre sumación por paquetes es acudir al desarrollo en serie

$$\frac{e^{z+1/z}}{z^{n+1}} = \frac{e^z}{z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^z}{k!\, z^{k+n+1}}$$

que converge uniformemente sobre la circunferencia $|z| = 1$ en virtud del criterio de Weierstrass: obsérvese que cuando $|z| = 1$ se cumple

$$\left| \frac{e^z}{k!\, z^{k+n+1}} \right| \leq \frac{M}{k!}, \quad \text{donde} \quad M = \text{máx}\{|e^z| : |z| = 1\}.$$

Esto justifica la integración término a término, con la que se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z+1/z}}{z^{n+1}}\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^z}{z^{k+n+1}}\, dz \right).$$

Las integrales que aparecen en la última suma se pueden calcular utilizando el corolario 5.1.4:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^z}{z^{k+n+1}}\, dz = \frac{1}{(k+n)!}$$

Así se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{z+1/z}}{z^{n+1}}\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!}$$

Ejercicio 5.12.

Si f es holomorfa en $D(0,3)$ y $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1}\, dz = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

SOLUCIÓN.

Razonando como en el ejercicio 4.17 vemos que la función

$$g(z) = \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1}$$

está definida cuando $z \notin [-1, 1]$, pues entonces $(z+1)/(z-1)$ no es real negativo.

Comenzamos calculando el desarrollo de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ de fg en la corona $\{z : 1 < |z| < 3\}$ ya que entonces, en virtud de 5.1.4, se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) g(z)\, dz = b_{-1}$$

y todo quedará reducido a demostrar que $b_{-1} = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Análogamente a como se hizo en el ejercicio 4.17, el desarrollo de Laurent de g en $\{z : |z| > 1\}$ se obtiene fácilmente a partir del desarrollo de su derivada

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1) z^{2n+1}} \quad \text{si } |z| > 1.$$

Por otra parte, según el teorema 5.1.10, la función f admite en el disco $D(0,3)$ un desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{si } |z| < 3.$$

Si $1 < |z| < 3$ los desarrollos en serie de f y g son absolutamente convergentes y con la proposición 1.1.1 se obtiene que

$$\sum_{(k,n)} \frac{1-(-1)^k}{k} a_n z^{n-k}$$

es conmutativamente convergente y su suma es $f(z)g(z)$ (según su corolario 1.1.3). Efectuando una sumación por paquetes (1.1.7), formando paquetes según las potencias de z, se llega al desarrollo de Laurent de $f(z)g(z)$ en $\{z : 1 < |z| < 3\}$:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n \quad \text{con} \quad b_{-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1}$$

Como la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente sobre $[-1,1]$ (porque su radio de convergencia es mayor o igual que 3) se puede integrar término a término y se llega a la igualdad

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(1^{n+1} - (-1)^{n+1}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} = b_{-1}.$$

Otra alternativa para calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)g(z)\,dz,$$

sin usar series de Laurent ni los resultados sobre sumación por paquetes, es acudir al desarrollo en serie

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2f(z)}{(2n+1)z^{2n+1}}$$

que converge uniformemente sobre la circunferencia $|z| = 2$, en virtud del clásico criterio de Weierstrass: cuando $|z| = 2$ se cumple

$$\left|\frac{2f(z)}{(2n+1)z^{2n+1}}\right| \leq \frac{2M}{(2n+1)2^{2n+1}} \quad \text{donde} \quad M = \max\{|f(z)| : |z| = 2\}.$$

Esto justifica la integración término a término, con la que se obtiene

$$\int_C f(z)g(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{2n+1}}\,dz\right).$$

Según 5.1.4 el valor de cada una de las integrales que aparecen bajo la suma es a_n y así se vuelve a obtener que

$$\int_C f(z)g(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{(2n+1)}$$

5.2.3. Aplicaciones de los teoremas de Cauchy

La clave para resolver los ejercicios de este bloque es el hecho de que en los abiertos especiales las funciones holomorfas tienen primitiva (vea el teorema 5.1.7). En el ejercicio 5.13 se establece que lo mismo ocurre en cada abierto conformemente equivalente a un disco. En los últimos ejercicios ya se utiliza que las funciones holomorfas son analíticas y se insiste en el cálculo de radios de convergencia utilizando que, para una función holomorfa, su desarrollo en serie de potencias en un punto converge en el mayor disco que cabe en su dominio.

Ejercicio 5.13.

Un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice que es holomórficamente conexo cuando es conexo y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tiene primitiva. Demuestre las afirmaciones siguientes.

a) *Si dos abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son conformemente equivalentes y uno es holomórficamente conexo, el otro también lo es.*

b) *Son holomórficamente conexos*

$$\Omega_0 = \{z : \mathrm{Im}(z-a)/u > 0\}, \quad a, u \in \mathbb{C},\ u \neq 0.$$
$$\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$
$$\Omega_2 = \{\rho e^{it} : r < \rho < R, \alpha < t < \beta\}, \quad \beta - \alpha < 2\pi.$$

c) *Si los abiertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son holomórficamente conexos y $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es conexo entonces $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_1$ es holomórficamente conexo. Muestre que este resultado es falso cuando la intersección no es conexa.*

SOLUCIÓN.

a) Sea $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un isomorfismo conforme donde Ω_1 es holomórficamente conexo. Dada $f \in \mathscr{H}(\Omega_2)$ la función $f(h(z))h'(z)$ es holomorfa en Ω_1. Por hipótesis, existe $g \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ tal que $g'(z) = f(h(z))h'(z)$. Entonces $F = g \circ h^{-1}$ es una función holomorfa en Ω_2 que verifica $F' = f$. Efectivamente, usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $(h^{-1})'(w) = 1/h'(z)$ cuando $h(z) = w$, resulta

$$F'(w) = g'(z)/h'(z) = f(h(z)) = f(w).$$

b) En virtud del teorema 5.1.7 los abiertos especiales, y en particular los discos abiertos, son holomórficamente conexos. Cualquier semiplano abierto es conformemente equivalentes al disco $D(0,1)$ y, aplicando *a)*, se concluye que Ω_0 es holomórficamente conexo. Los abiertos

$$U_1 = \{x + iy : |y| < \pi\}, \quad U_2 = \{x + iy : \log r < x < \log R,\ \alpha < y < \beta\}$$

son especiales. Como la función exponencial e^z establece un isomorfismo conforme entre U_j y Ω_j $(j = 1, 2)$, resulta que Ω_1 y Ω_2 son holomórficamente conexos.

c) Dada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, según la hipótesis, existen $F_i \in \mathscr{H}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, tales que $F_i'(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega_i$. Puesto que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es conexo existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$F_1(z) - F_2(z) = c$ para todo $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. La función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que coincide con F_1 sobre Ω_1 y con $F_2 + c$ sobre Ω_2 es holomorfa en Ω y verifica $F' = f$.

Este último resultado es falso cuando $\Omega_1 \cap \Omega_2$ no se supone conexo: los abiertos Ω_1 y $\Omega_{-1} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ son holomórficamente conexos pero $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no lo es porque $1/z$ no tiene primitiva en Ω.

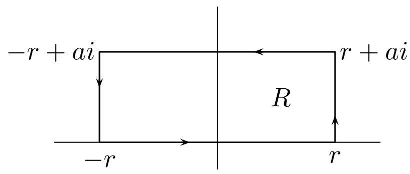
Ejercicio 5.14.

Demuestre que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx$ *no depende de* $a \in \mathbb{R}^+$ *y obtenga*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2ax)\, dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}.$$

Indicación. Considere la integral de e^{-z^2} *a lo largo del borde del rectángulo* $R = [-r, r] \times [0, a]$ *y utilice que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

SOLUCIÓN.



En virtud del teorema de Cauchy-Goursat 5.1.7

$$0 = \int_{\partial R} e^{-z^2} dz = \int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx - \int_{-r}^{r} e^{-(x+ia)^2} dx + h(r),$$

donde

$$h(r) = \int_0^a ie^{-(r+it)^2} dt - \int_0^a ie^{-(-r+it)^2} dt$$

verifica

$$|h(r)| \leq \int_0^a |e^{-(r+it)^2}|\, dt + \int_0^a |e^{-(-r+it)^2}|\, dt \leq 2e^{-r^2} \int_0^a e^{t^2} dt.$$

Luego $h(r)$ tiende hacia 0 cuando $r \to +\infty$. Pasando al límite en la primera igualdad se deduce

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2axi}\, dx$$

y tomando partes reales se llega al resultado deseado.

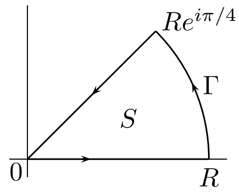
Ejercicio 5.15.

Sea $S = \{re^{it} : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq t \leq \pi/4\}$. *Usando la integral de* e^{iz^2} *sobre el borde de* S *obtenga la convergencia y el valor de las integrales*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

Indicación. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *y* $\operatorname{sen} x \geq 2x/\pi$ *si* $0 \leq x \leq \pi/2$.

SOLUCIÓN.



Si Γ es el borde de S, orientado positivamente, en virtud de 5.1.7 se cumple

$$0 = \int_\Gamma e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + I(R) - J(R)$$

donde

$$I(R) = \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{i2t}} iRe^{it}\, dt, \quad J(R) = \int_0^R e^{it^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4}\, dt = e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Utilizando la desigualdad

$$|I(R)| \le R \int_0^{\pi/4} e^{\operatorname{Re}[iR^2 e^{i2t}]}\, dt = R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2t}\, dt$$

y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 2t \ge \frac{4t}{\pi}$ cuando $0 \le t \le \pi/4$ se obtiene

$$|I(R)| \le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{4t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{4R}\Big(1 - e^{-R^2}\Big),$$

luego $\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0$. Entonces, pasando al límite en la primera igualdad

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{ix^2} dx = \lim_{R\to+\infty} J(R) = e^{i\pi/4} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Considerando la parte real y la parte imaginaria, se concluye que las integrales del enunciado convergen y

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Ejercicio 5.16.

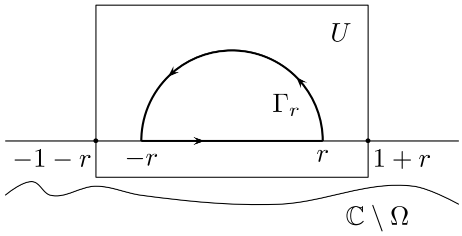
Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ donde $\Omega \supset \{z : \operatorname{Im} z \ge 0\}$ y $0 < \alpha < +\infty$. Demuestre que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^\pi r|f(re^{it})|\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = 0.$$

SOLUCIÓN.

Si $2\delta > 0$ es la distancia entre el segmento compacto $[-r-1, r+1]$ y el cerrado $\mathbb{C} \setminus \Omega$, podemos asegurar que Ω contiene al rectángulo

$$U = \big\{x + iy : -r - 1 < x < r + 1,\ -\delta < y < r + 1\big\}.$$



Como el borde orientado Γ_r del semidisco $\{z : |z| \leq r, \operatorname{Im} r \geq 0\}$ está contenido en U, que es un abierto especial, aplicando el teorema 5.1.7 se obtiene

$$0 = \int_{\Gamma_r} e^{i\alpha z} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} e^{i\alpha x} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} e^{i\alpha re^{it}} f(re^{it}) ire^{it}\, dt.$$

Para todo $t \in [0, \pi]$, es $|\exp(i\alpha re^{it})| = e^{-\alpha r \operatorname{sen} t} \leq 1$ (pues $\alpha > 0$), luego

$$\left| \int_{-r}^{r} f(x) e^{i\alpha x}\, dx \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{i\alpha re^{it}} f(re^{it}) ire^{it}\, dt \right| \leq r \int_0^{\pi} |f(re^{it})|\, dt$$

y de esta desigualdad se sigue la implicación del enunciado.

Ejercicio 5.17. Teorema de Fejér y Riesz.

Si $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $D(0,1)$, demuestre la desigualdad

$$2 \int_{-1}^{+1} |f(x)|^2\, dx \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\, dt.$$

Indicación. Aplique el teorema de Cauchy-Goursat a la función $f(z)\overline{f(\overline{z})}$ sobre el borde de un semidisco.

SOLUCIÓN.

Sea Γ_r el borde del semidisco $\{z : |z| \leq r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ orientado positivamente (vea la figura del ejercicio 5.16). En virtud del ejercicio 3.26 la función $g(z) = f(z)\overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en $D(0,1)$ y aplicando el teorema 5.1.7 se obtiene

$$0 = \int_{\Gamma_r} g(z)\, dz = \int_{-r}^{r} |f(x)|^2\, dx + ir \int_0^{\pi} g(re^{it}) e^{it}\, dt.$$

Cuando $r \to 1$ el primer sumando tiende hacia $\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx$. El segundo sumando converge hacia $\int_0^{\pi} g(e^{it}) e^{it}\, dt$, pues

$$\left| \int_0^{\pi} g(re^{it}) e^{it}\, dt - \int_0^{\pi} g(e^{it}) e^{it}\, dt \right| \leq \pi h(r)$$

donde $h(r) = \max\{|g(re^{it}) - g(e^{it})| : t \in [0, \pi]\}$ tiende hacia 0 cuando $r \to 1$ (esto es consecuencia de la continuidad uniforme de g sobre $\overline{D(0,r)}$). Se obtiene así

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx = -i \int_0^{\pi} g(e^{it}) e^{it}\, dt.$$

Análogamente, considerando el borde del semidisco $\{z : |z| \leq r, \operatorname{Im} r \leq 0\}$ resulta

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx = i \int_{\pi}^{2\pi} g(e^{it}) e^{it} \, dt.$$

Sumando las dos últimas igualdades y usando la desigualdad triangular

$$2 \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \leq \int_{0}^{\pi} |g(e^{it})| \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} |g(e^{it})| \, dt = \int_{0}^{2\pi} |g(e^{it})| \, dt.$$

Sustituyendo $|g(e^{it})| = |f(e^{it})||f(e^{-it})|$, aplicando la desigualdad de Cauchy para integrales y teniendo en cuenta que

$$\int_{0}^{2\pi} |f(e^{-it})|^2 \, dt = \int_{0}^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \, dt$$

resulta

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx &\leq \left(\int_{0}^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_{0}^{2\pi} |f(e^{-it})|^2 \, dt \right)^{1/2} = \\ &= \int_{0}^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \, dt. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.18.

Se supone que f es holomorfa en $A = \{z : a < \operatorname{Re} z < b,\ 0 < \operatorname{Im} z < c\}$ y que $\lim_{z \to x} f(z) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Demuestre que f es idénticamente nula.

SOLUCIÓN.

Sea $\Omega = \{z : a < \operatorname{Re} z < b,\ |\operatorname{Im} z| < c\}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Im} z = 0, \\ f(z) & \text{si } \operatorname{Im} z > 0, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{si } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Si se demuestra que g es holomorfa, aplicando el principio de identidad, se obtendrá que g es idénticamente nula y, con ello, que $f = g|_A$ también lo es.

Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann es fácil ver que g es holomorfa en $\Omega \setminus (a, b)$. De la hipótesis se deduce que $\lim_{z \to x} g(z) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, luego g es continua en cada $x \in (a, b)$ y por lo tanto en todo Ω.

En virtud del teorema de Morera, para demostrar que g es holomorfa en Ω basta ver que para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$, de lados paralelos a los ejes, se anula la integral

$$I(R) = \int_{\partial R} g(z) \, dz.$$

Si R no corta al eje real este hecho es consecuencia directa del teorema de Cauchy-Goursat aplicado a $g|_A$ y $g|_B$, donde $B = \{\overline{z} : z \in A\}$.

Si R corta al eje real, basta considerar el caso particular de un rectángulo de la forma $R = [s, t] \times [0, v]$ o $R = [s, t] \times [u, 0]$, donde $a < s < t < b$, $-c < u < 0 < v < c$; en otro caso R se puede descomponer en dos rectángulos contiguos $R = R' \cup R''$ de los tipos anteriores, con un lado común en el eje real, y la integral sobre ∂R es igual a la suma de las integrales sobre $\partial R'$ y $\partial R''$. Suponemos $R = [s, t] \times [0, v]$ (en el otro caso se razona de forma similar).

Dado $\varepsilon > 0$, en virtud de la continuidad uniforme de g sobre el compacto R, existe $0 < \delta < c$ tal que si $z, w \in R$ y $|z - w| \leq \delta$ entonces $|g(z) - g(w)| < \varepsilon$.

Considerando los rectángulos $R_1 = [s, t] \times [0, \delta]$ y $R_2 = [s, t] \times [\delta, v]$ es claro que $I(R_2) = 0$ luego $I(R) = I(R_1) + I(R_2) = I(R_1)$.

Si $z = x + iy \in \partial R_1$ se cumple $|z - x| \leq \delta$ luego $|g(z)| = |g(z) - g(x)| \leq \varepsilon$ y se obtiene la desigualdad

$$|I(R)| = |I(R_1)| \leq \varepsilon \times \text{Longitud}(\partial R_1) \leq \varepsilon 2(b - a + 2c).$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ se concluye que $I(R) = 0$.

Ejercicio 5.19.

Se supone que $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ *es continua y que su restricción a* $D(0,1)$ *es holomorfa. Si* $f(e^{it}) = 0$ *para cada* $t \in [0, \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$*, demuestre que* f *es idénticamente nula.*

SOLUCIÓN.

$T(z) = (z - i)/(z + i)$ transforma el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ en el disco $D(0,1)$ (esto se puede ver en el ejercicio 2.21), luego $f \circ T$ es holomorfa en P, continua en $\overline{P}$ y se anula sobre un segmento (a, b) del eje real (la imagen del arco $\{e^{it} : t \in (0, \varepsilon)\}$ mediante T^{-1}). En virtud del ejercicio 5.18 $f \circ T$ es idénticamente nula sobre un rectángulo $(a, b) \times (0, c)$. Por el principio de identidad $f \circ T$ es idénticamente nula en P y se sigue que f es también es idénticamente nula.

Ejercicio 5.20.

Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$*. Calcule el radio de convergencia de la reordenación de la serie binomial* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ *alrededor de* ib*, con* $0 < b < 1$*.*

SOLUCIÓN.

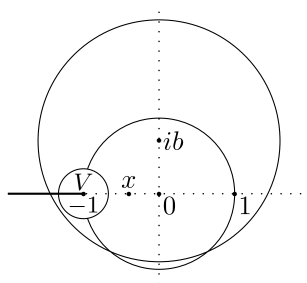
La serie binomial es el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de la función $S_\alpha(z) = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$, definida y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x : x \leq -1\}$.

La reordenación considerada en el enunciado coincide con el desarrollo en serie de potencias de S_α alrededor del punto ib, cuyo radio de convergencia cumple

$$\rho \geq \operatorname{dist}(ib, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \sqrt{1 + b^2}.$$

Demostraremos que $\rho = \sqrt{1 + b^2}$ por reducción al absurdo.

Si fuese $\rho > \sqrt{1 + b^2}$ se cumpliría $-1 \in D(ib, \rho)$ y podríamos considerar la suma de la reordenación $f \in \mathscr{H}(D(ib, \rho))$.



Consideremos en primer lugar el caso $\alpha = \mu + i\lambda$ con $\mu > 0$. Entonces, para $x \in (-1, 1)$ se tiene $|f(x)| = |S_\alpha(x)| = (1+x)^\mu$, luego se verifica $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 0$. Si m es la multiplicidad del cero que tiene f en -1, se puede escribir $f(z) = (1+z)^m g(z)$ donde $g \in \mathscr{H}(D(ib, \rho))$ y $g(-1) \neq 0$. Sea $r > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(-1, r) \subset D(ib, \rho)$. Según el teorema 5.1.7, g'/g tiene primitiva en el disco $D(-1, r)$ y por lo tanto existe $h \in \mathscr{H}(D(-1, r))$ tal que $g = e^h$ (proposición 5.1.5). Por el principio de identidad para todo $z \in V = D(-1, r) \cap \Omega$ se cumple $S_\alpha(z) = f(z)$, es decir

$$e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)} = e^{m \operatorname{Log}(1+z)} e^{h(z)}$$

y, según el ejercicio 3.1, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(\alpha - m)\operatorname{Log}(1+z) = h(z) + 2\pi k i$ para todo $z \in V$. Como $\alpha - m \neq 0$ se llega a una contradicción cuando $z = x \in (-1, 1) \subset V$ tiende hacia -1.

En el caso $\alpha = \mu + i\lambda$ con $\mu < 0$ la contradicción se obtiene observando que si $x \in (-1, 1)$ tiende hacia -1 entonces $|f(x)| = |S_\alpha(x)| = (1+x)^\mu$ tiende hacia $+\infty$.

Finalmente, cuando $\alpha = i\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$, se llega a la contradicción observando que para $x \in (-1, 1)$ la función $f(x) = e^{i\lambda \operatorname{Log}(1+x)}$ no tiene límite cuando $x \to -1$.

Ejercicio 5.21.

Demuestre que la función $f(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-2} z^n$, definida en $D(0, 1)$, admite una prolongación analítica F al abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Calcule el radio de convergencia del desarrollo en serie de potencias de F alrededor de $a = 2 + i$.

SOLUCIÓN.

Cuando $|z| < 1$, derivando término a término la serie de potencias, se obtiene

$$z f'(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots = -\operatorname{Log}(1 - z)$$

luego f' admite la prolongación analítica g, definida en Ω, por

$$g(z) = -\frac{\operatorname{Log}(1 - z)}{z} \quad \text{si} \quad z \neq 0; \qquad g(0) = f'(0) = 1.$$

El abierto Ω es holomórficamente conexo (véase el ejercicio 5.13), luego existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Podemos suponer que $F(0) = 0 = f(0)$ y así, de la igualdad $F'(z) = f'(z)$, válida para todo $z \in D(0, 1)$, se deduce que $F|_{D(0,1)} = f$.

Sea ρ el radio de convergencia del desarrollo en serie de potencias de F alrededor de $a = 2 + i$. Como el mayor disco de centro $a = 2 + i$ contenido en Ω es $D(a, 1)$ se sigue que $\rho \geq 1$. Conviene observar que la prolongación analítica F ha sido obtenida usando el logaritmo principal de $1 - z$, pero si en lugar de utilizar el logaritmo principal utilizamos otro logaritmo holomorfo de $1 - z$ que se anule en $z = 0$, obtendremos otra prolongación analítica distinta.

A partir del logaritmo de la identidad $\operatorname{Log}_{-i} z = \operatorname{Log}(iz) + i3\pi/2$, definido en $\Omega_{-i} = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \geq 0\}$, se obtiene que $\operatorname{Log}_{-i}(1 - z)$ es un logaritmo holomorfo de $1 - z$ definido en $U = \mathbb{C} \setminus \{1 + iy : y \leq 0\} \supset D(0, 1)$ y, razonando como antes, con una primitiva de $-\operatorname{Log}_{-i}(1 - z)/z$, se consigue una prolongación analítica G de f definida en U.

En virtud del principio de identidad, F y G coinciden en $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, luego tienen el mismo desarrollo en serie de potencias alrededor de a. Ahora, el mayor disco de centro

a contenido en U es $D(a, \sqrt{2})$, luego podemos afirmar que $\rho \geq \sqrt{2}$. Por otra parte, si fuese $\rho > \sqrt{2}$, el disco $D(a, \rho)$ sería un entorno abierto de 1 en el cual $-zG'(z)$ sería un logaritmo holomorfo de $z - 1$. Como esto es imposible (véanse los ejercicios 3.4 y 7.11) se concluye que $\rho = \sqrt{2}$.

Ejercicio 5.22.

Sea B_n la sucesión de los números de Bernoulli, definida por recurrencia:

$$B_0 = 1, \quad \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0 \quad si \quad n \geq 2.$$

a) Obtenga, en términos de la sucesión B_n, el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de la función

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad si \quad z \neq 0, \qquad f(0) = 1.$$

Justifique que el radio de convergencia es 2π, que la sucesión B_n no es acotada y que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$. Obtenga B_n para $0 \leq n \leq 14$.

b) Calcule el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de la función

$$F(z) = \pi z \cot \pi z \quad si \quad z \neq 0, \qquad F(0) = 1.$$

Obtenga su radio de convergencia y los coeficientes del desarrollo en términos de los números de Bernoulli.

SOLUCIÓN.

a) La función $e^z - 1$ tiene ceros en los puntos $2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, todos ellos simples. Considerando el desarrollo en serie de potencias de e^z podemos escribir $e^z - 1 = z\varphi(z)$ donde

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

es una función entera con los mismos ceros que $e^z - 1$, excepto $z = 0$. Como $\varphi(z)$ no se anula en $D(0, 2\pi)$, la función $f(z) = 1/\varphi(z)$ es holomorfa en $D(0, 2\pi)$ donde admitirá un desarrollo en serie de potencias con radio de convergencia $\rho \geq 2\pi$. Obsérvese que la condición $\lim_{z \to 2\pi i} f(z) = \infty$ impide que la serie de potencias sea convergente en un disco $D(0, r)$ con $r > 2\pi$, luego $\rho = 2\pi$.

Los coeficientes del desarrollo se calculan fácilmente por el método de los coeficientes indeterminados:

$$1 = f(z)\varphi(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right)$$

luego

$$1 = a_0, \qquad 0 = a_1 + \frac{a_0}{2!}, \qquad 0 = a_2 + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!}$$

$$0 = a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \frac{a_{n-3}}{3!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_0}{n!}$$

Sustituyendo $a_n = b_n/n!$ y multiplicando por $n!$ se obtiene la fórmula

$$\frac{n!}{n!}b_0 + \frac{n!}{1!(n-1)!}b_1 + \cdots + \frac{n!}{(n-2)!2!}b_{n-2} + \frac{n!}{(n-1)!1!}b_{n-1}.$$

Como la sucesión b_n satisface la misma relación de recurrencia que B_n y $b_0 = B_0$ se concluye que $b_n = B_n$ para todo $n \geq 0$. De aquí se deduce que la sucesión B_n no es acotada, pues en caso contrario el radio de convergencia de la serie con coeficientes $a_n = B_n/n!$ sería infinito. Para deducir que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$ basta observar que $a_1 = -1/2$ y que

$$g(z) = f(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

es una función par, luego $a_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Utilizando la fórmula recurrente se calculan fácilmente

$$\begin{array}{lllll}
B_0 = 1; & B_1 = -\dfrac{1}{2}; & B_2 = \dfrac{1}{6}; & B_3 = 0; & B_4 = -\dfrac{1}{30}; \\
B_5 = 0; & B_6 = \dfrac{1}{42}; & B_7 = 0; & B_8 = -\dfrac{1}{30}; & B_9 = 0; \\
B_{10} = \dfrac{5}{66}; & B_{11} = 0; & B_{12} = -\dfrac{691}{2370}; & B_{13} = 0; & B_{14} = \dfrac{7}{6}.
\end{array}$$

b) Con el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{sen} z$ se obtiene

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!}z^2 + \frac{\pi^4}{5!}z^4 - \cdots\right)$$

donde la serie entre paréntesis define una función entera $\psi(z)$, sin ceros en $D(0,1)$. Se sigue que $F(z) = \cos \pi z/\psi(z)$ es holomorfa en $D(0,1)$ donde admite un desarrollo en serie de potencias. Un razonamiento análogo al efectuado anteriormente con la función f permite concluir que el radio de convergencia es 1. Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\pi z \cot \pi z = i\pi z \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\pi z \frac{e^{i2\pi z} + 1}{e^{i2\pi z} - 1} = g(i2\pi z)$$

donde g es la función considerada en *a*), se obtiene el desarrollo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

Ejercicio 5.23.

Dada una serie de potencias con radio de convergencia finito y no nulo, demuestre que en la frontera de su disco de convergencia hay al menos un punto singular (la definición de punto singular se puede ver en el ejercicio 4.54).

SOLUCIÓN.

Consideremos, para simplificar la escritura, una serie de potencias centrada en 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia $0 < \rho < +\infty$. Razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que no existen puntos singulares en la circunferencia $|z| = \rho$.

Bajo esta hipótesis demostraremos que existe una prolongación analítica F de f a un disco $D(0,R)$ con $R>\rho$. Pero esto es imposible porque entonces el desarrollo en serie de potencias de f alrededor de 0, que coincide con el de F, tendría un radio de convergencia mayor o igual que R.

Sea $C=\{z : |z|=\rho\}$. La hipótesis de que no existen puntos singulares significa que para cada $a\in C$ existe un disco abierto D_a con $a\in D_a$ tal que f admite una prolongación analítica f_a al abierto $V_a=D(0,\rho)\cup D_a$ (vea el ejercicio 4.53). En el abierto $\Omega=\bigcup_{a\in C}V_a$ se puede definir $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ poniendo $F(z)=f_a(z)$ si $z\in V_a$. La definición es consistente pues, en virtud del principio de identidad, como f_a y f_b coinciden en $V_a\cap V_b\cap D(0,\rho)$ también coinciden en el abierto conexo $V_a\cap V_b$.

Se obtiene así una prolongación analítica F de f definida en $\Omega\supset\overline{D(0,\rho)}$, luego existe $R>\rho$ tal que $D(0,R)\subset\Omega$.

Ejercicio 5.24.

Sean $G,\Omega\subset\mathbb{C}$ abiertos conexos, $h\in\mathscr{H}(G)$ y $g\in\mathscr{H}(\Omega)$, donde g no es constante. Si $f:G\longrightarrow\Omega$ es continua y $h(z)=g(f(z))$ para todo $z\in G$, demuestre que f es holomorfa.

SOLUCIÓN.

Fijado $a\in G$, sea $b=f(a)$. La función $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$, definida por

$$\varphi(w)=\frac{g(w)-g(b)}{w-b}\ \text{si } w\neq b;\quad \varphi(b)=g'(b)$$

es continua, luego $\lim_{z\to a}\varphi(f(z))=\varphi(b)=g'(b)$. Para $z\in G\setminus\{a\}$ se cumple

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a}=\varphi(f(z))\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

(incluso cuando $f(z)=f(a)$). Si $\varphi(b)=g'(b)\neq 0$ de esta igualdad se deduce

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{h'(a)}{g'(b)}$$

luego f es holomorfa en $G\setminus S$ donde $S=\{a\in G : g'(f(a))=0\}$.

Para demostrar que f es holomorfa en G consideramos dos casos.

a) En primer lugar, si $G\cap S'=\emptyset$, para cada $a\in S$ existe $r>0$ tal que $\{z : 0<|z-a|<r\}\subset G\setminus S$. Como f es continua en a, en virtud del comentario que sigue al teorema de Morera 5.1.12, f es derivable en a. Con este razonamiento queda justificado que f es holomorfa en G.

b) Si $G\cap S'\neq\emptyset$, sea $a\in G\cap S'$. Existe una sucesión $a_n\in S$ tal que $\lim_n a_n=a$ y $a_n\neq a$ para cada $n\in\mathbb{N}$. El conjunto $\{n : f(a_n)\neq f(a)\}$ es finito pues en caso contrario $f(a)$ sería punto de acumulación de ceros de g', lo que es imposible en virtud del principio de identidad (g' no es idénticamente nula en el abierto conexo Ω porque estamos suponiendo que g no es constante).

Como $\{n : f(a_n)=f(a)\}$ es infinito, también lo es $\{n : h(a_n)=h(a)\}$ luego, según el principio de identidad, h es constante. Si c es el valor constante de h, $f(G)$ es un subconjunto conexo de $\{z\in\Omega : g(z)=c\}$. Los puntos de $\{z\in\Omega : g(z)=c\}$ son aislados (pues $g-c$ no es idénticamente nula en Ω) luego $f(G)$ se reduce a un punto, lo que significa que f es constante y por lo tanto holomorfa.

5.2.4. Ejercicios que usan la fórmula integral de Cauchy

Las soluciones de los siguientes ejercicios se basan esencialmente en la versión elemental de la fórmula integral de Cauchy y su principal consecuencia: toda función holomorfa es analítica y en cada disco contenido en su dominio admite un desarrollo en serie de potencias cuyos coeficientes vienen dados por la fórmula integral del teorema 5.1.10

Ejercicio 5.25.

Sea $f : \overline{D(0,r)} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua cuya restricción al disco $D(0,r)$ es holomorfa. Si $|z| < r$, demuestre que sigue valiendo la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{donde } C_r(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

SOLUCIÓN.

Sea $0 < r_n < r$ una sucesión creciente con $\lim_n r_n = r$. Desde un valor de n en adelante se cumple $|z| < r_n$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

donde $C_n(t) = r_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$, se obtiene el resultado (véase el ejercicio 5.1).

Ejercicio 5.26.

Si $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ y $|z| < r < 1$, demuestre que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ donde

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\left(\frac{w^{n+1} - z^{n+1}}{w-z}\right)dw$$

con $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

Si en la integral se sustituye

$$\frac{w^{n+1} - z^{n+1}}{w-z} = w^n + w^{n-1}z + w^{n-2}z^2 + \cdots + wz^{n-1} + z^n$$

resulta

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw\right) z^k.$$

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ el desarrollo en serie de potencias de $f(w)$ en $D(0,1)$. Usando la fórmula integral para los coeficientes a_k, se concluye que

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

luego $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

Ejercicio 5.27.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ *y* $a \in D(0,1)$ *un punto tal que* $f'(a) \neq 0$. *Demuestre que para* $r > 0$ *suficientemente pequeño se cumple*

$$\int_{C_r} \frac{dz}{f(z) - f(a)} = \frac{2\pi i}{f'(a)}$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

La función $f(z) - f(a)$ es analítica en $D(0,1)$, no es idénticamente nula y tiene un cero simple en $z = a$ (porque $f'(a) \neq 0$), luego se puede expresar en la forma

$$f(z) - f(a) = (z-a)F(z) \quad \text{con} \quad F \in \mathscr{H}(D(0,1)) \quad \text{y} \quad F(a) = f'(a) \neq 0.$$

Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - a| < \delta$ entonces $F(z) \neq 0$.

Si $0 < r < \delta$, aplicando la fórmula integral de Cauchy a $1/F$, que es holomorfa en $D(a, \delta)$, se obtiene

$$\int_{C_r} \frac{dz}{f(z) - f(a)} dz = \int_{C_r} \frac{1/F(z)}{(z-a)} dz = \frac{2\pi i}{F(a)} = \frac{2\pi i}{f'(a)}$$

(Al mismo resultado se puede llegar usando el teorema de los residuos 7.1.11).

Ejercicio 5.28.

Si $f \in \mathscr{H}(D(0,r))$ *y* $|a| < 1 < r$, *demuestre que*

$$|f(a)| \leq \frac{M}{1 - |a|^2}, \quad \text{donde } M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \, dt.$$

SOLUCIÓN.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función $g(z) = (1 - \overline{a}z)f(z)$ sobre la circunferencia $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se obtiene

$$(1 - |a|^2)f(a) = g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)T(z) \, dz,$$

donde $T(z) = (1 - \overline{a}z)/(z - a)$. Se comprueba fácilmente que $|T(z)| = 1$ si $|z| = 1$ (vea el ejercicio 1.2), luego

$$(1 - |a|^2)|f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{it})T(e^{it})ie^{it} \, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \, dt.$$

Ejercicio 5.29.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, $\overline{D(a, 2r)} \subset \Omega$ *y* $M = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D(a, 2r)}\}$. *Demuestre que*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M}{r}|z_1 - z_2| \quad \text{si} \quad z_1, z_2 \in \overline{D(a, r)}.$$

SOLUCIÓN.

Sea $C(t) = a + 2re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Según la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(w)}{w - z_1} - \frac{f(w)}{w - z_2} \right) dw =$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} \, dw.$$

Cuando $|w - a| = 2r$ se verifica $|w - z_i| \geq r$, $i = 1, 2$, luego

$$\left| \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} \right| \leq \frac{M}{r^2}$$

y utilizando 5.1.2 *e*) se concluye

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi 2r = \frac{2M}{r} |z_1 - z_2|.$$

Ejercicio 5.30.

Sea f una función entera, $|a| < R$, $|b| < R$ y $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Obtenga el valor de la integral

$$I_R(a, b) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)} \, dz$$

y utilice el resultado para demostrar el teorema de Liouville.

SOLUCIÓN.

Sustituyendo en la integral

$$\frac{1}{(z - a)(z - b)} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right)$$

y usando la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$I_R(a, b) = 2\pi i \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

(también se podría evaluar la integral con el teorema de los residuos 7.1.11).

Si f es acotada, $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, cuando $|z| = R$ se verifica

$$\left| \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)} \right| \leq \frac{M}{(R - |a|)(R - |b|)}$$

y en virtud de 5.1.2 *e*) se obtiene la desigualdad

$$|I_R(a, b)| \leq \frac{2\pi RM}{(R - |a|)(R - |b|)}$$

luego $\lim_{R \to \infty} I_R(a, b) = 0$, es decir, $f(a) - f(b) = 0$. Como $a, b \in \mathbb{C}$ son arbitrarios, queda demostrado que f es constante.

Ejercicio 5.31.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *definida en* $\{z : |z| > \rho\}$*, con* $0 < \rho < 1$*. Calcule*

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z(z-a)} \, dz$$

donde $|a| \neq 1$ *y* $C(t) = e^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*.*

SOLUCIÓN.

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa en $D(0, 1/\rho)$ y la integral $I(a)$ se expresa, en términos de $g(z) = f(1/z)$, como una integral sobre $1/C$:

$$I(a) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/C} \frac{g(z)}{z^{-1}(z^{-1} - a)} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/C} \frac{g(z)}{1 - az} \, dz.$$

Como $1/C$ es la circunferencia unidad recorrida en sentido negativo, resulta

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{1 - az} \, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{a(z - 1/a)} \, dz$$

y, aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función g, se obtiene

$$I(a) = -\frac{g(1/a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} \quad \text{si } |a| > 1, \qquad I(a) = 0 \quad \text{si } |a| < 1.$$

También se puede razonar en la siguiente forma.

Si $|a| > 1$, la función

$$F(z) = \frac{f(z)}{z(z-a)}$$

es holomorfa en la corona $\{z : \rho < |z| < |a|\}$, donde admite un desarrollo de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ que se calcula efectuando el producto de las series absolutamente convergentes

$$F(z) = -\frac{1}{a} \frac{f(z)}{z} \frac{1}{1 - z/a} = -\frac{1}{a} \left(\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \cdots \right) \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \cdots \right)$$

y agrupando por paquetes según las potencias de z. El coeficiente de $1/z$ en el desarrollo es

$$a_{-1} = -\frac{1}{a} \left(a_0 + \frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{a^2} + \cdots \right) = -\frac{f(a)}{a}$$

Como la circunferencia C está contenida en la corona $\rho < |z| < |a|$, aplicando el corolario 5.1.4, se concluye que $I(a) = a_{-1} = -f(a)/a$.

Por otra parte, si $|a| < 1$ la función F es holomorfa en el conjunto abierto $\{z : |z| > \rho\}$ (que contiene a la circunferencia C) donde admite un desarrollo de Laurent $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$, que se calcula efectuando el producto de dos series absolutamente convergentes

$$F(z) = -\frac{f(z)}{z^2} \frac{1}{1 - a/z} = -\frac{1}{z^2} \left(\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \cdots \right) \left(1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \cdots \right)$$

y agrupando por paquetes según las potencias de z. Como no aparecen términos en $1/z$, resulta $I(a) = b_{-1} = 0$.

Ejercicio 5.32.

Obtenga el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(z)}{z^{n+1}(a-z)}\,dz$$

donde P es un polinomio complejo de grado n y $C(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

SOLUCIÓN.

Con el cambio $z=1/w$ la integral se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/C}\frac{P(1/w)w^n}{1-aw}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{aw-1}\,dw$$

donde $f(w)=w^nP(1/w)$ es un polinomio.

Cuando $|a|>1$, según la fórmula integral de Cauchy, el valor de la integral es $f(1/a)/a=P(a)/a^{n+1}$. Cuando $|a|<1$, la función $f(w)/(aw-1)$ es holomorfa en $\{w:|w|<1/|a|\}$ y, en virtud del teorema de Cauchy, la integral vale 0.

Nota. También se puede obtener el valor de la integral utilizando el teorema de los residuos y el ejercicio 7.25, en el que se calcula el residuo de $z^{-(n+1)}P(z)/(a-z)$ en $z=0$ y en $z=a$.

Ejercicio 5.33.

Sea $u=\operatorname{Re}f$ donde $f\in\mathscr{H}(\Omega)$. Si $\overline{D(0,1)}\subset\Omega$ y $|z|<1$ demuestre que

$$f(z)+\overline{f(0)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(e^{it})}{1-ze^{-it}}\,dt.$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f en el disco $D(0,1)$, demuestre que para $n\geq 1$ se verifica

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})e^{-int}\,dt.$$

Deduzca de lo anterior que si $F\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $|\operatorname{Re}F(z)|\leq|z|$ para todo $z\in\mathbb{C}$, entonces F es un polinomio de primer grado, y que si $F\in\mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $\lim_{z\to\infty}\operatorname{Re}F(z)/z=0$ entonces F es constante.

SOLUCIÓN.

Si $C(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, en virtud de la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{1-ze^{-it}}\,dt.$$

Entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(e^{it})}{1-ze^{-it}}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})+\overline{f(e^{it})}}{1-ze^{-it}}\,dt=f(z)+\overline{A}$$

donde

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{1-\overline{z}e^{it}}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})ie^{it}}{e^{it}(1-\overline{z}e^{it})}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w(1-\overline{z}w)}\,dw.$$

Como la función $g(w) = f(w)/(1 - \overline{z}w)$ es holomorfa en $D(0, 1/|z|) \supset \overline{D(0,1)}$, usando la fórmula integral de Cauchy se obtiene que $A = g(0) = f(0)$ y queda establecida la igualdad deseada.

Por otra parte, usando el criterio de Weierstrass es fácil ver que la serie

$$\frac{u(e^{it})}{1 - ze^{-it}} = u(e^{it}) + u(e^{it})ze^{-it} + u(e^{it})z^2e^{-i2t} + \cdots + u(e^{it})z^ne^{-int} + \cdots$$

converge uniformemente sobre $[0, 2\pi]$. Por lo tanto se puede integrar término a término, lo que conduce al desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it})}{1 - ze^{-it}}\, dt - \overline{f(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})e^{-int}\, dt \quad \text{si } n \geq 1.$$

Sea $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ una función entera que cumple $|\operatorname{Re} F(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para cada $r > 0$ consideremos la función

$$f_r(z) = F(rz) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n z^n$$

y sea $u_r = \operatorname{Re} f_r$. Según la fórmula que se acaba de establecer, para $n \geq 1$

$$b_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_r(e^{it})e^{-int}\, dt.$$

En virtud de la hipótesis $|u_r(e^{it})| \leq r$, luego $|b_n r^n| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r\, dt = 2r$, es decir $|b_n| \leq 2r^{1-n}$. Esta desigualdad es cierta para cada $r > 0$ y pasando al límite cuando $r \to +\infty$ se concluye que $b_n = 0$ cuando $n \geq 2$.

Análogamente, si se supone que $\lim_{z\to\infty} \operatorname{Re} F(z)/z = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0 > 0$ tal que para $|z| = r > r_0$ se verifica $|\operatorname{Re} F(z)| \leq \varepsilon|z| = \varepsilon r$ y razonando como antes se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $|b_n r^n| \leq 2r\varepsilon$. Como $r > r_0$ es arbitrario se concluye que $b_n = 0$ para todo $n \geq 2$ y $|b_1| \leq 2\varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ también es arbitrario resulta $b_1 = 0$, luego F es constante.

Ejercicio 5.34.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ *tal que* $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ *para cada* $z \in D(0,1)$ *y* $f(0) = 1/2$. *Demuestre que* $|f^{(n)}(0)| \leq n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Indicación. Utilice el ejercicio 5.33.

SOLUCIÓN.

Si $f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f, tenemos que demostrar que $|a_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $r < 1$ consideramos la función auxiliar $f_r(z) = f(rz)$, definida en $D(0, 1/r) \supset \overline{D(0,1)}$, cuyo desarrollo en serie de potencias es

$$f_r(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{con } b_n = a_n r^n.$$

Bastará demostrar que $|b_n| = |a_n r^n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque entonces, haciendo tender r hacia 1, se deducirá que $|a_n| \leq 1$.

Si $u = \operatorname{Re} f$, aplicando la fórmula en el ejercicio 5.33 a la función f_r resulta

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r(e^{it}) e^{-int}\, dt$$

por lo que, en virtud de la hipótesis $u \geq 0$, se cumple la desigualdad

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r(e^{it})\, dt.$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula integral de Cauchy

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt.$$

Como el valor de esta integral es real resulta

$$1 = 2f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it})\, dt \geq |a_n| r^n.$$

Ejercicio 5.35.

Si $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente sobre compactos en Ω, demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$ tiene la misma propiedad.

SOLUCIÓN.

Basta demostrar que para cada $a \in \Omega$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$ converge uniformemente en algún disco $\underline{D(a,r)} \subset \Omega$.

Si $z \in \Omega$ y $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$, según la fórmula integral para la derivada (véase el teorema 5.1.10)

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r,z}} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\, dw, \quad \text{con} \quad C_{r,z}(t) = z + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

y se obtiene la desigualdad

$$|f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} |f_n(z + re^{it})|\, dt$$

luego

$$\sum_{n=p}^{q} |f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \sum_{n=p}^{q} |f_n(z + re^{it})|\, dt.$$

Si $r > 0$ se elige de modo que $\overline{D(a,2r)} \subset \Omega$, podemos asegurar que para cada $z \in D(a,r)$ la circunferencia $C_{r,z}$ está contenida en el compacto $\overline{D(a,2r)} \subset \Omega$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente sobre este compacto, cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme: existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$q \geq p \geq m \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} |f_n(w)| < \varepsilon r \quad \text{para todo } w \in \overline{D(a,2r)},$$

luego

$$q \geq p \geq m \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} |f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \varepsilon r\, dt = \varepsilon \quad \text{para todo } z \in D(a,r),$$

es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre $D(a,r)$.

Ejercicio 5.36.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ demuestre que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$$

es uniforme, respecto de z, en cada disco compacto $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.

SOLUCIÓN.

Fijado un disco compacto $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tomemos $\rho > r$ tal que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$ y $\delta > 0$ tal que $r + 2\delta < \rho$.

Si $z \in \overline{D(a,r)}$ y $|h| < \delta$ el punto $z_0 = z + h$ pertenece al disco $D(a,\rho)$ y, usando la fórmula integral de Cauchy con $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h}\int_{C_\rho}\left(\frac{f(w)}{w-z_0} - \frac{f(w)}{w-z}\right) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(w)dw}{(w-z)(w-z_0)} \end{aligned}$$

Según la nota que sigue al teorema de Morera, la función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \quad \text{si } w \in \Omega \setminus \{z\}, \quad g(z) = f'(z)$$

es holomorfa en Ω y, aplicando la fórmula integral de Cauchy, resulta

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{g(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(w)-f(z)}{(w-z)^2}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw$$

(hemos utilizado que $w \to f(z)/(w-z)^2$ tiene primitiva en $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ y por lo tanto da lugar a una integral nula sobre C_ρ). Combinando las fórmulas anteriores:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(w)h}{(w-z)^2(w-z_0)}\, dw.$$

Si $w \in \text{Imagen}(C_\rho)$ se cumple

$$\begin{aligned} |w-z| &\geq |w-a| - |a-z| \geq \rho - r > 2\delta, \\ |w-z_0| &\geq |w-a| - |a-z_0| \geq \rho - (r+\delta) \geq \delta, \end{aligned}$$

luego

$$\left|\frac{f(w)h}{(w-z)^2(w-z_0)}\right| \leq \frac{M|h|}{4\delta^3}, \quad \text{con } M = \max\{|f(z)| : |z-a| \leq \rho\}.$$

Entonces, para $|h| < \delta$ y todo $z \in \overline{D(a,r)}$, se cumple

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M|h|}{4\delta^3}2\pi\rho = \frac{M\rho}{4\delta^3}|h|.$$

Se sigue de esto que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = 0$$

siendo el límite uniforme respecto de z en $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$.

Ejercicio 5.37.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$, demuestre que $\pi R^2|f(a)|^2 \leq I(f, D(a,R))$, donde

$$I(f, D(a,R)) = \int_{D(a,R)} |f(x+iy)|^2\, dx\, dy.$$

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es acotada cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ se cumple $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathscr{F}\} < +\infty$*, donde*

$$\|f\|_K = \max\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Utilice la desigualdad anterior para demostrar que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es acotada cuando para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$ con

$$\sup\{I(f, D(a,R)) : f \in \mathscr{F}\} < \infty.$$

SOLUCIÓN.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función $f(z)^2$ en el disco $\overline{D(a,r)} \subset D(a,R)$ se obtiene

$$f(a)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)^2}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})^2\,dt$$

luego

$$2\pi|f(a)|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2\,dt.$$

Multiplicando por $r > 0$ e integrando en el intervalo $[0,R]$:

$$2\pi|f(a)|^2\int_0^R r\,dr \leq \int_0^R\left[\int_0^{2\pi} r|f(a+re^{it})|^2\,dt\right]dr.$$

La última integral es la que se obtiene expresando en coordenadas polares la integral doble

$$\int_{D(a,R)} |f(x+iy)|^2\,dx\,dy$$

luego $\pi|f(a)|^2R^2 \leq I(f, D(a,R))$.

Sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ cumpliendo la condición del enunciado. Para demostrar que $\mathscr{F}$ es acotada basta probar que para cada $a \in \Omega$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$\sup\{|f(z)| : z \in D(a,r),\ f \in \mathscr{F}\} < +\infty$$

(ya que cada compacto $K \subset \Omega$ se puede recubrir con una cantidad finita de discos con esta propiedad).

Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(a, 2r)} \subset \Omega$ y $M = \sup\{I(f, D(a, 2r)) : f \in \mathscr{F}\} < \infty$. Entonces para todo $z \in D(a, r)$ es $D(z, r) \subset D(a, 2r)$ luego

$$I(f, D(z, r)) \leq I(f, D(a, 2r)) \leq M$$

y, por lo probado en la primera parte, aplicado a $D(z, r)$, se puede asegurar que para todo $z \in D(a, r)$ y todo $f \in \mathscr{F}$ se cumple

$$\pi r^2 |f(z)|^2 \leq I(f, D(z, r)) \leq M$$

luego

$$\sup\{|f(z)| : z \in D(a, r), f \in \mathscr{F}\} < +\infty.$$

5.2.5. Desigualdades de Cauchy y teorema de Liouville

A continuación se proponen ejercicios en cuya solución intervienen las desigualdades de Cauchy, el teorema de Liouville y el teorema de Morera.

Ejercicio 5.38.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$ para cada $z \in D(0,1)$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

SOLUCIÓN.

La función $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$, con $0 < r < 1$, cumple $M(r) \leq 1/(1 - r)$ y aplicando las desigualdades de Cauchy se obtiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{n!}{(1-r)r^n} = h(r).$$

La mejor cota para $|f^{(n)}(0)|$ se consigue con el mínimo absoluto de $h(r)$ en $[0, 1]$. El mínimo se alcanza cuando $r = n/(n + 1)$ y con este valor de r se obtiene la desigualdad requerida.

Ejercicio 5.39.

¿Existe $f \in \mathscr{H}(D(a, R))$ tal que $|f^{(n)}(a)| \geq n^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

SOLUCIÓN.

Si $f \in \mathscr{H}(D(a, R))$, en virtud de las desigualdades de Cauchy

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - a| \leq r\}$, $0 < r < R$. Si se cumpliese la condición del enunciado se obtendría que $(nr)^n \leq M(r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como esto es imposible se concluye que no existe $f \in \mathscr{H}(D(a, R))$ verificando esa condición.

Ejercicio 5.40.

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ una función entera tal que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$ verificando

$$|f(z)| \leq |z|^n \quad \text{si } |z| \geq \rho.$$

Demuestre que f es un polinomio de grado menor o igual que n.

SOLUCIÓN.

Sea $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$. Para $r > \rho$ se cumple $M(r) \leq r^n$ y según las desigualdades de Cauchy para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $r > \rho$ se verifica

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^k} \leq r^{n-k}.$$

Haciendo tender r hacia $+\infty$ se concluye que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k > n$.

Ejercicio 5.41.

Sea $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $r > 0$, donde $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera no constante. Demuestre que son equivalentes:

a) *f es un polinomio (de grado m);*

b) *para algún $m \in \mathbb{N}$ existe el límite $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{r^m} = L$ y $0 < L + \infty$;*

c) *existe el límite $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{\log M(r)}{\log r}$ (y vale m);*

d) $\displaystyle\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} < +\infty.$

(Véase el ejercicio 5.42).

SOLUCIÓN.

a) $\Rightarrow$ *b)* Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$ un polinomio con $a_m \neq 0$. Si $|z| = r$, en virtud de la desigualdad triangular

$$|a_m| r^m - p(r) \leq |f(z)| \leq |a_m| r^m + p(r),$$

donde $p(r) = |a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \cdots + |a_{m-1}| r^{m-1}$, luego

$$|a_m| r^m - p(r) \leq M(r) \leq |a_m| r^m + p(r).$$

Como $\lim_{r\to+\infty} p(r)/r^m = 0$, se obtiene *b)* con $L = |a_m|$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Existe $R > 0$ tal que si $r > R$ se cumple $L/2 < M(r)/r^m < 2L$, luego

$$m \log r + \log(L/2) < \log M(r) < m \log r + \log(2L).$$

Dividiendo por $\log r$ y pasando al límite se obtiene *c)*. (Obsérvese que el número m que hace que se cumpla *b)* es único).

c) $\Rightarrow$ *d)* Es evidente.

d) ⇒ *a*) Sea $A > \limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\log M(r)}{\log r}$.

Por la definición de límite superior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n > n$ tal que $\log M(r_n)/\log r_n < A$, es decir, $M(r_n) < r_n^A$. Según las desigualdades de Cauchy, si $k, n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq \frac{M(r_n)}{r_n^k} \leq r_n^{A-k}.$$

Como $r_n \to +\infty$, se concluye que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k > A$, luego f es un polinomio.

Ejercicio 5.42.

Sea $M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\}$, $r > 0$, donde $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera no constante. Demuestre que son equivalentes:

a) *f no es polinomio;*

b) $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{M(r)}{r^m} = +\infty$ *para todo $m \in \mathbb{N}$;*

c) $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\log M(r)}{\log r} = +\infty$*;*

d) $\limsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\log M(r)}{\log r} = +\infty$.

(Véase el ejercicio 5.41).

SOLUCIÓN.

a) ⇒ *b*) Si no se cumple *b*) deben existir $m \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ hay un $r_k > k$ verificando $M(r_k) \leq C r_k^m$.

Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f, en virtud de las desigualdades de Cauchy,

$$|a_n| \leq \frac{M(r_k)}{r_k^n} \leq \frac{C r_k^m}{r_k^n} = C r_k^{m-n}.$$

Si $n > m$ se cumple $\lim_k C r_k^{m-n} = 0$, luego $a_n = 0$ y por lo tanto f es un polinomio.

b) ⇒ *c*) Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $R_m > 0$ tal que si $r > R_m$ entonces $M(r)/r^m > m$, luego $\log M(r) > m \log r + \log m$ y se obtiene *c*).

c) ⇒ *d*) Es evidente.

d) ⇒ *a*) Véase el ejercicio 5.41.

Ejercicio 5.43.

Sea $\rho > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Demuestre que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n/n!)z^n$ es una función entera que verifica:

(P) Existen $A > 0$ y $a > 1/\rho$ tales que $|g(z)| \leq A e^{a|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ es una función entera que cumple (P) y $a_n = n!\, b_n$, demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $\rho \geq 1/a$.

SOLUCIÓN.

Para cada $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = |a_n| r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq A \frac{1}{n!} (a|z|)^n$$

donde $a = 1/r$ y $A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$. Se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ y que su suma g es una función entera que verifica

$$|g(z)| \leq A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a|z|)^n = A e^{a|z|}.$$

Recíprocamente, sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ una función entera que cumple la condición (P). Entonces poniendo $M(R) := \text{máx}\{|g(z)| : |z| = R\}$ se verifica $M(R) \leq A e^{aR}$ y, aplicando las desigualdades de Cauchy, se obtiene que para todo $R > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|b_n| \leq \frac{M(R)}{R^n} \leq A \frac{e^{aR}}{R^n}$$

La mejor cota de $|b_n|$ se consigue con $R = n/a$ que minimiza a $e^{aR} R^{-n}$ en $(0, +\infty)$. Con este valor de R se obtiene que $|b_n| \leq A(ae/n)^n$ luego

$$|n! b_n z^n| \leq \alpha_n \quad \text{donde } \alpha_n = A n! (ea|z|/n)^n.$$

Como $\text{lím}_n (\alpha_{n+1}/\alpha_n) = a|z|$, en virtud del criterio del cociente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ converge para $|z| < 1/a$. Lo mismo le ocurre a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, b_n z^n$ y por lo tanto su radio de convergencia ρ es mayor o igual que $1/a$.

Ejercicio 5.44.

Demuestre que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(D(0,1))$ es acotada si y sólo si existe una sucesión $M_n > 0$ que cumple las condiciones siguientes:

a) $\text{lím sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} \leq 1$;

b) $|f^{(n)}(0)| \leq n!\, M_n$, *para cada* $f \in \mathscr{F}$ *y* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(La definición de familia acotada se puede ver en el ejercicio 5.37).

SOLUCIÓN.

Supongamos que M_n cumple *a)* y *b)*. En virtud de *a)*, el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$ es mayor o igual que 1. Por lo tanto, si $r \in [0,1)$ la serie $C(r) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n r^n$ converge y en virtud de *b)*, para cada $f \in \mathscr{F}$ y cada $z \in D(0,r)$ se cumple

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n |z|^n \leq C(r).$$

Dado un compacto $K \subset D(0,1)$ existe $0 < r < 1$ tal que $K \subset \{z : |z| \leq r\}$, luego $\mathscr{F}$ es una familia acotada.

Recíprocamente, si $\mathscr{F}$ es acotada, para cada $r \in (0,1)$, el supremo

$$M(r) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathscr{F},\ |z| \leq r\}.$$

es finito. En virtud de las desigualdades de Cauchy, para todo $f \in \mathscr{F}$ se cumple

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

luego también son finitos los supremos

$$M_n = \sup\left\{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} : f \in \mathscr{F}\right\} \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

que, obviamente, cumplen *b*). Como $\sqrt[n]{M_n} \leq \sqrt[n]{M(r)}/r$, resulta

$$\limsup_n \sqrt[n]{M_n} \leq \frac{1}{r}$$

Esta desigualdad se verifica para todo $r \in [0,1)$ y, por lo tanto, se cumple *a*).

Ejercicio 5.45.
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, definida para* $|z| < R$*. Para* $0 \leq r < R$ *se definen*

$$M(f,r) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq r\}, \quad m(f,r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Demuestre la implicación

$$0 \leq r < r+\delta < R \ \Rightarrow \ M(f,r) \leq m(f,r) \leq \frac{r+\delta}{\delta} M(f,r+\delta)$$

y obtenga que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m(f^n,r)} = M(f,r)$.

SOLUCIÓN.

Es inmediato que $M(f,r) \leq m(f,r)$. Según las desigualdades de Cauchy,

$$|a_n| \leq \frac{M(f,r+\delta)}{(r+\delta)^n}$$

luego

$$m(f,r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq M(f,r+\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n = \frac{r+\delta}{\delta} M(f,r+\delta).$$

Considerando la función f^n resulta

$$M(f^n,r) \leq m(f^n,r) \leq C_\delta \, M(f^n,r+\delta) \ \text{ con } \ C_\delta = \frac{r+\delta}{\delta}$$

Como $M(f^n,r) = M(f,r)^n$, $M(f^n,r+\delta) = M(f,r+\delta)^n$, resulta

$$M(f,r) \leq \sqrt[n]{m(f^n,r)} \leq \sqrt[n]{C_\delta} \ M(f,r+\delta).$$

Si $\rho \in (r,R)$, por la continuidad uniforme de f sobre $\overline{D(0,\rho)}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < \rho - r$ tal que

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \ \text{ siempre que } \ |z| \leq \rho, \ |w| \leq \rho \ \text{ y } \ |z-w| \leq \delta.$$

Si $|w| \leq r + \delta < \rho$ es claro que existe $z \in \overline{D(0,r)}$ con $|z - w| \leq \delta$, luego

$$|f(w)| \leq |f(z)| + |f(w) - f(z)| \leq M(f,r) + \varepsilon.$$

De esto se sigue que $M(f, r + \delta) \leq M(f, r) + \varepsilon$. Combinando esta desigualdad con la obtenida anteriormente resulta

$$M(f,r) \leq \sqrt[n]{m(f^n, r)} \leq \sqrt[n]{C_\delta}\,(M(f,r) + \varepsilon),$$

luego

$$M(f,r) \leq \liminf_n \sqrt[n]{m(f^n, r)} \leq \limsup_n \sqrt[n]{m(f^n, r)} \leq M(f,r) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se concluye que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m(f^n, r)} = M(f,r)$.

Ejercicio 5.46.

Si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $\operatorname{Re} f(z) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que f es constante.

SOLUCIÓN.

La función entera $g(z) = e^{f(z)}$ es acotada pues $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^0 = 1$ y en virtud del teorema de Liouville es constante, luego su derivada $f'(z)e^{f(z)}$ es idénticamente nula. Como $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ se sigue que f es constante.

También se puede razonar considerando la función entera $T(f(z))$ donde T es una transformación de Möbius que lleva el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ sobre el disco $D(0,1)$ (por ejemplo, $T(z) = (z+1)/(z-1)$). Según el teorema de Liouville $T \circ f$ es constante, lo que implica que f también lo es.

Nota. En el ejercicio 5.47 se puede ver un resultado más general.

Ejercicio 5.47.

Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $f(\mathbb{C}) \cap [a,b] = \emptyset$, demuestre que f es constante.

SOLUCIÓN.

Si $w \notin [a,b]$ entonces $T(w) = (w-a)(w-b)$ no es real negativo. Entonces, en virtud de la hipótesis, $T(f(z))$ nunca es real negativo y esto permite definir la función entera $g(z) = \sqrt{T(f(z))}$. Como $\operatorname{Re} g(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, en virtud del ejercicio 5.46, g es constante y se sigue que f también lo es.

5.2.6. Complementos sobre funciones definidas por integrales

Los tres primeros ejercicios de este bloque albergan resultados básicos que sirven para establecer la holomorfía de funciones definidas por integrales. Estos resultados se utilizan luego en situaciones concretas.

Ejercicio 5.48.

Se supone que $F : [\alpha, \beta] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y que las funciones parciales $z \to F(t,z)$ son holomorfas en Ω, con derivada $D_2F(t,z)$. Demuestre:

a) *la integral* $f(z) = \int_\alpha^\beta F(t,z)\,dt$ *define una función holomorfa en* Ω*;*

b) *para cada* $z \in \Omega$*, la función* $t \to D_2F(t,z)$ *es continua en* $[\alpha,\beta]$ *y*

$$f'(z) = \int_\alpha^\beta D_2F(t,z)\,dt.$$

SOLUCIÓN.

Según la fórmula integral para el coeficiente $a_1 = D_2F(t,z)$, en el desarrollo en serie de potencias de $z \to F(t,z)$ alrededor de a, se tiene

$$D_2F(t,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{F(t,w)}{(w-a)^2}\,dw$$

donde se supone que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

Dado $\varepsilon > 0$, en virtud de la continuidad uniforme de F sobre el compacto $[\alpha,\beta] \times C_r([0,2\pi])$, existe $\eta > 0$ tal que

$$|s-t| < \eta \Rightarrow |F(t,w) - F(s,w)| < \varepsilon r \quad \text{para todo} \quad w \in C_r([0,2\pi])$$

Entonces, si $|s-t| < \eta$, se cumple

$$|D_2F(t,a) - D_2F(s,a)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{F(t,w)-F(s,w)}{(w-a)^2}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon r}{r^2}2\pi r = \varepsilon$$

Así queda demostrada la continuidad de $t \to D_2F(t,z)$.

La integral de esta función continua, y la de $t \to F(t,z)$ se pueden escribir como límites de sumas de Riemann: si $t_n^k = \alpha + (\beta-\alpha)k/n$, las sucesiones

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} F(t_n^k, z)\frac{\beta-\alpha}{n}; \quad f_n'(z) = \sum_{n=0}^{n-1} D_2F(t_n^k, z)\frac{\beta-\alpha}{n}$$

convergen, respectivamente, hacia $f(z)$ y hacia $\int_\alpha^\beta D_2F(t,z)\,dt$.

Para obtener *a)* y la validez de la fórmula en *b)* basta demostrar que la sucesión f_n converge hacia f uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$ y aplicar el teorema de Weierstrasss 5.1.15. Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme de F sobre el compacto $[\alpha,\beta]\times K$ asegura que existe $\delta > 0$ tal que

$$|s-t| < \delta,\ |z-w| < \delta,\ s,t \in [\alpha,\beta],\ z,w \in K \Rightarrow |F(t,z) - F(s,w)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

Si $n > (\beta-\alpha)/\delta$, para todo $z \in K$ se cumple

$$\begin{aligned}|f(z) - f_n(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_n^k}^{t_n^{k+1}} (F(t,z) - F(t_n^k,z))\,dt\right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_n^k}^{t_n^{k+1}} |F(t,z) - F(t_n^k,z)|\,dt \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

luego la sucesión f_n converge hacia f uniformemente sobre K. Aplicando el teorema de Weierstrass se concluye que f es holomorfa y que la sucesión f_n' converge hacia f' uniformemente sobre compactos, lo que lleva consigo la validez de la fórmula para la derivada dada en *b)*.

Nota. Si sólo se desea demostrar a) se puede emplear un razonamiento más breve basado en el teorema de Morera. En primer lugar se obtiene la continuidad de f en cada $a \in \Omega$ (usando la continuidad uniforme de F sobre $[\alpha, \beta] \times \overline{D(a,r)}$, con $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$). En segundo lugar se utiliza el teorema de Fubini para demostrar que si $R \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado se verifica

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R}\left(\int_\alpha^\beta F(t,z)\,dt\right)dz = \int_\alpha^\beta\left(\int_{\partial R} F(t,z)\,dz\right)dt = \int_\alpha^\beta 0\,dt = 0$$

(las integrales $\int_{\partial R} F(t,z)\,dz$ son nulas en virtud del teorema de Cauchy 5.1.7).

Ejercicio 5.49.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $F : [\alpha, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, se dice que la integral impropia

$$f(z) = \int_\alpha^{+\infty} F(t,z)\,dt$$

converge en Ω uniformemente sobre compactos, cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada sucesión $\beta_n > \alpha$ convergente hacia ∞ la sucesión de funciones $f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)dt$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre K.

Demuestre que una condición suficiente para ello es que se cumpla: para cada compacto $K \subset \Omega$ hay una función $\varphi_K : [a, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, con $a \geq \alpha$, integrable Riemann en sentido impropio, tal que $|F(t,z)| \leq \varphi_K(t)$ para cada $z \in K$ y cada $t \geq a$.

SOLUCIÓN.

Es claro que la condición del enunciado implica la convergencia absoluta de la integral impropia en cada $z \in \Omega$. Si $\beta_n > \alpha$ es una sucesión tal que $\lim_n \beta_n = +\infty$, la sucesión de funciones $f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)\,dt$ converge hacia la función $f(z)$ uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$: basta observar que si $\beta_n > a$, para cada $z \in K$ se cumple

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \int_{\beta_n}^{+\infty} |F(t,z)|\,dt \leq \int_{\beta_n}^{+\infty} \varphi_K(t)\,dt = \rho_n,$$

donde $\lim_n \rho_n = 0$.

Ejercicio 5.50.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $F : [\alpha, +\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que todas las funciones parciales $z \to F(t,z)$ son holomorfas en Ω, con derivada $D_2F(t,z)$. Si la integral

$$f(z) = \int_\alpha^{+\infty} F(t,z)\,dt$$

converge uniformemente sobre los compactos de Ω, demuestre que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y que para cada $z \in \Omega$, la función $t \to D_2F(t,z)$ es continua en $[\alpha, +\infty)$ y verifica

$$f'(z) = \int_\alpha^{+\infty} D_2F(t,z)\,dt$$

donde la integral sigue siendo uniformemente convergente sobre compactos de Ω.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 5.48, para cada $\beta > \alpha$ las funciones $t \to D_2F(t,z)$ son continuas en $[\alpha,\beta]$, luego son continuas en $[\alpha,+\infty)$.

Dada una sucesión $\beta_n > \alpha$ convergente hacia $+\infty$, según el mismo ejercicio, las funciones $f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)\,dt$ son holomorfas en Ω con derivada

$$f_n'(z) = \int_\alpha^{\beta_n} D_2F(t,z)\,dt.$$

Si la integral impropia del enunciado converge uniformemente sobre compactos, dada una sucesión $\beta_n > \alpha$ con $\lim_n \beta_n = +\infty$, la sucesión de funciones $f_n(z) = \int_\alpha^{\beta_n} F(t,z)\,dt$ converge hacia $f(z)$ uniformemente sobre compactos y con el teorema de Weierstrass se concluye que f es holomorfa en Ω con derivada

$$f'(z) = \lim_n f_n'(z) = \lim_n \int_\alpha^{\beta_n} D_2F(t,z)\,dt$$

donde la convergencia de la sucesión de derivadas también es uniforme sobre compactos. Nótese que, al ser cierta esta afirmación para todas las sucesiones $\beta_n > \alpha$ con $\lim_n \beta_n = +\infty$, tenemos garantizada la convergencia uniforme sobre compactos de la integral impropia

$$\int_\alpha^{+\infty} D_2F(t,z)\,dt = f'(z).$$

Nota. Cuando el intervalo $[\alpha,+\infty)$ se reemplaza por un intervalo acotado $[\alpha,\beta)$, hay versiones análogas de los resultados de los ejercicios 5.49 y 5.50, para las integrales impropias de segunda especie de la forma $\int_\alpha^{\beta-} F(t,z)\,dt$ y también para las integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\beta} F(t,z)\,dt, \qquad \int_{\alpha+}^{\beta} F(t,z)\,dt.$$

Ejercicio 5.51.

Si $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y $|\varphi(t)| < Ae^{\alpha t}$ para todo $t \geq R > 0$, demuestre que $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\varphi(t)\,dt$ define una función holomorfa en el abierto $\Omega_\alpha = \{z : \operatorname{Re} z > \alpha\}$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 5.50 basta comprobar que la integral impropia del enunciado converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω_α.

Dado un compacto $K \subset \Omega_\alpha$ es claro que $a = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > \alpha$ y que para todo $z \in K$ y todo $t \geq R$ se cumple

$$|e^{-zt}\varphi(t)| = e^{-t\operatorname{Re} z}|\varphi(t)| \leq e^{-at}Ae^{\alpha t} = Ae^{-\beta t}$$

donde $\beta = \alpha - a > 0$. Como la integral $\int_R^{+\infty} Ae^{-\beta t}\,dt$ es convergente, con el resultado visto en ejercicio 5.49, se obtiene que la integral del enunciado converge uniformemente sobre K.

Ejercicio 5.52.

Demuestre que la integral $f_0(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$ *converge uniformemente sobre compactos en el semiplano* $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$*, donde define una función holomorfa y que la integral* $f_1(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* $\mathbb{C}$*, donde define una función entera. Se concluye que la integral*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

define una función holomorfa en el semiplano H*.*

SOLUCIÓN.

a) Si $K \subset H$ es compacto, es claro que $\delta = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 0$. Para todo $z \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple:

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{x-1} \leq t^{\delta-1}$$

y, teniendo en cuenta que la integral impropia $\int_{0-}^{1} t^{\delta-1}dt$ es convergente, con la versión de los ejercicios 5.49 y 5.50 para integrales impropias de segunda especie, se obtiene el resultado deseado.

b) Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, sea $A = \max\{\operatorname{Re} z : z \in K\} < +\infty$. Para todo $z \in K$ y todo $t \in [1, +\infty)$ se cumple:

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{A-1} \leq (e^{-t}t^{A+1})t^{-2}.$$

La función $t^{A+1}e^{-t}$ está acotada en $[1 + \infty)$ (porque es continua con límite 0 en $+\infty$) y podemos considerar la constante $C = \sup\{e^{-t}t^{A+1} : t \geq 1\} < +\infty$, con la que se obtiene

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq Ct^{-2}.$$

Como la integral impropia $\int_1^{+\infty} t^{-2}dt$ es convergente, con los ejercicios 5.49 y 5.50 se obtiene el resultado deseado.

Ejercicio 5.53.

Demuestre que la integral

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\,dt$$

define una función holomorfa en $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$*. Más concretamente:*

a) *la integral* $F_0(z) = \int_0^1 t^{z-1}/(e^t - 1)\,dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* Ω_1 *donde define una función holomorfa;*

b) *la integral* $F_1(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1}/(e^t - 1)\,dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* $\mathbb{C}$ *donde define una función entera.*

SOLUCIÓN.

Como la demostración es análoga a la del ejercicio 5.52, sólo indicamos las pequeñas modificaciones pertinentes.

a) Si $K \subset \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ es compacto, $\delta = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$ y para todo $z \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple:

$$|t^{z-1}/(e^t - 1)| \leq t^{x-1}/t = t^{x-2} \leq t^{\delta-2}.$$

b) Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $A = \max\{\operatorname{Re} z : z \in K\} < +\infty$, para todo $z \in K$ y todo $t \in [1, +\infty)$ se cumple:

$$|t^{z-1}/(e^t - 1)| = t^{x-1}/(e^t - 1) \leq t^{A-1}/(e^t - 1) \leq C/t^2$$

donde $C = \sup\{t^{A+1}/(e^t - 1) : t \geq 1\} < +\infty$.

Ejercicio 5.54.

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$F(t, z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} & si \;\; t \neq 0, \\ z - 1 & si \;\; t = 0. \end{cases}$$

Demuestre que la integral $\int_0^{+\infty} F(t, z)\, dt$ converge para $\operatorname{Re} z > 0$ y calcule su valor.

SOLUCIÓN.

Si $t \neq 0$ se tiene

$$F(t, z) = \frac{(1 - t + t^2/2! - t^3/3! + \cdots) - (1 - tz + t^2 z^2/2! - t^3 z^3/3! + \cdots)}{t}$$

En términos de la función entera $h(w) = w/2! - w^2/3! + w^3/4! - \cdots$ obtenemos

$$F(t, z) = z - 1 + h(t) - zh(tz) \;\; \text{para todo } (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

Por lo tanto F es continua y las funciones parciales $z \to F(t, z)$ son holomorfas.

Dado un compacto $K \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ si $a = \min\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 0$, para todo $z \in K$ y todo $t \geq 1$ se cumple

$$|F(t, z)| \leq |e^{-t} - e^{-tz}| \leq e^{-t} + e^{-at},$$

donde $\int_1^{+\infty}(e^{-t} + e^{-at})dt < +\infty$, luego la integral impropia $\int_1^{+\infty} F(t, z)\, dt$ converge uniformemente sobre K y lo mismo le ocurre a la integral del enunciado (véase el ejercicio 5.49).

Según el ejercicio 5.50, la convergencia uniforme sobre compactos en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ garantiza que la integral define en este semiplano una función holomorfa $g(z)$ cuya derivada se obtiene mediante derivación bajo la integral:

$$g'(z) = -\int_0^{+\infty} e^{-tz}\, dt$$

Es obvio que $g'(x) = 1/x$ si $x > 0$ lo que lleva consigo (por el principio de identidad) que $g'(z) = 1/z$ si $\operatorname{Re} z > 0$. Como $g(1) = 0$ resulta $g(z) = \operatorname{Log} z$.

5.3. Ejercicios propuestos

5.1 Sea γ un camino regular a trozos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Determine $a \in \mathbb{C}$ para que la integral

$$\int_\gamma \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) e^z \, dz$$

sólo dependa de los extremos del camino γ.

5.2 Sean P, Q polinomios complejos tales que $\mathrm{grado}(Q) - \mathrm{grado}(P) \geq 2$. Demuestre que existe $r > 0$ tal que si γ es un camino cerrado regular a trozos en $\{z : |z| > r\}$ se cumple

$$\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} \, dz = 0.$$

5.3 Calcule las integrales

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z} dz; \quad \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+1}; \quad \int_{C_1} e^z z^{-n} dz; \quad \int_{C_2} z^n (1-z)^m dz;$$

donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.4 Obtenga un abierto $\Omega \supset \{z : |z| = 1\}$ donde haya definido un logaritmo holomorfo $f(z)$ de $(z+1)/(z-1)$. Calcule $\int_C z^n f(z) \, dz$ donde $C(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.5 Sea $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, definida en $D(0, r)$ y $0 < \rho < r$. Calcule, en términos de los coeficientes a_n, el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} e^{w/z} \frac{f(z)}{z} \, dz$$

donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.6 Sea $g \in \mathscr{H}(D(0, \rho))$ y f holomorfa en $\{z : |z| > 0\}$, con un desarrollo de Laurent de la forma $\sum_{n=0}^\infty a_n / z^{n+1}$. Demuestre que para $|z| \leq r < \rho/2$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) g(z-w) \, dw = a_0 g(z) - a_1 g'(z) + \frac{a_2}{2!} g''(z) - \frac{a_3}{3!} g'''(z) - \cdots$$

donde $C(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

5.7 Si $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $D(0,1)$, demuestre

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - \overline{z} e^{it}} \, dt$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - z e^{-it}} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) \, dt + i v(0)$$

donde $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ y $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

5.8 Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ para cada $z \in D(0,1)$ y $f(0) = \frac{1}{2}$. Demuestre que si $|z| \leq \rho < 1$ entonces $2|f(z)| \leq (1+\rho)/(1-\rho)$.

Indicación. Utilice la fórmula integral del ejercicio propuesto anterior.

5.9 ¿Existe $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f^{(n)}(\frac{1}{3}) = n!\sqrt{n}\,2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$?

5.10 Si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y $|f(z)| \leq M$ cuando $|z| \leq R$, obtenga la mejor cota de $\{|f^{(n)}(z)| : |z| \leq \rho\}$ que proporcionan las desigualdades de Cauchy, para $0 < \rho < R$ y $n \in \mathbb{N}$.

5.11 Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ una función entera. Demuestre que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante:

a) $|f(z)| \neq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
b) $|f(z)| \leq 1 + \sqrt{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
c) f tiene los periodos $1, i$;
d) $f(z) \notin \{w :\in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq 0\}$.

5.12 Demuestre que las integrales

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+z}\,dt; \qquad g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{1+t}\,dt$$

definen una función f holomorfa en $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y una función g holomorfa en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. ¿Qué relación hay entre estas funciones?

5.13 Si $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y periódica, de periodo $a > 0$, demuestre que la integral

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\varphi(t)\,dt$$

define en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ una función holomorfa que verifica $F(z)(1 - e^{-az}) = \int_0^a e^{-zt}\varphi(t)\,dt$. Obtenga $F'(z)$.

Capítulo 6

Singularidades aisladas

6.1. Preliminares teóricos

6.1.1. Comportamiento local

Después del teorema 5.1.10 sabemos que las funciones holomorfas son válidos los resultados y las propiedades típicas de las funciones analíticas (referentes a sus ceros, multiplicidades, principio de identidad, etc.) En particular, se verifica lo establecido en el ejercicio 4.52, que queda recogido en los siguientes resultados.

Proposición 6.1.1.
Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante y $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno abierto $G_a \subset \Omega$ en el que f se puede expresar en la forma

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \textit{para todo } z \in G_a$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$ y φ es un isomorfismo conforme entre G_a y un disco $D(0, \delta)$.

Teorema 6.1.2. Aplicación abierta.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante entonces f es abierta.

Más concretamente, para cada $a \in \Omega$, si $b = f(a)$ y m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - b$, existe un entorno abierto de a $U_a \subset \Omega$ tal que $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de b con la siguiente propiedad: para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$ la función $z \to f(z) - w$ posee m ceros distintos en U_a y todos ellos son simples.

Corolario 6.1.3.
Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ es holomorfa (es decir, f es un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen).

Teorema 6.1.4. Función inversa.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, tal que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V = f(U_a)$ es abierto y la transformación inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V \longrightarrow U_a$ es holomorfa.

6.1.2. Singularidades aisladas

Definición 6.1.5.
Un punto $a \in \mathbb{C}$ *se dice que es singularidad aislada de* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *si* $a \notin \Omega$ *pero* $D^*(a, r) \subset \Omega$ *para algún* $r > 0$*. En este caso*

a) *si existe el límite* $\lim_{z \to a} f(z) = b \in \mathbb{C}$ *se dice que* a *es singularidad evitable de* f*;*

b) *si existe el límite* $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ *se dice que* a *es polo de* f*;*

c) *si no existe el límite* $\lim_{z \to a} f(z)$ *en* $\mathbb{C}_\infty$ *se dice que* a *es singularidad esencial de* f*.*

Proposición 6.1.6.
Si a *es singularidad aislada de* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*, son equivalentes:*

a) a *es singularidad evitable de* f*;*

b) f *está acotada en algún* $D^*(a, r) \subset \Omega$*;*

c) f *admite una extensión holomorfa al abierto* $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$*.*

Si a es singularidad evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, definiendo $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$, la singularidad queda eliminada.

Proposición 6.1.7.
Sea a *una singularidad aislada de* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$*. Son equivalentes:*

a) a *es polo de* f*;*

b) *existe* $D^*(a, \delta) \subset \Omega$ *y* $F \in \mathscr{H}(D(a, \delta))$*, con* $F(a) = 0$ *tal que, para todo* $z \in D^*(a, \delta)$*,* $f(z) = 1/F(z)$ *;*

c) *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $(z - a)^m f(z)$ *tiene límite finito no nulo cuando* $z \to a$*;*

d) *existe un único polinomio* P *de grado* m*, con* $P(0) = 0$*, tal que* a *es singularidad evitable de* $f(z) - P(1/(z - a))$*.*

Si a es polo de f se define su *multiplicidad* como el único $m \in \mathbb{N}$ que hace que se cumpla la condición 6.1.7 *c*) (o la condición 6.1.7 *d*)), lo que ocurre si y sólo si a es cero de multiplicidad m de la función F que interviene en 6.1.7 *b*). En las condiciones de la proposición anterior la función $S_a(z) = P(1/(z - a))$ se llama *parte principal* (o *singular*) de f en a y se suele escribir en la forma

$$S_a(z) = \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z - a)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - a}$$

La *parte regular* de f en a es la función $R_a(z) = f(z) - S_a(z)$, que se puede suponer definida y holomorfa en $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$.

Sumando el desarrollo en serie de potencias de $R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, en $D(a,r) \subset \Omega$, a la parte singular, se obtiene el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a,r)$, que sólo tiene un número finito de potencias negativas de $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{si } 0 < |z-a| < r.$$

Proposición 6.1.8.
Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a,r) \subset \Omega$. Si $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$, se verifica

a) *a es singularidad evitable si y sólo si* $\inf M \geq 0$;

b) *a es polo (de multiplicidad m) si y sólo si* $\inf M = -m < 0$;

c) *a es singularidad esencial si y sólo si* $\inf M = -\infty$.

Teorema 6.1.9. Casorati-Weierstrass.
Si a es singularidad aislada de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, son equivalentes

a) *a es singularidad esencial de f;*

b) *$f\big(D^*(a,\varepsilon)\big)$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada $D^*(a,\varepsilon) \subset \Omega$.*

Singularidades aisladas en ∞

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $D^*(\infty,r) \subset \Omega$ se dice que ∞ es *singularidad aislada* de f, y se califica como singularidad evitable, polo o singularidad esencial según que la función $f(1/z)$ tenga en 0, respectivamente, una singularidad evitable, un polo, o una singularidad esencial.

Si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de f en $D^*(\infty,r) \subset \Omega$ y $M = \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$, se verifica:

a) ∞ es singularidad evitable de f si y sólo si $\sup M \leq 0$;

b) ∞ es polo de f, de multiplicidad m, si y sólo si $\sup M = m > 0$;

c) ∞ es singularidad esencial de f si y sólo si $\sup M = +\infty$.

Si ∞ es singularidad evitable de f, podemos considerar el desarrollo de Laurent en $D^*(\infty,r) \subset \Omega$ que, según *a*), no contiene potencias positivas de z:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots \quad \text{si } |z| > \frac{1}{r}$$

Si $a_0 = 0$ entonces ∞ es cero de f, que es aislado si y sólo existe $n \in \mathbb{N}$, con $a_{-n} \neq 0$ y, en ese caso, se define su multiplicidad como

$$m := \min\{n : a_{-n} \neq 0\}.$$

Este valor es el único $m \in \mathbb{N}$ para el que el límite $\lim_{z\to\infty} z^m f(z)$ existe y es finito no nulo (o bien, el único $m \in \mathbb{N}$ tal que f se puede expresar en la forma $f(z) = F(z)/z^m$ con $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $F(\infty) \neq 0$).

El ejemplo típico de función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, con $\infty \in \Omega$, surge cuando ∞ es singularidad evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega_0)$ y se elimina la singularidad definiendo $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$. De esta forma se obtiene una función $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ holomorfa en el abierto $\Omega = \Omega_0 \cup \{\infty\}$. Recíprocamente, si $\infty \in \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces ∞ es singularidad evitable de $f|_{\Omega_0}$, donde $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\infty\}$.

Cuando ∞ es polo de f se define su multiplicidad como la del polo que $f(1/z)$ tiene en 0. Se obtiene así el único $m \in \mathbb{N}$ para el que existe $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^m \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Si ∞ es polo de f, de multiplicidad m, entonces ∞ es singularidad evitable de $1/f$ y, después de eliminarla, podemos considerar que $1/f$ es holomorfa en $D(\infty, r)$, con un cero de multiplicidad m en ∞. Es decir, ∞ es polo de f de multiplicidad m si y sólo si $1/f(1/z)$ tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad m.

Si ∞ es polo de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, de multiplicidad m, el desarrollo de Laurent de f en un disco $D^*(\infty, r) \subset \Omega$ es de la forma $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n z^n$. Entonces la *parte principal* o *singular* de f en ∞ es el polinomio $S(z) = \sum_{n=1}^{m} a_n z^n$. Se trata entonces del único polinomio de grado m, con $S(0) = 0$, que hace que $f - S$ tenga una singularidad evitable en ∞. La parte *regular* de f en ∞ es la función $R = f - S$ (que se puede suponer definida y holomorfa en $\Omega \cup \{\infty\}$).

En virtud del teorema 6.1.9, ∞ es singularidad esencial de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ si y sólo si $f\big(D^*(\infty, \varepsilon)\big)$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada $D^*(\infty, \varepsilon) \subset \Omega$.

Ejemplos 6.1.10.

a) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y g no es idénticamente nula, el cociente f/g define una función holomorfa en $\Omega\setminus\mathscr{Z}(g)$ y cada $a \in \mathscr{Z}(g)$ es una singularidad aislada de f/g. Sea a un cero de g con multiplicidad m. Si a también es cero de f con multiplicidad $p \geq m$ entonces la singularidad es evitable (cuando $p > m$, al eliminar la singularidad, a se convierte en cero de f/g de multiplicidad $p-m$). Si a no es cero de f (respectivamente, si a es cero de f de multiplicidad $p < m$) entonces a es polo de f/g de multiplicidad m (resp. $m - p$).

b) Si P, Q son polinomios complejos, de grados p y q respectivamente, la función racional $f = P/Q$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathscr{Z}(Q)$ y presenta una singularidad evitable en ∞ cuando $p \leq q$ (si $p < q$, después de eliminar la singularidad, ∞ se convierte en cero de P/Q de multiplicidad $q - p$) y un polo de multiplicidad $p - q$ cuando $p > q$. En particular, si P es un polinomio complejo de grado p entonces ∞ es polo de P de multiplicidad p.

c) ∞ es singularidad esencial de $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ si y sólo si f no es un polinomio.

d) Si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ no es un polinomio entonces a es singularidad esencial de la función $f\big(1/(z-a)\big)$.

6.1.3. Residuo en una singularidad aislada

Definición 6.1.11.

Si $a \in \mathbb{C}$ *es singularidad aislada de* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *el residuo de* f *en* a*, denotado* $\operatorname{Res}(f, a)$*, es el único* $\alpha \in \mathbb{C}$ *que hace que la función*

$$f(z) - \frac{\alpha}{z-a}$$

tenga primitiva en cada $D^*(a, r) \subset \Omega$.

Si ∞ *es singularidad aislada de* f *se define* $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(g, 0)$ *donde* $g(z) = -f(1/z)/z^2$.

Si f es holomorfa en $D^*(a, r)$ y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ es su desarrollo de Laurent en $D^*(a, r)$, entonces $f(z) - a_{-1}/(z-a)$ tiene primitiva en $D^*(a, r)$, luego $\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}$.

a) Si $a \in \mathbb{C}$ es singularidad evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

b) Si $a \in \mathbb{C}$ es polo simple de f, $\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

c) Si $a \in \mathbb{C}$ es polo de multiplicidad $m > 1$,

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{h^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}$$

d) $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ cuando 0 es singularidad aislada de una función par f.

e) Si $a \in \mathbb{C}$ es singularidad aislada de f y g es holomorfa en un entorno de a entonces $\operatorname{Res}(f, a) = \operatorname{Res}(f + g, a)$ (véase el ejercicio 7.19).

Si ∞ es singularidad aislada de f y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ es el desarrollo de Laurent de f en $D^*(\infty, r) \subset \Omega$ entonces $\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$. Puede ocurrir que ∞ sea singularidad evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y que $\operatorname{Res}(f, \infty) \neq 0$ (por ejemplo, $\operatorname{Res}(1/z, \infty) = -1$).

En virtud del resultado del ejercicio 7.23, el cálculo de $\operatorname{Res}(f, \infty)$ puede servir para obtener el residuo en otros puntos. En los ejercicios 6.17, 6.18, 7.19, 7.23, 7.25, 7.27 y 7.32 se utilizan éstas y otras técnicas para el cálculo del residuo.

6.1.4. Funciones meromorfas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ abierto, $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados (entre los que puede figurar ∞) y $\Omega_0 = \Omega \setminus S$. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega_0)$ y cada $a \in S$ es un polo de f podemos extender f a todo Ω definiendo $f(a) = \infty$ para cada $a \in S$. Se obtiene así una función continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ que satisface la siguiente definición:

Definición 6.1.12.

Una función continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$*, definida en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$*, se dice que es meromorfa si los puntos de* $\mathscr{P}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = \infty\}$ *son aislados en* Ω *(es decir,* $\Omega \cap \mathscr{P}(f)' = \emptyset$*) y la restricción de* f *al abierto* $\Omega_0 = \Omega \setminus \mathscr{P}(f)$ *es holomorfa.*

En las condiciones de la definición anterior cada punto de $\mathscr{P}(f)$ es una singularidad aislada de tipo polo de $f|_{\Omega_0}$ y se dice que $\mathscr{P}(f)$ es el conjunto de los polos de f. En lo que sigue $\mathscr{M}(\Omega)$ designa el conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

El lector interesado puede ver en el ejercicio 6.27 la siguiente caracterización de las funciones meromorfas:

Proposición 6.1.13.

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$*, donde* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ *es un abierto conexo y* $f(\Omega) \neq \{\infty\}$*. Entonces* f *es meromorfa si y sólo si es derivable en cada* $z \in \Omega$*.*

Ejemplos 6.1.14.

a) Sea $R(z) = P(z)/Q(z)$ *una función racional, donde* P *y* Q *son polinomios, sin ceros comunes, de grados* n *y* m *respectivamente. Definiendo* $R(a) = \infty$ *si* $Q(a) = 0$ *y* $R(\infty) = \lim_{z\to\infty} R(z) \in \mathbb{C}_\infty$ *se obtiene una función meromorfa* $R \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_\infty)$*. Cuando* $n > m$ *hay un polo de multiplicidad* $n - m$ *en* ∞*.*

b) Sean $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ *donde* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ *es abierto conexo,* g *no es idénticamente nula y* $\mathscr{Z}(f) \cap \mathscr{Z}(g) = \emptyset$*. El cociente* $F(z) = f(z)/g(z)$ *define en* Ω *una función meromorfa (usando el convenio habitual* $c/0 = \infty$ *si* $c \neq 0$*) tal que* $\mathscr{P}(F) = \mathscr{Z}(g)$*. Si* $a \in \mathscr{P}(F)$*, la multiplicidad de* a *como polo de* F *coincide con la multiplicidad de* a *como cero de* g*.*

Operaciones con funciones meromorfas

Si f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ y $\mathscr{P}(f)$ es el conjunto de sus polos, la restricción de f al abierto $\Omega \setminus \mathscr{P}(f)$ es una función holomorfa tal que cada $a \in \mathscr{P}(f)$ es una singularidad aislada de tipo polo. Dada otra función meromorfa $g \in \mathscr{M}(\Omega)$, la función suma $f(z) + g(z)$ está definida como función holomorfa en el abierto $\Omega \setminus (\mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g))$. Cada $a \in \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g)$ es una singularidad aislada de $f + g$. Generalmente a será un polo, pero puede ser una singularidad evitable cuando a sea polo de f y g, con partes singulares que se cancelen al sumar. Eliminando estas singularidades evitables queda definida la suma $f + g \in \mathscr{M}(\Omega)$ con $\mathscr{P}(f + g) \subset \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g)$. En cada uno de sus polos la parte singular de $f + g$ es la suma de las correspondientes partes singulares de f y g.

De manera similar se definen el producto $fg \in \mathscr{M}(\Omega)$. Si $a \in \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g)$ es polo de f de multiplicidad m entonces el producto fg, inicialmente definido en $\Omega \setminus (\mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g))$, presenta en a un polo o una singularidad evitable (cuando a es cero de g de multiplicidad mayor o igual que m). Eliminando estas singularidades evitables queda definido el producto $fg \in \mathscr{M}(\Omega)$.

Para definir el cociente f/g como función meromorfa debemos exigir que todos los ceros de g sean aislados. En este caso los polos de $f/g \in \mathscr{M}(\Omega)$ están contenidos en $\mathscr{P}(f) \cup \mathscr{Z}(g)$. Cuando $a \in (\mathscr{P}(f) \cap \mathscr{P}(g)) \cup (\mathscr{Z}(f) \cap \mathscr{Z}(g))$ puede ocurrir que a sea singularidad evitable de f/g. Después de eliminar estas singularidades evitables queda definida la función meromorfa f/g con polos $\mathscr{P}(f/g) \subset \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{Z}(g)$.

Si el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es conexo entonces $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo con la suma y el producto que se acaban de definir. Con recursos avanzados se puede demostrar que si $\Omega \neq \mathbb{C}_\infty$ es conexo entonces $\mathscr{M}(\Omega)$ es el cuerpo de fracciones del anillo $\mathscr{H}(\Omega)$, es decir, cada $F \in \mathscr{M}(\Omega)$ se puede obtener como un cociente $F = f/g$ con $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$. Este resultado es falso cuando $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ ya que $\mathscr{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es el cuerpo de las funciones racionales (ejercicio 6.24) y $\mathscr{H}(\mathbb{C}_\infty)$ sólo contiene las funciones constantes (en virtud del teorema de Liouville).

Series de funciones meromorfas

Definición 6.1.15.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones meromorfas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que converge uniformemente sobre compactos, cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ que verifica

a) $P(f_n) \cap K = \emptyset$ *para cada* $n > m$;

b) *la serie* $\sum_{n>m} f_n$ *converge uniformemente sobre* K.

Dada una serie de funciones meromorfas que cumple la definición 6.1.15, es fácil ver que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. Como las funciones f_n son holomorfas en $\Omega_0 = \Omega \setminus M$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega_0$, el teorema de Weierstrass asegura que la suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ está definida y es holomorfa en Ω_0, con una singularidad aislada en cada $a \in M$, que necesariamente es polo o singularidad evitable (lo último ocurre cuando se cancela la suma —finita— de las partes principales en a de las funciones f_n). Así queda definida la función meromorfa suma $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, con polos $P(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$. Además, si se cumple la condición $P(f_n) \cap P(f_m) = \emptyset$ cuando $n \neq m$, se puede asegurar que $P(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(f_n)$ y que la parte principal de f en $a \in P(f)$ es la suma (necesariamente finita) de las partes principales de los sumandos.

Teorema 6.1.16. Mittag-Leffler.

Sea P_n una sucesión de polinomios con $P_n(0) = 0$ y $a_n \in \mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos dos a dos, tal que

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots |a_n| \leq \cdots \quad y \quad \lim_n |a_n| = +\infty.$$

Entonces existe una sucesión de polinomios Q_n tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right]$$

converge uniformemente sobre compactos y su suma es una función meromorfa $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que la parte principal de f en cada a_n es $P_n(1/(z - a_n))$.

Corolario 6.1.17.

Sea $M \subset \mathbb{C}$ sin puntos de acumulación finitos (es decir, $M' \cap \mathbb{C} = \emptyset$) y para cada $a \in M$ sea $P_a(z)$ un polinomio con $P_a(0) = 0$. Entonces existe $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos $P(f) = M$, tal que en cada polo $a \in P(f)$ la parte principal de f es $P_a(1/(z - a))$.

Corolario 6.1.18.

Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $P(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dados según módulos crecientes $|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \cdots$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P_n(1/(z - a_n))$ la parte principal de f en a_n. Entonces existe una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y una sucesión de polinomios Q_n tales que f admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right]$$

uniformemente convergente sobre compactos.

6.2. Ejercicios resueltos

6.2.1. Sobre singularidades evitables y polos

Empezamos los ejercicios de este capítulo con algunos en cuya solución intervienen las caracterizaciones 6.1.6 y 6.1.7 de las singularidades evitables y de los polos.

Ejercicio 6.1.

Obtenga la relación que hay entre dos funciones enteras f, g que verifican

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

SOLUCIÓN.

Si g es idénticamente nula, f también lo es. En otro caso, cada $a \in \mathscr{Z}(g)$ es una singularidad aislada de f/g. La función $F = f/g$ es acotada y, según la proposición 6.1.6, todas sus singularidades aisladas son evitables. Después de eliminarlas podemos suponer que F es una función entera que cumple $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Liouville implica que F es constante. Se obtiene así que existe $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \leq 1$, tal que $f = \mu g$.

Ejercicio 6.2.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, con $\Omega \supset \{z : |z| > r\}$, tal que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. *Demuestre que $\{z^2 f(z) : |z| > R\}$ es acotado para algún $R > r$.*

SOLUCIÓN.

$g(z) = zf(z)$ presenta una singularidad evitable en ∞, que se elimina definiendo $g(\infty) = 0$, de modo que su desarrollo de Laurent en $\{z : |z| > r\}$ es de la forma

$$g(z) = \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \cdots, \quad \text{si } |z| > r;$$

luego

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z^2} + \frac{a_{-2}}{z^3} + \frac{a_{-3}}{z^4} + \cdots, \quad \text{si } |z| > r.$$

Como $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = a_{-1}$, se sigue que $\{z^2 f(z) : |z| > R\}$ es acotado para algún $R > r$.

Ejercicio 6.3.

Determine la parte principal y la parte regular de $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ en $z = 0$.

SOLUCIÓN.

La función f es holomorfa en el disco perforado $D^*(0, 2\pi)$ donde no se anula el denominador $e^z - 1 = z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots$. Se sigue que

$$F(z) = zf(z) = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + \cdots}$$

presenta una singularidad evitable en $z = 0$, que desaparece definiendo $F(0) = 1$. En virtud de 5.1.10, F admite en $D(0, 2\pi)$ un desarrollo en serie de potencias

$$F(z) = 1 - \frac{1}{2}z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

en el que los dos primeros términos se han calculado usando el método de los coeficientes indeterminados. Se obtiene así que

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + a_2 z + a_3 z^3 \cdots$$

luego la parte principal de f en $z = 0$ es $1/z$. La parte regular

$$R(z) = f(z) - \frac{1}{z} = \frac{1 + z - e^z}{z(e^z - 1)}$$

presenta en 0 una singularidad evitable que se elimina definiendo $R(0) = -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 6.4.

Determine la parte principal y la parte regular de $f(z) = (\pi/\operatorname{sen}\pi z)^2$ en cada uno de sus polos. ¿Cuál es el valor de la parte regular en el polo correspondiente?

SOLUCIÓN.

La función $(\operatorname{sen}\pi z)^2$ presenta ceros dobles en los enteros, luego f presenta polos dobles en los enteros. Comenzamos calculando la parte principal de f en $z = 0$. Para ello debemos obtener los primeros términos del desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de la función

$$z^2 f(z) = \left(\frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2 = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

donde sólo aparecen potencias pares de z porque la función es par.

$$a_0 = \lim_{z \to 0} z^2 f(z) = 1$$

luego la parte principal de f en 0 es $1/z^2$. El desarrollo en serie de potencias alrededor de 0 de la parte regular es

$$R(z) = f(z) - 1/z^2 = a_2 + a_4 z^2 + \cdots$$

y el valor $R(0) = a_2$ se puede calcular con el método de los coeficientes indeterminados: efectuando el producto de convolución de las series

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}\right)^2 (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots) = \\
&= \left(1 - \frac{\pi^2}{3!}z^2 + \frac{\pi^4}{5!}z^4 - \cdots\right)^2 (1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots) = \\
&= \left(1 - \frac{\pi^2}{3}z^2 + \alpha z^4 + \cdots\right)(1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots),
\end{aligned}$$

se obtiene que $a_2 = \pi^2/3$.

Para calcular la parte principal de f en $z = n \in \mathbb{Z}$ basta observar que si z varía en un entorno perforado de n, entonces $w = z - n$ varía en un entorno perforado de 0, y se cumple

$$f(z) = f(w) = \frac{1}{w^2} + R(w) = \frac{1}{(z-n)^2} + R(z-n).$$

Se sigue de esto que la parte principal de f en n es $1/(z-n)^2$ y que la parte regular es $R(z-n)$, cuyo valor en n es $R(0) = \pi^2/3$.

Ejercicio 6.5.

Sea $\Omega = D(0,r) \setminus \{a\}$ con $|a| = 1 < r$. Si a es polo simple de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,1)$, demuestre que se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a.$$

SOLUCIÓN.

La parte principal de f en a es de la forma $S(z) = \alpha/(z-a)$, con $\alpha \neq 0$. Después de eliminar la singularidad evitable que $R(z) = f(z) - S(z)$ tiene en a, podemos considerar que R es holomorfa en $D(0,r)$ donde admite un desarrollo en serie de potencias:

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad \text{si } |z| < r.$$

El desarrollo en serie de potencias de $f(z) = S(z) + R(z)$ en $D(0,1)$ se obtiene sumando el desarrollo en serie geométrica

$$S(z) = \frac{\alpha}{z-a} = -\frac{\alpha}{a}\left(\frac{1}{1-z/a}\right) = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

que es válido para $|z/a| = |z| < 1$. Se obtiene así que $a_n = b_n - \alpha/a^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La condición $|a| = 1 < r$ garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n$, luego $\lim_n b_n a^{n+1} = 0$. Se sigue de esto que $a_n = (b_n a^{n+1} - \alpha)/(a^{n+1})$ no se anula a partir de un cierto valor de n, y que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = a\frac{b_n a^{n+1} - \alpha}{b_{n+1}a^{n+2} - \alpha}$$

tiende hacia a cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 6.6.

Utilice el teorema de Liouville para demostrar que si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tiene en ∞ un polo de multiplicidad m entonces f es un polinomio de grado m.

SOLUCIÓN.

Considerando el desarrollo en serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, válido para todo $z \in \mathbb{C}$, se puede escribir

$$f(z) = p(z) + z^{m+1}h(z) \quad \text{con } p(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \text{ y } h \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

Por hipótesis, existe y no es nulo el límite $L = \lim_{z\to\infty} f(z)/z^m$ y, teniendo en cuenta que $\lim_{z\to\infty} p(z)/z^m = a_m$, se obtiene que ∞ es una singularidad evitable de la función entera $\varphi(z) = zh(z)$. Por lo tanto φ es acotada y en virtud del teorema de Liouville es constante, con valor constante $\varphi(0) = 0$, luego $f = p$. Obsérvese que

$$a_m = \lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{z^m} = \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} \neq 0,$$

por lo que el polinomio p es de grado m.

Ejercicio 6.7.

Sea F una función holomorfa en $\{z : |z| > r\}$ tal que $u(z) = \operatorname{Re} F(z)$ verifica $\lim_{z\to\infty} u(z)/z = 0$. Utilice el ejercicio 5.33 para demostrar que F presenta una singularidad evitable en ∞.

SOLUCIÓN.

El desarrollo de Laurent de F en $\{z : |z| > r\}$ proporciona una descomposición $F = f + g$, donde f es entera, g es holomorfa en $\{z : |z| > r\}$ y $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\operatorname{Re} g(z)}{z} = 0$$

y la hipótesis sobre F implica que $\lim_{z\to\infty}(\operatorname{Re} f(z))/z = 0$. Según el ejercicio 5.33 esto implica que f es constante, lo que significa que ∞ es singularidad evitable de F.

Ejercicio 6.8.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ definida en $\Omega = D^*(0, R)$ mediante un desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ se consideran la integrales

$$J(f) = \iint_\Omega |f(x+iy)|\, dx\, dy \leq +\infty;$$

$$I_n(f) = \iint_\Omega |f(x+iy)|^2 (x^2+y^2)^n\, dx\, dy \leq +\infty$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) si $J(f) < +\infty$ entonces 0 es singularidad evitable o polo simple;

b) si $I_0(f) < \infty$ entonces 0 es singularidad evitable;

c) si $I_n(f) < \infty$ con $n > 0$ entonces 0 es polo de multiplicidad menor o igual que n.

SOLUCIÓN.

Si en la integral que define $J(f)$ se efectúa un cambio de variable a coordenadas polares resulta

$$J(f) = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})| r\, dt \right) dr.$$

Según el teorema 5.1.11,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) ire^{it}}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, dt$$

luego

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|r}{r^{n+1}} \, dt.$$

Multiplicando miembro a miembro por r^{n+1} e integrando respecto a r, la desigualdad anterior se convierte en

$$2\pi|a_n| \int_0^R r^{n+1} dr \leq \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})| r \, dt \right) dr = J(f).$$

Si $J(f) < +\infty$ y $a_n \neq 0$ entonces $\int_0^R r^{n+1} dr < +\infty$, lo que lleva consigo que $n > -2$. Así queda demostrado que $a_n = 0$ si $n \leq -2$ y, por lo tanto, que f presenta en $z = 0$ una singularidad evitable o un polo simple.

Si $I_n(f) < +\infty$, $g_n(z) = (z^n f(z))^2$ cumple $J(g_n) = I_n(f) < +\infty$. Es claro que g_n también se puede representar mediante un desarrollo de Laurent, por lo que, en virtud de lo que se ha demostrado, podemos asegurar que 0 es singularidad evitable o polo simple de la función g_n. No puede ser un polo porque su multiplicidad debería ser par. Entonces g_n tiene en $z = 0$ una singularidad evitable y lo mismo le ocurre a la función $z^n f(z)$ (para justificarlo basta usar la caracterización de las singularidades evitables expuesta en el apartado *b*) de la proposición 6.1.6). Esto significa que para $n > 0$ (resp. $n = 0$) la función f presenta en $z = 0$ un polo de multiplicidad menor o igual que n (resp. una singularidad evitable).

Ejercicio 6.9.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ es inyectiva demuestre que f presenta, a lo más, una singularidad aislada no evitable que sólo puede ser un polo simple. Deduzca de esto que toda función entera e inyectiva es un polinomio de primer grado.

SOLUCIÓN.

Sea $a \in \mathbb{C}_\infty$ una singularidad aislada no evitable de f y $D^*(a, r) \subset \Omega$. Fijado $\overline{D(b, \rho)} \subset D^*(a, r)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $D^*(a, \varepsilon) \cap D(b, \rho) = \emptyset$. Según el teorema de la aplicación abierta, $f(D(b, \rho))$ es un abierto que, en virtud de la inyectividad de f, cumple $f(D^*(a, \varepsilon)) \cap f(D(b, \rho)) = \emptyset$, luego $f(D^*(a, \varepsilon))$ no es denso en $\mathbb{C}$. Con el teorema de Casorati-Weierstrass, 6.1.9, se concluye que a no es singularidad esencial de f.

Por exclusión, a es polo de f. Por lo tanto, según 6.1.7, existe $0 < \delta < r$ y $F \in \mathscr{H}(D(a, \delta))$, con un cero aislado en $z = a$, tal que $f(z) = 1/F(z)$ para todo $z \in D^*(a, \delta)$. Como F es inyectiva, en virtud del teorema 6.1.2, podemos afirmar que a es un cero simple de F, lo que significa que a es polo simple de f.

Si $0 < \eta < \delta$, entonces $F\big(D(a, \eta)\big)$ es entorno de 0 (teorema de la aplicación abierta), luego $f\big(D^*(a, \eta)\big) \supset D^*(\infty, R)$ para algún $R > 0$. Si existiese otro polo (necesariamente simple) $b \neq a$ de f, eligiendo $0 < \eta < \delta$ tal que $D^*(b, \eta) \subset \Omega$ y $D(a, \eta) \cap D(b, \eta) = \emptyset$, según la observación anterior, existirían $R, R' > 0$ tales que $f\big(D^*(a, \eta)\big) \supset D^*(\infty, R)$ y $f\big(D^*(b, \eta)\big) \supset D^*(\infty, R')$, con lo cual f no sería inyectiva. Así queda demostrado que f no puede presentar dos polos distintos.

Finalmente, si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera inyectiva, por lo que se acaba de demostrar, ∞ es polo simple, luego f es un polinomio de primer grado.

Nota. Si f no es globalmente inyectiva puede tener varias singularidades aisladas no evitables, pero si a es una de estas singularidades y $f|_{D^*(a,\varepsilon)}$ es inyectiva para algún $D^*(a, \varepsilon) \subset \Omega$, por lo que se ha demostrado, a debe ser un polo simple.

6.2.2. Sobre singularidades esenciales

En algunos de los siguientes ejercicios se muestran resultados y técnicas que pueden ser útiles a la hora detectar singularidades esenciales.

Ejercicio 6.10.

Si a es singularidad aislada no evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ no es polinomio, demuestre que a es singularidad esencial de la función compuesta $F(z) = g(f(z))$.

SOLUCIÓN.

Basta probar que F transforma cada $D^*(a,\varepsilon) \subset \Omega$ en un conjunto denso en $\mathbb{C}$.

Si a es polo de f, existe $0 < r < \varepsilon$ tal que, con el convenio $(1/f)(a) = 0$, la función $1/f$ es holomorfa y no constante en $D(a,r)$, luego $(1/f)(D(a,r))$ es entorno de 0 (teorema 6.1.2), lo que se traduce en que, para algún $\rho > 0$, $f\big(D^*(a,r)\big) \supset D^*(\infty,\rho)$. Según 6.1.10 *c*), g tiene una singularidad esencial en ∞ y, usando el teorema de Casorati-Weierstrass en esta singularidad, se obtiene

$$\overline{F\big(D^*(a,r)\big)} = \overline{g\big(f(D^*(a,r)\big)} \supset \overline{g\big(D^*(\infty,\rho)\big)} = \mathbb{C},$$

luego $F\big(D^*(a,\varepsilon)\big) \supset F\big(D^*(a,r)\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

Supongamos ahora que a es singularidad esencial de f. Como ∞ también es singularidad esencial de g, aplicando el teorema de Casorati-Weierstrass a las funciones f y g, se obtiene

$$\overline{f\big(D^*(a,\varepsilon)\big)} = \mathbb{C}, \quad \overline{g(\mathbb{C})} = \mathbb{C}.$$

Teniendo en cuenta que las funciones continuas transforman puntos adherentes en puntos adherentes ($g(\,\overline{A}\,) \subset \overline{g(A)}\,$), resulta

$$\overline{F\big(D^*(a,r)\big)} = \overline{g\big(f(D^*(a,\varepsilon)\big)} \supset g\big(\overline{f(D^*(a,\varepsilon))}\big) = g(\mathbb{C}),$$

luego $\overline{F\big(D^*(a,r)\big)} \supset \overline{g(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Ejercicio 6.11.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ un punto de acumulación de ceros de f. Demuestre que a es una singularidad esencial de f.

SOLUCIÓN.

Se puede suponer que $a \neq \infty$ (el caso $a = \infty$ se reduce al caso $a = 0$ usando la función $f(1/z)$). Si a fuese singularidad evitable, después de eliminarla, se tendría que f es holomorfa en $\Omega_a = \Omega \cup \{a\}$ y, con el principio de identidad, se obtendría que f es idénticamente nula. La función $f(z)$ tampoco presenta un polo en a pues, según la hipótesis, hay una sucesión $a_n \in \mathscr{Z}(f)$, con $\lim_n a_n = a$, a través de la cual $0 = \lim_n f(a_n) \neq \infty$. Por exclusión, a es singularidad esencial de f.

Ejercicio 6.12.

Sea $g \in \mathscr{H}\big(D^*(0,1)\big)$ tal que $g(1/2) = 1$. Se supone que 0 es punto de acumulación de $A = \{z \in D^*(0,1) : g(z) = z\}$. Demuestre que $g(z)$ presenta en $z = 0$ una singularidad esencial.

SOLUCIÓN.

La función $F(z) = g(z) - z$ no es idénticamente nula, pues $F(1/2) = 1/2$. Como 0 es punto de acumulación de ceros de F, según el ejercicio 6.11, $F(z)$ presenta en $z = 0$ una singularidad esencial y lo mismo le ocurre a la función $g(z) = z + F(z)$.

Ejercicio 6.13.

Demuestre que $f \in \mathscr{H}\big(D^*(0,2)\big)$ presenta en $z = 0$ una singularidad esencial cuando cumple alguna de las siguientes condiciones:

a) $f(1/2) = 0$ *y* $f(1/n) = 1/n$*, para cada* $n \geq 3$*;*

b) $f(1/n) = n^n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

c) $f(1/\sqrt{n}) = \sqrt[3]{n}$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

SOLUCIÓN.

a) En $z = 0$ no hay singularidad evitable ya que, en ese caso, se podría suponer que $f \in \mathscr{H}\big(D(0,2)\big)$ y, aplicando el principio de identidad, se obtendría que $f(z) = z$ para todo $z \in D(0,2)$, lo que es incompatible con $f(1/2) = 0$. En $z = 0$ tampoco hay polo porque $\lim_n f(1/n) = \lim_n (1/n) = 0 \neq \infty$. Por exclusión, en $z = 0$ hay una singularidad esencial.

b) Es evidente que la singularidad no es evitable. Tampoco es polo, porque, en ese caso, considerando su multiplicidad m, debería existir y ser finito el límite $\lim_{z\to 0} z^m f(z)$, lo que no ocurre ya que $(1/n)^m f(1/n) = n^{n-m}$.

c) Basta razonar como en *b*), viendo que 0 no es polo. Efectivamente, si fuese polo, de multiplicidad m, el límite $\lim_{z\to 0} z^m f(z)$, sería finito no nulo, y esto es imposible porque $(1/\sqrt{n})^m f(1/\sqrt{n}) = n^{1/3-m/2}$.

Ejercicio 6.14.

Determine el tipo de singularidad que presenta en ∞ una función f, holomorfa en $\{z : |z| > R\}$, que verifica $f(n) = (-1)^n/n$ cuando $n \in \mathbb{N}$ y $n > R$.

SOLUCIÓN.

La singularidad no es evitable: si lo fuese $g(z) = f(1/z)$ se podría extender a una función holomorfa en $\{z : |z| < 1/R\}$. Como $g(1/n) = 1/n$ cuando n es par, aplicando el principio de identidad se obtendría que $g(z) = z$ para todo $z \in D(0, 1/R)$. Análogamente, considerando los valores impares de n, se obtendría que $g(z) = -z$ para todo $z \in D(0, 1/R)$, en contradicción con lo anterior.

Es obvio que la singularidad no es un polo y se concluye, por exclusión, que la singularidad es esencial.

Ejercicio 6.15.

Si a es una singularidad aislada no evitable de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, demuestre que para cada $D^*(a,\varepsilon) \subset \Omega$ la imagen $f\big(D^*(a,\varepsilon)\big)$ corta al eje real.

SOLUCIÓN.

Si a es un polo existe $0 < r < \varepsilon$ tal que $1/f$ se puede suponer definida y holomorfa en $D(a,r)$. Según el teorema de la aplicación abierta, $1/f$ transforma $D(a,r)$ en un entorno de 0, luego $f(D^*(a,\varepsilon)) \supset f(D^*(a,r))$ contiene un conjunto de la forma $\{z : |z| > R\}$ y por lo tanto corta al eje real.

Si a es singularidad esencial, según el teorema de Casorati-Weierstrass, la imagen $f(D^*(a,\varepsilon))$ es densa en $\mathbb{C}$, por tanto existen $z_0, z_1 \in D^*(a,\varepsilon)$ tales que $\operatorname{Im} f(z_0) > 0$, $\operatorname{Im} f(z_1) < 0$. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow D^*(a,\varepsilon)$ es un camino de origen z_0 y extremo z_1, es $\operatorname{Im} f(\gamma(0)) > 0$, $\operatorname{Im} f(\gamma(1)) < 0$. Según el teorema de Bolzano, existe $s \in [0,1]$ con $\operatorname{Im} f(\gamma(s)) = 0$, es decir, $f(\gamma(s)) \in f(D^*(a,\varepsilon)) \cap \mathbb{R}$.

Ejercicio 6.16. Mejora del teorema de Casorati-Weierstrass.

Si a es una singularidad esencial de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $D^*(a,\delta) \subset \Omega$, demuestre que el conjunto de los $w \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = w$ tiene infinitas soluciones en $D^*(a,\delta)$ es denso en $\mathbb{C}$.

SOLUCIÓN.

Sea $R(f,\delta)$ el conjunto de los $w \in \mathbb{C}$ tales que $\{z \in D^*(a,\delta) : f(z) = w\}$ es infinito. Hay que demostrar que $D(b,\varepsilon) \cap R(\delta, f) \neq \emptyset$ para cada disco $D(b,\varepsilon)$. Según el teorema de Casorati-Weierstrass, $f(D^*(a,\delta))$ es denso en $\mathbb{C}$, luego existe $z_1 \in D^*(a,\delta)$ tal que $w_1 = f(z_1) \in D(b,\varepsilon)$. Como la restricción de f al disco perforado $D^*(a,\delta)$ no es constante, es abierta (teorema 6.1.2) y por ello existen discos

$$\overline{D(z_1,r_1)} \subset D^*(a,\delta),\ \overline{D(w_1,\varepsilon_1)} \subset D(b,\varepsilon) \text{ con } f(D(z_1,r_1)) \supset D(w_1,\varepsilon_1).$$

Existe $0 < \delta_1 < \delta$ tal que $\emptyset = D^*(a,\delta_1) \cap \overline{D(z_1,r_1)}$, y la densidad de $f(D^*(a,\delta_1))$ permite obtener $z_2 \in D^*(a,\delta_1)$ tal que $w_2 = f(z_2) \in D(w_1,\varepsilon_1)$. Repitiendo el razonamiento, se obtienen discos

$$\overline{D(z_2,r_2)} \subset D^*(a,\delta_1),\ \overline{D(w_2,\varepsilon_2)} \subset D(w_1,\varepsilon_1) \text{ con } f(D(z_2,r_2)) \supset D(w_2,\varepsilon_2).$$

Obsérvese que los discos $D(z_1,r_1)$, $D(z_2,r_2)$ son disjuntos. A continuación se toma $0 < \delta_2 < \delta_1$ suficientemente pequeño para que estos dos discos queden fuera de $D^*(a,\delta_2)$ y se repite el razonamiento. Razonando de modo recurrente se obtiene una sucesión de discos disjuntos $D(z_n,r_n) \subset D^*(a,\delta)$ y una sucesión decreciente de discos compactos $\overline{D(w_n,\varepsilon_n)}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f(D(z_n,r_n)) \supset D(w_n,\varepsilon_n).$$

Si w es un punto de la intersección, no vacía, de esta sucesión decreciente de discos compactos, es claro que $w \in D(b,\varepsilon)$ y que la ecuación $f(z) = w$ tiene infinitas soluciones en $D^*(a,\delta)$ (una al menos en cada $D(z_n,r_n)$). Queda probado que $w \in R(f,\delta) \cap D(b,\varepsilon)$ y por lo tanto que $R(f,\delta)$ es denso en $\mathbb{C}$.

6.2.3. Cálculo de residuos de funciones concretas

En los siguientes ejercicios se determinan y clasifican las singularidades aisladas de funciones concretas y se exponen técnicas para calcular los residuos.

Ejercicio 6.17.

Sean $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tal que $f(a) \neq 0 = g(a)$. Justifique las siguientes fórmulas para el cálculo de $\operatorname{Res}(f/g, a)$.

a) Si a es cero simple de g,

$$\operatorname{Res}(f/g, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

b) Si a es cero doble de g,

$$\operatorname{Res}(f/g, a) = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3g''(a)^2}$$

SOLUCIÓN.

a) En este caso $g'(a) \neq 0$ y a es polo simple de f/g, con lo cual

$$\operatorname{Res}(f/g, a) = \lim_{z \to a} (z-a)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{z-a}{g(z)-g(a)} f(z) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

b) Si a es cero doble de g, en un entorno de a se tiene

$$g(z) = a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \cdots = (z-a)^2 G(z)$$

donde $G(z) = a_2 + a_3(z-a) + \cdots$.

La singularidad evitable que $\varphi(z) = (z-a)^2 f(z)/g(z)$ tiene en $z = a$ se elimina cancelando el factor $(z-a)^2$. Se obtiene así $\varphi(z) = f(z)/G(z)$ que es holomorfa en un entorno de a, donde admite un desarrollo en serie de potencias

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots$$

Dividiendo por $(z-a)^2$ se llega al desarrollo de Laurent de f/g alrededor de a, que permite calcular el residuo

$$\operatorname{Res}(f/g, a) = b_1 = \varphi'(a) = \frac{f'(a)G(a) - f(a)G'(a)}{G(a)^2}$$

Teniendo en cuenta que $G(a) = a_2 = g''(a)/2!$ y $G'(a) = a_3 = g'''(a)/3!$, se obtiene el resultado.

Ejercicio 6.18.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simétrico respecto al origen y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función par. Si $D^*(a, r) \subset \Omega$ y a es polo (resp. singularidad esencial) de f demuestre que $-a$ también es polo (resp. singularidad esencial) de f y que

$$\operatorname{Res}(f, a) + \operatorname{Res}(f, -a) = 0$$

SOLUCIÓN.

Como Ω es simétrico respecto al origen, $D^*(-a, r) \subset \Omega$. Si $f(z)$ tiende hacia ∞ cuando $z \to a$ es claro que $f(w) = f(-w)$ también tiende hacia ∞ cuando $w \to -a$. Un razonamiento similar pone de manifiesto que si a es singularidad esencial de f entonces $-a$ también lo es.

Sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ el desarrollo de Laurent de f en $D^*(a, r)$. Cuando $w \in D^*(-a, r)$ se cumple $-w \in D^*(a, r)$, luego

$$f(w) = f(-w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(-w-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n a_n(w+a)^n$$

Como la serie de la derecha es el desarrollo de Laurent de f en $D^*(-a, r)$, se obtiene que $\operatorname{Res}(f, -a) = -a_{-1} = -\operatorname{Res}(f, a)$.

Ejercicio 6.19.

Determine el tipo de singularidad que

$$f(z) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2-z}}$$

tiene en $z = 1$ y calcule el residuo.

SOLUCIÓN.

La función $g(z) = \sqrt[3]{2-z}$ está definida y es holomorfa en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

De la igualdad $g(z)^3 = 2 - z$ se sigue que $3g(z)^2 g'(z) = -1$, por tanto $g'(1) = -1/3$ y esto garantiza que $1 - g(z)$ tiene un cero simple en $z = 1$, luego $f = 1/(1-g)$ tiene un polo simple en $z = 1$. El residuo se calcula mediante la fórmula indicada en el ejercicio 6.17: $\operatorname{Res}(f, 1) = -1/g'(1) = 3$.

Ejercicio 6.20.

Determine el tipo de singularidad que presentan en $z = 0$ las funciones

$$f(z) = \frac{1}{e^z - \frac{\operatorname{sen} z}{z}} \qquad g(z) = \frac{e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}}{z^4}$$

y calcule el correspondiente residuo.

SOLUCIÓN.

a) La función $e^z - \frac{\operatorname{sen} z}{z} = z + \frac{2}{3}z^2 + \cdots$ tiene un cero simple en $z = 0$, luego f tiene un polo simple en $z = 0$ y

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z + \cdots} = 1.$$

b) $e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z} = e^{\operatorname{sen} z}\left(1 - e^{h(z)}\right)$ donde la función

$$h(z) = \operatorname{tg} z - \operatorname{sen} z = \left(z + \frac{1}{3}z^3 + \cdots\right) - \left(z - \frac{1}{6}z^3 + \cdots\right) = \frac{1}{2}z^3 + \cdots$$

tiene un cero triple en $z = 0$.

La función $1 - e^{h(z)}$ también tiene un cero triple en $z = 0$, porque se obtiene componiendo h con $1 - e^z$ que tiene un cero simple en $z = 0$ (véase el ejercicio 4.37). Se sigue que $g(z) = e^{\operatorname{sen} z}(1 - e^{h(z)})/z^4$ tiene un polo simple en $z = 0$ y por lo tanto

$$\operatorname{Res}(g, 0) = \lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1 - e^{h(z)}}{h(z)}\right)\left(\frac{h(z)}{z^3}\right) e^{\operatorname{sen} z}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{w\to 0} \frac{1 - e^w}{w} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z^3} = \frac{1}{2}$$

se obtiene el valor $\operatorname{Res}(g, 0) = -1/2$.

Ejercicio 6.21.

Determine las singularidades aisladas de cada una de las siguientes funciones. Indique en cada caso el tipo de singularidad y calcule el residuo.

$$R(z) = \frac{1}{1 + z^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}; \quad S(z) = \frac{z^m}{1 + z^{2n}} \quad n, m \in \mathbb{N};$$

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}; \qquad g(z) = \frac{\operatorname{sen} \alpha z}{z(1 + z^2)} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

SOLUCIÓN.

a) $R(z)$ tiene polos simples en las raíces $(n + 1)$-ésimas de -1. Según lo indicado en el ejercicio 6.17, si ω es una de estas raíces y $p(z) = z^{n+1} + 1$, se tiene

$$\operatorname{Res}(R, \omega) = \frac{1}{p'(\omega)} = \frac{1}{(n + 1)\omega^n} = -\frac{\omega}{n + 1}$$

R tiene una singularidad evitable en ∞ y considerando el desarrollo en serie geométrica de razón $1/z^{n+1}$ se obtiene el desarrollo de Laurent

$$R(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \left(\frac{1}{1 + z^{-(n+1)}}\right) = \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^{2(n+1)}} + \frac{1}{z^{3(n+1)}} - \cdots \quad \text{si} \quad |z| > 1,$$

luego $\operatorname{Res}(R, \infty) = 0$. A este valor también se puede llegar considerando la función

$$\varphi(z) = -\frac{1}{z^2} R(1/z) = -\frac{z^{n+1}}{z^2(1 + z^{n+1})}$$

Esta función tiene una singularidad evitable en $z = 0$ (que se elimina cancelando el factor z^2). Por lo tanto $\operatorname{Res}(R, \infty) = \operatorname{Res}(\varphi, 0) = 0$.

b) $S(z)$ tiene polos simples en las raíces $2n$-ésimas de -1. Si ω es una de ellas, razonando como en *a*), se obtiene el residuo

$$\operatorname{Res}(S, \omega) = \frac{\omega^m}{2n\omega^{2n-1}} = -\frac{\omega^{m+1}}{2n}$$

Si $m \le 2n$ (resp. $m > 2n$) entonces S tiene una singularidad evitable (resp. polo de multiplicidad $m-2n$) en ∞. En ambos casos $\operatorname{Res}(S,\infty)$ es el residuo en 0 de

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z^2}S(1/z) &= -\frac{z^{2n-m-2}}{1+z^{2n}} = \\ &= -(z^{2n-m-2})(1-z^{2n}+z^{4n}+\cdots+(-1)^{k-1}z^{(k-1)2n}+\cdots)\end{aligned}$$

El exponente de z en este desarrollo, $2nk-m-2$, vale -1 cuando $m+1=2nk$ con $k\in\mathbb{N}$. Por lo tanto $\operatorname{Res}(S,\infty)=0$ si $m+1$ no es múltiplo de $2n$, y vale $(-1)^k$ si $m+1$ es múltiplo de $2n$.

c) f tiene en 0 un polo de multiplicidad $n+1$, con desarrollo de Laurent

$$\frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}+\frac{\alpha}{z^n}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!z}+\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{\alpha^{n+2}}{(n+2)!}z+\cdots \qquad \text{si } z\neq 0.$$

Con este desarrollo se obtiene que $\operatorname{Res}(f,0)=\alpha^n/n!$ y que ∞ es singularidad esencial con residuo $\operatorname{Res}(f,\infty)=-\alpha^n/n!$.

d) g tiene una singularidad evitable en $z=0$ que se elimina definiendo

$$g(0)=\lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha z}{\alpha z}\frac{\alpha}{1+z^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Cuando $\alpha\in\{ik\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ es $\operatorname{sen}(\alpha i)=\operatorname{sen}(-\alpha i)=0$ luego presenta singularidades evitables en $+i$ y $-i$, que se eliminan definiendo

$$g(i)=g(-i)=-\frac{\alpha\cos i\alpha}{2}$$

Cuando $\alpha\notin\{ik\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, g tiene dos polos simples en i y $-i$, cuyo residuo se puede calcular con la fórmula expuesta en el ejercicio 4.12

$$\operatorname{Res}(g,i)=-\operatorname{Res}(g,-i)=-\frac{\operatorname{sen}\alpha i}{2}$$

∞ es una singularidad esencial de g pues no existe el límite $\lim_{z\to\infty} g(z)$. En efecto, como $g(z/\alpha)=\frac{\alpha^3}{\alpha^2+z^2}\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} g\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha^3}{\alpha^2+x^2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0\\ \lim_{x\to\infty} g\Big(\frac{ix}{\alpha}\Big) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha^3}{\alpha^2-x^2}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\infty\end{aligned}$$

También se puede concluir que ∞ es singularidad esencial de g observando que ∞ es punto de acumulación de ceros de g (véase el ejercicio 6.11). Además, como g es par, su desarrollo de Laurent en $\{z : |z|>1\}$ sólo contiene potencias pares de z, por lo que $\operatorname{Res}(g,\infty)=0$. Usando el ejercicio 7.23, según el cual $\operatorname{Res}(g,\infty)+\operatorname{Res}(g,i)+\operatorname{Res}(g,-i)=0$, se obtiene, de otra forma, el valor $\operatorname{Res}(g,\infty)=0$.

Ejercicio 6.22.

Determine las singularidades aisladas de las siguientes funciones. Indique en cada caso el tipo de singularidad y calcule el residuo.

$$f(z)=\frac{1}{e^{z^2}-1} \qquad g(z)=\frac{e^{1/z^2}}{z^2-1}$$

SOLUCIÓN.

a) Los ceros de $e^{z^2} - 1$ son

$$\{z : z^2 = 2\pi n i : n \in \mathbb{Z}\} = \{\pm\sqrt{2\pi n} e^{\pm i\pi/4} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Con el desarrollo en serie de potencias $e^{z^2} - 1 = z^2 + z^4/2! + z^6/3! + \cdots$ se observa que en $z = 0$ hay un cero doble. Los otros ceros son simples pues en ellos no se anula la derivada. Se sigue que todas las singularidades aisladas de f son polos que corresponden a los ceros $e^{z^2} - 1$. En definitiva, f tiene un polo doble en $z = 0$ con $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ (porque f es par) y polos simples en $\pm\sqrt{\pm 2\pi n} e^{i\pi/4}$, $n \in \mathbb{N}$. Si a es uno de ellos, utilizando la fórmula del ejercicio 6.17 se obtiene $\operatorname{Res}(f, a) = 1/(2ae^{a^2}) = 1/(2a)$. Obsérvese que ∞ no es singularidad aislada de f porque es un punto de acumulación de polos.

b) La función g tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -1$ (ceros simples del denominador donde no se anula el numerador). Según el ejercicio 6.17 el residuo en estos polos vale $\operatorname{Res}(g, 1) = -\operatorname{Res}(g, -1) = e/2$. La función g tiene una singularidad esencial en $z = 0$, pues no tiene límite cuando $z \to 0$ a través de la sucesión $1/\sqrt{n\pi i}$. También se puede razonar así: según la proposición 6.1.8, $z = 0$ es una singularidad esencial de e^{1/z^2} y esto lleva consigo que también es singularidad esencial de g (si fuese polo o singularidad evitable de g también sería polo o singularidad evitable de $e^{1/z^2} = (z^2 - 1)g(z)$).

Es claro que ∞ es una singularidad evitable de g que queda eliminada definiendo $g(\infty) = 0$. Como g es una función par sus desarrollos de Laurent en $\{z : 0 < |z| < 1\}$ y en $\{z : 1 < |z|\}$ sólo contienen potencias pares de z, por lo que $\operatorname{Res}(g, 0) = \operatorname{Res}(g, \infty) = 0$.

Ejercicio 6.23.

Determine las singularidades aisladas de las siguientes funciones. Indique en cada caso el tipo de singularidad y calcule el residuo.

$$f(z) = e^{1/(z-1)}; \quad g(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

SOLUCIÓN.

a) El desarrollo de Laurent de f en $\{z : |z - 1| > 0\}$, que es inmediato,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

contiene infinitas potencias negativas de $z - 1$, luego f tiene en $z = 1$ una singularidad esencial, con residuo $\operatorname{Res}(f, 1) = b_{-1} = 1$. También se puede obtener que la singularidad es esencial viendo que f no tiene límite cuando $z \to 1$ a través de la sucesión $1 + 1/(n\pi i)$.

La función presenta en ∞ una singularidad evitable que se elimina definiendo $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. Por definición $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(F, 0)$ donde $F(z) = -z^{-2} f(1/z) = -z^{-2} e^{\frac{z}{1-z}}$. Considerando el desarrollo en serie de potencias, alrededor de $z = 0$, de la función $\varphi(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, se obtiene $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(F, 0) = -c_1 = -\varphi'(0) = -1$. También se puede calcular $\operatorname{Res}(f, \infty)$ mediante la igualdad $\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$, que se deduce del ejercicio 7.23.

Otra forma de obtener $\operatorname{Res}(f, \infty)$ es la siguiente. Si a_{-1} es el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de f en $\{z : |z| > 1\}$, sabemos que $\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$. Como este desarrollo es complicado de obtener (véase el ejercicio 4.23), podemos razonar considerando en su lugar el desarrollo de Laurent en $\{z : |z-1| > 0\}$ que aparece escrito arriba, con $b_{-1} = 1$, y utilizar que $a_{-1} = b_{-1}$. Efectivamente, las funciones $f(z) - a_{-1}/z$ y $f(z) - b_{-1}/(z-1)$ tienen primitiva en $\{z : |z| > 1\}$ y si $C(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se verifica

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{a_{-1}}{z}\,dz = \int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b_{-1}}{z-1}\,dz = b_{-1} = 1.$$

b) Con un razonamiento similar se obtiene que g presenta una singularidad evitable en ∞, que se elimina definiendo $g(\infty) = 0$, con $\operatorname{Res}(g, \infty) = -1$, y una singularidad esencial en $z = 1$, con $\operatorname{Res}(g, 1) = 1$.

6.2.4. Complementos sobre funciones meromorfas

En los primeros ejercicios, además de caracterizar las funciones racionales y las transformaciones de Möbius, se caracterizan las funciones meromorfas usando la derivada. Luego se usan series de funciones meromorfas para definir funciones meromorfas con polos y partes principales dadas y también para obtener prolongaciones analíticas de funciones definidas por integrales.

Ejercicio 6.24.

Demuestre que las únicas funciones meromorfas en $\mathbb{C}_\infty$ son las funciones racionales y que toda función racional f se representa en la forma

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

donde P_j, $0 \le j \le m$, son polinomios y $P_j(0) = 0$ si $1 \le j \le m$.

SOLUCIÓN.

Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_\infty)$. Como $\mathscr{P}(f)' = \emptyset$ y $\mathbb{C}_\infty$ es compacto, se sigue que $\mathscr{P}(f)$ es finito. Sea $\mathscr{P}(f) = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ donde $a_0 = \infty$ cuando $\infty \in \mathscr{P}(f)$ y a_0 no se considera cuando $\infty \notin P(f)$. Para cada $a \in \mathscr{P}(f)$ sea $S_a(z)$ la parte singular de f en a (si $a = \infty$, S_∞ es un polinomio, con $S_\infty(0) = 0$, y si $a \in \mathbb{C}$ entonces $S_a(z) = P_a(1/(z-a))$ donde P_a es un polinomio, con $P_a(0) = 0$). Cada $a \in \mathscr{P}(f)$ es una singularidad evitable de la función $F(z) = f(z) - \sum_{a\in S} S_a(z)$. Después de eliminar sus singularidades evitables, F se convierte en una función holomorfa en todo $\mathbb{C}_\infty$ y, por lo tanto, es constante: $F(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ sea $P_j = P_{a_j}$. Sea $P_0(z) = c$ en el caso $\infty \notin \mathscr{P}(f)$ y $P_0(z) = c + P_\infty(z)$ en el caso $\infty \in \mathscr{P}(f)$. Resulta así que

$$f(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

es una función racional.

Ejercicio 6.25.

Si $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es inyectiva demuestre que f es de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{donde} \quad ad - bc \neq 0.$$

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 6.24 $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde P, Q son polinomios sin ceros comunes. Como f es inyectiva sólo puede tener un cero que, en virtud del teorema 6.1.2, ha de ser simple. Como P sólo tiene un cero simple es un polinomio de primer grado, $P(z) = az + b$. El mismo razonamiento aplicado a $1/f$ conduce a que $Q(z) = cz + d$ también es un polinomio de primer grado. Obsérvese que ha de ser $ad - bc \neq 0$ porque f no es constante.

Ejercicio 6.26.

Sea a un punto de acumulación de polos de $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ y $D^*(a,\rho) \subset \Omega$. Demuestre que para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $z_n \in D^*(a,\rho)$ tal que $\lim_n z_n = a$ y $\lim_n f(z_n) = w$.

SOLUCIÓN.

Basta demostrar que $f(D^*(a,\varepsilon))$ es denso en $\mathbb{C}_\infty$ para cada $\varepsilon > 0$, pues, en ese caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in D^*(a, 1/n)$ tal que $|f(z_n) - w| < 1/n$.

Lo demostramos por reducción al absurdo, suponiendo que para algún $\varepsilon > 0$ y algún $D(b,r)$ se verifica $f(D^*(a,\varepsilon)) \cap D(b,r) = \emptyset$. En este caso la función meromorfa $g(z) = 1/(f(z) - b)$ cumple $|g(z)| \leq 1/r$, para todo $z \in D^*(a,\varepsilon)$. Según la proposición 6.1.6, g es holomorfa en $D^*(a,\varepsilon)$ con una singularidad evitable en $z = a$. Eliminando la singularidad podemos suponer que g es holomorfa en $D(a,\varepsilon)$. Como a es punto de acumulación de $\mathscr{Z}(g)$, el principio de identidad implica que g es idénticamente nula en $D(a,\varepsilon)$. Se obtiene así que $f(z) = \infty$ para todo $z \in D(a,\varepsilon)$, lo que es absurdo porque los polos de las funciones meromorfas son aislados.

Ejercicio 6.27.

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, derivable en cada $z \in \Omega$. Demuestre que para cada $a \in \Omega$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que una de las dos funciones f, $1/f$ toma valores finitos y es holomorfa en $D(a,r)$. Utilize esto para demostrar que si Ω es conexo y $f(\Omega) \neq \{\infty\}$ son equivalentes

a) f es derivable en cada $z \in \Omega$;

b) f es meromorfa en Ω.

SOLUCIÓN.

Dado $a \in \Omega$ consideramos dos casos, $f(a) \in \mathbb{C}$ y $f(a) = \infty$.

Si $f(a) \in \mathbb{C}$, usando la continuidad de f en a, se obtiene $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $f(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$, luego, de acuerdo con la definición de derivada, f es holomorfa en $D(a,r)$.

Si $f(a) = \infty$, razonando de forma similar con $1/f$, se obtiene un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que $(1/f)(D(a,r)) \subset \mathbb{C}$ y es fácil ver que $1/f$ es derivable en cada $b \in D(a,r)$ (si $f(b) = \infty$ es obvio y se sigue de la derivabilidad de f en b cuando $f(b) \neq \infty$).

Supongamos ahora que Ω es conexo y $f(\Omega) \neq \{\infty\}$. En el razonamiento que sigue utilizamos que el principio de identidad sigue valiendo para funciones holomorfas en un abierto conexo de $\mathbb{C}_\infty$.

a) $\Rightarrow$ *b)* Si se cumple *a)* entonces f es continua y para obtener *b)* basta demostrar que $\mathscr{P}(f)' \cap \Omega = \emptyset$. Lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo que existe $a \in \mathscr{P}(f)' \cap \Omega$. En ese caso debe ser $a \in \mathscr{P}(f)$ (por la continuidad de f) y, en virtud de lo probado arriba,

$1/f$ es holomorfa en un disco $D(a,r) \subset \Omega$ y a es un cero no aislado de $1/f$. Entonces, según el principio de identidad, $1/f$ es idénticamente nula en $D(a,r)$, es decir, el conjunto

$$G = \{z \in \Omega : \exists D(z,r) \subset \Omega, f(D(z,r)) = \{\infty\}\}$$

no es vacío. Como G es abierto, si se demuestra que también es cerrado relativo al conexo Ω se obtendrá $\Omega = G$, lo que contradice la hipótesis $f(\Omega) \neq \{\infty\}$.

Para demostrar que G es cerrado en Ω basta ver que si $b_n \in G$ converge hacia $b \in \Omega \cap \overline{G}$ entonces $b \in G$. Efectivamente, si $b_n = b$ para algún $n \in \mathbb{N}$ es obvio que $b \in G$. En caso contrario, razonando como antes, se obtiene que $1/f$ es holomorfa en un disco $D(b,r) \subset \Omega$, con un cero no aislado en $z = b$, luego $1/f$ es idénticamente nula sobre $D(b,r)$ y por lo tanto $b \in G$.

b) $\Rightarrow$ *a*) Basta demostrar que f es derivable en cada $a \in \mathscr{P}(f)$. En virtud de la proposición 6.1.7, existe $D(a,r) \subset \Omega$ y $F \in \mathscr{H}(D(a,r))$, con un cero aislado en $z = a$, tal que para todo $z \in D^*(a,r)$ se cumple $F(z) \neq 0$ y $F(z) = 1/f(z)$. Se sigue que $\infty \notin (1/f)(D(a,r)) = F(D(a,r))$ y que $1/f$ es derivable en a (el razonamiento se aplica incluso cuando $a = \infty$).

Ejercicio 6.28.

Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ *tal que* $\mathscr{P}(f) = \mathbb{N}$ *y cada* $n \in \mathbb{N}$ *es un polo doble con parte principal* $1/(z-n)^2$.

SOLUCIÓN.

Dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 2\,\text{máx}\{|z| : z \in K\}$. Entonces, para todo $n > m$, la función $f_n(z) = 1/(z-n)^2$ no tiene polos en K. Además, para todo $z \in K$ se cumple $|z| \leq n/2$, luego

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \frac{1}{(n-|z|)^2} \leq \frac{1}{(n-n/2)^2} = \frac{4}{n^2}$$

y, según el criterio de Weierstrass, la serie $\sum_{n>m} f_n(z)$ converge uniformemente sobre K. Con esto queda demostrado que la serie converge según la definición 6.1.15 y, por lo tanto, su suma es una función con las propiedades mencionadas en el enunciado.

Ejercicio 6.29.

Defina, mediante una serie, una función $F \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ *con polos* $\mathscr{P}(F) = \mathbb{N}$, *tal que la parte principal de* F *en cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $n^2/(z-n)^2 + 1/(z-n)$.

SOLUCIÓN.

Para simplificar los cálculos obtendremos la función como suma $F = f + g$ de dos funciones meromorfas $f, g \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$, ambas con polos en $\mathbb{N}$, cuyas partes principales en $n \in \mathbb{N}$ sean $n^2/(z-n)^2$ y $1/(z-n)$, respectivamente.

Para obtener f comenzamos calculando los primeros términos del desarrollo en serie de potencias

$$\frac{n^2}{(z-n)^2} = \frac{1}{(1-z/n)^2} = \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots\right)^2 = 1 + \frac{2}{n}z + \cdots$$

válido para $|z| < n$, lo que sugiere la consideración de los polinomios de primer grado $Q_n(z) = 1 + (2/n)z$, con los que se consigue la convergencia uniforme sobre compactos de la serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n^2}{(z-n)^2} - Q_n(z)\right].$$

Efectivamente, después de un cálculo elemental, se tiene

$$\frac{n^2}{(z-n)^2} - Q_n(z) = \frac{3nz^2 - 2z^3}{n(z-n)^2} := f_n(z).$$

Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $R = \text{máx}\{|z| : z \in K\}$, para $n > 2R$ y todo $z \in K$ se cumple

$$|f_n(z)| \leq \frac{3nR^2 + 2R^3}{n(n-|z|)^2} \leq \frac{3nR^2 + 2R^3}{n(n-R)^2} \leq \frac{3nR^2 + 2R^3}{n(n-n/2)^2} = \frac{12nR^2 + 8R^3}{n^3} := \mu_n.$$

Como μ_n es el término general de una serie convergente, con el criterio de Weierstrass se obtiene que la serie $\sum_{n>2R} f_n(z)$ converge uniformemente sobre K (es claro que f_n no tiene polos en K).

Para definir la función g consideramos el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{(z-n)} = -\frac{1}{n}\frac{1}{1-z/n} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \frac{z^2}{n^3} - \cdots$$

Con los polinomios constantes $Q_n(z) = -1/n$ se consigue la convergencia uniforme sobre compactos de la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(z-n)} + \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{n(z-n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z).$$

Efectivamente, si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $R = \text{máx}\{|z| : z \in K\}$, para $n > 2R$ y todo $z \in K$ se cumple

$$|g_n(z)| \leq \frac{R}{n(n-|z|)} \leq \frac{R}{n(n-R)} \leq \frac{R}{n(n-n/2)} = \frac{2R}{n^2}$$

Como $2R/n^2$ es el término general de una serie convergente, el criterio de Weierstrass permite concluir que la serie $\sum_{n>2R} g_n(z)$ converge uniformemente sobre K (es claro que $g_n(z) = z/[n(z-n)]$ no tiene polos en K).

Sumando las dos funciones obtenidas se obtiene una función meromorfa

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{(z-n)^2} + \frac{1}{z-n} - \frac{2z+n-1}{n}\right]$$

que cumple los requisitos del enunciado.

Ejercicio 6.30.

Sea $a_n \in \mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos con $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-1} < +\infty$. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(z-a_n)^{-1}$ converge en $\mathbb{C}$ uniformemente sobre compactos y que su suma es una función meromorfa $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$, con polos simples $\mathscr{P}(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y residuo $\operatorname{Res}(f, a_n) = 1$.

SOLUCIÓN.

Como el término general de una serie convergente tiende hacia 0, la hipótesis implica que $\lim_n |a_n| = +\infty$. Entonces, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se cumple

$$\frac{|a_n|}{2} \geq R = \max\{|z| : z \in K\}.$$

Para cada $n > m$ el polo de la función $1/(z-a_n)$ no está en K y para todo $z \in K$ se verifica

$$\left|\frac{1}{z-a_n}\right| \leq \frac{1}{|a_n| - |z|} \leq \frac{1}{|a_n| - R} \leq \frac{1}{|a_n| - |a_n|/2} = \frac{2}{|a_n|}$$

En virtud de la hipótesis y del criterio de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n>m} \frac{1}{z-a_n}$$

converge uniformemente sobre K. Según lo mencionado después de la definición 6.1.15 la condición

$$n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m,$$

permite afirmar que la suma de la serie es una función meromorfa con polos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que la parte principal en el polo a_n es $1/(z-a_n)$.

Ejercicio 6.31.

Sea $a_n \in \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos distintos dos a dos que cumple $|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots |a_n| \leq \cdots$. Se supone que existe $m \in \mathbb{N}$ verificando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^m} = +\infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{m+1}} < +\infty.$$

Compruebe que al aplicar el teorema 6.1.16, con $P_n(z) \equiv z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es posible elegir todos los polinomios Q_n de grado $m-1$.

SOLUCIÓN.

En este caso $P_n(\frac{1}{z-a_n}) = \frac{1}{z-a_n}$ y su desarrollo en serie de potencias se obtiene usando la serie geométrica de razón z/a_n:

$$\frac{1}{z-a_n} = -\frac{1}{a_n}\frac{1}{1-z/a_n} = -\frac{1}{a_n}\left(1 + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{a_n^2} + \cdots\right).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el polinomio

$$Q_n(z) = -\frac{1}{a_n}\left(1 + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{m-1}}{a_n^{m-1}}\right)$$

que cumple

$$\frac{1}{z-a_n} - Q_n(z) = -\frac{1}{a_n}\sum_{k\geq m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k = \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \frac{1}{z-a_n}$$

Fijado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_n|}{2} > R = \text{máx}\{|z| : z \in K\}$$

cuando $n \geq n_0$. Entonces, para todo $z \in K$ y todo $n \geq n_0$ se cumple

$$\left|\frac{1}{z-a_n} - Q_n(z)\right| = \left|\frac{z}{a_n}\right|^m \frac{1}{|z-a_n|} \leq \frac{R^m}{|a_n|^m(|a_n|-R)} \leq \frac{2R^m}{|a_n|^{m+1}}$$

Usando la hipótesis sobre la sucesión a_n y el criterio de Weierstrass se concluye que la serie

$$\sum_{n>n_0}\left[\frac{1}{z-a_n} - Q_n(z)\right]$$

converge uniformemente sobre K.

Ejercicio 6.32.

Demuestre que para $\operatorname{Re} z > 0$ *se cumple*

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

y que la serie define en $\mathbb{C}$ *una función meromorfa que prolonga a la función definida por la integral en* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ *(véase el ejercicio 5.52).*

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 5.52 la integral impropia del enunciado converge en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, donde define una función holomorfa $f_0(z)$. Por otra parte, la serie del enunciado define una función $F_0(z)$ meromorfa en $\mathbb{C}$, porque converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$. Efectivamente, obsérvese que para $n > 1 + \text{máx}\{|z| : z \in K\}$ el término general de la serie no tiene polos en K y para todo $z \in K$ se cumple

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}\right| \leq \frac{1}{n!(n-|z|)} \leq \frac{1}{n!}$$

Para $z = x \geq 1$ la función $e^{-t}t^{x-1}$ es continua en $[0,1]$ y la integral $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ no es impropia. Como el desarrollo en serie

$$e^{-t}t^{x-1} = t^{x-1}\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \cdots\right)$$

converge uniformemente en $[0,1]$, es lícita la integración término a término, con la que se obtiene

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \quad \text{si } x \geq 1,$$

es decir, $f_0(z) = F_0(z)$ para todo $z = x \geq 1$ y, con el principio de identidad, se obtiene la igualdad del enunciado.

Nota. La función definida en el ejercicio 5.52 mediante una integral impropia convergente en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, en virtud del resultado obtenido aquí, se puede prolongar analíticamente mediante la fórmula

$$\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \qquad z \notin \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\},$$

que define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$, siendo $(-1)^n/[n!(n+z)]$ su parte principal en el polo $-n$. Este es el desarrollo de Mittag-Leffler de la célebre función Γ de Euler que se considera con más detalle en el capítulo 11 (incluido en la versión electrónica de este libro).

Ejercicio 6.33.

Consideremos el desarrollo de Laurent

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}z^{2n+1}$$

válido para $0 < |z| < 2\pi$ *(véase el ejercicio 5.22). Demuestre que la serie*

$$h(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_3}{z+3} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{z+(2n+1)} + \cdots$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C}$ *que admite la representación integral*

$$h(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\,dt \quad \text{para } \operatorname{Re} z > 1.$$

SOLUCIÓN.

Obsérvese que

$$\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

es una función impar y, por lo tanto, deben ser nulos los coeficientes de índice par de su desarrollo de Laurent. Como el desarrollo de Laurent converge absolutamente en todos los puntos de $\{z : 0 < |z| < 2\pi\}$ y, en particular, en $z = 1$, podemos asegurar que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{2n+1}| < +\infty$. Cuando $x > 2$ la función $t^{x-1}/(e^t - 1)$ es continua en $[0, 1]$, donde admite el desarrollo en serie

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}}{t} - \frac{t^{x-1}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}t^{x+2n} < +\infty.$$

Como $|a_{2n+1}t^{x+2n}| \leq |a_{2n+1}|$ para todo $t \in [0, 1]$, se obtiene, con el criterio de Weierstrass, que la serie converge uniformemente en $[0, 1]$, lo que permite efectuar una integración término a término, resultando

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,dt = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n+1}}{x+(2n+1)} \tag{6.1}$$

Esta igualdad sugiere la consideración de la serie

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n+1}}{z+(2n+1)} \tag{6.2}$$

que define una función meromorfa $\varphi \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos simples

$$\mathscr{P}(\varphi) = \{1, 0, -1, -3, \dots, -(2n+1), \dots\}$$

Esta afirmación se justifica comprobando que la serie (6.2) converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \mathbb{C}$. Efectivamente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ y cada $z \in K$ se cumple $|z + (2n+1)| \geq 1$, luego $|a_{2n+1}/(z + 2n + 1)| \leq |a_{2n+1}|$.

Según (6.1), $h(x) = \varphi(x)$ para todo $x > 2$ luego, en virtud del principio de identidad, $h(z) = \varphi(z)$ cuando $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Ejercicio 6.34.

Según los ejercicios 5.53 y 6.33 la función

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

definida para $\mathrm{Re}\, z > 1$ *admite una prolongación meromorfa* $\widehat{F} \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$. *Demuestre que para* $\mathrm{Re}\, z \in (-1, 0)$ *se verifica*

$$\widehat{F}(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt$$

donde la integral es convergente uniformemente sobre compactos de la banda $\{z : -1 < \mathrm{Re}\, z < 0\}$.

SOLUCIÓN.

Consideremos las funciones F, F_0 y F_1 que intervienen en el ejercicio 5.53 y sea $\widehat{F}_0 \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la prolongación meromorfa de F_0 que se obtuvo en el ejercicio 6.33.

a) La integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt$$

converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \{z : \mathrm{Re}\, z > -1\}$. Efectivamente, la función $h(t) = 1/(e^t - 1) - 1/t + 1/2$ tiene un desarrollo de la forma $h(t) = a_1 t + a_3 t^3 + \cdots$ válido para $0 \leq t \leq 2\pi$ (véase el ejercicio 5.53), lo que pone de manifiesto que existe $C > 0$ tal que $|h(t)/t| \leq C$ para todo $t \in [0, 1]$. Sea $\delta = \min\{\mathrm{Re}\, z : z \in K\} > -1$. Para todo $z \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple $|h(t) t^{z-1}| = |h(t) t^{x-1}| \leq C t^x \leq t^\delta$ donde $\int_0^1 t^\delta dt < +\infty$ (porque $\delta > -1$).

Para $\mathrm{Re}\, z > 1$ un cálculo directo proporciona el valor

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z}$$

luego

$$F_0(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} \quad \text{si } \mathrm{Re}\, z > 1.$$

Según lo que se ha establecido anteriormente, la función a la derecha de esta igualdad es holomorfa en $\{z : -1 < \operatorname{Re} z\} \setminus \{0,1\}$ luego, por la unicidad de las prolongaciones analíticas,

$$\widehat{F}_0(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z}$$

si $-1 < \operatorname{Re} z$, $z \notin \{0,1\}$.

b) Con un cálculo sencillo (que se deja al cuidado del lector) se obtiene

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1}$$

donde la integral converge uniformemente sobre compactos de $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Se sigue de esto, usando lo obtenido en el ejercicio 6.33, que para $\operatorname{Re} z < 0$ se cumple

$$F_1(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} z < 0$$

y que la integral converge uniformemente sobre compactos de $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

En virtud de lo obtenido en *a*) y *b*), en $\{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0\}$

$$\widehat{F}(z) = \widehat{F}_0(z) + F_1(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt$$

donde la integral converge uniformemente sobre compactos.

6.3. Ejercicios propuestos

6.1 Sean $f, g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tales que $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$. Si para todo $z \in \mathbb{C}$, $g(f(z)) = g(z)$ demuestre que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

6.2 Si el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo, $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante y el conjunto $\{z \in \Omega : |f(z)| \leq 1\}$ es compacto y no vacío, demuestre que las singularidades aisladas de f no son esenciales (véase el ejercicio 9.4).

6.3 Sea $f \in \mathscr{H}\big(D^*(0,1)\big)$ tal que $\operatorname{Re} f(z) < \alpha$ para cada $z \in D^*(0,r)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 < r < 1$. Determine el tipo de singularidad que presenta f en 0.

6.4 Determine las singularidades aisladas de las siguientes funciones, indicando el tipo de singularidad:

$$a)\ \frac{e^{az}}{(1+e^z)} \qquad b)\ \cos\left(\frac{1}{e^z - 1}\right) \qquad c)\ \cos\left(\frac{z}{e^{z^2} - 1}\right) \qquad d)\ e^{1/(z^2-1)}.$$

6.5 Demuestre que existe $\rho > 0$ tal que la función $f(z) = e^{z/(z - \operatorname{sen} z)}$ posee primitiva en $D^*(0,\rho)$. ¿Qué tipo de singularidad tiene f en $z = 0$?

6.6 Si a es un polo simple de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y g es holomorfa en un entorno de a, compruebe que $\operatorname{Res}(fg, a) = g(a) \operatorname{Res}(f, a)$.

6.7 Sea $f(z)$ la raíz cúbica holomorfa de la función $(z+1)^2(z-1)$ definida en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, que toma valores reales cuando z es real. Determine el tipo de singularidad que tiene f en ∞ y calcule el residuo (vea el ejercicio 7.20).

6.8 Demuestre que las siguientes condiciones determinan una única función meromorfa $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ que se debe determinar:

a) f es par y $f(1) = 1$;

b) los únicos polos de f son $z = 0$ (doble) y $z = i$, $z = -i$ (simples) y $\operatorname{Res}(f, i) = 2i$;

c) $f(1/z)$ tiene un cero doble en $z = 0$.

6.9 Sea $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ y $\mathscr{E}$ la familia de las funciones meromorfas $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tales que $\mathscr{P}(f) = M$, donde todos los polos son simples con residuo igual a 1. Se supone que $0 < |a_1| < \cdots < |a_n| < |a_{n+1}| \cdots$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$. Se consideran las integrales

$$I_n(f) = \int_{C_n} \frac{f(w)}{w(w-z)}\, dw$$

donde $C_n(t) = R_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $|a_n| < R_n < |a_{n+1}|$. Demuestre:

a) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n(z-a_n)}$$

define una función $f \in \mathscr{E}$ con $\lim_n I_n(f) = 0$;

b) si $g \in \mathscr{E}$ y $\lim_n I_n(g) = 0$ entonces $g(z) - f(z)$ es constante;

c) en las condiciones de *b*), existe $G \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $g = G'/G$.

Capítulo 7

Teorema de los residuos

7.1. Preliminares teóricos

7.1.1. Índice de un ciclo respecto a un punto

Todo camino continuo $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ posee un logaritmo continuo, es decir, existe una función continua $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^g = \gamma$. Cuando γ es regular a trozos la siguiente fórmula proporciona un logaritmo continuo de γ:

$$g(t) = \alpha + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds, \quad \text{con } \alpha \in \log \gamma(0). \tag{7.1}$$

Si γ es un camino cerrado, es decir $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces $g(0)$ y $g(1)$ son logaritmos de $\gamma(0) = \gamma(1)$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(1) - g(0) = 2m\pi i$. Este número entero m, que no depende del logaritmo continuo de γ que se haya elegido, indica el número de vueltas, en sentido positivo, que $\gamma(t)$ da alrededor de 0, cuando t recorre el intervalo $[0,1]$ de modo creciente. En general, el número de vueltas de un camino cerrado continuo γ, alrededor de $a \notin \gamma([0,1])$, se obtiene contando las vueltas que da alrededor del origen su trasladado $\gamma(t) - a$.

Definición 7.1.1.
Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino cerrado y $a \notin \gamma([0,1])$, se define el índice(o número de vueltas) de γ respecto al punto a como el número entero

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}(g(1) - g(0))$$

donde $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo del camino $\gamma(t) - a$.

Si γ es cerrado y regular a trozos, utilizando la fórmula integral para el logaritmo continuo mencionada anteriormente, resulta

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

Los proposiciones que siguen son herramientas eficaces para calcular índices.

Proposición 7.1.2.
Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ caminos cerrados:

a) $\operatorname{Ind}(\gamma_0\gamma_1, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_0, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma_1, 0)$;

b) $\operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_0, 0)$ *si* $|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq |\gamma_1(t)|$ *para todo* $t \in [a, b]$.

Proposición 7.1.3.
Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado continuo. La función $z \to \operatorname{Ind}(\gamma, z)$, definida en el abierto $V = \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$, permanece constante en cada componente conexa de V y vale 0 en la componente conexa no acotada.

Una *cadena* Γ en el plano complejo es una sucesión finita de caminos que se acostumbra a escribir como una suma formal

$$\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m.$$

Si todos los caminos que componen la cadena son cerrados se dice que la cadena es un *ciclo*. Una cadena o ciclo se dice que es regular a trozos cuando son regulares a trozos los caminos que la componen. La cadena opuesta de Γ es

$$\sim \Gamma = (\sim \gamma_1) \oplus (\sim \gamma_2) \oplus \cdots \oplus (\sim \gamma_m).$$

Si $\Delta = \gamma_{m+1} \oplus \gamma_{m+2} \oplus \cdots \oplus \gamma_{m+k}$ es otra cadena, se define la suma formal

$$\Gamma \oplus \Delta = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_m \oplus \gamma_{m+1} \oplus \gamma_{m+2} \oplus \cdots \oplus \gamma_{m+k}$$

y la diferencia $\Gamma \oplus (\sim \Delta)$, que se designa más brevemente como $\Gamma \sim \Delta$. Si $m \in \mathbb{N}$ resulta conveniente definir $m\Gamma = \Gamma \oplus \overset{m}{\cdots} \oplus \Gamma$ y $(-m)\Gamma = \sim (m\Gamma)$.

La imagen de la cadena $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_m$ es la unión de las imágenes de sus componentes,

$$\operatorname{Imagen}(\Gamma) = \bigcup_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Imagen}(\gamma_j).$$

Se dice que Γ es una cadena en Ω cuando $\operatorname{Imagen}(\Gamma) \subset \Omega$ y si $a \notin \operatorname{Imagen}(\Gamma)$ se dice que la cadena Γ no pasa por el punto a.

Definición 7.1.4.
Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus .... \oplus \gamma_m$ es una cadena regular a trozos en Ω, se define

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Definición 7.1.5.
Si Γ es un ciclo regular a trozos que no pasa por el punto $z \in \mathbb{C}$, se define el índice de Γ respecto al punto z como la suma de los índices de los caminos cerrados que componen el ciclo:

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Ind}(\gamma_j, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}$$

Se sigue de la proposición 7.1.3 que para cada $z \notin \text{Imagen}(\Gamma)$ el índice $\text{Ind}(\Gamma, z)$ es un número entero, que permanece constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ y vale 0 en la componente conexa no acotada.

Dadas dos cadenas Γ y Δ, regulares a trozos en $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que son Ω-*equivalentes* cuando verifican

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Delta f(z)\,dz \quad \text{para cada } f \in \mathscr{H}(\Omega).$$

Dada una cadena regular a trozos $\Gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_m$ las siguientes operaciones la transforman en otra cadena Ω-equivalente, independientemente del abierto $\Omega \supset \text{Imagen}(\Gamma)$ que se considere:

a) permutar dos de los caminos que componen Γ;

b) reemplazar uno de los caminos γ_i de Γ por $\gamma_i^1 \oplus \gamma_i^2$, cuando $\gamma_i = \gamma_i^1 \vee \gamma_i^2$;

c) eliminar dos de los caminos γ_i, γ_j, de Γ, cuando $\gamma_i = \sim \gamma_j$;

d) reemplazar alguno de los caminos que forman Γ por caminos equivalentes.

7.1.2. Versión general de los teoremas de Cauchy

Definición 7.1.6.

Dos ciclos Γ, Δ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ son Ω-homólogos si

$$\text{Ind}(\Gamma, z) = \text{Ind}(\Delta, z) \quad \textit{para cada } z \notin \Omega.$$

Un ciclo Γ en Ω se dice que es Ω-homólogo a 0 si $\text{Ind}(\Gamma, z) = 0$ para cada $z \notin \Omega$.

Dos ciclos Γ, Δ son Ω-homólogos si y sólo si $\Gamma \sim \Delta$ es Ω-homólogo a 0.

Teorema 7.1.7. Fórmula integral de Cauchy (versión general).

Sea Γ un ciclo regular a trozos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω-homólogo a 0 (e.d. $\text{Ind}(\Gamma, a) = 0$ para cada $a \notin \Omega$). Entonces, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y cada $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ se verifica:

$$\text{Ind}(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

La versión general del teorema de Cauchy (7.1.8) establece que dos ciclos regulares a trozos son Ω-equivalentes si y sólo si son Ω-homólogos.

Teorema 7.1.8. Teorema de Cauchy (versión general).

Sean Γ y Δ ciclos regulares a trozos, Ω-homólogos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces se verifica

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Delta f(z)\,dz \quad \textit{para cada } f \in \mathscr{H}(\Omega).$$

En particular, si Γ es Ω-homólogo a 0 se cumple

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \textit{para cada } f \in \mathscr{H}(\Omega).$$

La versión general de los teoremas de Cauchy conduce a la siguiente caracterización de los abiertos holomórficamente conexos:

Teorema 7.1.9.
Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo.*

b) *Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω-homólogo a 0.*

c) *Para cada ciclo Γ regular a trozos en Ω, cada $z \in \Omega \setminus \operatorname{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se cumple*
$$f(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

d) *Para cada ciclo Γ regular a trozos en Ω y cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se cumple*
$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

e) *Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $F' = f$ (es decir, Ω es holomórficamente conexo).*

f) *Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$.*

Definición 7.1.10.
Dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que son homotópicos en Ω (Ω-homotópicos), si existe una función continua $h : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ que verifica:

a) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, *para todo* $t \in [0,1]$;

b) $h(s,0) = h(s,1)$ *para todo* $s \in [0,1]$.

En el ejercicio 7.55 se establece que dos caminos cerrados Ω-homotópicos son Ω-homólogos.

7.1.3. Teorema de los residuos y principio del argumento

Si f es holomorfa en $A := \{z : r < |z - a| < R\}$ y su desarrollo de Laurent en A es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$, entonces
$$f(z) - \frac{a_{-1}}{z - a}$$
tiene primitiva en A. Por consiguiente, si γ es un camino cerrado regular a trozos en A, se verifica
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-a}\, dz = a_{-1} 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a)$$
Esto se utiliza en los ejercicios 5.5, 5.9, 5.12, 7.10 y 7.17,.

En particular, en las condiciones de la definición 6.1.11, si γ es un camino cerrado regular a trozos en $D^*(a,r) \subset \Omega$ se verifica

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, a) \operatorname{Res}(f, a)$$

Combinada con la versión general del teorema de Cauchy, esta observación permite establecer el siguiente teorema fundamental.

Teorema 7.1.11. De los residuos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $S \subset \partial\Omega$ un conjunto de singularidades aisladas de $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus S)$. Par cada ciclo regular a trozos Γ en $\Omega \setminus S$ que sea Ω-homólogo a 0 se cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in S} \operatorname{Ind}(\Gamma, a) \operatorname{Res}(f, a)$$

donde la suma sólo contiene una cantidad finita de sumandos no nulos.

Si f es una función meromorfa no idénticamente nula en un abierto conexo los ceros y los polos de f son singularidades aisladas de $f'(z)/f(z)$ y, aplicando el teorema de los residuos, se obtiene el siguiente resultado donde, si a es cero o polo de f, $\nu(f,a)$ designa su multiplicidad.

Teorema 7.1.12. Principio del Argumento.

Sea $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ una función meromorfa no idénticamente nula en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y

$$S = \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{Z}(f).$$

Si Γ es un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$, que es Ω-homólogo a 0 se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{a\in\mathscr{Z}(f)} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\nu(f,a) - \sum_{a\in\mathscr{P}(f)} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\nu(f,a)$$

donde sólo hay una cantidad finita de sumandos no nulos.

El principio del argumento es una herramienta muy útil para calcular índices de ciclos pues la integral que aparece en 7.1.12 se puede interpretar como $\operatorname{Ind}(f\circ\Gamma, 0)$.

Proposición 7.1.13.

Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de la forma $\gamma(t) = f(\rho e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, donde $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ y $\{z : |z| \le \rho\} \subset \Omega$. Si f no tiene ceros ni polos en la circunferencia $\{z : |z| = \rho\}$ entonces $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = n - m$ donde n y m son, respectivamente, el número de ceros y el número de polos de f en $D(0,\rho)$ (con el convenio habitual de contarlos repetidos según las multiplicidades).

En los ejercicios 7.38, 7.39 y 7.40 se pueden ver aplicaciones concretas de este resultado. El principio del argumento también proporciona un método eficaz para calcular integrales del tipo considerado en la proposición 5.1.5 y en el ejercicio 7.36. Por ello este principio resulta muy útil a la hora de determinar regiones del plano donde una función holomorfa concreta posee logaritmos holomorfos o raíces m-ésimas holomorfas (vea la solución de los ejercicios 7.7, 7.8, 7.13, 7.14, 7.20 y 7.37, donde intervienen integrales que se calculan fácilmente con este principio).

Otra consecuencia importante del principio del argumento es el siguiente resultado que es muy útil para localizar ceros y polos de funciones meromorfas (véanse los ejercicios 7.47 a 7.50 y 7.53).

Teorema 7.1.14. Rouché.

Sean $f, g \in \mathscr{M}(\Omega)$ funciones meromorfas no idénticamente nulas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $S = \mathscr{Z}(f) \cup \mathscr{Z}(g) \cup \mathscr{P}(f) \cup \mathscr{P}(g)$.

Si Γ es un ciclo regular a trozos en $\Omega \setminus S$, que es Ω-homólogo a 0 y se cumple

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \textit{para todo } z \in \operatorname{Imagen}(\Gamma),$$

entonces $\Sigma(f, \Gamma) = \Sigma(g, \Gamma)$ donde

$$\Sigma(f, \Gamma) = \sum_{a \in \mathscr{Z}(f)} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\nu(f, a) - \sum_{a \in \mathscr{P}(f)} \operatorname{Ind}(\Gamma, a)\nu(f, a)$$

(en cada sumatorio sólo interviene una cantidad finita de sumandos no nulos).

Para aplicar el teorema de Rouché se suele comprobar la desigualdad

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| \text{ para todo } z \in \operatorname{Imagen}(\Gamma)$$

que es más exigente que la que figura en el enunciado de 7.1.14.

En las aplicaciones del teorema de Rouché se suelen considerar ciclos *simples*, es decir, ciclos Γ con la propiedad de que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) \in \{0, 1\}$ para todo $a \notin \operatorname{Imagen}(\Gamma)$. En este caso diremos que a está rodeado por Γ cuando $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$. Entonces, si $Z(f, \Gamma)$ (resp. $P(f, \Gamma)$) denota el número de ceros (resp. polos) de f rodeados por un ciclo simple Γ, la conclusión del teorema de Rouché es

$$Z(f, \Gamma) - P(f, \Gamma) = Z(g, \Gamma) - P(g, \Gamma)$$

Teorema 7.1.15. Hurwitz.

Sea $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a, r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z - a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades)

Corolario 7.1.16.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones sin ceros que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es idénticamente nula o bien f no tiene ceros.

Corolario 7.1.17.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones inyectivas que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es inyectiva o bien f es constante.

7.2. Ejercicios resueltos

7.2.1. Índice de un camino cerrado

Los ejercicios que siguen conciernen a la noción de índice de un camino cerrado respecto a un punto y se muestran algunas aplicaciones.

Ejercicio 7.1.

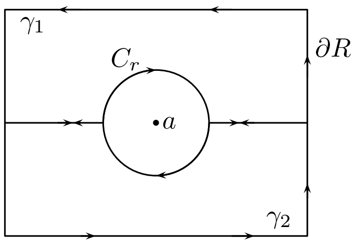
Sea C_r la circunferencia $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Compruebe que $\operatorname{Ind}(C_r, z) = 1$ *si* $|z - a| < r$ *e* $\operatorname{Ind}(C_r, z) = 0$ *si* $|z - a| > r$. *Utilice las propiedades del índice (7.1.3) para demostrar que si a es interior a un rectángulo cerrado R entonces* $\operatorname{Ind}(\partial R, a) = 1$.

SOLUCIÓN.

Según la proposición 7.1.3 el índice $\operatorname{Ind}(C_r, z)$ permanece constante en $D(a, r)$, luego para $|z - a| < 1$ se cumple

$$\operatorname{Ind}(C_r, z) = \operatorname{Ind}(C_r, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{dw}{w - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = 1.$$

Por otra parte, la componente conexa no acotada del complemento del camino C_r es $\{z : |z - a| > r\}$, luego $\operatorname{Ind}(C_r, z) = 0$ si $|z - a| > r$.



Si a es interior al rectángulo cerrado R y $\overline{D(a, r)} \subset R$, considerando los caminos cerrados γ_1, γ_2 indicados en la figura y teniendo en cuenta las cancelaciones de la integral curvilínea sobre segmentos opuestos se obtiene

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1, a) + \operatorname{Ind}(\gamma_2, a) = \operatorname{Ind}(\partial R, a) - \operatorname{Ind}(C_r, a).$$

En virtud de 7.1.3, $\operatorname{Ind}(\gamma_i, a) = 0$ para $i = 1, 2$, luego

$$\operatorname{Ind}(\partial R, a) = \operatorname{Ind}(C_r, a) = 1.$$

(Vea el ejercicio 7.2 para un resultado más general).

Ejercicio 7.2.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *un camino cerrado y sean* $\gamma_1 = \gamma|_{[a,x]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[x,b]}$ *($a < x < b$). Se supone que* $\operatorname{Im}\gamma(a) < 0$, $\operatorname{Im}\gamma(x) > 0$, *que γ_1 no pasa por el eje real negativo y que γ_2 no pasa por el eje real positivo. Demuestre que* $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$.

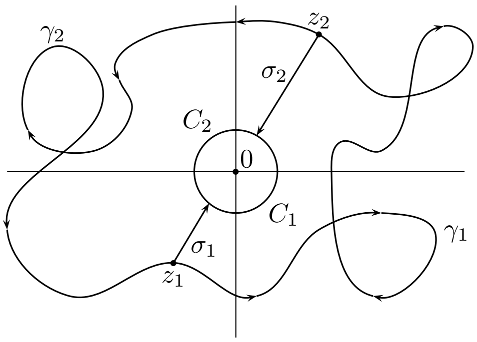
SOLUCIÓN.

Sean $z_1 = \gamma(a)$, $z_2 = \gamma(x)$. Consideremos los segmentos orientados σ_1, σ_2, que surgen de z_1 y z_2 respectivamente, y tienen sus extremos en una pequeña circunferencia C centrada en 0. Los extremos de estos segmentos descomponen la circunferencia en los arcos C_1, C_2, que se suponen orientados en sentido positivo.

Los caminos cerrados

$$\Gamma_1 = \gamma_1 \vee \sigma_2 \vee (\sim C_1) \vee (\sim \sigma_1) \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \gamma_2 \vee \sigma_1 \vee (\sim C_2) \vee (\sim \sigma_2)$$

cumplen que $\operatorname{Ind}(\Gamma_i, 0) = 0$ (porque, en virtud de la hipótesis sobre los caminos γ_i, el punto 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\Gamma_i)$).



Teniendo en cuenta las cancelaciones de las integrales curvilíneas sobre los segmentos σ_i y $\sim \sigma_i$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Ind}(\Gamma_1, 0) + \operatorname{Ind}(\Gamma_2, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{C_1} - \int_{C_2} \right) \frac{dz}{z} = \\ &= \operatorname{Ind}(\gamma, 0) - \operatorname{Ind}(C, 0) \end{aligned}$$

luego $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \operatorname{Ind}(C, 0) = 1$.

Ejercicio 7.3.

Sea γ la parametrización usual de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Utilice la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ para calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$$

SOLUCIÓN.

Razonando como en el ejercicio 7.1, o aplicando el resultado establecido en el ejercicio 7.2, es fácil ver que $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$, es decir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1.$$

Con la parametrización usual de la elipse, $\gamma(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$, esta igualdad se escribe en la forma

$$2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}}{|\gamma(t)|^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \operatorname{sen} t \cos t + 2iab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Igualando las partes imaginarias se obtiene $abI = \pi$.

Ejercicio 7.4.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no tiene ceros en $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$, demuestre que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $z^m f(z)$ posee logaritmo holomorfo en Ω. Como aplicación obtenga que f se puede descomponer en la forma $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, donde f_1 es holomorfa en $\{z : |z| < R\}$, f_2 es holomorfa en $\{z : |z| > r\}$ y $\lim_{z\to\infty} f_2(z)z^m = 1$.

SOLUCIÓN.

Según el teorema 5.1.5 la condición necesaria y suficiente para que $F(z) = z^m f(z)$ tenga logaritmo holomorfo en Ω es que la función

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{m}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

tenga primitiva en Ω. El teorema 5.1.11 asegura que f'/f admite un desarrollo de Laurent en Ω y este hecho permite asegurar que existe $a_{-1} \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{a_{-1}}{z}$$

tiene primitiva en Ω. Entonces basta demostrar que a_{-1} es un número entero para concluir que $m = -a_{-1}$ cumple la condición requerida. Para ello basta observar que para $\rho \in (r, R)$ está definido el camino cerrado $\gamma = f \circ C_\rho$, con $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, que verifica

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \operatorname{Ind}(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}.$$

Así queda demostrado que existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^{g(z)} = z^m f(z)$.

Aplicando otra vez el teorema 5.1.11 podemos asegurar que g admite en Ω un desarrollo de Laurent $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$, de modo que podemos escribir $g(z) = g_1(z)+g_2(z)$, donde $g_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ es holomorfa en $\{z : |z| < R\}$, $g_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_{-n} z^{-n}$ es holomorfa en $\{z : |z| > r\}$ y verifica $\lim_{z\to\infty} g_2(z) = 0$. Se sigue que

$$f(z) = f_1(z)f_2(z)$$

donde las funciones $f_1(z) = e^{g_1(z)}$, $f_2(z) = z^{-m}e^{g_2(z)}$, cumplen las condiciones requeridas en el enunciado.

Ejercicio 7.5.

Si γ es un camino cerrado en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, demuestre que son equivalentes:

a) γ *es* Ω*-homólogo a* 0 *(es decir* $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$ *para cada* $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*);*

b) $\{a \in M : \operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0\}$ *es finito si* $M \subset \Omega \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$ *y* $M' \cap \Omega = \emptyset$*.*

SOLUCIÓN.

Según la proposición 7.1.3, $V = \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma) : \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0\}$ es la unión de algunas de las componentes conexas del abierto $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, entre las que figura la no acotada. Entonces V es abierto con complemento $K = \mathbb{C} \setminus V$ cerrado y acotado y, por lo tanto, compacto.

a) ⇒ *b*) La hipótesis *a*) significa que $\mathbb{C}\setminus\Omega \subset V$, es decir $K \subset \Omega$. Si $M \subset \Omega$ y $M' \cap \Omega = \emptyset$, entonces $M' \cap K = \emptyset$ y por lo tanto $M \cap K$ es finito es decir, se cumple *b*) ($M \cap K$ no puede ser infinito porque entonces tendría un punto de acumulación en K, que también sería punto de acumulación de M).

b) ⇒ *a*) Demostraremos que si no se cumple *a*) tampoco se cumple *b*). Suponemos que existe $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con $\operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$.

Consideremos primero el caso $a \in \partial\Omega$. Entonces hay un disco $D(a, r)$ con $D(a, r) \cap \operatorname{Imagen}(\gamma) = \emptyset$ y una sucesión $a_n \in D(a, r) \cap \Omega$ de puntos distintos dos a dos, tal que $\text{lím}_n a_n = a$. Según la proposición 7.1.3 la función $z \to \operatorname{Ind}(\gamma, z)$ permanece constante sobre $D(a, r)$, luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\operatorname{Ind}(\gamma, a_n) = \operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$. Entonces $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto de $\Omega \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$ que verifica $M' \cap \Omega = \{a\} \cap \Omega = \emptyset$ y, por lo tanto, no se cumple *b*).

En el caso $a \notin \partial\Omega$, basta encontrar $b \in \partial\Omega$ tal que $\operatorname{Ind}(\gamma, b) \neq 0$ y aplicar lo que se acaba de obtener en el caso anterior.

Buscamos b considerando la componente conexa U de a en $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$. Es fácil ver que $\emptyset \neq \partial U \subset \operatorname{Imagen}(\gamma)$ (si existiese $w \in \partial U \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, su componente conexa en $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$ cortaría a U, luego debería coincidir con U, lo que es absurdo porque $w \notin U$). Según esto podemos elegir un punto $z_0 \in \partial U$, que pertenecerá a $\operatorname{Imagen}(\gamma) \subset \Omega$. Como Ω es un entorno abierto de $z_0 \in \partial U$ podemos asegurar que U tiene intersección no vacía con Ω. También tiene intersección no vacía con su complemento $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (porque a pertenece a esa intersección). Como U es conexo se sigue que U contiene algún punto de la frontera $b \in \partial\Omega$. Obsérvese que la condición $b \in U$ implica que $\operatorname{Ind}(\gamma, b) = \operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$.

Ejercicio 7.6.

Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ cerrados disjuntos, no vacíos. Si A es acotado y $a \in A$, obtenga un ciclo Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ tal que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ *e* $\operatorname{Ind}(\Gamma, b) = 0$ *para cada* $b \in B$.

SOLUCIÓN.

Consideremos una cuadrícula del plano determinada por una malla de rectas paralelas a los ejes de paso $\delta < \operatorname{dist}(A, B)/\sqrt{2}$, de modo que a sea el centro de uno de los cuadrados de la cuadrícula.

El diámetro de los cuadrados es $\sqrt{2}\delta < \operatorname{dist}(A, B)$, luego los cuadrados que cortan a A no cortan a B. Estos cuadrados forman una familia finita (porque A es acotado) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ donde podemos suponer que a es interior a Q_1. En virtud de la proposición 7.1.3 y del ejercicio 7.1 se cumple

a) $\operatorname{Ind}(\partial Q_i, b) = 0$ para cada $b \in B$;

b) $\operatorname{Ind}(\partial Q_i, a) = 0$ si $2 \leq i \leq m$, $\operatorname{Ind}(\partial Q_1, a) = 1$.

Se sigue que $\Delta := \partial Q_1 \oplus \partial Q_2 \oplus \cdots \oplus \partial Q_m$ es un ciclo en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ que verifica

c) $\operatorname{Ind}(\Delta, b) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Ind}(\partial Q_i, b) = 0$ para cada $b \in B$;

d) $\operatorname{Ind}(\Delta, a) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Ind}(\partial Q_i, a) = 1$.

Para obtener un ciclo Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ con las propiedades requeridas basta cancelar en Δ los segmentos que intervienen dos veces, pero con orientaciones opuestas (los que figuran como lados comunes de dos cuadrados contiguos de la familia $\{Q_i : 1 \leq i \leq m\}$). Los segmentos que no se cancelan no cortan al conjunto A y forman una cadena Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ que cumple *e)* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{dz}{z-b} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Delta \dfrac{dz}{z-b} = \operatorname{Ind}(\Delta, b) = 0$ para cada $b \in B$;

f) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{dz}{z-a} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Delta \dfrac{dz}{z-a} = \operatorname{Ind}(\Delta, a) = 1.$

Para terminar basta demostrar que Γ es un ciclo. Para ello la expresamos como suma formal de los segmentos que la componen $\Gamma = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \cdots \oplus \sigma_m$. Obsérvese que esta familia de segmentos es equilibrada en el sentido de que el número de segmentos con origen en un punto es igual al número de segmentos con extremo en el mismo punto (esto se debe a que el ciclo Δ ya estaba formado por una familia equilibrada de segmentos, que se mantiene equilibrada al efectuar las cancelaciones). Si eliminamos una colección finita de segmentos $\{\sigma_i : i \in M\}$ ($M \subset \{1, 2, \ldots, m\}$) que formen un ciclo, los segmentos que quedan siguen formando una cadena equilibrada ya que el origen (resp. extremo) de cada σ_i, $i \in M$, es el extremo (resp. origen) de otro σ_k, $k \in M$. Eliminando las colecciones de segmentos que forman ciclos se obtiene una cadena vacía Γ_0 (en caso contrario Γ_0 debería contener una cadena con infinitos segmentos). Queda probado así que Γ es un ciclo.

7.2.2. Existencia de primitivas, logaritmos y raíces

La noción de índice de un camino cerrado respecto a un punto es una herramienta eficaz para el estudio de la existencia de primitivas, logaritmos o raíces de funciones holomorfas concretas. En algunos de los ejercicios que siguen se caracterizan los abiertos donde se puede garantizar su existencia.

Ejercicio 7.7.

Estudie la existencia de un logaritmo holomorfo de

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

en cada una de las coronas $A_j = \{z : j < |z| < j+1\}$, $j = 0, 1, 2$.

SOLUCIÓN.

Según la proposición 5.1.5 el problema se reduce a estudiar cuándo la integral

$$I(\gamma) = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

es nula para todo camino cerrado regular a trozos γ en A_j.

Para ello basta tener en cuenta que

$$I(\gamma) = \int_\gamma \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}\right) dz = 2\pi i\big(\operatorname{Ind}(\gamma,0) - \operatorname{Ind}(\gamma,1) - \operatorname{Ind}(\gamma,2)\big).$$

Cuando $j = 0$ los puntos 1 y 2 están en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, luego $\operatorname{Ind}(\gamma,1) = \operatorname{Ind}(\gamma,2) = 0$. Entonces, eligiendo un camino γ con $\operatorname{Ind}(\gamma,0) \neq 0$ (una circunferencia en A_0, centrada en 0) se obtiene que $I(\gamma) = \operatorname{Ind}(\gamma,0) \neq 0$.

Cuando $j = 1$ los puntos 0 y 1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, luego $\operatorname{Ind}(\gamma,0) = \operatorname{Ind}(\gamma,1)$. Como el punto 2 está en la componente conexa no acotada, se cumple $\operatorname{Ind}(\gamma,2) = 0$, luego siempre es $I(\gamma) = 0$.

Finalmente, para $j = 2$, los tres puntos 0, 1 y 2 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\gamma)$, luego $\text{Ind}(\gamma, 0) = \text{Ind}(\gamma, 1) = \text{Ind}(\gamma, 2)$. Eligiendo un camino γ con $\text{Ind}(\gamma, 0) \neq 0$ (una circunferencia en A_2, centrada en 0) resulta $I(\gamma) = \text{Ind}(\gamma, 0) \neq 0$.

En definitiva, f sólo posee logaritmo holomorfo en la corona A_1.

Ejercicio 7.8.

Sea $T \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto y conexo con $\{1, -1, 1/2\} \subset T$. Justifique que

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(2z - 1)^2}$$

posee un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C} \setminus T$. Obtenga el desarrollo de Laurent de un logaritmo holomorfo de f en $\{z : |z| > R\}$, con $R = \text{máx}\{|z| : z \in T\}$.

SOLUCIÓN.

Según la proposición 5.1.5 basta demostrar que para cada camino cerrado regular a trozos γ en $\mathbb{C} \setminus T$ es nula la integral

$$\begin{aligned} I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z - 1/2} \right) dz = \\ &= \text{Ind}(\gamma, 1) + \text{Ind}(\gamma, -1) - 2\,\text{Ind}(\gamma, 1/2) \end{aligned}$$

Como $T \subset \mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\gamma)$ es conexo, el índice es el mismo respecto a todos los puntos de T, luego $\text{Ind}(\gamma, 1) = \text{Ind}(\gamma, -1) = \text{Ind}(\gamma, 1/2)$, y se sigue que $I(\gamma) = 0$.

Si g es un logaritmo holomorfo de f en $\mathbb{C} \setminus T$ su derivada vale

$$\begin{aligned} g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{4}{2z-1} = \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - 1/z} + \frac{1}{1 + 1/z} - \frac{2}{1 - 1/(2z)} \right) \end{aligned}$$

Cuando $|z| > R > 1$, los tres términos que figuran dentro del paréntesis, se pueden desarrollar en serie geométrica y se obtiene

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n - 2^{1-n}}{z^{n+1}}$$

luego

$$g(z) = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-n} - 1 - (-1)^n}{n z^n}$$

donde la constante c hay que determinarla con la condición de que la serie defina efectivamente un logaritmo de f. Para ello se debe cumplir

$$e^c = \lim_{z \to \infty} e^{g(z)} = \lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{1}{4}$$

luego debemos elegir c en el conjunto $\log(1/4) = \{-\text{Log}\, 4 + i2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 7.9.

Justifique que la función entera

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

posee un logaritmo holomorfo en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \pi\}$*. Obtenga su desarrollo en serie de potencias alrededor de* 0 *y el radio de convergencia del mismo.*

SOLUCIÓN.

Si $z \neq 0$ es $f(z) = z^{-1} \operatorname{sen} z$, luego f no se anula en Ω. Como $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, la proposición 7.1.9 nos garantiza que existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$. Esta función queda unívocamente determinada por su valor en un punto, por ejemplo, $g(0) = \operatorname{Log} f(0) = 0$. Así g es la primitiva de f'/f que se anula en $z = 0$.

El desarrollo en serie de potencias de g alrededor de 0 se puede calcular a partir del desarrollo de su derivada, cuyo valor es $g'(z) = \cot z - 1/z$, para $z \neq 0$. Según el ejercicio 5.22,

$$z \cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n B_{2n}}{2n!} z^n$$

donde B_n es la sucesión de los números de Bernoulli y el radio de convergencia de la serie de potencias es π. Se sigue que

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n B_{2n}}{2n!} z^{n-1}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n B_{2n}}{n(2n)!} z^n$$

con radio de convergencia π.

Ejercicio 7.10.

Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (a, b \in \mathbb{C},\ a \neq b)$$

tenga primitiva en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es que* a *y* b *estén en la misma componente conexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$*.*

SOLUCIÓN.

Supongamos que a y b pertenecen a la misma componente conexa T de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Según la proposición 5.1.3, para demostrar que f tiene primitiva en Ω basta ver que, para todo camino cerrado regular a trozos γ en Ω, es nula la integral

$$I(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

Esto se consigue fácilmente observando que

$$I(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) dz = \frac{2\pi i}{a-b} (\operatorname{Ind}(\gamma, a) - \operatorname{Ind}(\gamma, b)) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de la proposición 7.1.3, ya que a y b están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$ (la que contiene a T).

Recíprocamente, si f tiene primitiva en Ω podemos asegurar que a y b no pertenecen a Ω. Si T_a, T_b son las componentes conexas de a y b en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, hay que demostrar que $T_a = T_b$. Esto lo haremos por reducción al absurdo, suponiendo $T_a \neq T_b$. En este caso una de estas componentes conexas no contiene al punto ∞ y podemos suponer que $\infty \notin T_a$.

Según el ejercicio 2.43, existe un subconjunto A del compacto $K = \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, abierto y cerrado en K, tal que $T_a \subset A$, $\infty \notin A$ y $b \notin A$. Como A es cerrado en K se sigue que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto. Por otra parte, A también es abierto en K y podemos afirmar que $B = (K \setminus A) \cap \mathbb{C}$ es cerrado. El compacto A y el cerrado $B = (K \setminus A) \cap \mathbb{C}$ son disjuntos y $b \in B$. En virtud del ejercicio 7.6 existe un ciclo Γ en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B) \subset \Omega$ tal que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ e $\operatorname{Ind}(\Gamma, b) = 0$, luego

$$I(\Gamma) = \frac{2\pi i}{b-a}(\operatorname{Ind}(\Gamma, a) - \operatorname{Ind}(\Gamma, b)) \neq 0$$

lo que es imposible porque estamos suponiendo que f tiene primitiva en Ω

Ejercicio 7.11.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, demuestre que son equivalentes:

a) en Ω se puede definir un logaritmo holomorfo de z;

b) ∞ y 0 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

SOLUCIÓN.

Según la proposición 5.1.5 se cumple *a*) si y sólo si la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$$

es nula para todo camino cerrado regular a trozos γ en Ω.

Si ∞ y 0 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, para cualquier camino cerrado γ en Ω, se cumple que 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, luego $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

Demostremos el recíproco por reducción al absurdo: sea T_0 la componente conexa de 0 en $K = \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (que es compacto en $\mathbb{C}_\infty$). Si no se cumple *b*), es decir, si $\infty \notin T_0$, según el ejercicio 2.43, existe un conjunto $A \subset K$ abierto y cerrado en K, tal que $T_0 \subset A$ y $\infty \notin A$. Como A es cerrado en K se tiene que $A \subset \mathbb{C}$ es compacto. Por otra parte, al ser A abierto en K, el conjunto $B = (K \setminus A) \cap \mathbb{C}$ es cerrado. Como $A \cap B = \emptyset$, en virtud del ejercicio 7.6, existe en $\mathbb{C} \setminus (A \cup B) \subset \Omega$ un ciclo regular a trozos Γ que verifica $\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) \neq 0$. Alguno de los caminos cerrados γ que forman el ciclo verifica $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) \neq 0$.

Ejercicio 7.12.

Justifique que el polinomio $(z-1)(z-2)$ no posee raíz cuadrada continua en el abierto $\Omega = \{z : 1 < |z| < 2\}$.

SOLUCIÓN.

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe una función continua $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifica $g(z)^2 = (z-1)(z-2)$ para todo $z \in \Omega$.

Sea $C(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $1 < r < 2$. El camino cerrado $\gamma = g \circ C$, cumple $\gamma^2 = (C-1)(C-2)$ luego, en virtud de 7.1.2 *a*), se tiene

$$2\,\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \mathrm{Ind}(\gamma^2, 0) = \mathrm{Ind}(C, 1) + \mathrm{Ind}(C, 2) = 1 + 0 = 1,$$

lo que es imposible porque $\mathrm{Ind}(\gamma, 0)$ es un número entero.

Nota. También se puede razonar usando el resultado del ejercicio 7.36, con la función $f(z) = (z-1)(z-2)$ que verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-2}\,dz =$$
$$= \mathrm{Ind}(C, 1) + \mathrm{Ind}(C, 2) = 1.$$

Ejercicio 7.13.

Demuestre que las siguientes propiedades de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) *los dos puntos -1, 1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$;*

b) *$z^2 - 1$ tiene raíz cuadrada holomorfa en Ω.*

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 7.36 una condición necesaria y suficiente para que $f(z) = z^2 - 1$ tenga raíz cuadrada holomorfa en Ω es que para cada ciclo regular a trozos Γ en $\Omega \setminus \{-1, 1\}$ el valor de la integral

$$m(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z+1} =$$
$$= \mathrm{Ind}(\Gamma, 1) + \mathrm{Ind}(\Gamma, -1)$$

sea un entero par.

a) $\Rightarrow$ *b*) Si 1 y -1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ también están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{Imagen}(\Gamma) \supset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, luego $\mathrm{Ind}(\Gamma, 1) = \mathrm{Ind}(\Gamma, -1)$, lo que asegura que $m(\Gamma)$ es un entero par.

b) $\Rightarrow$ *a*) Si se cumple *b*) entonces $m(\Gamma)$ es un entero par para cualquier ciclo regular a trozos Γ en Ω. Esta propiedad implica que $1 \notin \Omega$ y $-1 \notin \Omega$ (si $1 \in \Omega$, tomando una pequeña circunferencia Γ en Ω centrada en 1 se obtendría $m(\Gamma) = 1$ y, análogamente, se razonaría con -1). Si T_{-1} y T_1 son las componentes conexas de $+1$ y -1 en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ debe ser $T_1 \neq T_{-1}$, pues en caso contrario, razonando como en el ejercicio 7.10, habría un ciclo Γ en Ω tal que $m(\Gamma) = 1$ no es par.

Nota. En los ejercicios 3.6, 3.7 y 3.8 se han obtenido raíces cuadradas holomorfas de $z^2 - 1$ definidas en abiertos concretos con la propiedad considerada en el enunciado.

Ejercicio 7.14.

Sea $\Omega = \{z : |z-1| > 1/2,\ |z+1| > 1/2\}$. Según la posición de a, b en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, determine los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que $f(z) = (z-a)^3(z-b)^7$ posee una raíz n-ésima holomorfa en Ω.

SOLUCIÓN.

Utilizaremos lo establecido en el ejercicio 7.36. Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en Ω, consideramos los posibles valores de la integral

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{3}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \frac{7}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-b} =$$
$$= 3\operatorname{Ind}(\gamma, a) + 7\operatorname{Ind}(\gamma, b)$$

Las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ son

$$A = \{z : |z-1| \le 1/2\} \quad \text{y} \quad B = \{z : |z+1| \le 1/2\}.$$

Si $a, b \in A$, en virtud de la proposición 7.1.3, se cumple $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, b)$, luego los posibles valores de la integral, $I(\gamma) = 10\operatorname{Ind}(\gamma, a)$, son los múltiplos de 10. Entonces, en virtud del ejercicio 7.36, sólo existe raíz n-ésima holomorfa de f en Ω para $n \in \{1, 2, 5\}$ (lo mismo ocurre si $a, b \in B$).

Si $a \in A$ y $b \in B$ existen caminos cerrados γ_1 y γ_2 en Ω tales que $\operatorname{Ind}(\gamma_1, a) = 1$, $\operatorname{Ind}(\gamma_1, b) = 0$, $\operatorname{Ind}(\gamma_2, a) = 0$, $\operatorname{Ind}(\gamma_2, b) = 1$, con lo cual $I(\gamma_1) = 3$, $I(\gamma_2) = 7$. Por lo tanto para $n \ge 2$ no existe raíz n-ésima holomorfa de f en Ω (lo mismo ocurre si $a \in B$ y $b \in A$).

Ejercicio 7.15.

Demuestre que son equivalentes las siguientes propiedades de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$

a) existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{tg} f(z) = z$ para cada $z \in \Omega$;

b) la función $\dfrac{1}{1+z^2}$ tiene primitiva en Ω;

c) la función $S(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ posee logaritmo holomorfo en Ω;

d) los puntos i, $-i$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

SOLUCIÓN.

a) $\Rightarrow$ *b)* Si se cumple *a)*, derivando en la igualdad $\operatorname{tg} f(z) = z$, se obtiene $f'(z)/\cos^2 f(z) = 1$, luego

$$f'(z) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 f(z)} = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

b) $\Leftrightarrow$ *c)* Tanto la condición *b)* como la *c)* implican que los puntos i ,$-i$ no están en Ω. Según la proposición 3.1.5, se cumple *c)* si y sólo si la función $S'(z)/S(z) = 2i/(1+z^2)$ tiene primitiva en Ω.

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = -i\,\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = T(e^{2iw})$$

donde $T(z) = i(1-z)/(1+z)$, luego $\operatorname{tg} w = z$ si y sólo si $e^{2iw} = T^{-1}(z)$. Como $T^{-1}(z) = S(z)$ se sigue que $L(z)$ es un logaritmo holomorfo de $S(z)$ en Ω si y sólo si $L(z)/(2i)$ es una rama holomorfa de $\operatorname{arc\,tg} z$ en Ω.

c) $\Rightarrow$ *a)* Basta razonar como en el ejercicio 3.18 donde se muestra que, para obtener en Ω una rama de $\operatorname{arc\,tg} z$, basta definir una rama del logaritmo de $S(z)$ y dividirlo luego por

$2i$. En dicho ejercicio se obtuvo explícitamente, en un abierto con la propiedad d)), una rama de $\operatorname{arc\,tg} z$.

$d) \Leftrightarrow c)$ Basta razonar como en el ejercicio 7.10.

Nota. Se puede dar una demostración de $b) \Rightarrow a)$ basada en el teorema de la función inversa: fijado $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \operatorname{arc\,tg} z_0$, la derivada de $\operatorname{tg} w$ en w_0 vale

$$\frac{1}{\cos^2 w_0} = 1 + \operatorname{tg}^2 w_0 = 1 + z_0^2 \neq 0$$

(obsérvese que al cumplirse b) los puntos i, $-i$ no pertenecen a Ω y por lo tanto $z_0 \notin \{i, -i\}$). Aplicando el teorema de la función inversa (6.1.3) se puede asegurar que existe una función h, definida y holomorfa en un disco $D(z_0, r) \subset \Omega$, tal que $\operatorname{tg} h(z) = z$ para todo $z \in D(z_0, r)$ y, razonando como antes, su derivada es $h'(z) = 1/(1 + z^2)$. Por hipótesis, $1/(1 + z^2)$ tiene una primitiva f en Ω, que se puede elegir con la condición $f(z_0) = w_0$. Esta condición garantiza que $f|_{D(z_0,r)} = h$, luego $\operatorname{sen} f(z) = z \cos f(z)$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Aplicando el principio de identidad se concluye que $\operatorname{sen} f(z) = z \cos f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Ejercicio 7.16.

Demuestre que para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) *existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\operatorname{sen} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ (e.d. se puede definir en Ω una rama holomorfa de $\operatorname{arc\,sen} z$);*

b) *los tres puntos ∞, 1, -1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.*

SOLUCIÓN.

$a) \Rightarrow b)$ Si se cumple a) es claro que $f'(z) \cos f(z) = 1$, luego

$$f'(z)^2 = \frac{1}{\cos^2 f(z)} = \frac{1}{1 - z^2} \quad \text{para todo } z \in \Omega,$$

es decir, la función $1/(1 - z^2)$ posee en Ω una raíz cuadrada holomorfa, la cual tiene primitiva. Entonces, según el ejercicio 7.13, hay una componente conexa T de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ a la que pertenecen 1 y -1. A continuación demostramos, por reducción al absurdo, que la existencia de primitiva de la raíz cuadrada implica que $\infty \in T$. Si ocurriese lo contrario T sería acotado y, razonando como en el ejercicio 7.10, podríamos asegurar la existencia de un ciclo Γ en Ω tal que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ para todo $a \in T$. Por otra parte, según el ejercicio 7.13, la función $1/(1 - z^2)$ tiene en $\mathbb{C} \setminus T \supset \Omega$ dos raíces cuadradas holomorfas y si g es la que coincide con f' sobre el abierto conexo Ω se cumpliría

$$\int_\Gamma g(z)\, dz = \int_\Gamma f'(z)\, dz = 0.$$

Cuando $\rho > R = \max\{|z| : z \in T\}$, la circunferencia $C_\rho(t) = \rho e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ está contenida en $G = \mathbb{C} \setminus T$ y es G-homóloga al ciclo Γ por lo que

$$\int_{C_\rho} g(z)\, dz = 0.$$

Esto contradice el hecho de que el desarrollo de Laurent de g en $\{z : |z| > R\}$ es de la forma

$$g(z) = \pm\frac{i}{z}S_{-1/2}(-1/z^2) = \pm\left(\frac{i}{z} - \frac{i}{z^2} + \cdots\right)$$

Con esto queda probado que $\infty \in T$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Supongamos ahora que los tres puntos 1, -1 e ∞ están en la misma componente conexa T de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Fijado $a \in \Omega$, elegimos $b \in \operatorname{arc\,sen} a$. Como 1 y -1 no pertenecen a Ω podemos asegurar que $\cos b \neq 0$ y, aplicando el teorema de la función inversa (6.1.3), se obtiene $\varphi \in \mathscr{H}(D(a,r))$ con $D(a,r) \subset \Omega$, tal que $\operatorname{sen}\varphi(z) = z$ para todo $z \in D(a,r)$.

Si demostramos que existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f|_{D(a,r)} = \varphi$, entonces para todo $z \in D(a,r)$ se cumplirá $\operatorname{sen} f(z) = z$ y, aplicando el principio de identidad, se obtendrá que $\operatorname{sen} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$.

Para obtener f nos basamos en la igualdad $\varphi'(z)^2 = 1/(1-z^2)$. Sabemos que $1/(1-z^2)$ posee raíces cuadradas holomorfas en $V = \mathbb{C} \setminus T$. Sea $g \in \mathscr{H}(V)$ la que coincide con φ' en $D(a,r) \subset \Omega \subset G$. Como $\infty \in T$ podemos asegurar que toda función holomorfa en V tiene primitiva (7.1.9). En particular g tiene primitiva en V y si f es la que cumple $f(a) = \varphi(a)$, teniendo en cuenta que $f'(z) = g(z) = \varphi'(z)$ para todo $z \in D(a,r)$, se obtiene que $f|_{D(a,r)} = \varphi$.

7.2.3. Sobre la versión general de los teoremas de Cauchy

Una vía natural para resolver los siguientes ejercicios es la utilización de la versión general de los teoremas de Cauchy y alguna de sus principales consecuencias, como la caracterización de los abiertos holomórficamente conexos obtenida en el teorema 7.1.9.

Ejercicio 7.17.

Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus T$ donde $T \subset \{z : |z| < R\}$ es cerrado y conexo. Demuestre que si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tiene primitiva en $A = \{z : |z| > R\}$ también la tiene en Ω. Obtenga que la función

$$g(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2 - 1}$$

tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

SOLUCIÓN.

Según el teorema 5.1.3, para demostrar que f tiene primitiva en Ω basta verificar que si γ es un camino cerrado, regular a trozos en Ω, entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Efectivamente, si $m = \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$, el camino cerrado $C(t) = Re^{imt}$, con $t \in [0, 2\pi]$, es Ω-homólogo a γ y está contenido en A, donde f tiene primitiva, luego

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz = 0.$$

La función g es par, luego su desarrollo de Laurent en $A = \{z : |z| > 1\}$ es de la forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, donde (según la nota que sigue al teorema 5.1.11) podemos asegurar que $a_n = 0$ si n es impar. En particular $a_{-1} = 0$, lo que garantiza que g tiene primitiva en A (4.1.9). En virtud de lo que se acaba de demostrar g también tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Ejercicio 7.18.

Sea γ un camino cerrado regular a trozos en un abierto $\Omega \supset \{z : |z| \geq r\}$, tal que

a) $\operatorname{Ind}(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ *para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$;

b) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma) : \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0\} \subset \Omega$.

Se supone que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *verifica* $\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha$. *Si* $a \notin \operatorname{Imagen}(\gamma)$, *calcule*

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

SOLUCIÓN.

Cuando $R > \rho = \max\{|a|, r\}$ la circunferencia $C_R(t) = Re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ está contenida en $\Omega_a = \Omega \setminus \{a\}$ y la integral

$$J_R(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

converge hacia α cuando R tiende hacia ∞. Efectivamente, dado ε existe $R(\varepsilon) > \rho$ tal que $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ cuando $|z| > R(\varepsilon)$. Entonces, tomando $R > \max\{R(\varepsilon), 2|a|\}$, si $|z| = R$ se cumple

$$\left| \frac{f(z) - \alpha}{z-a} \right| < \frac{\varepsilon}{R - |a|} < \frac{\varepsilon}{R - R/2} = \frac{2\varepsilon}{R}$$

luego

$$|J_R(a) - \alpha| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) - \alpha}{z-a}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\varepsilon}{R} 2\pi R = 2\varepsilon.$$

Por otra parte, $f(z)/(z-a)$ es holomorfa en Ω_a y todas las circunferencias C_R, con $R > \rho$, son Ω_a-homólogas. Aplicando la versión general del teorema de Cauchy (7.1.8), se obtiene que $J_R(a)$, como función de R, permanece constante para $R > \rho$. Se sigue que $J_R(a) = \alpha$ para todo $R > \rho$.

Para calcular $I(a)$ distinguimos dos casos, $\operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$ e $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$.

Si $\operatorname{Ind}(\gamma, a) \neq 0$, en virtud de las hipótesis, debe ser $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 1$ para cada $z \notin \Omega_a$, luego, para $R > \rho$, los caminos γ y C_R son Ω_a-homólogos y, según la versión general del teorema de Cauchy (7.1.8), se tiene $I(a) = J_R(a) = \alpha$.

Si $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$, la condición *b)* asegura que $a \in \Omega$. Cuando $R > \rho$ el ciclo $\Gamma = \gamma \sim C_R$ es Ω-homólogo a 0 (porque $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \operatorname{Ind}(C_R, z) = 1$ para todo $z \notin \Omega$) y, utilizando la fórmula integral de Cauchy (7.1.7), resulta

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = I(a) - J_R(a).$$

Como $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, a) - \operatorname{Ind}(C_R, a) = 0 - 1$, se obtiene $I(a) = \alpha - f(a)$.

Ejercicio 7.19.

Justifique que en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ *el polinomio* $p(z) = (z-1)(z+1)^2$ *posee una raíz cúbica holomorfa* $f(z)$, *que verifica* $f(3) = 2\sqrt[3]{4}$.

a) Obtenga el desarrollo de Laurent de f en $\{z : |z| > 1\}$ y utilícelo para calcular

$$I_\rho = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}\, dz$$

donde $1 < \rho \neq 3$ y $C_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Si $\rho > r > 1$ justifique que

$$\lim_n r^{-n} \int_{C_\rho} z^{n-1} f(z)\, dz = 0.$$

SOLUCIÓN.

Si γ es un camino cerrado y regular a trozos en Ω es obvio que 1 y -1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\gamma)$, por lo tanto $\text{Ind}(\gamma, 1) = \text{Ind}(\gamma, -1)$ y se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+1} \right) dz = \text{Ind}(\gamma, 1) + 2\,\text{Ind}(\gamma, -1) \in 3\mathbb{Z}.$$

Entonces, en virtud de los ejercicios 3.2 y 7.36, en Ω se pueden definir exactamente tres raíces cúbicas holomorfas de p. Cualquiera de ellas queda determinada por su valor en un punto. La función f es la determinada por el valor $f(3) = 2\sqrt[3]{4}$.

También se puede razonar directamente: para $z \in \Omega$ se puede considerar la factorización $p(z) = (z+1)^3 S(z)$, donde $S(z) = (z-1)/(z+1)$ no es real negativo, por lo que se puede usar la rama principal de su raíz cúbica para definir en Ω la función $f(z) = (z+1)\sqrt[3]{S(z)}$ que cumple las condiciones requeridas.

a) La factorización $p(z) = z^3(1 - 1/z)(1 + 1/z)^2$ permite escribir directamente una fórmula explícita para f, adecuada para obtener su desarrollo de Laurent en $A = \{z : |z| > 1\}$. Las funciones

$$S_{1/3}(-1/z) = e^{\frac{1}{3}\text{Log}(1-1/z)}, \qquad S_{2/3}(1/z) = e^{\frac{2}{3}\text{Log}(1+1/z)},$$

están definidas, respectivamente, en $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ y $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$, luego el producto $g(z) = zS_{1/3}(-1/z)S_{2/3}(1/z)$, define en Ω una raíz cúbica holomorfa de p que verifica $g(3) = 2\sqrt[3]{4} = f(3)$, luego $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

El desarrollo de Laurent de f en A se obtiene fácilmente multiplicando las series binomiales

$$f(z) = zS_{\frac{1}{3}}(-1/z)S_{\frac{2}{3}}(1/z) = z + \frac{1}{3} - \frac{4}{9z} + \cdots$$

La integral I_ρ no se puede calcular usando la fórmula integral de Cauchy porque la circunferencia C_ρ no es un camino Ω-homólogo a 0.

Como $1/C_\rho = \sim C_{1/\rho}$, con el cambio de variable $z = 1/w$ se obtiene

$$I_\rho = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}\, dz = \int_{1/C_\rho} \frac{f(1/w)}{1/w - 3} \left(\frac{-1}{w^2} \right) dw = \int_{C_{1/\rho}} \frac{f(1/w)}{w(1-3w)}\, dw$$

Ahora el valor de la última integral se puede obtener aplicando el teorema de los residuos a la función

$$F(w) = \frac{f(1/w)}{w(1-3w)}$$

que está definida en $D(0,1)\setminus\{0,1/3\}$. Para ello necesitamos calcular los residuos $\operatorname{Res}(F,0)$, $\operatorname{Res}(F,1/3)$. Es claro que F tiene un polo simple en $1/3$ con residuo

$$\operatorname{Res}(F,1/3) = \lim_{w\to 1/3}(w-1/3)F(w) = -f(3) = -2\sqrt[3]{4}.$$

Según hemos visto antes el desarrollo de Laurent de f en A es de la forma

$$f(z) = z + \frac{1}{3} - \frac{4}{9z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots$$

luego

$$F(w) = \frac{f(1/w)}{w(1-3w)} = \frac{1}{1-3w}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{3w} - \frac{4}{9} + a_{-2}w + \cdots\right)$$

Se sigue que F tiene en $w=0$ un polo doble cuyo residuo coincide con el de la función

$$G(w) = \frac{1}{1-3w}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{3w}\right)$$

(porque 0 es singularidad evitable de $G-F$). Este residuo es el coeficiente de $1/w$ en el desarrollo que resulta al efectuar el producto

$$G(w) = \left(1 + 3w + 3^2w^2 + \cdots\right)\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{3w}\right)$$

Se obtiene así que $\operatorname{Res}(F,0) = \operatorname{Res}(G,0) = 10/3$ (también se puede utilizar la fórmula del ejercicio 6.17).

Para $1<\rho<3$ los dos polos de F quedan dentro de la circunferencia $C_{1/\rho}$ y para $\rho>3$ la única singularidad de F encerrada por esta circunferencia es el polo doble $w=0$. Entonces, en virtud del teorema de los residuos:

$$I_\rho = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(F,0) + \operatorname{Res}(F,1/3)\big) = \left(\frac{20}{3} - 4\sqrt[3]{4}\right)\pi i \quad \text{si } 1<\rho<3,$$
$$I_\rho = 2\pi i \operatorname{Res}(F,0) = \frac{20}{3}\pi i \quad \text{si } \rho>3.$$

Para $\rho>3$ hay otra alternativa para calcular I_ρ, considerando el desarrollo de Laurent de $f(z)/(z-3)$ en $\{z : |z|>3\}$, pues si b_{-1} es el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo, se verifica

$$I_\rho = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}\,dz = 2\pi i b_{-1}$$

El desarrollo se obtiene fácilmente efectuando el producto del desarrollo

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-3/z} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} + \cdots \qquad |z|>3$$

por el desarrollo de f en $A=\{z : |z|>1\}$ obtenido anteriormente. Se llega así al valor $b_{-1} = 10/3$, con el que se obtiene nuevamente que $I_\rho = (20/3)\pi i$.

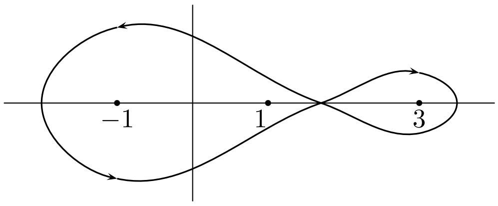
b) Para ver que z_n converge hacia 0 basta tener en cuenta que la serie de Laurent de f en $|z|>1$ converge en $z=r$, luego su término general $a_{-n}r^{-n} = z_n/(2\pi i)$ converge hacia 0.

Ejercicio 7.20.

Sea $f(z)$ la raíz cúbica holomorfa de $(z-1)(z+1)^2$ definida en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus[-1,+1]$ y determinada por el valor $f(3) = 2\sqrt[3]{4}$ (véase el ejercicio 7.19). Calcule

$$I = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad J = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-3}\,dz,$$

donde γ es el camino indicado en la figura.



SOLUCIÓN.

El camino indicado es Ω-homólogo a la circunferencia C_ρ, con $\rho > 1$ y, utilizando la versión general del teorema de Cauchy (7.1.8), se obtiene

$$I = \int_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

donde a_{-1} es el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent de f en $A = \{z : |z| > 1\}$. Segúln el ejercicio 7.19, $a_{-1} = -4/9$, luego $I = -(8/9)\pi i$.

Para calcular J usamos el ciclo $\Gamma = \gamma \sim C_\rho$, con $\rho > 3$, que es Ω-homólogo a 0. Según la versión general de la fórmula integral de Cauchy (7.1.7):

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-3}\,dz - \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Ind}(\Gamma,3)f(3) = -2\pi i f(3) = -4\sqrt[3]{4}\pi i,$$

luego $J = J_\rho - 4\sqrt[3]{4}\pi i$, donde

$$J_\rho = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z-3}\,dz$$

ya ha sido calculado en el ejercicio 7.19.

7.2.4. Algunas aplicaciones del teorema de los residuos

Los ejercicios de este bloque contienen diversas aplicaciones del teorema de los residuos, entre las que figuran resultados útiles para el cálculo práctico del residuo (véanse los ejercicios 7.21, 7.23, 7.25 y 7.32) y de los coeficientes de los desarrollos de Laurent (véanse los ejercicios 7.28 y 7.29).

Ejercicio 7.21.

Si f es holomorfa en $D^*(b,R)$ y $\varphi : D(a,r) \longrightarrow D(b,R)$ es holomorfa e inyectiva con $\varphi(a) = b$, demuestre que $\mathrm{Res}(f,b) = \mathrm{Res}\big((f\circ\varphi)\varphi', a\big)$.

SOLUCIÓN.

Si $0 < \rho < r$ y $C_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, según la observación que precede al teorema de los residuos 7.1.11, aplicada a la función $(f \circ \varphi)\varphi'$, que es holomorfa en $D^*(a, r)$, se verifica

$$\operatorname{Res}((f \circ \varphi)\varphi', a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(\varphi(z))\varphi'(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z)\, dz$$

donde $\Gamma_\rho = \varphi \circ C_\rho$. Como $z = a$ es el único cero de $\varphi(z) - b$ en $D(a, \rho)$, y el cero es simple, según el principio del argumento

$$\operatorname{Ind}(\Gamma_\rho, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z) - b}\, dz = 1$$

y con el teorema de los residuos se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z)\, dz = \operatorname{Ind}(\Gamma_\rho, b) \operatorname{Res}(f, b) = \operatorname{Res}(f, b).$$

Ejercicio 7.22.

Sea $A \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ finito y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus A)$. Se considera la función $g(z) = zf(z^2)$, definida en $\mathbb{C} \setminus B$ donde $B = \{b : b^2 \in A\}$. Demuestre que g presenta en cada $b \in B$ el mismo tipo de singularidad que f presenta en $a = b^2$ (si es polo, con la misma multiplicidad) y que $\operatorname{Res}(g, b) = \frac{1}{2} \operatorname{Res}(f, a)$.

SOLUCIÓN.

a) Si a es singularidad evitable de f es inmediato que existe y es finito el límite

$$\lim_{z \to b} g(z) = \lim_{z \to b} zf(z^2) = b \lim_{w \to a} f(w),$$

luego b es singularidad evitable de g.

b) Si a es polo de f, con multiplicidad m, existe el límite

$$\lim_{z \to a} (z - a)^m f(z) = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Si z tiende hacia b, z^2 tiende hacia $b^2 = a$, luego $\lim_{z \to b}(z^2 - a)^m f(z^2) = \alpha$ y teniendo en cuenta que

$$(z - b)^m g(z) = (z - b)^m (z + b)^m \frac{z}{(z + b)^m} f(z^2) = (z^2 - a)^m f(z^2) \frac{z}{(z + b)^m}$$

se obtiene que existe el límite

$$\lim_{z \to b} (z - b)^m g(z) = \alpha \lim_{z \to b} \frac{z}{(z + b)^m} = \frac{\alpha b}{2b^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

luego b es polo de g, con multiplicidad m.

c) Si $a = b^2$ es singularidad esencial de f existe una sucesión a_n contenida en $D^*(a, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$ tal que $f(a_n)$ no converge en $\mathbb{C}_\infty$. Podemos suponer que $r < |a|$ y, así, tenemos garantizado que en $D(a, r)$ hay definida una raíz cuadrada holomorfa de z, denotada $R(z)$, tal que $R(a) = b$. Entonces $b_n = R(a_n)$ es una sucesión en $\mathbb{C} \setminus B$ que converge hacia

$b \neq 0$. Pero entonces $g(b_n) = b_n f(a_n)$ no converge en $\mathbb{C}_\infty$ y por lo tanto b es singularidad esencial de g.

d) Para probar que $\operatorname{Res}(g, b) = \frac{1}{2}\operatorname{Res}(f, a)$ consideramos una circunferencia γ en $D(b, |b|)$, centrada en b, orientada positivamente. Según el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g, b) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \gamma(t) f(\gamma(t)^2)\gamma'(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^2}\frac{f(z)}{2}\,dz = \frac{1}{2}\operatorname{Ind}(\gamma^2, a)\operatorname{Res}(f, a)\end{aligned}$$

y todo queda reducido a ver que $\operatorname{Ind}(\gamma^2, a) = 1$. Según la proposición 7.1.2 *a*)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(\gamma^2 - a, 0) &= \operatorname{Ind}((\gamma - b)(\gamma + b), 0) = \operatorname{Ind}(\gamma - b, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma + b, 0) = \\ &= \operatorname{Ind}(\gamma, b) + \operatorname{Ind}(\gamma, -b) = 1 + 0\end{aligned}$$

(obsérvese que $\operatorname{Ind}(\gamma, -b) = 0$ porque $-b$ queda fuera de la circunferencia γ).

Ejercicio 7.23.

Si $S \subset \mathbb{C}$ es finito y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus S)$, demuestre que

$$\sum_{a\in S}\operatorname{Res}(f, a) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

SOLUCIÓN.

Sea $\rho > 0$ tal que $S \subset D(0, 1/\rho)$. Como f es holomorfa en $\{z : |z| > 1/\rho\}$, la función $g(z) = -f(1/z)/z^2$ es holomorfa en $D^*(0, \rho)$. Si $0 < r < \rho$, considerando la circunferencia $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, se obtiene

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(g, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$$

donde $\gamma_r(t) = r^{-1}e^{-it}$. Para cada $a \in S$ es $|a| < 1/r$, luego $\operatorname{Ind}(\gamma_r, a) = -1$ y aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \sum_{a\in S}\operatorname{Ind}(\gamma_r, a)\operatorname{Res}(f, a) = -\sum_{a\in S}\operatorname{Res}(f, a).$$

Ejercicio 7.24.

Sea $f = P/Q$ una función racional, donde P y Q son polinomios complejos sin ceros comunes, de grados respectivos m y n, $0 \leq m \leq n$. Se supone que $f(z) \neq z$ cuando $f'(z) = 1$. Demuestre que

$$\sum_{a\in S}\frac{1}{1 - f'(a)} = 1 \quad \textit{donde } S = \{z : f(z) = z\}.$$

SOLUCIÓN.

Los ceros de la función racional $f(z)-z$ son todos simples pues, por hipótesis, $f(a)-a=0$ implica que $f'(a)-1\neq 0$. Entonces $F(z)=1/(f(z)-z)$ es una función racional que sólo tiene polos simples en cada $a\in S$, con residuo

$$\operatorname{Res}(F,a)=\lim_{z\to a}\frac{z-a}{f(z)-z}=\frac{1}{f'(a)-1}$$

Como F es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus S$, en virtud del ejercicio 7.23, se verifica

$$\sum_{a\in S}\frac{1}{1-f'(a)}=\operatorname{Res}(F,\infty).$$

Para terminar basta calcular $\operatorname{Res}(F,\infty)=\operatorname{Res}(h,0)$ donde

$$h(z)=-\frac{1}{z^2}F(1/z)=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{f(1/z)-1/z}=\frac{1}{z-z^2f(1/z)}$$

La condición $m\leq n$ garantiza que existe y es finito el límite $\lim_{z\to 0}f(1/z)$, luego $zh(z)=1/(1-zf(1/z))$ tiende hacia 1 cuando $z\to 0$. Es decir, 0 es polo simple de h con residuo $\operatorname{Res}(h,0)=1$ y queda demostrado lo que se deseaba.

Ejercicio 7.25.

Sea P un polinomio de grado mayor o igual que 1 con $P(0)=0$. Calcule $\operatorname{Res}(f,a)$ donde

$$f(z)=\frac{1}{z-b}P\left(\frac{1}{z-a}\right)\quad(b\neq a).$$

SOLUCIÓN.

El residuo $\operatorname{Res}(f,a)$ es igual al residuo en 0 de la función

$$f(a+z)=\frac{1}{z-c}P\left(\frac{1}{z}\right)$$

donde $c=b-a\neq 0$. Sea $P(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$. Si $|z|<|c|$, considerando la serie geométrica de razón z/c se obtiene

$$\begin{aligned}f(a+z)&=-\frac{1}{c}P\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1-z/c}=\\&=-\frac{1}{c}\left(\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots\frac{a_n}{z^n}\right)\left(1+\frac{z}{c}+\frac{z^2}{c^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

El producto de las series proporciona el desarrollo de Laurent de $f(a+z)$ en $z=0$. Del desarrollo sólo interesa el coeficiente de $1/z$, que es el residuo requerido:

$$\operatorname{Res}(f,a)=-\frac{1}{c}\left(a_1+\frac{a_2}{c}+\cdots+\frac{a_n}{c^{n-1}}\right)=-P\left(\frac{1}{c}\right)=-P\left(\frac{1}{b-a}\right)$$

Nota. Usando la igualdad $\operatorname{Res}(f,a)+\operatorname{Res}(f,b)+\operatorname{Res}(f,\infty)=0$ (véase el ejercicio 7.23) se simplifica la tarea de calcular $\operatorname{Res}(f,a)$. El cálculo del residuo en el polo múltiple $z=a$, se reduce al cálculo de $\operatorname{Res}(f, \infty)$ y del residuo $\operatorname{Res}(f, b)$ en un polo simple, que es muy fácil:

$$\operatorname{Res}(f, b) = \lim_{z \to b} (z - b) f(z) = \lim_{z \to b} P\left(\frac{1}{z - a}\right) = P\left(\frac{1}{b - a}\right)$$

El cálculo de $\operatorname{Res}(f, \infty)$ también es fácil: como $P(0) = 0$ la función

$$g(z) = -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z(bz - 1)} P\left(\frac{z}{1 - az}\right)$$

presenta una singularidad evitable en 0, luego $\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}(g, 0) = 0$. Se concluye así que $\operatorname{Res}(f, a) = -\operatorname{Res}(f, b) = -P(1/(b - a))$.

Ejercicio 7.26.

Sea P_n el polinomio de Taylor de grado n de $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ en $a \in \Omega$. Sea $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ y $|z - a| < r$, demuestre que $f(z) = P_n(z) + g_n(z)(z - a)^{n+1}$, donde

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z)(w - a)^{n+1}} \, dw$$

y $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

El desarrollo en serie de potencias de f en a pone de manifiesto que la función

$$g_n(z) = \frac{f(z) - P_n(z)}{(z - a)^{n+1}} \text{ si } z \in \Omega \setminus \{a\}; \qquad g_n(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n + 1)!}$$

es holomorfa en Ω. Si $|z - a| < r$, usando la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z)(w - a)^{n+1}} \, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{P_n(w)}{(w - z)(w - a)^{n+1}} \, dw.$$

Para terminar basta demostrar que se anula la última integral. En virtud del teorema de los residuos dicha integral vale $\operatorname{Res}(h_n, a) + \operatorname{Res}(h_n, z)$, donde

$$h_n(w) = \frac{P_n(w)}{(w - z)(w - a)^{n+1}}$$

es una función del tipo considerado en el ejercicio 7.25. Según lo obtenido allí $\operatorname{Res}(h_n, a) + \operatorname{Res}(h_n, z) = -\operatorname{Res}(h_n, \infty) = 0$.

Ejercicio 7.27.

Sea $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ con un número finito de polos $\mathscr{P}(f) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y γ un camino en $\Omega \setminus \mathscr{P}(f)$, cerrado, regular a trozos, que es Ω-homólogo a 0 y no pasa por $z \in \Omega \setminus \mathscr{P}(f)$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw = \operatorname{Ind}(\gamma, z) f(z) - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ind}(\gamma, a_j) R_j(z)$$

donde R_j es la parte principal de f en el polo a_j.

SOLUCIÓN.

La función meromorfa $g(w) = f(w)/(w - z)$ sigue teniendo los polos de f y además presenta en $w = z$ una singularidad evitable o un polo simple (según que sea $f(z) = 0$ o $f(z) \neq 0$) y en ambos casos es $\text{Res}(g, z) = f(z)$.

Para calcular los residuos $\text{Res}(g, a_j)$, para $1 \leq j \leq m$, consideremos las funciones

$$g_j(w) = \frac{R_j(w)}{w - z}$$

Como a_j es singularidad evitable de $f(w) - R_j(w)$, también es singularidad evitable de $g(w) - g_j(w)$, luego $\text{Res}(g, a_j) = \text{Res}(g_j, a_j)$.

La función R_j es de la forma $R_j(w) = P_j(1/(w - a_j))$, donde P_j es un polinomio complejo con $P_j(0) = 0$, luego g_j es una función del tipo considerado en el ejercicio 7.25, en virtud del cual

$$\text{Res}(g, a_j) = \text{Res}(g_j, a_j) = -P_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) = -R_j(z).$$

Aplicando el teorema de los residuos a la función g se obtiene la igualdad del enunciado.

Ejercicio 7.28.

Sean $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ los desarrollos de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

en $A = \{z : 0 < |z| < \pi\}$ y $B = \{z : \pi < |z| < 2\pi\}$, respectivamente.

a) Demuestre que el desarrollo de f en A es de la forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

donde $a_n = 0$ si n es par.

b) Obtenga b_n en términos de a_n.

c) Para $n \in \mathbb{N}$, calcule la integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} z^n f(z)\, dz,$$

donde $\pi < r < 2\pi$ y $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

a) La función f es holomorfa en $A = \{z : 0 < |z| < \pi\}$, presenta en $z = 0$ un polo simple con residuo igual a 1 y es impar, luego su desarrollo en A es de la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots + a_{2n+1} z^{2n+1} + \cdots$$

luego

$$\frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1 + a_1 z^2 + a_3 z^4 + \cdots a_{2n-1} z^{2n} + \cdots$$

Con el método de los coeficientes indeterminados se calculan los coeficientes $a_1 = 1/6$, $a_3 = 7/360$,...

b) Si $0 < r_1 < \pi < r_2 < 2\pi$, se verifica:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{dz}{z^{n+1}\operatorname{sen} z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}} \frac{dz}{z^{n+1}\operatorname{sen} z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^{n+1}\operatorname{sen} z}$$

donde $\Gamma = C_{r_2} \sim C_{r_1}$ es un ciclo en $G = \{z : 0 < |z| < 2\pi\}$, G-homólogo a 0. Los polos (simples) de $f_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}\operatorname{sen} z}$ en G, son $z = \pi$ y $z = -\pi$, con

$$\operatorname{Res}(f_n, \pi) = \frac{-1}{\pi^{n+1}}; \qquad \operatorname{Res}(f_n, -\pi) = \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}}$$

Como $\operatorname{Ind}(\Gamma, \pi) = \operatorname{Ind}(\Gamma, -\pi) = 1$, el teorema de los residuos conduce a

$$b_n - a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^{n+1}}$$

luego $b_n = a_n = 0$, cuando n es par, y $b_n = a_n - \frac{2}{\pi^{n+1}}$ cuando n es impar.

c) El coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent de $z^n f(z)$ en G es $b_{-(n+1)}$, luego $I_n = b_{-(n+1)}$. Teniendo en cuenta lo obtenido en *b*) y que $a_{-(n+1)} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta $I_n = -2\pi^n$, si n es par, y $I_n = 0$ si n es impar.

Ejercicio 7.29.

Obtenga el desarrollo de Laurent de $\pi \cot \pi z$ en las coronas

$$A = \{z : 0 < |z| < 1\} \quad y \quad B = \{z : 1 < |z| < 2\}.$$

SOLUCIÓN.

Sean $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ los desarrollos en A y B, respectivamente.

La función $\pi z \cot \pi z$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ y su desarrollo en serie de potencias en el disco $D(0, 1)$ se obtuvo en el ejercicio 5.22. Dividiendo este desarrollo por z se consigue el desarrollo de Laurent de $\pi \cot \pi z$ en A:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{z} - \frac{B_2(2\pi)^2}{2!}z + \frac{B_4(2\pi)^4}{4!}z^3 - \cdots$$

donde B_n es la sucesión de los números de Bernoulli que se calculan por recurrencia según la fórmula indicada en el ejercicio 5.22:

$$B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42,\ B_8 = -1/30,\ B_{10} = 5/66\ \ldots$$

Sea $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Si $0 < r_1 < 1 < r_2 < 2$, según la fórmula integral para los coeficientes de los desarrollos de Laurent,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}} \frac{\pi \cot \pi z}{z^{n+1}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}} \frac{\pi \cot \pi z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\pi \cot \pi z}{z^{n+1}}\,dz$$

donde $\Gamma = C_{r_2} \sim C_{r_1}$ es un ciclo en la corona $G = \{z : 0 < |z| < 2\}$.

Las singularidades aisladas de $f_n(z) = z^{-(n+1)}\pi \cot \pi z$ en G son dos polos simples, 1 y -1, cuyos residuos se calculan con la fórmula del ejercicio 6.17 *a*):

$$\operatorname{Res}(f_n, 1) = 1, \quad \operatorname{Res}(f_n, -1) = (-1)^{n+1}.$$

Como el ciclo Γ es G-homólogo a 0 e $\operatorname{Ind}(\Gamma, 1) = \operatorname{Ind}(\Gamma, -1) = 1$, aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$b_n = a_n = 0 \text{ si } n \text{ es par}; \quad b_n - a_n = 2 \text{ si } n \text{ es impar}.$$

En particular, para n impar

$$b_n = 2 \ \text{ si } n \le -3, \quad b_{-1} = 3, \quad b_1 = 2 - \pi^2/3, \quad b_3 = 2 - \pi^4/45, \ \dots$$

Ejercicio 7.30.

Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} \pi z}$$

no tiene primitiva en $A_n = \{z : n + 1/2 < |z - 1/2| < n + 3/2\}$.

SOLUCIÓN.

Basta obtener en A_n un camino cerrado y regular a trozos γ, tal que $\int_\gamma f(z)\, dz \neq 0$. En el disco $D_n = D(1/2, n + 3/2)$, las únicas singularidades aisladas de $f|_{D_n}$ son polos en los puntos de

$$P_n = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1), n\} \subset \mathbb{C} \setminus A_n.$$

Todos los polos son simples, excepto 0, que es un polo doble con $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ porque f es una función par (vea la nota que sigue al teorema 5.1.11). El residuo en los polos simples se calcula fácilmente con la fórmula usual

$$\operatorname{Res}(f, k) = \frac{1}{k\pi \cos \pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi k} = -\operatorname{Res}(f, -k).$$

Sea γ un camino cerrado y regular a trozos en A_n tal que $\operatorname{Ind}(\gamma, 1/2) = 1$. Como P_n está contenido en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$ (la que contiene a $\{z : |z - 1/2| \le n + 1/2\}$) podemos asegurar que

$$\operatorname{Ind}(\gamma, p) = \operatorname{Ind}(\gamma, 1/2) = 1 \ \text{ para cada } \ p \in P_n.$$

Como $\operatorname{Res}(f, k) + \operatorname{Res}(f, -k) = 0$ y $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$, aplicando el teorema de los residuos, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \operatorname{Ind}(\gamma, 1/2) \left(\sum_{|k|<n} \operatorname{Res}(f, k) + \operatorname{Res}(f, n) \right) = \operatorname{Res}(f, n) \neq 0,$$

luego f no tiene primitiva en A_n.

Ejercicio 7.31.

Se supone que $|a| \neq 1$ *y que* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *con* $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$*. Calcule*

$$I(a) = \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\,dz$$

donde $C(t) = e^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*.*

SOLUCIÓN.

Como $\overline{f(z)}$ no es holomorfa, no se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy para calcular directamente

$$I(a) = \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{f(e^{it})}\,ie^{it}}{e^{it}-a}\,dt.$$

Sin embargo, es posible calcular

$$\overline{I(a)} = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})(-ie^{-it})}{e^{-it}-\overline{a}}\,dt = -\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})ie^{it}}{e^{it}-\overline{a}e^{i2t}}\,dt = -\int_C \frac{f(z)}{z(1-\overline{a}z)}\,dz$$

aplicando el teorema de los residuos a la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z(1-\overline{a}z)}$$

En $z=0$ la función g tiene un polo simple o una singularidad evitable, según sea $f(0) \neq 0$ o $f(0) = 0$. En cualquier caso el residuo vale $\operatorname{Res}(g, 0) = f(0)$.

Si $|a| < 1$ la función g no presenta más singularidades en $D(0,1)$ y con el teorema de los residuos se obtiene $\overline{I(a)} = -2\pi i f(0)$, luego

$$I(a) = 2\pi i \overline{f(0)} \ \text{ si } |a| < 1.$$

Si $|a| > 1$ la función g tiene otro polo simple en $1/\overline{a} \in D(0,1)$, con residuo $\operatorname{Res}(g, 1/\overline{a}) = -f(1/\overline{a})$ y, aplicando otra vez el teorema de los residuos, se obtiene

$$\overline{I(a)} = -2\pi i(\operatorname{Res}(g,0) + \operatorname{Res}(g, 1/\overline{a})) = -2\pi i(f(0) - f(1/\overline{a})),$$

luego

$$I(a) = 2\pi i\,\overline{(f(0) - f(1/\overline{a}))} \ \text{ si } |a| > 1.$$

Nota. Al resolver el ejercicio 5.33 ya se calculó la integral

$$\int_C \frac{f(z)}{z(1-\overline{a}z)}\,dz,$$

en el caso $|a| < 1$, sin usar el teorema de los residuos.

Ejercicio 7.32.

Aplicando el teorema de los residuos a la función $f(z) = (\cot \pi z)^{2m+1}$ *sobre el borde del rectángulo* $R = [-1/2, 1/2] \times [-n, n]$*, calcule* $\operatorname{Res}(f, 0)$*.*

Indicación. $f(1/2 + it) = f(-1/2 + it)$*.*

SOLUCIÓN.

El único polo de f dentro del rectángulo R es $z = 0$, luego

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \int_{\partial R} f(z)\, dz =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} (f(t - in) - f(t + in))\, dt + i \int_{-n}^{n} (f(1/2 + it) - f(-1/2 + it))\, dt$$

Expresando $h(t) = f(-1/2 + it)$ en términos de la función exponencial

$$h(t) = \left(i \, \frac{e^{-\pi t} - e^{\pi t}}{e^{-\pi t} + e^{\pi t}} \right)^{2m+1}$$

se observa que h es una función impar. Como f también lo es, resulta

$$f(-1/2 + it) = h(t) = -h(-t) = -f(-1/2 - it) = f(1/2 + it)$$

luego

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \int_{-1/2}^{1/2} \alpha_n(t)\, dt$$

donde $\alpha_n(t) = f(t - in) - f(t + in) = -f(-t + in) - f(t + in)$.

Según el ejercicio 4.5 la sucesión $\alpha_n(t)$ converge, uniformemente sobre $[-1/2, 1/2]$, hacia $-2(-i)^{2m+1} = (-1)^m 2i$. Esto justifica el paso al límite bajo la integral

$$\lim_n \int_{-1/2}^{1/2} \alpha_n(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \lim_n \alpha_n(t)\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} (-1)^m 2i\, dt = (-1)^m 2i.$$

Se obtiene así que $2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = (-1)^m 2i$, luego $\operatorname{Res}(f, 0) = (-1)^m/\pi$.

Ejercicio 7.33.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ con $f'(a) \neq 0$. Demuestre que existe $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ tal que $f|_{D(a,r)}$ es inyectiva y su función inversa $g : f\big(D(a, r)\big) \longrightarrow D(a, r)$ viene dada por la integral

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

donde $C_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

En virtud del teorema de la función inversa 6.1.4, existe $D(a, R) \subset \Omega$ tal que $f|_{D(a,R)}$ es inyectiva. Si $0 < r < R$, para cada $w \in f\big(D(a, r)\big)$ la función $z \to f(z) - w$ no se anula sobre C_r, por lo que la integral del enunciado tiene sentido. Esta integral se puede calcular usando el teorema de los residuos. Es obvio que C_r es un camino $D(a, R)$-homólogo a 0 y que la única singularidad de la función

$$F(z) = \frac{z f'(z)}{f(z) - w}$$

rodeada por C_r es $z_0 = g(w)$ (el único cero del denominador). La singularidad es evitable si $z_0 = 0$ y es un polo simple si $z_0 \neq 0$ y, en ambos casos, $\operatorname{Res}(F, z_0) = z_0$. Esto es obvio si $z_0 = 0$ y cuando $z_0 \neq 0$ se tiene

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{z f'(z)}{f(z) - w} = z_0 f'(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = z_0.$$

Según el teorema de los residuos el valor de la integral es

$$\operatorname{Ind}(C_r, z_0) \operatorname{Res}(F, z_0) = z_0 = g(w).$$

Nota. El resultado es un caso particular del que se menciona en el ejercicio propuesto 4 de este mismo capítulo. Véase también el ejercicio 7.35.

Ejercicio 7.34.

Sea $\alpha \in \mathscr{H}(D(0,1))$ inyectiva, con $\alpha(0) = 0$. Si $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ y $|z| < r < 1$ demuestre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w) - \alpha(z)}\, dw$$

con $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Deduzca que existe un disco $D(0, \rho) \subset D(0,1)$ donde f admite un desarrollo en serie de potencias de α:

$$f(z) = a_0 + a_1\alpha(z) + a_2\alpha(z)^2 + \cdots + a_n\alpha(z)^n + \cdots$$

si $|z| < \rho$, con coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha^{n+1}(w)}\, dw.$$

Como aplicación obtenga una fórmula para los coeficientes del desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de la función inversa α^{-1}.

SOLUCIÓN.

Según el corolario 6.1.3, $\Omega = \alpha(D(0,1))$ es abierto y $\alpha^{-1} : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es holomorfa. La función $g = f \circ \alpha^{-1}$ es holomorfa en Ω y por lo tanto admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de $0 = \alpha(0) \in \Omega$, es decir, existe $R > 0$ tal que para $|w| < R$ se cumple

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

siendo γ cualquier camino cerrado, regular a trozos en Ω con $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$. En virtud del principio del argumento esta condición la cumple $\gamma(t) = \alpha(re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, luego:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi i} \frac{g\big(\alpha(re^{it})\big)\alpha'(re^{it})}{\alpha(re^{it})^{n+1}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w)^{n+1}}\, dw.$$

Sea $0 < r < 1$ tal que $|\alpha(z)| < R$ cuando $|z| < r$. Entonces, para $|z| < r$, podemos sustituir $w = \alpha(z)$ en el desarrollo en serie de potencias de g y resulta:

$$f(z) = g\big(\alpha(z)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha(z)^n \ \text{ si } |z| < r.$$

Como caso particular, cuando $f(z) = z$, la inversa de α es g y los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ vienen dados por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{w\alpha'(w)}{\alpha(w)^{n+1}}\, dw.$$

Otra solución

A continuación proporcionamos una solución más elemental basada en la versión de la fórmula integral de Cauchy 5.1.9. Fijado $z \in D(0,1)$, la función

$$\beta(w) = \frac{\alpha(w) - \alpha(z)}{w - z} \quad \text{si } w \neq z, \quad \beta(z) = \alpha'(z)$$

es holomorfa en $D(0,1)$ y no se anula nunca (por la inyectividad de α). Aplicando la fórmula integral de Cauchy a $F(w) = f(w)\alpha'(w)/\beta(w)$ resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w) - \alpha(z)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)\alpha'(w)}{(w - z)\beta(w)}\, dw = F(z) = f(z).$$

Por otra parte, $\alpha(w) \neq 0$ si $w \neq 0$ (porque α es inyectiva y $\alpha(0) = 0$) luego $m = \min\{|\alpha(w)| : |w| = r\} > 0$. Por la continuidad de α en $z = 0$ existe $\rho > 0$ tal que $|\alpha(z)| < m/2$ cuando $|z| < \rho$, luego $|\alpha(z)/\alpha(w)| \leq 1/2$ cuando $|w| = r$. Entonces, para $|z| < \rho$ y $|w| = r$, podemos considerar la serie geométrica de razón $\alpha(z)/\alpha(w)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(w) - \alpha(z)} &= \frac{1}{\alpha(w)\left(1 - \dfrac{\alpha(z)}{\alpha(w)}\right)} = \\ &= \frac{1}{\alpha(w)} \left(1 + \frac{\alpha(z)}{\alpha(w)} + \cdots + \left(\frac{\alpha(z)}{\alpha(w)}\right)^n + \cdots \right) \end{aligned}$$

Multiplicando por $f(w)\alpha'(w)$ obtenemos el desarrollo en serie

$$\frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w) - \alpha(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w)^{n+1}} \alpha(z)^n$$

que converge uniformemente sobre la circunferencia $|w| = r$. Esto es consecuencia del criterio de Weierstrass pues, para $|w| = r$, se cumple

$$\left|\frac{f(w)\alpha'(w)}{\alpha(w)}\right| \left|\frac{\alpha(z)}{\alpha(w)}\right|^n \leq \frac{M}{2^n}$$

con $M = \max\{|f(w)\alpha'(w)/\alpha(w)| : |w| = r\}$. La convergencia uniforme permite integrar término a término el desarrollo en serie y se obtiene el resultado.

Ejercicio 7.35.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ inyectiva con $f(0) = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ el desarrollo en serie de potencias, alrededor de 0, de su inversa. Demuestre que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{z f'(z)}{f(z)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi n i} \int_{C_r} \frac{dz}{f(z)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} D^{(n-1)} \left(\frac{z^n}{f(z)^n}\right)$$

donde $0 < r < 1$ y $C_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

SOLUCIÓN.

Para obtener la primera igualdad del enunciado emprendemos el cálculo de la integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}\,dz.$$

Para ello la expresamos en términos de la función inversa g y del camino $\gamma = f \circ C_r$.

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{C_r(t)f'(C_r(t))}{f\big(C_r(t)\big)^{n+1}} C_r'(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w^{n+1}}\,dw.$$

Obsérvese que al ser f inyectiva y $f(0) = 0$ se cumple que $f(z) \neq 0$ cuando $0 < |z| < 1$, luego el camino $\gamma = f \circ C_r$ no pasa por 0. El teorema 6.1.2 también nos asegura que $z = 0$ es cero simple de f, luego, según la proposición 7.1.13, $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$.

Como el residuo de $G(w) = g(w)w^{-(n+1)}$ en $w = 0$ es a_n, con el teorema de los residuos resulta

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w^{n+1}}\,dw = a_n$$

En términos de $h(z) = f(z)^{-n}$ la integral I_n se expresa en la forma

$$I_n = \frac{-1}{2n\pi i}\int_{C_r} zh'(z)\,dz = \frac{-1}{2n\pi i}\int_{C_r} \big[(zh(z))' - h(z)\big]\,dz = \frac{1}{2n\pi i}\int_{C_r} h(z)\,dz$$

y queda establecida la segunda igualdad del enunciado. La última igualdad se deduce con la fórmula para el cálculo del residuo en un polo múltiple (0 es polo de multiplicidad n de h porque es cero simple de f).

Nota. En el ejercicio 7.34 también se obtuvo la primera fórmula integral para los coeficientes a_n de la inversa. Otra alternativa, basada en la fórmula integral para la inversa obtenida en el ejercicio 7.33, sigue el siguiente esquema. Se considera el desarrollo en serie

$$\frac{zf'(z)}{f(z) - w} = \frac{zf'(z)}{f(z)}\frac{1}{1 - w/f(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{f(z)}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}w^n$$

y se efectúa luego una integración término a término. Los detalles se dejan al cuidado del lector.

7.2.5. Utilización del principio del argumento

En la solución de los siguientes problemas intervienen integrales que se pueden calcular con el principio del argumento.

Ejercicio 7.36.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\mathscr{Z}(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Si $m \in \mathbb{N}$, demuestre que son equivalentes:

a) existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $g^m = f$;

b) *para cada camino cerrado, regular a trozos* γ *en* $\Omega \setminus \mathscr{Z}(f)$ *se cumple*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \in m\mathbb{Z}.$$

SOLUCIÓN.

a) $\Rightarrow$ *b*) Si se cumple *a*) y γ es un camino cerrado, regular a trozos en $\Omega\setminus\mathscr{Z}(f)$ entonces $g\circ\gamma$ es un camino cerrado, regular a trozos en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ que cumple $f\circ\gamma = (g\circ\gamma)^m$. Entonces, en virtud de 7.1.2 *a*) se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Ind}(f\circ\gamma, 0) = m\operatorname{Ind}(g\circ\gamma, 0).$$

b) $\Rightarrow$ *a*) Se puede suponer que Ω es conexo (si no es así se razona en cada una de sus componentes conexas) y que f no es idénticamente nula. En este caso, en virtud del principio de identidad, $\Omega\cap\mathscr{Z}(f)' = \emptyset$ y el abierto no vacío $\Omega_0 = \Omega\setminus\mathscr{Z}(f)$ también es conexo (véase el ejercicio 2.39). Fijado $a\in\Omega_0$ y $\alpha\in\log f(a)$, para cada camino regular a trozos $\gamma_z : [0,1]\to\Omega_0$, de origen a y extremo $z\in\Omega_0$, podemos asegurar que

$$I(\gamma_z) = \alpha + \int_{\gamma_z}\frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

es un logaritmo de $f(z)$. Efectivamente, el extremo del camino $\Gamma = f\circ\gamma_z$ es $\Gamma(1) = f(z)$ y, según la igualdad (7.1), $L(t) = \alpha + \int_0^t(\Gamma'(s)/\Gamma(s))ds$, $t\in[0,1]$, es un logaritmo continuo de $\Gamma(t)$, luego $L(1) = I(\gamma_z)$ es un logaritmo de $\Gamma(1) = f(z)$.

La integral $I(\gamma_z)$ depende del camino γ_z que conecta a con z dentro de Ω_0, sin embargo la condición *b*) garantiza que

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{m}I(\gamma_z)\right)$$

sólo depende de $z\in D(z_0, r)$. Para ver esto consideremos dos caminos regulares a trozos γ_z^1, γ_z^2 en Ω_0, de origen a y extremo z. Entonces, en virtud de *b*), existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $I(\gamma_z^1) - I(\gamma_z^2) = mk2\pi i$, luego

$$\exp\left(\frac{1}{m}I(\gamma_z^1)\right) = \exp\left(\frac{1}{m}I(\gamma_z^2)\right).$$

Queda justificado así que g está bien definida en Ω_0 y también es claro que $g^m(z) = f(z)$ para todo $z\in\Omega_0$ (recuérdese que $I(\gamma_z)$ es un logaritmo de $f(z)$).

Para demostrar que g es holomorfa basta ver que lo es sobre cada disco $D(z_0, r)\subset\Omega_0$ y, para ello, basta tener en cuenta que el valor de g en $z\in D(z_0, r)$ se puede obtener mediante un camino $\gamma_z = \gamma_{z_0}\vee\sigma_z$ compuesto de un trozo fijo γ_{z_0} de origen a y extremo z_0, seguido de un segmento variable σ_z de origen z_0 y extremo z, lo que conduce a la expresión

$$g(z) = \exp\left(\frac{c + h(z)}{m}\right), \quad \text{con } c = I(\gamma_{z_0}),\ h(z) = \int_{\sigma_z}\frac{f'(w)}{f(w)}\,dw.$$

Como h es una primitiva de f'/f en $D(z_0, r)$ y, por lo tanto, holomorfa en este disco, lo mismo le ocurre a g.

Por otra parte, de la condición $|g(z)|^m = |f(z)|$ se sigue que para cada $a\in\mathscr{Z}(f)$ es $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Entonces, definiendo, para cada $a\in\mathscr{Z}(f)$, $g(a) = 0$ se obtiene una función g continua en Ω y holomorfa en Ω_0, con singularidades evitables en cada $a\in\mathscr{Z}(f)$, por lo que g es holomorfa en todo Ω.

Ejercicio 7.37.

Demuestre que la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z^3 - 1}$$

posee un logaritmo holomorfo en $A = \{z : 1 < |z| < 2\}$ *y una raíz cuadrada holomorfa en* $B = \{z : 2 < |z| < 3\}$.

SOLUCIÓN.

Sea γ un camino cerrado regular a trozos en A (resp. en B). Según la proposición 5.1.5 (resp. el ejercicio 7.36) basta demostrar que el valor de la integral

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

siempre es 0 (resp. un entero par).

La función f es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples $\mathscr{P}(f) = \{p, \overline{p}\}$, donde $p = e^{2\pi i/3}$, y ceros simples $\mathscr{Z}(f) = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ (hay una singularidad evitable en $z = 1$ que se supone eliminada). Todo camino cerrado γ en A verifica

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma, -1) = \operatorname{Ind}(\gamma, p) = \operatorname{Ind}(\gamma, \overline{p})$$

luego, en virtud del principio del argumento

$$I(\gamma) = \operatorname{Ind}(\gamma, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma, -1) - \operatorname{Ind}(\gamma, p) - \operatorname{Ind}(\gamma, \overline{p}) = 0.$$

Análogamente, todo camino cerrado γ en B cumple

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma, -1) = \operatorname{Ind}(\gamma, 2) = \operatorname{Ind}(\gamma, -2) = \operatorname{Ind}(\gamma, p) = \operatorname{Ind}(\gamma, \overline{p})$$

y, aplicando otra vez el principio del argumento, se obtiene que

$$I(\gamma) = \operatorname{Ind}(\gamma, 0) + \operatorname{Ind}(\gamma, -1) + \operatorname{Ind}(\gamma, 2) + \operatorname{Ind}(\gamma, -2) - \operatorname{Ind}(\gamma, p) - \operatorname{Ind}(\gamma, \overline{p})$$

luego $I(\gamma) = 2 \operatorname{Ind}(\gamma, 0)$ es un entero par.

Otra solución (sin usar el principio del argumento).

Multiplicando $f(z)$ por

$$R(z) = \frac{(z - p)(z - \overline{p})}{z(z + 1)}$$

desaparecen los ceros y los polos de f en $D(0, 2)$. Eliminando las singularidades evitables que aparecen en p, $\overline{p}$, 0 y -1 se obtiene una función $F = Rf$, que es holomorfa y no se anula en $D(0, 2)$.

Para demostrar que f tiene logaritmo holomorfo en A basta ver que F y R lo tienen. Según el teorema 7.1.9, la función F tiene logaritmo holomorfo en $D(0, 2) \supset A$. Por otra parte, en virtud del ejercicio 4.17, las funciones $R_1(z) = (z - p)/z$ y $R_2(z) = (z - \overline{p})/(z + 1)$ tienen logaritmo holomorfo en $\{z : |z| > 1\} \supset A$, luego $R = R_1 R_2$ también lo tiene.

Puesto que R tiene logaritmo holomorfo en $\{z : |z| > 1\} \supset B$ también tiene raíz cuadrada holomorfa y, para demostrar que f tiene raíz cuadrada holomorfa en B, basta demostrar que la tiene F.

Los ceros de F en $D(0, 3)$ son $\{2, -2\}$, ambos simples, luego la función $G(z) = F(z)/(z^2 - 4)$ no tiene ceros en $D(0, 3)$ y, según el teorema 7.1.9, G tiene logaritmo holomorfo y, por lo tanto, raíz cuadrada holomorfa, en $D(0, 3)$. Como $z^2 - 4$ tiene raíz cuadrada holomorfa en $\{z : |z| > 2\}$ (véase el ejercicio 7.13), se concluye que $F(z) = (z^2 - 4)G(z)$ tiene raíz cuadrada holomorfa en $B = \{z : 2 < |z| < 3\}$.

Ejercicio 7.38.

Calcule $I = \int_\gamma f(z)\,dz$, *donde*

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z-1} \quad y \quad \gamma(t) = \frac{2e^{it}}{1+2e^{it}}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

SOLUCIÓN.

Razonando como en el ejercicio 5.8 se calcula el coeficiente a_{-1} en el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z = 1$. Se obtiene $\operatorname{Res}(f, 1) = a_{-1} = -1$, luego

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) \operatorname{Ind}(\gamma, 1) = -2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma, 1).$$

Como $\gamma(t) - 1 = g(e^{it})$ con $g(z) = -1/(1 + 2z)$, en virtud del principio del argumento, $\operatorname{Ind}(\gamma, 1) = \operatorname{Ind}(\gamma - 1, 0) = -1$, luego $I = 2\pi i$.

Ejercicio 7.39.

Se considera el camino $\gamma_\rho(t) = f(\rho e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, *donde*

$$f(z) = 1 + e^{z^2} - e^{\operatorname{tg}^2 z}$$

Demuestre que si $\rho > 0$ *es suficientemente pequeño el camino* γ_ρ *no pasa por* $z = 1$ *y calcule*

$$I = \int_{\gamma_\rho} z^3 e^{1/(z-1)}\,dz.$$

SOLUCIÓN.

Como $f(z) - 1$ tiene un cero aislado en $z = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(z) - 1 \neq 0$ si $0 < |z| < \delta$, luego γ_ρ no pasa por 1 cuando $0 < \rho < \delta$.

Según la observación que precede al teorema de los residuos 7.1.11, se tiene $I = 2\pi i a_{-1} \operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 1)$, donde a_{-1} es el residuo en $z = 1$ de la función $z^3 e^{1/(z-1)}$, es decir, el coeficiente de $(z-1)^{-1}$ en su desarrollo de Laurent alrededor de $z = 1$, que se obtiene multiplicando los desarrollos:

$$z^3 = (z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1;$$

$$e^{1/(z-1)} = 1 + (z-1)^{-1} + \frac{1}{2!}(z-1)^{-2} + \cdots$$

Se calcula así el valor $a_{-1} = 1/4! + 3/3! + 3/2! + 1 = 73/24$.

Por otra parte $\operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 1)$ se puede calcular con ayuda de la proposición 7.1.13: el único cero de $f(z) - 1$ en $D(0, \rho)$ es $z = 0$, con multiplicidad dos, porque

$$f(z) - 1 = e^{z^2} - e^{\operatorname{tg} z^2} = e^{z^2} G(z)$$

donde $G(z) = 1 - e^{\operatorname{tg} z^2 - z^2}$ tiene en $z = 0$ un cero doble (vea el ejercicio 4.37). Ahora bien, como $\gamma_\rho(t) - 1 = f(\rho e^{it}) - 1$, según la proposición 7.1.13, se tiene $\operatorname{Ind}(\gamma, 1) = \operatorname{Ind}(\gamma - 1, 0) = 2$ y se concluye así que

$$I = 2\pi i \frac{73}{24} 2 = \frac{73}{6}\pi i.$$

Ejercicio 7.40.

Compruebe que el camino $\gamma(t) = -i\cos(2e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, *está contenido en el dominio de*

$$f(z) = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$$

y calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$.

SOLUCIÓN.

El cociente $(z-1)/(z+1)$ es real negativo si y sólo si $z \in [-1, 1]$, luego el dominio de f es $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Para verificar que γ no pasa por $[-1, 1]$ basta ver que para cada $s \in [-1, 1]$ el conjunto

$$T_s = \{z : -i\cos z = s\} = \{z : \cos z = is\}$$

no contiene puntos de la circunferencia $|z| = 2$. Como $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, para obtener una descripción explícita de T_s basta dividir por i los logaritmos de las soluciones de la ecuación $\frac{1}{2}(w + 1/w) = is$, que son

$$w_1(s) = i(s + \sqrt{1+s^2}\,), \quad w_2(s) = i(s - \sqrt{1+s^2}\,).$$

Como $w_1(s) = 1/w_2(s)$, se tiene $\log w_2(s) = -\log w_1(s)$ con

$$\log w_1(s) = \{\operatorname{Log}|\sqrt{1+s^2} + s| + i(\pi/2 + 2m\pi) : m \in \mathbb{Z}\}$$

luego $T_s = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A(s, m)$, con

$$A(s, m) = \Big\{\pm(2m\pi + \pi/2 - i\operatorname{Log}|s + \sqrt{1+s^2}|)\Big\}.$$

Para m fijo y $s \in [-1, 1]$ los conjuntos $A(s, m)$ están contenidos en

$$A_m = \Big\{x + iy : x = \pm\Big(2m\pi + \frac{\pi}{2}\Big),\ |y| \le \operatorname{Log}(1 + \sqrt{2}\,)\Big\}.$$

Si $m \neq 0$ los dos segmentos verticales que componen A_m caen en $\{z : |z| > 2\}$ mientras que $A_0 \subset D(0, 2)$ ya que $(\pi/2)^2 + (\log(1 + \sqrt{2}))^2 \le 4$ (desigualdad obtenida observando que $1 + \sqrt{2} < e < e^\beta$ con $\beta = (4 - \pi^2/4)^{1/2} > 1$).

Queda comprobado que la imagen de $\{z : |z| = 2\}$ mediante la función $\cos z$ no corta al segmento $\{is : -1 \le s \le 1\}$ y, con ello, que γ no pasa por $[-1, 1]$.

Según la proposición 7.1.13, $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 2$ (número de ceros de $\cos z$ encerrados por $|z| = 2$). Por otra parte, como el segmento $[-1, 1]$ está contenido en una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 2\pi])$, para todo $x \in [-1, 1]$ se cumple $\operatorname{Ind}(\gamma, x) = \operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 2$, luego γ es homólogo, en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, a una circunferencia de centro 0 y radio $r > 1$ recorrida dos veces: $C_r(t) = re^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$.

Esta circunferencia está contenida en $\{z : |z| > 1\}$ donde f se puede representar mediante su desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ que fue obtenido en el ejercicio 4.17. Se obtiene así

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{C_r} f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} \operatorname{Ind}(C_r, 0) = -8\pi i.$$

Ejercicio 7.41.

Sea $R > 2$ y $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Encuentre un polinomio P que verifique

a) $P(z) \neq 0$ *si* $|z| \geq R$*;*

b) $\displaystyle\int_{C_R} z^n \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = 2(2^n + 1)\pi i$ *para* $n = 0, 1, 2.$

SOLUCIÓN.

Para $n = 0$ se debe cumplir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = 2.$$

Entonces, en virtud del principio del argumento, P sólo puede tener dos ceros α y β en el disco $D(0, R)$. Por lo tanto, debemos buscar un polinomio de segundo grado $P(z) = (z - \alpha)(z - \beta)$ con $\alpha, \beta \in D(0, R)$, que cumpla la condición requerida para $n = 1$ y $n = 2$, es decir:

$$3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} z\frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} z\left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta}\right) dz = \alpha + \beta,$$

$$5 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} z^2\frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} z^2\left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z-\beta}\right) dz = \alpha^2 + \beta^2.$$

La solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es $\alpha = 2$, $\beta = 1$, luego el polinomio $P(z) = (z - 2)(z - 1)$ cumple las condiciones pedidas y los únicos polinomios que las cumplen son los de la forma $cP(z)$, con $c \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7.42.

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ una función entera tal que $f(z)/(z^2 + 1)$ posee raíz cúbica holomorfa en $\{z : |z| > 1\}$, demuestre que f se anula en algún punto del disco $\{z : |z| \leq 1\}$.

SOLUCIÓN.

Razonamos por reducción al absurdo. Si f no se anula en $\{z : |z| \leq 1\}$, existe $\rho > 1$ tal que f tampoco se anula en $D(0, \rho)$. Sea $C_\rho = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Según el principio del argumento la función $g(z) = f(z)/(z^2 + 1)$ verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = -2.$$

Como el valor de esta integral no es múltiplo de 3, según el ejercicio 7.36, se llega a que g no tiene raíz cubica holomorfa en $\{z : |z| > 1\}$, en contra de la hipótesis del enunciado.

Ejercicio 7.43.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto que contiene a $\{z : |z| > r\}$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función tal que existe $\lim_{z\to\infty} f'(z) = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) *f tiene un polo simple en ∞ y existe $R > r$ tal que f es inyectiva en $\{z : |z| > R\}$;*

b) *para cada* $a \in \mathbb{C}$*, existe* $M > 0$ *tal que si* $\rho > M$ *se cumple*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = 1$$

donde $C_\rho(t) = \rho e^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIÓN.

a) Como f' tiene límite no nulo en ∞, su desarrollo de Laurent en el abierto $\{z : |z| > r\}$ es de la forma $f'(z) = \alpha + b_{-2}z^{-2} + b_{-3}z^{-3} + \cdots$ (ha de ser $b_{-1} = 0$ porque es el desarrollo de Laurent de una derivada). Entonces el desarrollo de Laurent de f en $\{z : |z| > r\}$ es de la forma

$$f(z) = \alpha z + a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \cdots$$

luego ∞ es polo simple de f. Esto significa que $F(z) = 1/f(1/z)$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, que se elimina definiendo $F(0) = 0$.

Para $|z| < 1/r$ podemos escribir

$$F(z) = \frac{z}{\alpha + a_0 z + a_{-1}z^2 + a_{-2}z^3 + \cdots}$$

luego $F'(0) = 1/\alpha \neq 0$. Entonces, según el teorema de la función inversa 6.1.4, F es inyectiva en $D(0, \delta)$ para algún $\delta < 1/r$ y, por lo tanto, f es inyectiva en $\{z : |z| > R\}$ para $R = 1/\delta > r$.

b) Como $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, existe $M > R$ tal que $|f(z)| > |a|$ si $|z| > M$. En particular $f(z) - a$ no tiene ceros en $\{z : |z| > M\}$ y para $\rho > M$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/C_\rho} \frac{f'(1/z)}{f(1/z)-a}\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1/C_\rho} \frac{h'(z)}{h(z)-a}\,dz$$

donde $h(z) = f(1/z)$. Como $h(z) - a$ no tiene ceros en $\{z : 0 < |z| < 1/\rho\}$ y tiene un polo simple en $z = 0$, según el principio del argumento, el valor de la última integral es $-\operatorname{Ind}(1/C_\rho, 0) = 1$.

Ejercicio 7.44.

Sea $K \subset \mathbb{C}$ *un compacto cuya frontera* ∂K *es la imagen de un ciclo regular a trozos* Γ *que cumple* $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 1$ *si* a *es interior a* K *e* $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0$ *si* $a \in V = \mathbb{C} \setminus K$*. Sea* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *holomorfa en un abierto conexo* $\Omega \supset \overline{V}$ *que verifica*

a) $\lim_{z\to\infty} f'(z) = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*;*

b) $\operatorname{Im} f$ *es idénticamente nula sobre* ∂K*.*

Demuestre que f *establece un isomorfismo conforme entre* V *y el complemento de una unión finita de segmentos compactos del eje real.*

Indicación. Si $a \notin f(\partial K)$ *y* $m(a)$ *es el número de ceros de* $f(z) - a$ *en* V*, demuestre que* $m(a) < +\infty$ *y que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = 1 - m(a).$$

SOLUCIÓN.

Dado $a \notin f(\partial K)$, para demostrar que $m(a) < +\infty$ basta ver que el conjunto $Z_a = \{z \in V : f(z) - a = 0\}$ es finito. Efectivamente, según el ejercicio 7.43, ∞ es un polo de f y por lo tanto existe $R > 0$ tal que para $|z| > R$ se cumple que $z \in V$ y $|f(z)| > |a|$, luego $Z_a \subset \{z : |z| \leq R\}$. Si Z_a fuese infinito tendría un punto de acumulación en $\{z : |z| \leq R\} \cap \overline{V} \subset \Omega$ y, aplicando el principio de identidad, f debería ser constante, lo que es incompatible con la condición a).

Cuando $\rho > R$ el ciclo $C_\rho \sim \Gamma$ es Ω-homólogo a 0 y rodea a todos los puntos de Z_a, luego el número de ceros de $f(z) - a$ rodeados por $C_\rho \sim \Gamma$ es $m(a)$. Aplicando el principio del argumento y lo obtenido en el ejercicio 7.43 se llega a la fórmula

$$m(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho \sim \Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz$$

con la que se obtiene que la función $a \to m(a)$ es continua en $G = \mathbb{C} \setminus f(\partial K)$.

Si $\operatorname{Im} f$ se anula sobre ∂K entonces $f(\partial K)$ es unión finita de segmentos compactos contenidos en el eje real (las imágenes de los caminos cerrados que componen el ciclo Γ) luego G, por ser el complemento de estos segmentos, es conexo. Se sigue que $m(G)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$ y se concluye que $m(a)$ es constante sobre G. Si m es su valor constante

$$0 = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz = 1 - m$$

luego $m(a) = 1$ para cada $a \in G$. Esto significa que $f(V) = G$ y que f alcanza el valor $a \in G$ una sola vez en V, es decir, f establece una biyección entre V y G que ha de ser un isomorfismo conforme.

7.2.6. Ejercicios con el teorema de Rouché

En los siguientes ejercicios se utiliza el teorema de Rouché para localizar ceros de funciones holomorfas.

Ejercicio 7.45.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,R))$ no idénticamente nula y, para $r \in (0,R)$, sea $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Demuestre que para $|w| < \rho = r/M(r)$ la ecuación $z = wf(z)$ tiene un única solución $a(w)$ en $D(0,r)$, dada por

$$a(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{1 - wf'(z)}{z - wf(z)}\, dz$$

con $C(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Demuestre que la función $w \to a(w)$ es holomorfa en $D(0,\rho)$.

SOLUCIÓN.

Si $|w| < \rho$ y $|z| = r$, la función $g_w(z) = z - wf(z)$ cumple

$$|g_w(z) - z| = |w||f(z)| \leq |w|M(r) < \rho M(r) = r = |z|$$

luego, según el teorema de Rouché, g_w tiene un único cero $a(w)$ en $D(0,r)$.

Si $f(0) = 0$ entonces 0 es el único cero de $g_w(z)$ en $D(0, r)$, luego $a(w)$ es idénticamente nula en $D(0, \rho)$. En este caso, la función que aparece bajo la integral sólo tiene una singularidad aislada encerrada por C, en $z = 0$. Como la singularidad es evitable el valor de la integral es 0.

Si $f(0) \neq 0$ la función $zg'_w(z)/g_w(z)$ tiene un único polo simple en $a(w)$ y, según el ejercicio 6.17, el residuo vale $a(w)$. Entonces el teorema de los residuos proporciona la igualdad

$$a(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{g'_w(z)}{g_w(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{1 - wf'(z)}{z - wf(z)}\,dz.$$

Escribiendo la integral en forma explícita

$$a(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{1 - wf'(re^{it})}{re^{it} - wf(re^{it})}ire^{it}\,dt$$

y, utilizando el teorema 5.1.17, se obtiene que la función $a(w)$ es holomorfa en $D(0, \rho)$.

Nota. En el caso no trivial $f(0) \neq 0$ la función $h(z) = z/f(z)$, definida y holomorfa en un entorno de 0, verifica $h'(0) = 1/f(0) \neq 0$ y el resultado también se puede obtener aplicando el teorema de la función inversa (6.1.4) y lo obtenido en el ejercicio 7.33.

Ejercicio 7.46.

Sea $r > 1$ y $f \in \mathscr{H}(D(0, r))$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Demuestre que existe $a \in D(0, 1)$ tal que $f(a) = a$ y $f'(a) \neq 1$.

SOLUCIÓN.

Cuando $|z| = 1$ se verifica $|(z - f(z)) - z| = |f(z)| < 1 = |z|$ y, aplicando el teorema de Rouché a las funciones z y $z - f(z)$, se concluye que existe un único $a \in D(0, 1)$ tal que $a - f(a) = 0$. Como a es cero simple de $z - f(z)$, se debe cumplir $1 - f'(a) \neq 0$.

Ejercicio 7.47.

Determine el número de ceros de cada polinomio en el abierto que se indica:

a) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ *en* $D(0, 1)$.

b) $z^5 - z + 16$ *en* $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

c) $z^4 + 26z + 2$ *en* $\{z : 3/2 < |z| < 3\}$.

SOLUCIÓN.

Si dos polinomios f, g cumplen la condición

$$P(r): \quad |z| = r \Rightarrow |f(z) + g(z)| < |g(z)|$$

entonces no tienen ceros en la circunferencia $|z| = r$ y, en virtud del teorema de Rouché, tienen el mismo número de ceros en $D(0, r)$.

a) $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ y $g(z) = 4z^5$ cumplen P(1): si $|z| = 1$ entonces $|f(z) + g(z)| = |z^8 + z^2 - 1| < 4 = |g(z)|$ luego f tiene en $D(0, 1)$ el mismo número de ceros que g, es decir 5.

b) $f(z) = z^5 - z + 16$ y $g(z) = -16$ cumplen P(1): $|z| = 1$ implica $|f(z) + g(z)| = |z^5 - z| < 16 = |g(z)|$, luego f no tiene ceros en $\overline{D(0,1)}$.

Por otra parte, si $h(z) = -z^5$, es claro que f y h cumplen P(2): $|z| = 2$ implica $|f(z) + h(z)| = |z - 16| \leq 18 < 2^5 = |h(z)|$, luego f tiene en $D(0,2)$ el mismo número de ceros que h, es decir 5. Se sigue que todos los ceros de f están en $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

c) $f(z) = z^4 + 26z + 2$ y $g(z) = -z^4$ cumplen P(3): $|z| = 3$ implica $|f(z) + g(z)| = |26z + 2| \leq 3 \times 26 + 2 < 81 = |g(z)|$, luego f tiene cuatro ceros en $D(0,3)$.

Con $h(z) = -26z$, es claro que f y h cumplen P(3/2): $|z| = 3/2$ implica $|f(z)+h(z)| = |z^4 + 2| \leq 89/4 < 78/2 = |h(z)|$, luego f tiene un único cero en $D(0,1)$. En definitiva, f tiene tres ceros en $\{z : 3/2 < |z| < 3\}$.

Ejercicio 7.48.

Determine el número de soluciones en $D(0,1)$ de cada una de las ecuaciones

a) $e^{z-\alpha} = z^n$, *con* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{m} \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n} z} = b$, *donde* $|b| < 1$ *y* $|a_n| < 1$ *para* $n = 1, 2 \ldots, m$.

SOLUCIÓN.

a) Si $|z| = 1$ las funciones $f(z) = e^{z-\alpha} - z^n$, $g(z) = z^n$, cumplen

$$|f(z) + g(z)| = |e^{z-\alpha}| = e^{x-\alpha} \leq e^{1-\alpha} < 1 = |g(z)|$$

luego, en virtud del teorema de Rouché, f tiene en $D(0,1)$ el mismo número de ceros que g, es decir n.

b) Cada factor del producto con el que se define f tiene un único cero en $D(0,1)$, luego f tiene m ceros en $D(0,1)$. Además cada factor es una transformación de Möbius que deja invariante la circunferencia $|z| = 1$ (vea el ejercicio 2.21), luego $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Se sigue que las funciones $f(z)$ y $b - f(z)$ cumplen

$$|z| = 1 \Rightarrow |f(z) + (b - f(z))| = |b| < 1 = |f(z)|$$

luego, según el teorema de Rouché, $b - f(z)$ tiene en $D(0,1)$ el mismo número de ceros que $f(z)$, es decir m.

Ejercicio 7.49.

Demuestre que para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, la ecuación $e^{-z} + z = \alpha$ tiene una única solución en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

SOLUCIÓN.

Basta ver que si $R > 0$ es suficientemente grande entonces la función $f(z) = e^{-z} + z - \alpha$ tiene un único cero en $U_R = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < R\}$.

Cuando $R > \alpha$ la función $g(z) = \alpha - z$ tiene un único cero en U_R luego, en virtud del teorema de Rouché, basta obtener que

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)| \quad \text{para todo} \quad z \in \partial U_R$$

Si z está en la semicircunferencia que forma parte de ∂U_R ($z = Re^{it}$ con $|t| \leq \pi/2$) es evidente geométricamente que $R - \alpha \leq |z - \alpha|$, y eligiendo $R > 1 + \alpha$ resulta

$$|f(z) + g(z)| = |e^{-Re^{it}}| = e^{-R\cos t} \leq 1 < R - \alpha \leq |g(z)|.$$

Cuando z está en el segmento vertical que forma parte de ∂U_R ($z = iy$ con $|y| \leq R$) es obvio que $\alpha \leq |\alpha - z|$, y también se verifica

$$|f(z) + g(z)| = |e^{-iy}| = 1 < \alpha \leq |g(z)|.$$

Ejercicio 7.50.

Si $|a| < 1$ y $p \in \mathbb{N}$ demuestre que la ecuación $(z-1)^p e^z = a$ tiene exactamente p soluciones en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ y que todas ellas están en el disco $D(1,1)$.

SOLUCIÓN.

La ecuación se puede escribir como $f(z) = 0$, con $f(z) = (z-1)^p - ae^{-z}$. Sea $U_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$ con $R > 2$. Para todo $z \in \partial U_R$ las funciones $f(z)$ y $g(z) = -(z-1)^p$ verifican

$$|f(z) + g(z)| = |ae^{-z}| = |a|e^{-\operatorname{Re} z} \leq |a| < 1 \leq |z-1|^p = |g(z)|$$

luego, en virtud del teorema de Rouché, f tiene p ceros en U_R. Como esta afirmación es cierta para todo $R > 2$ se concluye que la ecuación propuesta tiene exactamente p soluciones en $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Para justificar que todas las soluciones están en $\{z : |z-1| < 1\}$ basta aplicar otra vez el teorema de Rouché:

$$|z-1| = 1 \Rightarrow |f(z) + g(z)| = |ae^{-z}| = |a|e^{-\operatorname{Re} z} \leq |a| < 1 = |g(z)|$$

luego f tiene p ceros en $D(1,1)$.

Ejercicio 7.51.

Demuestre que las únicas funciones racionales R que son positivas sobre la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ son las de la forma

$$R(z) = \mu \prod_{j=1}^{m} \frac{(z - a_j)(1 - \overline{a_j} z)}{(z - b_j)(1 - \overline{b_j} z)}$$

donde $\mu > 0$ y $|a_j| < 1$, $|b_j| < 1$ para $1 \leq j \leq m$.

SOLUCIÓN.

a) Si R es de la forma considerada en el enunciado, para $|z| = 1$ se verifica

$$(z - a_j)(1 - \overline{a_j} z) = z(1 - a_j \overline{z})(1 - \overline{a_j} z) = z|1 - \overline{a_j} z|^2$$

y análogamente $(z - b_j)(1 - \overline{b_j} z) = z|1 - \overline{b_j} z|^2$, luego

$$R(z) = \mu \prod_{j=1}^{m} \left| \frac{1 - \overline{a_j} z}{1 - \overline{b_j} z} \right|^2 > 0$$

(obsérvese que esto es cierto incluso si se anula algún a_j o algún b_j).

b) Recíprocamente, sea R una función racional tal que $R(z) > 0$ cuando $|z| = 1$. Entonces $\delta = \min\{R(z) : |z| = 1\} > 0$ y para $|z| = 1$ se cumple

$$|R(z) - \delta| = R(z) - \delta < R(z) = |R(z)|$$

luego, en virtud del teorema de Rouché, R tiene en $D(0,1)$ tantos ceros como polos (contados según sus multiplicidades). Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ los ceros de R en $D(0,1)$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ los polos de R en $D(0,1)$.

Las funciones $R(z)$ y $\overline{R(1/\overline{z})}$ coinciden sobre $\{z : |z| = 1\}$, luego, en virtud del principio de identidad, son iguales. Se sigue que si w es cero (resp. polo) de R entonces $1/\overline{w}$ también lo es, luego R tiene $2m$ ceros y $2m$ polos en $\mathbb{C}_\infty$.

$$\mathscr{Z}(R) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, 1/\overline{a_1}, 1/\overline{a_2}, \ldots, 1/\overline{a_m}\}$$
$$\mathscr{P}(R) = \{b_1, b_2, \ldots, b_m, 1/\overline{b_1}, 1/\overline{b_2}, \ldots, 1/\overline{b_m}\}$$

La función

$$F(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{(z - a_j)(1 - \overline{a_j} z)}{(z - b_j)(1 - \overline{b_j} z)}$$

tiene los mismos ceros y los mismos polos que R, con idénticas multiplicidades. Obsérvese que cada $a_i = 0$ produce en F dos ceros, uno en $z = 0$ y otro en $z = \infty$. Análogamente, cada $b_j = 0$ produce en F dos polos, uno en $z = 0$ y otro en $z = \infty$. Como la función racional R/F no tiene ceros ni polos debe ser constante y si μ es su valor constante se obtiene que $R(z) = \mu F(z)$ con $\mu = R(1)/F(1) > 0$.

Ejercicio 7.52.

Se considera un polinomio de dos variables complejas y grado m:

$$P(z,w) = \sum_{0 \le p+q \le m} a_{p,q} z^p w^q$$

Se supone que el polinomio $z \to P(z,b)$ tiene m ceros simples. Demuestre que existe $r > 0$ tal que si $|w - b| < r$ el polinomio $z \to P(z,w)$ tiene la misma propiedad.

SOLUCIÓN.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ los ceros simples del polinomio $P_b(z) = P(z,b)$ y tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que los discos $D_j = \overline{D(a_j, \varepsilon)}$, $1 \le j \le m$, sean disjuntos dos a dos.

Sea $\mu = \min\{|P(z,b)| : z \in K\} > 0$. Como $K = \bigcup_{j=1}^m \partial D_j$ y $H = \overline{D(b,1)}$ son compactos, la continuidad uniforme de P sobre $K \times H$ permite afirmar que existe $r > 0$ verificando

$$|w - b| < r \Rightarrow |P(z,w) - P(z,b)| < \mu \ \text{ para todo } z \in K.$$

En particular, para cada $j \in \{1, 2 \ldots, m\}$, se cumple

$$|w - b| < r \Rightarrow |P(z,w) - P(z,b)| < \mu \le |P(z,b)| \quad \text{para todo } z \in \partial D_j$$

Aplicando el teorema de Rouché a las dos funciones $P_b(z) = P(z,b)$ y $P_w(z) = P(z,w)$ se concluye que P_w tiene en cada D_j los mismos ceros que P_b, es decir un cero. Entonces, para $|w - b| < r$, el polinomio P_w, que es de grado menor o igual que m, tiene m ceros distintos. Por lo tanto, su grado es m y todos sus ceros son simples.

Ejercicio 7.53.

Demuestre que desde un valor de n en adelante todos los ceros del polinomio $p_n(z) = 1 + 2z + \ldots + nz^{n-1}$ están en $\{z : |z| > \rho\}$, con $0 < \rho < 1$.

SOLUCIÓN.

Derivando la serie geométrica se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es $f(z) = 1/(1-z)^2$. La sucesión p_n de sus sumas parciales converge hacia f uniformemente sobre cada compacto $K \subset D(0,1)$ y, en particular, sobre la circunferencia $|z| = \rho$. Entonces, dado $\mu = \text{mín}\{|f(z)| : |z| = \rho\} > 0$ existe $n_\rho \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_\rho$ y $|z| = \rho$ se cumple $|p_n(z) - f(z)| < \mu$.

Cuando $n \geq n_\rho$ y $|z| = \rho$ se verifica la desigualdad

$$|p_n(z) - f(z)| < |f(z)|$$

y como f no tiene ceros en $\{z : |z| \leq \rho\}$, aplicando el teorema de Rouché, se concluye que p_n tampoco tiene ceros en $\{z : |z| \leq \rho\}$.

Ejercicio 7.54.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia una función no constante $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Demuestre que para cada $a \in \Omega$ existe una sucesión $a_n \in \Omega$ que converge hacia a y verifica $f_n(a_n) = f(a)$ cuando n es suficientemente grande.

SOLUCIÓN.

Como Ω es conexo y f no es constante, los ceros de $f(z) - f(a)$ son aislados, por tanto existe $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y $f(z) - f(a) \neq 0$ si $0 < |z - a| \leq r$.

Si m es la multiplicidad de a como cero de $f(z) - f(a)$, en virtud del teorema de Hurwitz, dado $0 < \varepsilon \leq r$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n(\varepsilon)$ la función $f_n(z) - f(a)$ tiene exactamente m ceros en $D(a,\varepsilon)$.

Entonces la sucesión a_n se obtiene así: si $n \geq n(r)$ elegimos $a_n \in D(0,r)$ tal que $f_n(a_n) - f(a) = 0$ y si $n < n(r)$ tomamos $a_n \in \Omega$ arbitrario.

Para ver que la sucesión a_n converge hacia a basta observar lo siguiente: si $0 < \varepsilon < r$ y $n \geq n(\varepsilon)$ la función $f_n(z) - f(a)$ tiene exactamente m ceros en $D(a,\varepsilon)$, luego los m ceros que $f_n(z) - f(a)$ tiene en $D(a,r)$ están necesariamente en $D(a,\varepsilon)$ y, en particular, $a_n \in D(a,\varepsilon)$.

7.2.7. Complementos sobre homotopía

En los ejercicios que siguen se usa la noción de índice de un camino continuo en un contexto topológico. Se establece que los caminos cerrados Ω-homotópicos son Ω-homólogos. También se obtiene una aplicación interesante a la topología del plano.

Ejercicio 7.55.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, demuestre que dos caminos cerrados Ω-homotópicos, $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$, son Ω-homólogos, es decir, para todo $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se verifica $\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a)$.

SOLUCIÓN.

Comencemos con el caso particular $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Sea $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ una Ω-homotopía que transforma γ_0 en γ_1 y para cada $s \in [0,1]$ sea $\gamma_s(t) = H(s,t)$, $0 \le t \le 1$, el camino cerrado intermedio. Fijado $s \in [0,1]$, sea $\alpha = \text{mín}\{|\gamma_s(t) - a| : 0 \le t \le 1\}$. Es claro que $\alpha > 0$ y usando la continuidad uniforme de H en el compacto $[0,1] \times [0,1]$ se obtiene $\delta > 0$ tal que, para $s', s'' \in [0,1]$ y $t', t'' \in [0,1]$,

$$|s' - s''| < \delta,\ |t' - t''| < \delta \Rightarrow |H(s',t') - H(s'',t'')| < \alpha.$$

En particular, si tomamos $t = t' = t''$ y $s'' = s$ resulta

$$[\,|s' - s| < \delta,\ t \in [0,1]\,] \Rightarrow |H(s,t) - H(s',t)| < \alpha$$

luego, para todo $t \in [0,1]$, se cumple

$$\big|(\gamma_s(t) - a) - (\gamma_{s'}(t) - a)\big| = |H(s,t) - H(s',t)| < \alpha \le |\gamma_s(t) - a|.$$

En virtud de la proposición 7.1.2, $\text{Ind}(\gamma_{s'} - a, 0) = \text{Ind}(\gamma_s - a, 0)$, es decir, $\text{Ind}(\gamma_{s'}, a) = \text{Ind}(\gamma_s, a)$, luego la aplicación $s \to \text{Ind}(\gamma_s, a)$ es continua (localmente constante). Entonces su imagen, por ser un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$, se reduce a un punto, es decir, la aplicación es constante. Así queda establecido que $\text{Ind}(\gamma_0, a) = \text{Ind}(\gamma_1, a)$.

En el caso general de un abierto arbitrario $\Omega \subset \mathbb{C}$ el resultado se obtiene aplicando, para cada $a \notin \Omega$, lo que se acaba de establecer.

Ejercicio 7.56.

a) *Si* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *es un camino cerrado tal que* $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$ *demuestre que* γ *es homotópico en* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *a un camino constante.*

b) *Si* $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ *son caminos cerrados tales que* $\text{Ind}(\gamma_1, a) = \text{Ind}(\gamma_2, a)$ *demuestre que* γ_1 *y* γ_2 *son homotópicos en* $\mathbb{C} \setminus \{a\}$*.*

SOLUCIÓN.

a) Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de γ se cumple

$$0 = 2\pi i \,\text{Ind}(\gamma, 0) = \alpha(1) - \alpha(0)$$

luego $\alpha(0) = \alpha(1)$. Se sigue que $H(s,t) = e^{s\alpha(t)}$, definida en $[0,1] \times [0,1]$, establece en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ una homotopía de caminos cerrados entre γ y el camino constante 1.

b) Suponemos por comodidad de notación que $a = 0$. Entonces, definiendo $\gamma(t) := \gamma_0(t)/\gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$, se tiene un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que, en virtud de la proposición 7.1.2, cumple $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma, 0) + \text{Ind}(\gamma_1, 0)$, luego $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$.

Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo continuo de γ ya hemos visto que $\alpha(0) = \alpha(1)$ y se comprueba fácilmente que la aplicación $(s,t) \to \gamma_0(t)e^{s\alpha(t)}$, definida en $[0,1] \times [0,1]$, establece una homotopía, en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, entre γ_0 y γ_1.

Ejercicio 7.57.

Sea $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua tal que el camino cerrado* $\gamma(t) = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$*, no pasa por* a*. Demuestre que si* $\text{Ind}(\gamma, a) \ne 0$ *entonces* $a \in f\big(\overline{D(0,1)}\big)$*.*

SOLUCIÓN.

Demostraremos que si $a \notin f(\overline{D(0,1)})$ entonces $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$. Como $a \notin f(\overline{D(0,1)})$, para cada $s \in [0,1]$ el camino $\gamma_s(t) = f(se^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$ no pasa por a, luego la aplicación $(s,t) \to \gamma_s(t)$, $(s,t) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$, establece una homotopía, dentro del abierto $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, entre el camino constante γ_0 y el camino $\gamma_1 = \gamma$. En virtud del ejercicio 7.55, se concluye entonces que $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma_0, a) = 0$.

Ejercicio 7.58.

Demuestre que toda función continua $g : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ posee un punto fijo.

Indicación. Aplique el resultado establecido en el ejercicio 7.57.

SOLUCIÓN.

Bastará probar que si $f(z) = z - g(z)$ no se anula sobre la frontera $\partial D(0,1)$ entonces se debe anular en algún punto del disco abierto $D(0,1)$.

En efecto, si $f(z) \neq 0$ cuando $|z| = 1$, el camino cerrado $\gamma(t) = f(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, no pasa por 0, y podemos considerar el índice $\operatorname{Ind}(\gamma, 0)$ que se calcula fácilmente usando la proposición 7.1.2: para todo $t \in [0, 2\pi]$ se cumple

$$|\gamma(t) - e^{it}| = |e^{it} - g(e^{it}) - e^{it}| = |g(e^{it})| \le 1 = |e^{it}|$$

luego $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$ y aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 7.57 se obtiene que $0 \in f(D(0,1))$.

Ejercicio 7.59.

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua que es holomorfa en $\{z : |z| > 1\}$ y verifica $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. *Demuestre que f se anula en algún punto.*

Indicación. Considere el camino $\gamma_\rho(t) = f(\rho e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, con $\rho > 1$.

SOLUCIÓN.

Razonamos, por reducción al absurdo, suponiendo que f nunca se anula.

La función $g(z) = f(1/z)$ es holomorfa en $D(0,1)$ (tiene una singularidad evitable en $z = 0$ que se supone eliminada definiendo $g(0) = 0$). Como f es holomorfa en $\{z : |z| > 1\}$ podemos calcular el índice $\operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 0)$ mediante la integral:

$$\operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_\rho'(t)}{\gamma_\rho(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{1/C_\rho} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz$$

Según el principio del argumento la última integral vale $m \operatorname{Ind}(1/C_\rho, 0) = -m$ donde $m \ge 1$ es el número de ceros de g en $D(0,1)$. Por tanto $\operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 0) \neq 0$.

Por otra parte, como f es continua y no se anula nunca, la aplicación

$$(s,t) \to f(s\rho e^{it}), \quad (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$$

establece una homotopía en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entre el camino γ_ρ y el camino constante $f(0)$, luego $\operatorname{Ind}(\gamma_\rho, 0) = 0$. Con esta contradicción queda probado que f se anula en algún punto.

7.3. Ejercicios propuestos

7.1 Determine todos los posibles valores de

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\,dz$$

para todos los caminos γ regulares a trozos, de origen 0 y extremo 1, que no pasan por los puntos $\pm i$.

7.2 Si f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ y

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-1)^n$$

son sus desarrollos de Laurent en $\{z : |z|>1\}$ y $\{z : |z-1|>1\}$, demuestre que $a_{-1}=b_{-1}$.

7.3 Si w está en la imagen de $R=\{x+iy : |x|<1, |y|<\pi\}$ mediante la función exponencial justifique la igualdad

$$\operatorname{Log} w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{ze^z}{e^z-w}\,dz.$$

7.4 Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no constante en el abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $w \in f\big(D(z_0,r)\big)$. Se supone que $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$ y que $f(z)\neq w$ cuando $|z-z_0|=r$. Demuestre que $A=\{z\in D(z_0,r) : f(z)=w\}$ es finito y que para cada $g\in\mathscr{H}(\Omega)$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)-w} g(z)\,dz = \sum_{a\in A} m(a)g(a)$$

donde $C_r(t)=z_0+re^{it}, t\in[0,2\pi]$ y $m(a)$ es la multiplicidad de a como cero de $f(z)-w$.

7.5 Sea $g\in\mathscr{H}(\Omega)$, $f\in\mathscr{M}(\Omega)$ con todos sus polos simples y Γ un ciclo regular a trozos en $\Omega\setminus P(f)$ que es Ω-homólogo a 0. Establezca la igualdad

$$\int_\Gamma f(z)g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in P(f)} g(a)\operatorname{Res}(f,a)\operatorname{Ind}(\Gamma,a).$$

7.6 Demuestre que el camino $\gamma(t)=\cos(3e^{it})$, $t\in[0,2\pi]$, no pasa por $z=2$ y calcule el valor de la integral

$$\int_\gamma (z-1)^2 e^{1/(z-2)} dz.$$

7.7 En la corona $\{z : 1<|z|<4\}$ estudie la existencia de una raíz cúbica holomorfa del polinomio $p(z)=(z^2-1)(z^2-4)$.

7.8 Demuestre que la función $(z^3-1)^{-1}(z-3)^{-1}$ posee una raíz cúbica holomorfa $g(z)$ en $\{z : 1<|z|<3\}$. Si $C(t)=2e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, calcule $\int_C g(z)\,dz$.

7.9 Caracterize los abiertos conexos $\Omega \subset \mathbb{C}$ tales que existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ verificando $\operatorname{ch} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. Si Ω es un abierto con esta propiedad y $0 \in \Omega$, demuestre que hay una única $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $f(0) = i\pi/2$ y $\operatorname{ch} f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. Calcule su desarrollo en serie de potencias alrededor de 0.

7.10 Determine el número de ceros que tiene cada uno de los siguientes polinomios en el abierto que se indica:

a) $z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ en $D(0,1)$;

b) $z^3 + 13z^2 + 15$ en $\{z : 1 < |z| < 2\}$ y en $\{z : 2 < |z| < 5/2\}$.

7.11 Determine el número de soluciones que tiene la ecuación $e^z - 4z^n = 1$ en el disco $D(0,1)$.

7.12 Si $|a| > e$ y $n \in \mathbb{N}$, determine el número de soluciones de la ecuación $e^z = az^n$ en el disco D(0,1) y en el rectángulo $\{x + iy : |x| < \mu, |y| < \rho\}$, donde $1 \leq \mu < \log|a|$ y $1 < \rho$.

7.13 Demuestre que la ecuación $(z+1)e^{-z} = z + 2$ no tiene soluciones en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Capítulo 8

Aplicaciones clásicas del teorema de los residuos

8.1. Preliminares teóricos

Aplicaciones clásicas del teorema de los residuos son el cálculo efectivo de integrales (generalmente impropias) y el cálculo de sumas de series numéricas.

8.1.1. Métodos para el cálculo de integrales

En esta sección se consideran algunos tipos de integrales que se pueden calcular utilizando el teorema de los residuos.

Proposición 8.1.1.
Sea $\varphi(t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t)$ *una función continua en* $[0, 2\pi]$*, donde* $R(z, w)$ *es una función racional. Si la función racional*

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right)$$

no tiene polos sobre la circunferencia $C(t) = e^{it}$*,* $t \in [0, 2\pi]$*, se verifica*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = \int_C f(z)\, dz = \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}(f, a)$$

En los ejercicios 8.1 y 8.2 se aplica este resultado.

Proposición 8.1.2.
Sean P*,* Q *polinomios tales que* $f = P/Q$ *no tiene polos en el eje real. Si* $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2$ *entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f, a)$$

(en particular la integral impropia anterior es convergente).

En los ejercicios 8.4 y 8.5 se aplica este resultado.

Proposición 8.1.3.

Sean P, Q polinomios tales que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real. Si $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 1$ *entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, a)$$

(en particular la integral impropia anterior es convergente).

Un ejemplo de aplicación de este resultado se pueden ver en el ejercicio 8.8.

En las condiciones de la proposición anterior, si se permite que f tenga polos simples en el eje real, se obtiene un resultado similar usando el siguiente

Lema 8.1.4.

Sea a un polo simple de f y $C_\varepsilon(t) = a + \varepsilon e^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, un arco de circunferencia de amplitud $\beta - \alpha \leq 2\pi$, centrado en a. Entonces se verifica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{Res}(f, a)$$

Cuando en el eje real hay un sólo polo simple, situado en el origen, se tiene:

Proposición 8.1.5.

Sean P, Q polinomios tales que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real, excepto en el origen, donde puede tener un polo simple.

Si $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 1$ *entonces, para $\varepsilon > 0$, las integrales*

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)e^{ix}\, dx, \qquad \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx$$

son convergentes, y el límite de la suma de sus valores cuando $\varepsilon \to 0^+$ es

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, a) + \pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0)$$

En el ejercicio 8.7 se puede ver un ejemplo donde se aplica esta proposición.

En las condiciones de la proposición 8.1.5 puede ocurrir que, aún existiendo el límite que figura en ella, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ no sea convergente. En este caso al citado límite se le llama valor principal de la integral y se le denota por

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\, dx.$$

Proposición 8.1.6.

Sean P, Q polinomios tales que $f = P/Q$ no tiene polos en el eje real positivo, pero puede tener un polo simple en el origen. Si $0 < \alpha < 1$ y $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2$ *entonces la siguiente integral converge y*

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^\alpha\, dx = \frac{4\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f(z^2)z^{2\alpha+1}, a)$$

donde $z^{2\alpha+1}$ designa la rama $e^{(2\alpha+1)L(z)}$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$, obtenida a partir de la rama $L(z)$ de $\log z$ determinada por $-\pi/2 < \operatorname{Im} L(z) < 3\pi/2$.

El ejercicio 8.6 se resuelve aplicando esta proposición. Según el ejercicio 7.22, la suma de los residuos de la función $f(z^2)z^{2\alpha+1}$ en $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ coincide con la suma de los residuos de $f(z)z^\alpha$ en $\mathbb{C}$.

8.1.2. Métodos para la sumación de series

En esta sección se consideran algunos tipos de series numéricas cuyas sumas se pueden calcular usando el teorema de los residuos.

Llamaremos *función sumadora* a una función meromorfa $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con polos $\mathscr{P}(\alpha) = \mathbb{Z}$, todos simples, que está acotada sobre la unión de circunferencias

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : |z| = R_n\}, \quad \text{con radios } R_n \in (n, n+1)$$

En virtud del ejercicio 3.16, $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$ y $\beta(z) = \pi/\operatorname{sen} \pi z$ son funciones sumadoras tales que $\operatorname{Res}(\alpha, k) = 1$ y $\operatorname{Res}(\beta, k) = (-1)^{|k|}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición 8.1.7.

Sean P, Q polinomios tales que $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$ y α una función sumadora con $\operatorname{Res}(\alpha, k) = \alpha_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si se cumple una de las dos condiciones

a) $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 2$;

b) $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 1$ *y la función sumadora α es impar,*

entonces

$$\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k) = -\sum_{a\in\mathscr{P}(f)} \operatorname{Res}(\alpha f, a)$$

Cuando se cumple a) y la sucesión α_k es acotada, la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ es absolutamente convergente.

En las condiciones de la proposición anterior puede ocurrir que exista el límite $\lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k)$ aunque la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ no sea convergente. En ese caso al límite se le llama el valor principal de la suma:

$$\text{v.p.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(k) = \lim_n \sum_{|k|\leq n} \alpha_k f(k)$$

que se puede interpretar como la suma de la serie convergente

$$\alpha_0 f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\alpha_k f(k) + \alpha_{-k} f(-k)\big).$$

En el ejercicio 8.20 se pueden ver aplicaciones concretas de esta proposición.

8.2. Ejercicios resueltos

8.2.1. Cálculo de integrales con los métodos habituales

En los siguientes ejercicios se calculan integrales que se ajustan a alguno de los tipos considerados en las proposiciones 8.1.1, 8.1.2, 8.1.3 y 8.1.5

Ejercicio 8.1.

Para $a > 0$, calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{a + \operatorname{sen}^2 x}$$

SOLUCIÓN.

Como el integrando es una función par

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \operatorname{sen}^2 x}$$

Según la proposición 8.1.1, esta integral se puede calcular considerando la función racional $R(w) = 1/(a + w^2)$ y aplicando el teorema de los residuos a la integral, sobre la circunferencia unidad, de la función racional

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z - 1/z}{2i}\right) = \frac{4iz}{z^4 - (2 + 4a)z^2 + 1} = \frac{4iz}{(z^2 - w_1)(z^2 - w_2)}$$

donde $w_1 = (1 + 2a) - 2\sqrt{a(a+1)}$ y $w_2 = (1 + 2a) + 2\sqrt{a(a+1)}$, son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $w^2 - (2 + 4a)w + 1 = 0$.

Los polos de f dentro de la circunferencia $|z| = 1$ son $\sqrt{w_1}$ y $-\sqrt{w_1}$ y

$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{w_1}\,) = \frac{4i\sqrt{w_1}}{2\sqrt{w_1}(w_1 - w_2)} = \frac{-i}{2\sqrt{a(a+1)}} = \operatorname{Res}(f, -\sqrt{w_1}\,).$$

Si $C(t) = e^{it}$ $(0 < t < 2\pi)$ con el teorema de los residuos se obtiene

$$2I = \int_C f(z)\, dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, \sqrt{w_1}\,) + \operatorname{Res}(f, -\sqrt{w_1}\,)) = \frac{2\pi}{\sqrt{a(a+1)}}$$

La resolución de este ejercicio se puede simplificar transformando previamente la integral en otra del mismo tipo donde la función racional asociada es más sencilla: sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, con el cambio de variable $2x = t$ y poniendo $b = 2a + 1 > 1$, se obtiene:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{2\, dx}{b - \cos 2x} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{b - \cos t} = \int_C g(z)\, dz$$

donde

$$g(z) = \frac{1}{iz(b - \frac{1}{2}(z + 1/z))} = \frac{2i}{z^2 - 2bz + 1} = \frac{2i}{(z - \alpha)(z - \beta)}$$

siendo $\alpha = b - \sqrt{b^2 - 1}$, $\beta = b + \sqrt{b^2 - 1}$ las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2 - 2bz + 1 = 0$. La condición $b > 1$ implica que $|\alpha| < 1$ y $|\beta| > 1$, luego g sólo tiene un polo (simple) en $z = \alpha$, rodeado por la circunferencia C.

$$\operatorname{Res}(g, \alpha) = \frac{2i}{\alpha - \beta} = \frac{-i}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

y con el teorema de los residuos se vuelve a obtener

$$I = \int_C \frac{2i\, dz}{(z - \alpha)(z - \beta)} = 2\pi i \operatorname{Res}(g, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a(a+1)}}$$

Ejercicio 8.2.

Si $|a| \neq 1$, calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$$

SOLUCIÓN.

Según la proposición 8.1.1, $I = \int_C f(z)\,dz$ donde C es la circunferencia unidad y

$$f(z) = \frac{1}{az^2 - (1+a^2)z + a} = \frac{i}{a(z-a)(z-1/a)}$$

Si $|a| < 1$ (resp. $|a| > 1$) el único polo de f en $D(0,1)$ es $z = a$ (resp. $1/a$).

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{i}{a^2-1} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f,1/a) = \frac{i}{1-a^2}$$

Con el teorema de los residuos se obtiene: $I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a)$ si $|a| < 1$ e $I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,1/a)$ si $|a| > 1$, luego $I = 2\pi/|1-a^2|$ para $|a| \neq 1$.

Ejercicio 8.3.

Justifique la convergencia de la siguiente integral impropia y calcule su valor:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} \qquad a \in \mathbb{C} \setminus [-1,1].$$

SOLUCIÓN.

La convergencia de la integral impropia se pone de manifiesto con el cambio de variable $x = \cos\theta$ que la transforma en una integral de Riemann ordinaria:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - a} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - a}$$

Según la proposición 8.1.1

$$2I = 2\pi i \sum_{|p|<1} \operatorname{Res}(f,p)$$

donde

$$f(z) = \frac{1}{zi}\frac{2}{(z+1/z) - 2a} = \frac{-2i}{z^2 - 2az + 1}$$

Los polos de f son las dos soluciones α, β de la ecuación $z^2 - 2az + 1 = 0$. Como $\alpha\beta = 1$ sólo una de las soluciones cae en $D(0,1)$. Si α es esta solución

$$\operatorname{Res}(f,\alpha) = \frac{-2i}{\alpha - \beta}$$

luego

$$I = \pi i \frac{-2i}{\alpha-\beta} = \frac{2\pi}{\alpha-\beta}$$

Ejercicio 8.4.

Calcule el valor de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{(x^4 + 10x^2 + 9)^3}\,dx.$$

SOLUCIÓN.

$z^4 + 10z^2 + 9 = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)$, luego los polos de

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{(z^4 + 10z^2 + 9)^3}$$

en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ son $z = i$ y $z = 3i$. Según la proposición 8.1.2 se tiene:

$$I = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 3i)\big) = \frac{5}{12}\pi.$$

Ejercicio 8.5.

Si $a > 0$, calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + a^2)^3}$$

SOLUCIÓN.

La convergencia de la integral impropia es obvia. Como la función

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}$$

es par, se tiene $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ y, de acuerdo con la proposición 8.1.2, resulta

$$2I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai).$$

Para calcular el residuo se puede usar la fórmula $\operatorname{Res}(f, ai) = \frac{1}{2!} g''(ai)$ con

$$g(z) = (z - ai)^3 \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^3}$$

Como este procedimiento parece algo tedioso acudimos a otra alternativa: hallar el coeficiente a_{-1} en el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de ai.

Como ai es un polo triple el desarrollo es de la forma

$$f(z) = a_{-3}h^{-3} + a_{-2}h^{-2} + a_{-1}h^{-1} + a_0 + a_1 h + \cdots$$

con $h = z - ai$, y se calcula a partir del desarrollo en serie de potencias de h de la función $h \to h^3 f(ai + h)$. Como $f(z) = z^2(z - ai)^{-3}(z + ai)^{-3}$ resulta

$$h^3 f(ai + h) = (ai + h)^2 (2ai + h)^{-3}$$

y, usando el método de los coeficientes indeterminados, a partir de la igualdad

$$\frac{(ai + h)^2}{(2ai + h)^3} = a_{-3} + a_{-2}h + a_{-1}h^2 + \cdots$$

se obtienen los valores

$$a_{-3} = \frac{1}{8ai}, \quad a_{-2} = \frac{-1}{16a^2}, \quad a_{-1} = \frac{-i}{16a^3}$$

luego

$$I = \pi i \operatorname{Res}(f, ai) = \pi i a_{-1} = \frac{\pi}{16a^3}$$

Ejercicio 8.6.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $-1 < a < 0$ y $b > 0$, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x+b}\, dx.$$

SOLUCIÓN.

Según la proposición 8.1.6, como $\alpha = a - 1 \in (0,1)$, se tiene

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x+b}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(x+b)}\, dx = \frac{4\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{2\alpha+1}}{z^2(z^2+b)},\ i\sqrt{b}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{2\alpha+1}}{z^2(z^2+b)},\ i\sqrt{b}\right) = \frac{e^{(2\alpha+1)L(i\sqrt{b})}}{-i2b\sqrt{b}} = \frac{1}{2} b^a e^{a\pi i}$$

luego

$$I = \frac{2\pi i b^a e^{\pi a i}}{1 - e^{2\pi a i}} = \pi b^a \frac{2i}{e^{-\pi a i} - e^{\pi a i}} = -\frac{\pi b^a}{\operatorname{sen} \pi a}$$

Ejercicio 8.7.

Justifique la convergencia y calcule la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

SOLUCIÓN.

Se aplica la proposición 8.1.5 con $f(x) = 1/x$ y $\mu = 1$, luego

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \pi i$$

Considerando la parte imaginaria de este límite se obtiene la convergencia y el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 8.8.

Si $a, b > 0$ calcule las integrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bt}{t^2 + a^2}\, dt \quad y \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{sen} t}{t^2 + a^2}\, dt.$$

SOLUCIÓN.

Ambas integrales se pueden calcular con la proposición 8.1.3.

Cálculo de I. Como el integrando es una función par se cumple

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos bt}{t^2 + a^2}\, dt = \frac{b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2 b^2}\, dx = \frac{b}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2 b^2}\, dx$$

donde las integrales son absolutamente convergentes.

El único polo de $e^{iz}/(z^2+a^2b^2)$ en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ es $z = abi$ y su residuo vale $e^{-ab}/(2abi)$. Entonces, según la proposición 8.1.3,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2b^2}\,dx = 2\pi i \frac{e^{-ab}}{2abi} = \frac{\pi}{abe^{ab}}$$

luego $I = \pi/(2ae^{ab})$.

Cálculo de J. Como el integrando es una función par se verifica

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\,dx$$

donde, según la proposición 8.1.3, las integrales son convergentes.

El único polo de $ze^{iz}/(z^2+a^2)$ en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ es $z = ai$ y su residuo vale $e^{-a}/2$. Entonces, con la proposición 8.1.3 se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2} = \frac{\pi i}{e^a}$$

luego $J = \pi/(2e^a)$.

8.2.2. Cálculo de otras integrales

Las integrales consideradas en este bloque de ejercicios no corresponden a los tipos considerados anteriormente. Para algunas se sugiere o la función o el camino de integración que pueden servir para calcularlas.

Ejercicio 8.9.

Compruebe que la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad a, b \in \mathbb{R}$$

es convergente y calcule su valor.

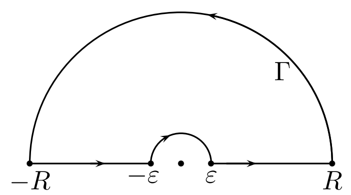
SOLUCIÓN.

Como la función $\cos x$ es par se puede suponer $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq b$.

$$\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \operatorname{Re} f(x) \quad \text{donde} \quad f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$$

Como $\operatorname{Re} f(x)$ converge hacia $(b^2-a^2)/2$ cuando x tiende hacia 0, la convergencia de la integral se sigue de la desigualdad $|\operatorname{Re} f(x)| \leq 2/x^2$, válida para todo $x \geq 1$.

Sea Γ es el camino cerrado indicado en la figura.



Según el teorema de Cauchy:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma f(z)\,dz = \\
&= \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

donde C_r es la semicircunferencia $C_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

Si $y = \operatorname{Im} z \ge 0$, al ser $a > 0$ se cumple $|e^{iaz}| = e^{-ay} \le 1$ y, análogamente, $|e^{ibz}| \le 1$, luego $|f(z)| \le 2/|z|^2$ si $\operatorname{Im} z > 0$. Con esta desigualdad se deduce

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi}{R} \quad \text{luego} \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Por otra parte, como

$$f(z) = i\frac{a-b}{z} + \frac{1}{2!}(a^2-b^2) + \frac{1}{3!}(a^3-b^3)z + \cdots$$

es claro que en $z = 0$ hay un polo simple con residuo $\operatorname{Res}(f,0) = i(a-b)$ luego, según el lema 8.1.4, se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \pi i \ \operatorname{Res}(f,0) = \pi(b-a).$$

Pasando al límite en la igualdad (8.1) cuando $R \to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ resulta

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \pi(b-a)$$

y considerando las partes reales

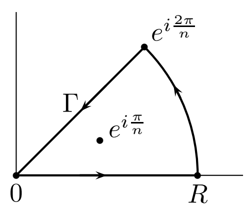
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = (b-a)\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 8.10.

Considerando el camino Γ *indicado en la figura calcule*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.



SOLUCIÓN.

La convergencia de la integral es inmediata.

El único polo de $f(z) = 1/(1+z^n)$ rodeado por Γ es $a = e^{i\pi/n}$. Como el polo es simple, $\operatorname{Res}(f,a) = 1/p'(a)$ donde $p(z) = 1 + z^n$, luego

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{a}{na^n} = -\frac{a}{n}$$

y con el teorema de los residuos se obtiene

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a) = -\frac{2\pi a i}{n}$$

Si $C_R(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{n}$, se tiene

$$-\frac{2\pi a i}{n} = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_0^R f(xe^{i2\pi/n})e^{i2\pi/n}\,dx.$$

Es fácil ver que $\int_{C_R} f(z)\,dz$ tiende hacia 0 cuando $R \to +\infty$. Entonces, teniendo en cuenta que $f(xe^{i2\pi/n}) = f(x)$ se obtiene $-2\pi i a/n = I - a^2 I$, luego

$$I = \frac{a}{a^2-1}\frac{2\pi i}{n} = \frac{2\pi i}{n(a-1/a)} = \frac{2\pi i}{n2i\operatorname{sen}(\pi/n)} = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}(\pi/n)}$$

Ejercicio 8.11.

Aplicando el teorema de los residuos a la función $(e^{2iz}-1)/z^2$ *calcule el valor de*

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx.$$

SOLUCIÓN.

La convergencia de la integral es inmediata: en $x = 0$ no hay problema de convergencia (porque el integrando converge hacia 1 cuando x tiende hacia 0) y

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|^2 dx \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx < +\infty.$$

Si Γ es el camino cerrado indicado en la figura del ejercicio 8.9, aplicando el teorema de Cauchy a la función $f(z) = (e^{2iz}-1)z^{-2}$ se obtiene

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_\varepsilon^R f(x)\,dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{8.2}$$

donde C_r es la semicircunferencia $C_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

Si z está en la semicircunferencia C_R se cumple que $y = \operatorname{Im} z \ge 0$, luego

$$|f(z)| \le \frac{e^{-2y}+1}{|z|^2} \le \frac{2}{R^2}$$

y se sigue que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Como hay un polo simple en $z = 0$ con residuo $\operatorname{Res}(f, 0) = 2i$, según el lema 8.1.4,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -2\pi.$$

Pasando al límite en la igualdad (8.2) cuando $R \to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ resulta

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = -2\pi.$$

Considerando las partes reales y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -2 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2$$

se obtiene el valor de la integral impropia convergente

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 8.12.

Compruebe que la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2}\, dx$$

es convergente y calcule su valor utilizando el teorema de los residuos.

SOLUCIÓN.

Para justificar la convergencia hay que considerar por separado las dos integrales

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(1 + x^2)^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

La primera converge porque

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\log x}{(1 + x^2)^2} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0.$$

La segunda integral también converge porque

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log x}{(1 + x^2)^2} \Big/ \frac{1}{1 + x^2} \right) = 0.$$

En $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$ consideramos el logaritmo holomorfo de la identidad, L, determinado por $-\pi/2 < \operatorname{Im} L(z) < 3\pi/2$. Aplicamos el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{L(z)}{(1 + z^2)^2}$$

con el camino Γ considerado en el ejercicio 8.9, que es Ω-homólogo a 0.

El único polo de f rodeado por Γ es $z = i$. Como el polo es doble, para calcular el residuo consideramos $g(z) = (z-i)^2 f(z)$ y obtenemos

$$\operatorname{Res}(f, i) = g'(i) = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}$$

Según el teorema de los residuos

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \int_\Gamma f(z)\, dz =$$
$$= \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_\varepsilon^R f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz$$

donde C_r es la semicircunferencia $C_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

Cuando $0 < \varepsilon < 1$, si z está en C_ε se cumple la desigualdad

$$|f(z)| \le \frac{-\operatorname{Log}\varepsilon + \pi}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

y con ella se deduce fácilmente que $\int_{C_\varepsilon} f(z) dz$ tiende hacia 0 cuando $\varepsilon \to 0$. Análogamente, cuando $R > 1$, si z está en C_R se cumple

$$|f(z)| \le \frac{\operatorname{Log} R + \pi}{(R^2-1)^2}$$

y se deduce que $\int_{C_R} f(z)\, dz$ tiende hacia 0 cuando $R \to +\infty$.

Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ se llega a la igualdad

$$-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\log|x| + \pi i}{(1+x^2)^2}\, dx$$

y considerando las partes reales se obtiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 8.13.

Compruebe que la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3(x^2+a^2)}\, dx \qquad (a > 0)$$

es convergente y calcule su valor aplicando el teorema de los residuos a la función $f(z) = \big[z + i(e^{iz} - 1)\big]/\big[z^3(z^2+a^2)\big]$.

SOLUCIÓN.

Sea $\varphi(x) = (x - \operatorname{sen} x)/\big(x^3(x^2+a^2)\big)$. La integral $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ converge. En efecto, en $x = 0$ no hay problema porque $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -1/(6a^2)$ y cuando $x \ge 1$ se cumple $|\varphi(x)| \le 2/x^2$.

Los puntos ai, $-ai$ son polos simples de f; el residuo en el primero de ellos es

$$\operatorname{Res}(f, ai) = i\frac{a + e^{-a} - 1}{2a^4}$$

Por otra parte,

$$z + i(e^{iz} - 1) = z + i\left(iz + \frac{1}{2!}(iz)^2 + \frac{1}{3!}(iz)^3 + \cdots\right) = -\frac{1}{2}z^2 - \frac{i}{6}z^3 + \cdots$$

luego $z = 0$ es polo simple de f y con la fórmula mencionada en el ejercicio 6.17 se puede calcular el residuo

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{i}{2a^2}$$

Cuando $0 < \varepsilon < |a| < R$, el camino cerrado Γ considerado en el ejercicio 8.9 sólo rodea al polo $z = ai$. Con el teorema de los residuos se obtiene

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai) &= \int_\Gamma f(z)\,dz = \\ &= \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_\varepsilon^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz \end{aligned}$$

donde C_r es la semicircunferencia re^{it}, $0 \le t \le \pi$.

En los puntos $z = x + iy$ de C_R se cumple la desigualdad

$$|f(z)| \le \frac{|z| + e^{-y} + 1}{R^3(R^2 - a^2)} \le \frac{R + 2}{R^3(R^2 - a^2)}$$

y con ella se deduce que $\int_{C_R} f(z)dz$ tiende hacia 0 cuando $R \to +\infty$.

Por otra parte, como $z = 0$ es polo simple de f, según el lema 8.1.4, la integral $\int_{C_\varepsilon} f(z)dz$ tiende hacia $\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \pi/(2a^2)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ se llega a la igualdad

$$-2\pi\frac{a + e^{-a} - 1}{2a^4} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \frac{\pi}{2a^2}$$

Como $\operatorname{Re} f(x) = \varphi(x)$ es par, considerando las partes reales se obtiene

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4a^4}(a^2 - 2a + 2 - 2e^{-a}).$$

Ejercicio 8.14.

Aplicando el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{1 - e^{2imz}}{z^2(z^2 + a^2)}$$

obtenga la igualdad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2(x^2 + a^2)}\,dx = \pi\frac{e^{-2am} + 2am - 1}{4a^3} \qquad \textit{donde } a > 0, m > 0.$$

SOLUCIÓN.

Observemos en primer lugar que

$$2\frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2(x^2+a^2)} = \operatorname{Re} f(x).$$

La función f tiene polos simples en $z=0$ y en $z=ai$ con residuos

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{2m}{a^2 i}, \quad \operatorname{Res}(f,ai) = -\frac{e^{-2am}-1}{2a^3 i}$$

Utilizando el mismo camino que en el ejercicio 8.13, y razonando de forma similar, se llega a que el valor I de la integral cumple

$$\begin{aligned} 4I = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} f(x)\,dx = \operatorname{Re}\big[2\pi i \operatorname{Res}(f,ai) + \pi i \operatorname{Res}(f,0)\big] = \\ = \pi\frac{e^{-2am}+2am-1}{a^3} \end{aligned}$$

Ejercicio 8.15.

Justifique la convergencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad \textit{con } 0<a<1,$$

y calcule su valor mediante una integral sobre el borde de $[-R,R]\times[0,2\pi]$.

SOLUCIÓN.

La convergencia de la integral se sigue de las desigualdades

$$\frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-ax}+e^{(1-a)x}} \le \frac{1}{e^{(1-a)x}}; \qquad \frac{e^{ax}}{1+e^x} \le \frac{1}{e^{-ax}};$$

pues

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(1-a)x}}\,dx < +\infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{e^{-ax}}\,dx < +\infty.$$

En el interior del rectángulo indicado la función $f(z) = e^{az}/(1+e^z)$ tiene un único polo en $z=\pi i$. El polo es simple con residuo

$$\operatorname{Res}(f,\pi i) = \lim_{z\to\pi i} \frac{z-\pi i}{1+e^z} e^{az} = -e^{a\pi i}.$$

Según el teorema de los residuos

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx - \int_{-R}^{+R} f(x+2\pi i)\,dx + \\ + i\int_0^{2\pi} f(R+iy)\,dy - i\int_0^{2\pi} f(-R+iy)\,dy = 2\pi i \operatorname{Res}(f,\pi i). \end{aligned}$$

Para los puntos $z=R+iy$ se cumple $|e^z| = e^R$, $|e^{az}| = e^{aR}$, luego

$$|f(z)| \le \frac{|e^{az}|}{|e^z|-1} = \frac{e^{aR}}{e^R-1}$$

Con esta desigualdad se deduce fácilmente que $\int_0^{2\pi} f(R+iy), dy$ tiende hacia 0 cuando $R \to +\infty$. Lo mismo le ocurre a la integral $\int_0^{2\pi} f(-R+iy)\, dy$.

Teniendo en cuenta que $f(x+2\pi i) = e^{a2\pi i} f(x)$ se llega a la igualdad

$$-2\pi i e^{a\pi i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx - e^{a2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx$$

luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{a2\pi i}-1} = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}$$

Ejercicio 8.16.

Considerando la integral de $f(z) = e^{iz}/(e^z + e^{-z})$ sobre el borde del rectángulo $A = \{x+iy : |x| < R,\, 0 < |y| < \pi\}$ calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

SOLUCIÓN.

Los polos de f son $\{i\pi(2n+1)/2 : n \in \mathbb{Z}\}$. El único polo en el interior de A es $a = i\pi/2$. Se trata de un polo simple cuyo residuo se calcula fácilmente utilizando lo indicado en el ejercicio 6.17: si $g(z) = e^{iz}$ y $h(z) = e^z + e^{-z}$ resulta

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \frac{e^{ia}}{e^a - e^{-a}} = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}$$

Con el teorema de los residuos se obtiene

$$\int_{\partial A} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a) = \pi e^{-\pi/2}.$$

Por otra parte,

$$\int_{\partial A} f(z) dz = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + I_4(R),$$

donde

$$I_1(R) = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}}\, dx;$$

$$I_2(R) = -\int_{-R}^{+R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}}\, dx = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-\pi} e^{ix}}{e^x + e^{-x}}\, dx = e^{-\pi} I_1(R);$$

$$I_3(R) = \int_0^{\pi} \frac{i e^{i(R+iy)}}{e^{R+iy} + e^{-R+iy}}\, dy;$$

$$I_4(R) = -\int_0^{\pi} \frac{i e^{i(-R+iy)}}{e^{-R+iy} + e^{R-iy}}\, dy.$$

Se comprueba fácilmente que

$$|I_3(R)| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{e^R - e^{-R}}\, dy; \qquad |I_4(R)| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{e^R - e^{-R}}\, dy,$$

luego $\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \lim_{R\to+\infty} I_4(R) = 0$. Pasando al límite en

$$\pi e^{-\pi/2} = (1+e^{-\pi})I_1(R) + I_3(R) + I_4(R)$$

se llega a la igualdad

$$\pi e^{-\pi/2} = (1+e^{-\pi})\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Considerando la parte real de la integral se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}$$

ya que esta integral es convergente.

Ejercicio 8.17.

Justifique la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

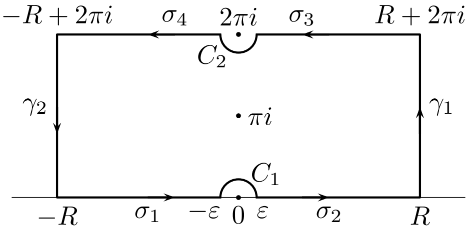
y calcule su valor considerando la integral de $f(z) = e^{iz}/\operatorname{sh} z$ sobre el borde del recinto $\{z = x+iy : |x| < R,\ 0 < y < 2\pi,\ |z| > \varepsilon,\ |z-2\pi i| > \varepsilon\}$.

SOLUCIÓN.

La función $g(x) = \operatorname{sen} x/\operatorname{sh} x$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$ y la convergencia de la integral es inmediata:

$$\int_1^{+\infty} |g(x)|\,dx \le \int_1^{+\infty} \left|\frac{2\operatorname{sen} x}{e^x-e^{-x}}\right| dx \le \int_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{e^x-1} < +\infty.$$

La función $f(z) = e^{iz}/\operatorname{sh} z = 2e^{iz}/(e^z-e^{-z})$ tiene polos simples en los puntos $z_n = n\pi i$, $n\in\mathbb{Z}$, con residuo $\operatorname{Res}(f,z_n) = e^{z_n(1+i)} = (-1)^n e^{-n\pi}$.



El camino cerrado indicado en la figura

$$\Gamma = \sigma_1 \vee C_1 \vee \sigma_2 \vee \gamma_1 \vee \sigma_3 \vee C_2 \vee \sigma_4 \vee \gamma_2$$

encierra un único polo $z_1 = \pi i$, con residuo $\operatorname{Res}(f,z_1) = -e^{-\pi}$ y con el teorema de los residuos se obtiene

$$-2\pi i e^{-\pi} = \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4}\int_{\sigma_k} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{2}\int_{C_k} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{2}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Utilizando que $f(x+2\pi i) = e^{-2\pi} f(x)$ es fácil ver que

$$\int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \int_{\sigma_4} f(z)\,dz = (1-e^{-2\pi}) \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx;$$

$$\int_{\sigma_2} f(z)\,dz + \int_{\sigma_3} f(z)\,dz = (1-e^{-2\pi}) \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx.$$

Por otra parte, como 0 y $2\pi i$ son polos simples de f, según el lema 8.1.4 se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_1} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}(f,0) = -\pi i,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_2} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname{Res}(f,2\pi i) = -\pi i e^{-2\pi}.$$

Con las desigualdades

$$|f(R+iy)| \le \frac{2}{e^R - e^{-R}} \quad \text{y} \quad |f(-R+iy)| \le \frac{2}{e^R - e^{-R}}$$

válidas para $y>0$, se obtiene

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

Como consecuencia de todo lo que se acaba de mencionar, pasando al límite cuando $R\to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ se llega a la igualdad

$$-2\pi i e^{-\pi} = (1-e^{-2\pi})\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \pi i - \pi i e^{-2\pi}.$$

Considerando la igualdad de las partes imaginarias, teniendo en cuenta que

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\operatorname{sh} x}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x}\,dx$$

donde la integral que aparece en la parte imaginaria es convergente y, utilizando que la función $\operatorname{sen} x/\operatorname{sh} x$ es par, se llega al valor de la integral del enunciado

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{1+e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

Ejercicio 8.18.

Considerando la integral de $f(z) = z/(a-e^{-iz})$ *sobre el borde del rectángulo* $A = \{x+iy : |x|<\pi,\ 0<y<R\}$, *calcule*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx, \quad \text{con } 0<a\neq 1.$$

SOLUCIÓN.

Observemos en primer lugar que cuando x es real

$$f(x) = \frac{x}{a-e^{-ix}} = \frac{x(a-e^{ix})}{|a-e^{-ix}|^2} = \frac{x(a-e^{ix})}{1-2a\cos x + a^2}$$

luego
$$\frac{x \operatorname{sen} x}{1 - 2a\cos x + a^2} = -\operatorname{Im} f(x).$$
La función f es meromorfa en todo el plano con polos, todos simples, en los puntos del conjunto $i \log a = \{i \operatorname{Log} a + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

Cuando $0 < a < 1$ no hay polos de f dentro del rectángulo A y cuando $a > 1$, y $R > 0$ es suficientemente grande, hay un único polo dentro del rectángulo en $z = i \operatorname{Log} a$. Por ello definimos
$$\alpha = 0 \quad \text{si } 0 < a < 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha = \operatorname{Res}(f, i \operatorname{Log} a) = \frac{\operatorname{Log} a}{a} \quad \text{si } a > 1.$$
Por el teorema de los residuos,
$$2\pi i\alpha = \int_{\partial A} f(z)\, dz = I_1 + I_2(R) + I_3(R),$$
donde
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx; \\ I_2(R) &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(x+iR)\, dx; \\ I_3(R) &= i\int_0^R f(\pi + iy)\, dy - i\int_0^R f(-\pi + iy)\, dy. \end{aligned}$$
Como la función $\operatorname{Im} f(x)$ es par se verifica
$$\operatorname{Im} I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} f(x)\, dx = 2\int_0^{\pi} \operatorname{Im} f(x) = -2I.$$
Cuando $|x| \leq \pi$ se cumple la desigualdad
$$|f(x+iR)| \leq \frac{\pi + R}{e^R - a}$$
luego $|I_2(R)| \leq 2\pi(\pi + R)/(e^R - a)$ tiende hacia 0 cuando $R \to +\infty$. Además,
$$I_3(R) = i\int_0^R \left(\frac{\pi + iy}{a - e^{-i\pi}e^y} - \frac{-\pi + iy}{a - e^{i\pi}e^y} \right) dy = 2\pi i \int_0^R \frac{dy}{a + e^y}$$
tiene límite, cuando $R \to +\infty$
$$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{dy}{a + e^y} = 2\pi i \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(a+t)} = 2\pi i\, \frac{\operatorname{Log}(1+a)}{a}$$
Pasando al límite en la igualdad $2\pi i\ \alpha = I_1 + I_2(R) + I_3(R)$ se obtiene
$$2\pi i\alpha = I_1 + 2\pi i\ \frac{\operatorname{Log}(1+a)}{a}$$
y considerando las partes imaginarias se llega a
$$2\pi\alpha = -2I + 2\pi\frac{\operatorname{Log}(1+a)}{a}$$

En definitiva, el valor de la integral es

$$I = \frac{\pi}{a}\operatorname{Log}(1+a) \quad \text{si } 0 < a < 1;$$
$$I = \frac{\pi}{a}\operatorname{Log}\frac{1+a}{a} \quad \text{si } a > 1.$$

Ejercicio 8.19.

Justifique la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)(x+a)}\, dx, \qquad a > 0,$$

y calcule su valor utilizando el teorema de los residuos.

SOLUCIÓN.

La función $f(x) = \log x/[(x-1)(x+a)]$ está definida y es continua para $x > 0$ (tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$ que se supone eliminada definiendo $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1/(1+a)$). La convergencia de la integral impropia se reduce a la de las integrales $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

La primera converge porque tiene el mismo carácter que $\int_0^1 \log x\,dx$. La segunda también converge porque $\lim_{x\to+\infty} f(x)x^{3/2} = 0$ y $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$ es convergente.

En lo que sigue denotaremos por $L_1(z)$, $L_2(z)$ los logaritmos holomorfos de z definidos, respectivamente, en $\Omega_1 = \mathbb{C}\setminus\{iy : y \le 0\}$, $\Omega_2 = \mathbb{C}\setminus\{iy : y \ge 0\}$ y determinados por $-\pi/2 < \operatorname{Im} L_1(z) < 3\pi/2$, $\pi/2 < \operatorname{Im} L_2(z) < 5\pi/2$.

Para cada $k \in \{1,2\}$ la función

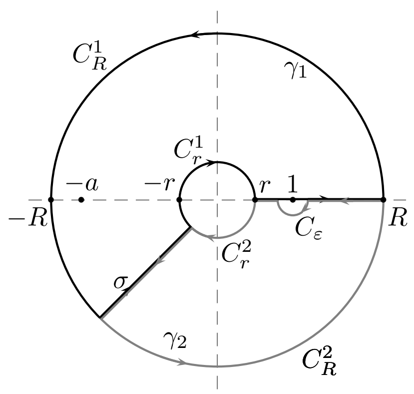
$$f_k(z) = \frac{L_k(z)^2}{(z-1)(z+a)}$$

está definida en Ω_k como función meromorfa. En $z = -a$ las dos funciones f_1, f_2 tienen un polo simple. En $z = 1$ la función f_1 tiene una singularidad evitable (porque $L_1(1) = 0$), pero la función f_2 tiene un polo simple. Se comprueba fácilmente que para $x > 0$ se cumple $\operatorname{Im} f_2(x) = 4\pi f(x)$.

Sean ε, r, R números positivos elegidos de modo que

$$-R < -a < -r < r < 1-\varepsilon < 1+\varepsilon < R$$

y sea γ_k $k = 1,2$, el camino cerrado en Ω_k, indicado en la figura.



f_1 es holomorfa en $\Omega_1 \setminus \{-a\}$ y $z = -a$ es un polo simple con residuo

$$\operatorname{Res}(f_1, -a) = -\frac{L_1(-a)^2}{a+1} = -\frac{(\operatorname{Log} a + i\pi)^2}{a+1} = \frac{\pi^2 - \operatorname{Log}^2 a - i2\pi \operatorname{Log} a}{a+1}$$

Como γ_1 es un camino cerrado Ω_1-homólogo a 0 e $\operatorname{Ind}(\gamma_1, -a) = 1$, según el teorema de los residuos

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f_1(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_1, -a) = \frac{4\pi^2}{a+1} \operatorname{Log} a + \frac{2\pi i}{a+1}(\pi^2 - \operatorname{Log}^2 a) = \alpha.$$

Por otra parte, f_2 es holomorfa en $\Omega_2 \setminus \{1, -a\}$ y γ_2 es un camino cerrado Ω_2-homólogo a 0 que no encierra singularidades aisladas de f_2. Aplicando otra vez el teorema de los residuos

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f_2(z)\,dz = 0.$$

Las integrales anteriores se escriben explícitamente en la forma

$$I_1 = \int_r^R f_1(x)\,dx + \int_{C_R^1} f_1(z)\,dz + \int_\sigma f_1(z)\,dz - \int_{C_r^1} f_1(z)\,dz$$

$$I_2 = -\int_\sigma f_2(z)\,dz + \int_{C_R^2} f_2(z)\,dz - \int_{1+\varepsilon}^R f_2(x)\,dx -$$

$$- \int_{C_\varepsilon} f_2(z)\,dz - \int_r^{1-\varepsilon} f_2(x)\,dx - \int_{C_r^2} f_2(z)\,dz$$

Según se indica en la figura, C_R^k y C_r^k $(k = 1, 2)$ son arcos de circunferencia de radios R y r respectivamente, C_ε es una semicircunferencia de centro 1 y radio ε (todos los arcos de circunferencia se suponen orientados positivamente) y σ un segmento con la orientación indicada en la figura. Como f_1 y f_2 coinciden en el tercer cuadrante se cumple $\int_\sigma f_1(z)\,dz = \int_\sigma f_2(z)\,dz$. Estas integrales intervienen en la suma $\alpha = \int_{\gamma_1} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f_2(z)\,dz$ con signos opuestos y se cancelan al sumar. Tomando partes imaginarias después de haber sumado se obtiene

$$\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im}\left(\int_{C_R^1} f_1(z)\,dz + \int_{C_R^2} f_2(z)\,dz \right) - \operatorname{Im}\left(\int_{C_r^1} f_1(z)\,dz + \int_{C_r^2} f_2(z)\,dz \right) -$$

$$- \operatorname{Im} \int_{1+\varepsilon}^R f_2(x)\,dx - \operatorname{Im} \int_{C_\varepsilon} f_2(z)\,dz - \operatorname{Im} \int_r^{1-\varepsilon} f_2(x)\,dx.$$

Por otra parte, cuando $r \to 0$ y $R \to +\infty$ es fácil ver que las integrales a lo largo de los arcos de circunferencia C_R^k y C_r^k tienden hacia 0. Utilizando que $\operatorname{Im} f_2(x) = 4\pi f(x)$ cuando $x > 0$ se llega a la igualdad

$$\frac{2\pi}{a+1}(\pi^2 - \operatorname{Log}^2 a) = -4\pi \int_0^{1-\varepsilon} f(x)\,dx - 4\pi \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx - \operatorname{Im} \int_{C_\varepsilon} f_2(z)\,dz$$

donde $C_\varepsilon(t) = 1 + \varepsilon e^{it}$, $-\pi \le t \le 0$. Como f_2 tiene en $z = 1$ un polo simple y $\operatorname{Res}(f_2, 1) = f_2(1)/(a+1) = -4\pi^2/(a+1)$, según el lema 8.1.4

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f_2(z)\,dz = \pi i \operatorname{Res}(f_2, 1) = -\frac{4\pi^3}{a+1} i$$

luego

$$-4\pi \int_0^{+\infty} f(x)\,dx + \frac{4\pi^3}{a+1} = \frac{2\pi}{a+1}(\pi^2 - \operatorname{Log}^2 a)$$

y se obtiene que $2I = (\pi^2 + \operatorname{Log}^2 a)/(a+1)$.

8.2.3. Sumación de series

En los siguientes ejercicios se utiliza el teorema de los residuos para calcular la suma de ciertos tipos de series.

Ejercicio 8.20.

Compruebe que $\pi \cot \pi z$ y $\pi/\operatorname{sen} \pi z$ son funciones sumadoras. Utilícelas para calcular las siguientes sumas, donde $a \notin \mathbb{Z}$,

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}$; $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$;

c) v.p. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a-n}$; v.p. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{a-n}$

SOLUCIÓN.

Para ver que $\pi \cot \pi z$ y $\pi/\operatorname{sen} \pi z$ son funciones sumadoras basta tener en cuenta que, según el ejercicio 3.16, ambas están acotadas superiormente en el complemento de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D(n,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, luego se cumple la acotación requerida con $R_n = n + 1/2$. Para estas funciones se tiene:

$$\operatorname{Res}(\pi \cot \pi z, k) = 1, \quad \operatorname{Res}(\pi/\sin \pi z, k) = (-1)^{|k|}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

a) Si $f(z) = 1/(z+a)^2$, con la función sumadora $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$ se obtiene la primera suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = -\operatorname{Res}(f(z)\pi \cot \pi z, -a) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

y con la función sumadora $\alpha(z) = \pi/\operatorname{sen} \pi z$ se obtiene la segunda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{(a+n)^2} = -\operatorname{Res}(f(z)\pi/\operatorname{sen} \pi z, -a) = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

En ambos casos las series son absolutamente convergentes y se pueden escribir como series ordinarias asociando términos simétricos:

$$\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a^2}{(n^2-a^2)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

$$\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+a^2}{(n^2-a^2)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

b) Para calcular $S = \sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+a^2)^{-1}$ basta observar que

$$\frac{1}{a^2} + 2S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)}$$

Si $f(z) = 1/(z^2+a^2)$, con la función sumadora $\alpha(z) = \pi \cot \pi z$ se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2} = -\operatorname{Res}(f\alpha, ai) - \operatorname{Res}(f\alpha, -ai).$$

Calculando estos residuos

$$\operatorname{Res}(f\alpha, ai) = \operatorname{Res}(f\alpha, -ai) = \frac{\pi \cot ai}{2ai} = \frac{\pi}{2a}\frac{1+e^{2\pi a}}{1-e^{2\pi a}}$$

resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\frac{e^{2\pi a}+1}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}$$

Análogamente, con la misma función f, pero utilizando la función sumadora $\alpha(z) = \pi/\operatorname{sen}\pi z$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{e^{\pi a}}{e^{2\pi a}-1} - \frac{1}{2a^2}$$

c) Si $f(z) = 1/(a-z)$, como las funciones sumadoras $\pi \cot \pi z$ y $\pi \operatorname{sen} \pi z$ son impares, según el apartado *b*) de la proposición 8.1.7

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a-n} = -\operatorname{Res}\big(f(z)\pi \cot \pi z, a\big) = \pi \cot \pi a$$

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{a-n} = -\operatorname{Res}\big(f(z)\pi/\operatorname{sen}\pi z, a\big) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}$$

En ambos casos el valor principal de la suma coincide con la suma de las series ordinarias obtenidas asociando términos simétricos:

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a-n} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2-n^2}$$

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{|n|}}{a-n} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$$

Ejercicio 8.21.

Considerando la integral

$$\int_{C_n} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2m}}\, dz$$

con $C_n(t) = (n+1/2)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, *calcule las sumas de las series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

SOLUCIÓN.

La función $f(z) = \pi z \cot \pi z$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y una singularidad evitable en $z = 0$ que desaparece definiendo $f(0) = 1$.

Como $\cot \pi z$ es periódica de periodo 1, para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se verifica:

$$\operatorname{Res}(f, k) = \lim_{z \to k} (z - k)\pi z \cot \pi(z - k) = \lim_{h \to 0} (k + h) f(h) = k.$$

La función meromorfa $f_m(z) = z^{-(2m+1)} f(z) = z^{-2m} \pi \cot \pi z$ tiene polos en $\mathbb{Z}$ y todos son simples, excepto $z = 0$ que es de multiplicidad $2m + 1$.

$$\operatorname{Res}(f_m, k) = \lim_{z \to k} \frac{1}{z^{2m+1}} (z - k) f(z) = \frac{1}{k^{2m+1}} \operatorname{Res}(f, k) = \frac{1}{k^{2m}}$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ es el desarrollo en serie de potencias de $f(z) = \pi z \cot \pi z$ alrededor de 0, que fue obtenido en el ejercicio 5.22, se tiene $\operatorname{Res}(f_m, 0) = a_{2m}$.

La integral $I_n = \int_{C_n} f_m(z)\, dz$ tiende hacia 0 cuando $n \to +\infty$. Efectivamente, como $\pi \cot \pi z$ está acotada sobre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z : |z| = n + 1/2\}$ (véase el ejercicio 8.20), existe $M > 0$ tal que

$$|z| = n + 1/2 \Rightarrow |f_m(z)| = \left| \frac{\pi \cot \pi z}{z^{2m}} \right| \leq \frac{M}{(n + 1/2)^{2m}}$$

luego

$$|I_n| \leq 2\pi(n + 1/2) \frac{M}{(n + 1/2)^{2m}} = 2\pi M (n + 1/2)^{1-2m}$$

y, teniendo en cuenta que $m \geq 1$, se concluye que $\lim_n I_n = 0$.

Según el teorema de los residuos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f_m(z)\, dz &= \sum_{0 < |k| \leq n} \operatorname{Res}(f_m, k) + \operatorname{Res}(f_m, 0) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}} + \operatorname{Res}(f_m, 0) \end{aligned}$$

y pasando al límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}(f_m, 0).$$

Según el ejercicio 5.22

$$\operatorname{Res}(f_m, 0) = a_{2m} = \frac{(-1)^m (2\pi)^{2m} B_{2m}}{(2m)!}$$

donde B_{2m} son los números de Bernoulli, cuyos primeros valores

$$B_2 = 1/6, \quad B_4 = -1/30, \quad B_6 = 1/42, \quad B_8 = -1/30,$$

permiten calcular las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Ejercicio 8.22.

Obtenga el desarrollo de Mittag-Leffler de la función $f(z) = \left(\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2$.

SOLUCIÓN.

La función meromorfa f tiene polos dobles en los enteros $\mathscr{P}(f) = \mathbb{Z}$ y la parte principal de f en el polo $n \in \mathbb{Z}$ es $1/(z-n)^2$ (véase el ejercicio 6.4). El corolario 6.1.18 afirma que f admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

uniformemente convergente sobre compactos. Obsérvese que en este caso, razonando como en el ejercicio 6.28, podemos tomar los polinomios Q_n que intervienen en el citado corolario como idénticamente nulos. La función definida por la serie

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

tiene los mismos polos que f, con las mismas partes principales, luego la diferencia $g = F - f$ presenta singularidades evitables en cada $n \in \mathbb{Z}$. Después de eliminar estas singularidades podemos considerar que g es una función entera. Para obtener el resultado basta calcular esta función entera. La suma de la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

se ha calculado en el ejercicio 8.20 y se obtiene que g es idénticamente nula, luego

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \tag{8.3}$$

donde la serie converge uniformemente sobre compactos.

Nota. El resultado obtenido en este ejercicio se puede aplicar para calcular la suma de la serie armónica $S = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$. En efecto, en la solución del ejercicio 6.4 se muestra que la función $h(z) = f(z) - 1/z^2$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, que se elimina definiendo $h(0) = \pi^2/3$. Según la fórmula 8.3 se tiene

$$h(z) = \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

luego $2S = h(0) = \pi^2/3$.

Ejercicio 8.23.

Obtenga el desarrollo de Mittag-Leffler de la función $\pi \cot \pi z$.

SOLUCIÓN.

La función meromorfa $f(z) = \pi \cot \pi z$ tiene polos en los enteros $\mathscr{P}(f) = \mathbb{Z}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ es un polo simple con residuo $\operatorname{Res}(f, n) = 1$, luego la parte principal de f en n es $1/(z-n)$. Según el corolario 6.1.18 $f(z)$ admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} - Q_n(z) \right)$$

donde Q_n son polinomios que se eligen considerando sumas parciales de los desarrollos en serie de potencias

$$\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n} \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots \right); \quad |z| < |n|.$$

Como la serie

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{z}{n(z-n)}$$

ya converge uniformemente sobre compactos (esto se deja al cuidado del lector) sirven los polinomios constantes $Q_n = 1/n$. Para determinar la función entera

$$g(z) = \pi \cot \pi z - \left(\frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{z}{n(z-n)} \right)$$

basta considerar su derivada

$$g'(z) = -\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \right)^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

(La convergencia uniforme sobre compactos de la serie ha permitido utilizar el teorema de Weierstrass para derivarla término a término). Con el ejercicio 8.22 se concluye que $g'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego g es constante. Escribiendo la suma $F(z)$ en la forma

$$F(z) = \frac{1}{z} + \lim_m \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

se aprecia que F es una función impar. Como $\pi \cot \pi z$ también es impar, lo mismo le ocurre a la diferencia $g = f - F$, luego esta función constante es la idénticamente nula. Se obtiene así que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{z}{n(z-n)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \tag{8.4}$$

donde la serie que interviene converge uniformemente sobre compactos.

Nota. La serie (8.4) también se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{z} + \lim_m \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \lim_m \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} = v.p. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n}$$

cuya suma se ha calculado en el ejercicio 8.20 c).

8.3. Ejercicios propuestos

8.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto que contiene al semiplano $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ y $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ una función meromorfa, sin polos en el eje real, que verifica

$$\lim_{R\to+\infty} \max\{|f(Re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq \pi\} = 0.$$

Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} \Big(f(x)e^{i\mu x} + f(-x)e^{-i\mu x}\Big)\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{i\mu z}, z\big).$$

Demuestre también que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\mu x)\, dx = \pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{i\mu z}, z\big) \quad \text{si } f \text{ es par,}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\operatorname{sen}(\mu x)\, dx = \pi \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\big(f(z)e^{i\mu z}, z\big) \quad \text{si } f \text{ es impar.}$$

Como aplicación compruebe que se verifica

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\mu x)}{x^2+a^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\mu x)}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2ae^{\mu a}}$$

8.2 Justifique que, para $0 < a < 2$, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x+e^{2x}}\, dx$$

es convergente. Calcule su valor utilizando el teorema de los residuos (véase el ejercicio 8.15).

8.3 Considerando la integral de la función $e^{iz^2}/(1+z^4)$ sobre el borde del sector $\{re^{it} : 0 < r < R,\ 0 < t < \pi/2\}$ calcule el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2 - \operatorname{sen} x^2}{1+x^4}\, dx.$$

8.4 Considerando la integral de la función $(e^{3iz} - 3e^{iz} + 2)/z^3$ a lo largo de un camino adecuado, calcule el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx.$$

8.5 Considerando la integral de la función $\operatorname{Log}(1-e^{2iz})$ a lo largo de un camino adecuado, calcule el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x\, dx.$$

8.6 Utilice el desarrollo, calculado en el ejercicio 8.23,

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

y el resultado mencionado en el ejercicio propuesto 4.6 para obtener que el residuo de $f_m(z) = z^{-2m}\pi \cot(\pi z)$ en $z = 0$ es $-2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2m}$ (véase el ejercicio 8.21).

8.7 Este ejercicio muestra cómo se puede usar el teorema de los residuos para sumar una serie de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{in\xi}$, donde f es una función racional con un cero de multiplicidad mayor o igual que 2 en el infinito, sin polos en $\mathbb{Z}$.

a) Sea la función $\alpha(z) = 2\pi i e^{i\xi z}/(e^{2\pi i z} - 1)$, con $0 < \xi < 2\pi$, y, para $r_n = n + 1/2$, sea $Q_n = [-r_n, r_n] \times [-r_n, r_n]$. Demuestre que existe $M > 0$ tal que $|\alpha(z)| \leq M$ para todo z en la unión de los bordes de Q_n, $n \in \mathbb{N}$.

b) See $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tal que existe $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) \in \mathbb{C}$. Se supone que $\mathscr{P}(f)$ finito y disjunto de $\mathbb{Z}$. Considerando la integral de $f(z)\alpha(z)$ sobre el borde de Q_n establezca la igualdad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{in\xi} = -\sum_{a\in\mathscr{P}(f)} \operatorname{Res}(\alpha f, a).$$

c) Como aplicación, para $a \in \mathbb{R}$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2 + a^2}$$

8.8 Si $a \in [-\pi, \pi]$, considerando la integral de la función

$$\frac{\pi \operatorname{sen} az}{z^3 \operatorname{sen} \pi z}$$

a lo largo del borde de $[-r_m, r_m] \times [-r_m, r_m]$, con $r_m = m + 1/2$, obtenga la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} an}{n^3} = \frac{a}{12}(a^2 - \pi^2)$$

y, en particular, que

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} \cdots$$

8.9 Sea $a \notin \pi\mathbb{Z}$ y $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ una función entera tal que $|f(x + iy)| \leq e^{|y|}$ para todo $x + iy \in \mathbb{C}$. Considerando la integral de la función

$$\frac{f(z)}{(z - a)^2 \operatorname{sen} z}$$

sobre el borde del cuadrado $[-r_n, r_n] \times [-r_n, r_n]$, con $r_n = (n + 1/2)\pi$, obtenga que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n f(n\pi)}{(a - n\pi)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen} z}\right)_{z=a}$$

8.10 Considerando la integral de la función

$$\frac{\operatorname{sen} z}{(z-a)\cos^2 z}$$

sobre el borde del cuadrado $[-m\pi, m\pi] \times [-m\pi, m\pi]$, establezca la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^2 a} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(a - (n+\frac{1}{2})\pi\right)^2}$$

8.11 Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función meromorfa impar cuyos polos, todos simples, son $\mathscr{P}(f) = \{\pm a_n : n \in \mathbb{N}\}$, siendo $a_n \geq 0$ una sucesión estrictamente creciente no acotada. Se supone que hay una sucesión r_n, con $a_n < r_n < a_{n+1}$, tal que, definiendo $M(r_n) = \sup\{|f(z)| : |z| = r_n\}$, se verifica $\lim_{n\to\infty} M(r_n)/r_n = 0$. Aplicando el teorema de los residuos a la función $g(w) = f(w)/\big(w(z-w)\big)$ demuestre

a) $f(z) = 2z \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Res}(f, a_n)}{z^2 - a_n^2}$ si $0 \notin \mathscr{P}(f)$;

b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Res}(f,0)}{z} + 2z \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{Res}(f, a_n)}{z^2 - a_n^2}$ si $a_1 = 0 \in \mathscr{P}(f)$.

Como aplicación obtenga las igualdades

$$\frac{1}{z} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

8.12 Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ con infinitos polos $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, todos simples y que verifican $0 < |a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \cdots$ Se supone que hay una sucesión r_n, $|a_n| < r_n < |a_{n+1}|$, tal que $\sup\{|f(z)|\colon |z| = r_n,\ n \in \mathbb{N}\} < +\infty$.

Aplicando el teorema de los residuos a la función $f(w)/\big(w(z-w)\big)$ demuestre que, para $z \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ se verifica

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}(f, a_k) \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

Este resultado, también se puede utilizar para obtener los dos últimos desarrollos considerados en el ejercicio propuesto 8.11.

8.13 Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con una infinidad de ceros $\{a_1, a_2, \dots\}$, todos simples, tales que $0 < |a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \cdots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$. Se supone que hay una sucesión ρ_n, con $|a_n| < \rho_n < |a_{n+1}|$, tal que $\lim_{n\to\infty} M_n/\rho_n = 0$ donde $M_n = \sup\{|f'(z)/f(z)| : |z| = \rho_n\}$, Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n(z - a_n)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(0)}{f(0)}$$

Indicación. Aplique el teorema de los residuos a $f'(w)/\big(f(w)w(w-z)\big)$.

Capítulo 9

Transformaciones conformes

9.1. Preliminares teóricos

En este capítulo se estudian propiedades geométricas de las funciones holomorfas, o meromorfas, consideradas como transformaciones del plano complejo o del plano complejo ampliado (esfera de Riemann). Se consideran aquí las nociones generales de transformación conforme e isomorfismo conforme entre abiertos del plano complejo ampliado, formuladas al final del capítulo 3.

9.1.1. Teorema del módulo máximo

Uno de los resultados básicos de la teoría de funciones holomorfas es el teorema del módulo máximo (9.1.1), con el que se demuestra el Lema de Schwarz (9.1.3) que tiene consecuencias tan interesantes como la caracterización, mediante subgrupos de transformaciones de Möbius, de todos los automorfismos conformes del disco $D(0,1)$ y del semiplano (9.1.6, 9.1.7).

Teorema 9.1.1. Módulo máximo.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ una función holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si su módulo $|f|$ alcanza en Ω un máximo relativo entonces f es constante.

Corolario 9.1.2.

Si $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en un compacto $K \subset \mathbb{C}$ y su restricción al interior de K es holomorfa entonces existe $a \in \partial K$ tal que

$$|f(a)| = \text{máx}\{|f(z)| : z \in K\}.$$

El siguiente resultado es otra consecuencia del teorema del módulo máximo.

Teorema 9.1.3. Lema de Schwarz.

Sea $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0,1)$ y $f(0) = 0$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in D(0,1)$ y $|f'(0)| \leq 1$.

Además, si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \neq 0$, o si $|f'(0)| = 1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\alpha} z$.

9.1.2. Isomorfismos conformes

Al extender la noción de derivada al caso de funciones con dominio y con valores en el plano complejo ampliado, las funciones con derivada no nula tienen la propiedad de conservar ángulos orientados sobre la esfera de Riemann (véase el ejercicio 3.42). Así se extienden a este contexto más general las nociones de transformación conforme e isomorfismo conforme.

Definición 9.1.4.
Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ se dice que es conforme en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ si f es derivable en cada $z \in \Omega$ con $f'(z) \neq 0$. Un isomorfismo conforme del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

Corolario 9.1.5.
Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es abierto y $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ es inyectiva entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$, $G = f(\Omega)$ es abierto, la inversa $g = f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ es meromorfa (holomorfa si $\infty \notin \Omega$) y se cumple que $g'(b) \neq 0$ para todo $b \in G$, luego f establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen $f(\Omega)$.

Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ son abiertos, $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ designará el conjunto de todos los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Cuando $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ no es vacío se dice que los abiertos Ω_1 y Ω_2 son *conformemente equivalentes*. Por definición $\Gamma(\Omega_1) = \Gamma(\Omega_1, \Omega_1)$. En particular, $\Gamma(\mathbb{C}_\infty)$ es el grupo de todas las transformaciones de Möbius y $\Gamma(\mathbb{C}) = \{az+b : 0 \neq a \in \mathbb{C},\, b \in \mathbb{C}\}$. En los ejercicios de este capítulo, utilizando transformaciones de Möbius, se consigue una descripción explícita del grupo $\Gamma(\Omega)$ y de los conjuntos $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$, cuando Ω, Ω_1, Ω_2 son abiertos sencillos, como el disco $D(0,1)$ o el semiplano $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Proposición 9.1.6.
La transformación $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ es un isomorfismo conforme si y sólo si existen $a \in D(0,1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Proposición 9.1.7.
Sea $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Entonces $f : P \longrightarrow P$ es un isomorfismo conforme si y sólo si es de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

El problema central de la representación conforme consiste en determinar cuándo dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}_\infty$ son conformemente equivalentes y caracterizar los que son conformemente equivalentes a un abierto más sencillo, como el disco unidad. En los capítulos 2 y 3 ya se han visto algunas transformaciones conformes que se pueden establecer usando funciones elementales. Los resultados sobre transformaciones conformes culminan con el teorema de Riemann, según el cual todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.

La idea de su demostración está basada en el ejercicio 9.23: primero se establece la existencia de una función holomorfa inyectiva $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que

$$|f'(a)| = \text{máx}\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \text{ inyectiva}\}$$

y luego se demuestra que $f(\Omega) = D(0,1)$.

9.2. Ejercicios resueltos

9.2.1. Aplicaciones del teorema del módulo máximo

El teorema del módulo máximo es el principal recurso para la solución de los siguientes ejercicios.

Ejercicio 9.1.

Sea P un polinomio complejo de grado n y $M = \sup\{|P(z)| : |z| < 1\}$. Demuestre que $|P(z)| \leq M|z|^n$ cuando $|z| > 1$.

SOLUCIÓN.

Por continuidad, $M = \text{máx}\{|P(z)| : |z| \leq 1\}$. Como P es un polinomio de grado n se sigue que $f(w) = P(1/w)w^n$ es un polinomio que verifica $|f(w)| \leq M$ cuando $|w| = 1$. En virtud del corolario 9.1.2 podemos afirmar que $|f(w)| \leq M$ si $|w| \leq 1$ y, con el cambio de variable $z = 1/w$, se obtiene que $|P(z)| \leq M|z|^n$ si $|z| > 1$.

Ejercicio 9.2.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ tal que $f(a) = 1$ y $|f(z)| > 2$ cuando $|z - a| = r$. Demuestre que f se anula en algún punto de $D(a,r)$.

SOLUCIÓN.

Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que f no se anula en $D(a,r)$. En virtud de la hipótesis, es $f(z) \neq 0$ para $|z - a| \leq r$, luego existe $R > r$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,R)$. Aplicando el corolario 9.1.2 a la función $1/f$, que es holomorfa en $D(a,R)$, se obtiene que $|f(z)| \geq 2$ para todo $z \in D(a,r)$, lo que contradice la hipótesis $f(a) = 1$.

Ejercicio 9.3.

Se supone que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante en el abierto conexo Ω, que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y que $|f|$ es constante sobre $\{z : |z - a| = r\}$. Demuestre que f se anula en algún punto de $D(a,r)$.

SOLUCIÓN.

Sea α el valor constante de $|f|$ sobre $\{z : |z - a| = r\}$. Razonamos, por reducción al absurdo, suponiendo que f no se anula en $D(a,r)$. Entonces $\alpha \neq 0$ (ya que, si fuese $\alpha = 0$, en virtud del principio de identidad, f sería idénticamente nula).

Según el corolario 9.1.2, los máximos absolutos de $|f|$ y $|1/f|$ sobre el compacto $\overline{D(a,r)}$ se alcanzan en su frontera, luego sus valores son α y $1/\alpha$ respectivamente. Se obtiene así que

$|f(z)| = \alpha$ para todo $z \in \overline{D(a,r)}$ y con el teorema del módulo máximo (o el ejercicio 3.25) se obtiene que $f|_{D(a,r)}$ es constante. Esto implica, por el principio de identidad, que f es constante en el abierto conexo Ω y, con esta contradicción, termina la prueba.

Ejercicio 9.4.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no es constante en un abierto conexo Ω y el compacto $K = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq 1\}$ es no vacío, demuestre que f se anula en algún punto.

SOLUCIÓN.

Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que f no se anula en Ω. Entonces $1/f$ es holomorfa y aplicando el corolario 9.1.2 se obtiene $a \in \partial K$ verificando

$$\left|\frac{1}{f(a)}\right| = \max\left\{\left|\frac{1}{f(z)}\right| : z \in K\right\}$$

Es claro que $|f(a)| = 1$ (pues $|f(a)| < 1$ implica que a es interior a K) luego $\{z \in \Omega : |f(z)| < 1\} = \emptyset$, es decir, $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \Omega$. Puesto que

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1 \text{ para todo } z \in \Omega \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{f(a)}\right| = 1,$$

aplicando el teorema del módulo máximo, se concluye que $1/f$ es constante en el abierto conexo Ω, lo que contradice una de las hipótesis.

Ejercicio 9.5.

Demuestre que si p es un polinomio complejo no constante y $\varepsilon > 0$ entonces cada componente conexa de $\{z : |p(z)| < \varepsilon\}$ contiene un cero de p.

SOLUCIÓN.

El abierto $\Omega = \{z : |p(z)| < \varepsilon\}$, en virtud del teorema fundamental del álgebra, es no vacío. Como p no es constante, $\lim_{z\to\infty} |p(z)| = +\infty$ y, por lo tanto, Ω es acotado. Entonces, si V es una componente conexa de Ω, su clausura $\overline{V}$ es compacta. Además, para cada $a \in \partial V$ es $|p(a)| = \varepsilon$ (si fuese $|p(a)| < \varepsilon$, sería $a \in \Omega$ y si U es la componente conexa de a en Ω se tendría que $a \in U \cap \overline{V}$, luego $U = V$, lo que es imposible porque $a \notin V$).

Si suponemos que V no contiene un cero de p, en virtud del corolario 9.1.2, el máximo absoluto de $|1/p|$ sobre el compacto $\overline{V}$ se alcanzaría en un punto de ∂V y su valor sería $1/\varepsilon$. Se obtendría así que $|p(z)| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \overline{V}$, lo que es absurdo, debido a que $V \subset \Omega$.

Ejercicio 9.6.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,r))$ una función que verifica $|f(z)| = h(|z|)$ para todo $z \in D(0,r)$, donde la función $h : (0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ no es constante. Demuestre que f es de la forma $f(z) = \mu z^m$, con $\mu \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

La hipótesis implica que f no es constante. Empecemos demostrando, por reducción al absurdo, que $f(0) = 0$. Si fuese $f(0) \neq 0$ existiría $0 < \varepsilon < r$ tal que $f(z) \neq 0$ cuando

$|z| < \varepsilon$ y, según el corolario 9.1.2 aplicado a las funciones f y $1/f$ en $\overline{D(0,\rho)}$, con $0 < \rho < \varepsilon$, se obtendría que $|f(z)| \leq h(\rho)$ y $|1/f(z)| \leq 1/h(\rho)$ para todo $z \in D(0,\rho)$, luego $|f|$ sería constante en $D(0,\rho)$. Con el teorema del módulo máximo (o con el ejercicio 3.25) se llegaría a que f es constante, lo que es imposible, porque h no lo es.

Si m es la multiplicidad del cero que f tiene en $z = 0$, podemos escribir $f(z) = z^m F(z)$, donde $F \in \mathscr{H}(D(0,r))$ y $F(0) \neq 0$. Puesto que $|F(z)| = h(|z|)/|z|^m$ sólo depende de $|z|$, repitiendo con F el razonamiento realizado anteriormente con f (cuando se suponía $f(0) \neq 0$) se concluye que F es constante.

Ejercicio 9.7.

Demuestre que para cada $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ *existe una sucesión* $z_n \in D(0,1)$ *con* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$*, tal que la sucesión* $f(z_n)$ *es acotada.*

SOLUCIÓN.

Consideramos tres casos, según que el conjunto de los ceros de f sea vacío, finito o infinito.

a) Para $0 < r < 1$ sea $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. En virtud del corolario 9.1.2, $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$ y así es evidente que $M(r)$ es creciente en $(0,1)$.

Si $\mathscr{Z}(f) = \emptyset$ podemos aplicar esta observación a la función $1/f$ y obtenemos que $m(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\} = 1/M(r)$ es decreciente y, por lo tanto, acotada. Fijada una sucesión $r_n \in (0,1)$ convergente hacia 1, la función continua $|f|$ alcanza un mínimo absoluto sobre cada circunferencia compacta $|z| = r_n$, luego existe $z_n \in D(0,1)$, con $|z_n| = r_n$, tal que $m(r_n) = |f(z_n)|$. Se obtiene así una sucesión con los requisitos del enunciado.

b) Si $\mathscr{Z}(f)$ es finito, f se descompone en la forma $f = Fp$ donde $F \in \mathscr{H}(D(0,1))$ no tiene ceros en $D(0,1)$ y p es un polinomio. Según lo que acabamos de establecer en *a*), existe una sucesión $z_n \in D(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ y la sucesión $F(z_n)$ es acotada. Como la sucesión $p(z_n)$ es acotada se sigue que $f(z_n) = p(z_n)F(z_n)$ también lo es.

c) Si $\mathscr{Z}(f)$ es infinito, podemos suponer que $\mathscr{Z}(f) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es numerable (pues el resultado es trivial cuando f es idénticamente nula). Entonces la sucesión z_n cumple los requisitos del enunciado ya que, en virtud del apartado *c*) de la proposición 2.1.1, para cada $r \in (0,1)$ el conjunto $\mathscr{Z}(f) \cap \overline{D(0,r)}$ es finito, lo que significa que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$.

Ejercicio 9.8.

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *no constante, demuestre que* $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$*, definida para* $r \geq 0$*, es una función estrictamente creciente, continua y que* $\lim_{r\to\infty} M(r) = +\infty$.

SOLUCIÓN.

En virtud del corolario 9.1.2 $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$, luego $M(r)$ es creciente. La hipótesis de que $M(r)$ no es estrictamente creciente conduce a un absurdo: existirían $0 < r_1 < r_2$ tales que $M(r)$ es constante en el intervalo $[r_1, r_2]$, luego $|f|$ alcanzaría máximos relativos en puntos de $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$, lo que es imposible por el teorema del módulo máximo.

Por otra parte, en virtud del teorema de Liouville, $M(r)$ no está acotada superiormente, luego $\lim_{r\to\infty} M(r) = +\infty$.

Para obtener la continuidad de $M(r)$ en el punto $r = \rho > 0$ utilizamos la continuidad uniforme de f en el compacto $K = \{z : |z| \leq \rho + 1\}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$z, w \in K, \ |z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Si $r > 0$ y $|r - \rho| < \delta$, los puntos $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\theta}$ cumplen $|z - w| < \delta$. Como $w \in K$, la condición $0 < \delta < 1$ garantiza que $z \in K$ luego,

$$|f(z)| - M(\rho) \leq |f(z)| - |f(w)| \leq |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Como $|f(z)| \leq M(\rho) + \varepsilon$ para $|z| = r$, se obtiene que $M(r) \leq M(\rho) + \varepsilon$. Análogamente se obtiene que $M(\rho) \leq M(r) + \varepsilon$, luego $|M(r) - M(\rho)| \leq \varepsilon$ si $|r - \rho| < \delta$.

Ejercicio 9.9.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,\rho))$ tal que $|\operatorname{Im} z||f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(0,\rho)$. Demuestre que para $0 < r < \rho$ se verifica

a) $|(z^2 - r^2)f(z)| \leq 2rM$ *si* $|z| \leq r$;

b) $|f(z)| \leq \dfrac{8M}{3r}$ *si* $|z| \leq r/2$.

SOLUCIÓN.

Para $z = re^{it}$ se cumple $|z^2 - r^2| = r^2|e^{i2t} - 1| = r^2|2\operatorname{sen} t| = 2r|\operatorname{Im} z|$, luego

$$|(z^2 - r^2)f(z)| \leq 2r|\operatorname{Im} z||f(z)| \leq 2rM$$

y aplicando el teorema del módulo máximo se obtiene *a*).

Cuando $|z| \leq r/2$ se verifica $|z^2 - r^2| \geq r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}$ y, usando *a*), resulta

$$|f(z)| \leq 2rM\frac{4}{3r^2} = \frac{8M}{3r}$$

Ejercicio 9.10.

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y $|\operatorname{Re} f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que para $|z| \leq r$ se verifica $|f(z)/z^2| \leq |f(z) - 2r|/r^2$. Deduzca de ello que f es idénticamente nula.

SOLUCIÓN.

Si $|z| \leq r$ se cumple $|\operatorname{Re} f(z)| \leq r$, luego $f(z) - 2r \neq 0$, de modo que

$$g(z) = \frac{r^2 f(z)}{z^2(f(z) - 2r)}$$

está definida y es holomorfa en $D(0,R)$ para algún $R > r$ (según las hipótesis f tiene en $z = 0$ un cero de multiplicidad mayor o igual que 2, luego g tiene en ese punto una singularidad evitable que se supone eliminada). Si $f(z) = u + iv$, como $u \leq r$ resulta

$$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 \leq r^2 + v^2 \leq (2r - u)^2 + v^2 = |2r - f(z)|^2$$

luego $|g(z)| \leq 1$ cuando $|z| = r$ y, aplicando el corolario 9.1.2, se concluye que $|g(z)| \leq 1$ si $|z| \leq r$, es decir,

$$\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| \leq \frac{|f(z) - 2r|}{r^2} \quad \text{si} \quad |z| \leq r.$$

Fijado un punto $z \in \mathbb{C}$, la desigualdad anterior se cumple para todo $r > |z|$, y se concluye que f es idénticamente nula (a esta conclusión final también se puede llegar usando el resultado obtenido en el ejercicio 5.33).

Ejercicio 9.11.

Determine los abiertos $\Omega \supset \{z : |z| \leq 1\}$ en los que hay definida una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ verificando las tres condiciones siguientes:

a) $|f(z)| = 1$ *si* $|z| = 1$*;*

b) *los únicos ceros de f son $a = 1/2$ (simple) y $b = (1+i)/4$ (doble);*

c) $f(0) = ab^2$.

Demuestre que si Ω es conexo la función f es única.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 2.21, para $|\alpha| < 1$, $T_\alpha(z) = (z - \alpha)/(1 - \overline{\alpha} z)$ define un automorfismo conforme de $D(0,1)$ que cumple *a*), luego $h = -T_a T_b^2$ es una función holomorfa en $U = \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}, 1/\overline{b}\}$ que cumple *a*), *b*) y *c*). Por consiguiente, para cada abierto $\Omega \subset U$ existe $f = h|_\Omega \in \mathscr{H}(\Omega)$ con las propiedades requeridas.

Si Ω es conexo, la función f queda unívocamente determinada. En efecto, si $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ cumple *a*), *b*) y *c*) entonces $F = g/f$ es holomorfa y no tiene ceros en Ω. Aplicando el corolario 9.1.2 a las funciones F y $1/F$ en el compacto $\overline{D(0,1)}$ se obtiene que $|F(z)| = 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Esto implica que $F|_{D(0,1)}$ es constante (véase el ejercicio 3.25). Con el principio de identidad se concluye F es constante en el abierto conexo Ω, con valor constante $F(0) = g(0)/f(0) = 1$, luego $f = g$.

Por otra parte, si alguno de los puntos $1/\overline{a}$, $1/\overline{b}$, pertenece a Ω no puede existir $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con las condiciones del enunciado. Supongamos lo contrario y que $1/\overline{a} \in \Omega$. Entonces existe $r > 1$ con $\overline{D(0,1)} \subset D(0,r) \subset U \cap \Omega$ y, según el razonamiento anterior, debería ser $f(z) = h(z)$ para todo $z \in D(0,r)$. Entonces, con el principio de identidad se llegaría a que $f(z) = h(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{1/\overline{a}, 1/\overline{b}\}$, lo que es imposible porque $h(z)$ tiende hacia ∞ cuando $z \to 1/\overline{a}$.

Ejercicio 9.12.

Sea γ un camino cerrado regular a trozos en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$ *para cada $a \notin \Omega$. Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in$* $\operatorname{Imagen}(\gamma)$ *demuestre que $|f(w)| \leq 1$ para cada $w \notin$* $\operatorname{Imagen}(\gamma)$ *con* $\operatorname{Ind}(\gamma, w) \neq 0$.

SOLUCIÓN.

El conjunto $V = \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma) : \operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0\}$ es unión de varias componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Imagen}(\gamma)$, entre las que figura la no acotada, luego es abierto y su complemento $K = \mathbb{C} \setminus V$ es compacto (porque es cerrado y acotado). En virtud de la hipótesis $K \subset \Omega$, es claro que $\operatorname{Imagen}(\gamma) \subset K$. Es fácil ver que $\partial K \subset \operatorname{Imagen}(\gamma)$ (si

$a \in K \setminus \text{Imagen}(\gamma)$ entonces $\text{Ind}(\gamma, a) \neq 0$ y la componente conexa de a en $\mathbb{C} \setminus \text{Imagen}(\gamma)$ es un entorno de a contenido en K, luego $a \notin \partial K$).

Como f es holomorfa en el interior de K y $|f(w)| \leq 1$ para todo $w \in \partial K$, aplicando el corolario 9.1.2 se obtiene que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in K$.

9.2.2. El lema de Schwarz y los isomorfismos conformes

El lema de Schwarz tiene interesantes consecuencias en relación con la representación conforme. Los ejercicios que siguen muestran algunas de ellas.

Ejercicio 9.13.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ donde $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ es abierto conexo. Demuestre que si se cumplen las dos condiciones

a) $|f(z)| \leq 1$ *si* $|z| = 1$;

b) existen $a, b \in D(0,1)$, $a \neq b$, tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$

entonces f es la identidad.

SOLUCIÓN.

En virtud del corolario 9.1.2 la condición *a*) implica que $|f(z)| \leq 1$ cuando $|z| \leq 1$. Según *b*) f no es constante y, con el teorema de la aplicación abierta 6.1.2, se concluye que $|f(z)| < 1$ si $|z| < 1$. Según 9.1.6 la transformación

$$T(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

establece un automorfismo conforme de $D(0,1)$ con el que se obtiene una función holomorfa $g = T \circ f \circ T^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ que verifica $g(0) = 0$.

Según el lema de Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$. Como $b \neq a$, y en el punto $T(b) \neq 0$ se cumple la igualdad $g(T(b)) = T(b)$, la segunda parte del lema de Schwarz afirma que $z = g(z)$ para cada $z \in D(0,1)$, luego $T(w) = g(T(w)) = T(f(w))$ para todo $w \in D(0,1)$. Entonces $f(w) = w$ para todo $w \in D(0,1)$ y, con el principio de identidad, se concluye que $f(w) = w$ para todo $w \in \Omega$.

Ejercicio 9.14.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$ y $a \in D(0,1)$. Demuestre que

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

y que si se cumple la igualdad entonces f es un automorfismo conforme de $D(0,1)$. Deduzca que si f no es inyectiva entonces $|f'(0)| < 1$ (véase el ejercicio 9.15).

SOLUCIÓN.

Consideremos el automorfismo conforme de $D(0,1)$ dado por la transformación de Möbius $T_a(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$. Si $b = f(a)$, la función

$$\psi = T_b \circ f \circ T_a^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$$

cumple $\psi(0) = 0$ y, aplicando el lema de Schwarz, se obtiene la desigualdad $|\psi'(0)| \le 1$ que equivale a $|T_b'(b)f'(a)(T_a^{-1})'(0)| \le 1$, es decir

$$|f'(a)| \le \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $|\psi'(0)| = 1$ y esto equivale, en virtud del lema de Schwarz, a que ψ sea de la forma $\psi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$, luego, en este caso, $f = T_{-b} \circ \psi \circ T_a$ es un automorfismo conforme de $D(0,1)$.

Con $a = 0$ se obtiene $|f'(0)| \le 1 - |b|^2 \le 1$, luego la condición $|f'(0)| = 1$ implica que $f(0) = b = 0$ y esto lleva consigo, según el lema de Schwarz, que f es un giro alrededor de 0. Por lo tanto, si f no es es inyectiva debe ser $|f'(0)| < 1$.

Ejercicio 9.15.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,R))$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in D(0,R)$. Si $a \in D(0,R)$ y $b = f(a)$ demuestre que para todo $z \in D(0,R)$ se verifica

$$\left|\frac{M(f(z)-b)}{M^2-\overline{b}f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z-a)}{R^2-\overline{a}z}\right|$$

En el caso $M = R = 1$ obtenga que para todo $z \in D(0,1)$ se cumple

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}$$

(véase el ejercicio 9.14).

SOLUCIÓN.

Sean $S : D(0,R) \longrightarrow D(0,1)$ y $T : D(0,M) \longrightarrow D(0,1)$ los isomorfismos conformes definidos mediante las transformaciones de Möbius

$$S(z) = \frac{R(z-a)}{R^2-\overline{a}z} \quad \text{y} \quad T(w) = \frac{M(w-b)}{M^2-\overline{b}w}$$

La transformación holomorfa $g = T \circ f \circ S^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ verifica $g(0) = 0$. Según el lema de Schwarz, $|g(w)| \le |w|$ para todo $w \in D(0,1)$ y, sustituyendo $w = S(z)$, se concluye que para todo $z \in D(0,R)$ se cumple la desigualdad del enunciado, $|T(f(z))| \le |S(z)|$.

En particular, cuando $M = R = 1$, para todo $z \in D(0,1)$ se cumple

$$\left|\frac{f(z)-b}{z-a}\right| \le \left|\frac{1-\overline{b}f(z)}{1-\overline{a}z}\right|$$

y pasando al límite, cuando $z \to a$, resulta $|f'(a)| \le (1-|f(a)|^2)/(1-|a|^2)$.

Ejercicio 9.16.

Si $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ es holomorfa y $a = f(0)$, demuestre que para $|z| < 1$ se verifica

$$\frac{|a|-|z|}{1+|az|} \le |f(z)| \le \frac{|a|+|z|}{1-|az|}$$

Indicación. Considere $g = T \circ f$, donde $T(w) = (w-a)/(1-\overline{a}w)$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 2.21 la transformación de Möbius T establece un automorfismo conforme del disco $D(0,1)$, luego $g\big(D(0,1)\big) \subset D(0,1)$. Como $g(0) = 0$ el lema de Schwarz asegura que para todo $z \in D(0,1)$ se cumple $|T(f(z))| \leq |z|$, es decir

$$|f(z) - a| \leq |z||1 - \overline{a}f(z)|.$$

Combinando esta desigualdad con la desigualdad triangular se obtiene

$$|a| - |f(z)| \leq |f(z) - a| \leq |z| + |za||f(z)|$$
$$|f(z)| - |a| \leq |f(z) - a| \leq |z| + |za||f(z)|$$

luego

$$|a| - |z| \leq |f(z)|(1 + |az|) \quad \text{y} \quad |f(z)|(1 - |az||) \leq |a| + |z|.$$

Ejercicio 9.17.

Sea $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ *con* $f(0) \neq 0$ *y* $M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| < r\}$ *con* $0 < r \leq 1$. *Justifique las siguientes afirmaciones:*

a) $|f(z) - f(0)| < |f(0)|$ *si* $|z| < \dfrac{r|f(0)|}{|f(0)| + M(r)}$

b) $f(z) \neq 0$ *si* $|z| < \dfrac{r|f(0)|}{M(r)}$

c) $M(1)|f'(0)| \leq M(1)^2 - |f(0)|^2$.

SOLUCIÓN.

La función $g(z) = f(rz)/M(r)$ cumple que $|g(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Consideremos el automorfismo del disco $D(0,1)$ definido por $T(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$, con $a = g(0) = f(0)/M(r)$. Aplicando el lema de Schwarz a $T \circ g$, se obtiene

$$|T \circ g(z)| \leq |z| \quad \text{si} \quad |z| < 1 \tag{9.1}$$

$$|T'(a)g'(0)| \leq 1 \tag{9.2}$$

a) Si $|z| < \frac{r|f(0)|}{M(r)+|f(0)|}$ la desigualdad (9.1) se cumple en z/r y resulta

$$|g(z/r) - a| \leq |z/r||1 - \overline{a}g(z/r)| \leq |z/r|(1 + |a|)$$

luego

$$|f(z) - f(0)| \leq \left|\frac{z}{r}\right| M(r)\left(1 + \frac{|f(0)|}{M(r)}\right) = |z|\frac{M(r) + |f(0)|}{r} < |f(0)|.$$

b) Si $f(z) = 0$ entonces $g(z/r) = 0$ y según *a)* se cumple

$$|z/r| \geq |T(0)| = |a| = |f(0)|/M(r)$$

es decir, $|z| \geq r|f(0)|/M(r)$.

c) Según *b)*, $|g'(0)| \leq 1/|T'(a)| = 1 - |a|^2$, que se traduce en

$$r|f'(0)| \leq M(r)(1 - |a|^2) = M(r) - \frac{|f(0)|^2}{M(r)}$$

y, pasando al límite cuando $r \to 1$, resulta $M(1)|f'(0)| \leq M(1)^2 - |f(0)|^2$.

Ejercicio 9.18.

Sean $f, g \in \mathscr{H}(D(0,1))$ *tales que* $f(0) = g(0)$. *Se supone que* g *es inyectiva y que* $f(D(0,1)) \subset g(D(0,1))$. *Demuestre que para todo* $0 < r < 1$ *se verifica*

$$f(D(0,r)) \subseteq g(D(0,r)).$$

SOLUCIÓN.

Como g no es constante, en virtud de 6.1.3, $V = g(D(0,1))$ es abierto y la inversa $g^{-1} : V \longrightarrow D(0,1)$ es holomorfa. Como $f(D(0,1)) \subset V$ podemos considerar

$$\varphi = g^{-1} \circ f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$$

que cumple $\varphi(0) = 0$. Con el lema de Schwarz se obtiene que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$, luego si $|z| < r < 1$ entonces $|g^{-1}(f(z))| = |\varphi(z)| < r$, es decir

$$g^{-1}[f(D(0,r))] \subset D(0,r).$$

Ejercicio 9.19.

Sea $\Omega \neq \mathbb{C}$ *un abierto simétrico respecto al eje real,* $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$ *y* $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ *un isomorfismo conforme que verifica* $f(a) = 0$ *y* $f'(a) > 0$. *Demuestre que para todo* $z \in \Omega$ *se verifica* $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ *y que la imagen de* $\Omega \cap \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *es un semidisco.*

SOLUCIÓN.

Como Ω es simétrico respecto al eje real se puede definir en Ω la función holomorfa $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ (véase el ejercicio 3.26).

Es fácil ver que $g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ también es un isomorfismo conforme que verifica $g(a) = f(a) = 0$ y $g'(a) = f'(a) > 0$. Estas dos condiciones implican que $f = g$ (basta aplicar el lema de Schwarz a $g \circ f^{-1}$) y así queda establecido que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$. Esto implica que $f(\Omega \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$. Efectivamente, dado $z \in \Omega$, su imagen $f(z) \in D(0,1)$ pertenece al intervalo real $(-1,1)$ si y sólo si $f(z) = \overline{f(z)}$, es decir, si y sólo si $f(z) = f(\overline{z})$. En virtud de la inyectividad de f esto equivale a la igualdad $z = \overline{z}$, lo que significa que $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$.

Para ver que la imagen de $\Omega^+ := \Omega \cap \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ es uno de los semidiscos

$$D^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\} \quad \text{o} \quad D^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z| < 1\}$$

consideramos la imagen $w_0 = f(z_0)$ de un punto $z_0 \in \Omega^+$. Si $w_0 \in D^-$ (resp. $w_0 \in D^+$) se cumplirá que $f(\Omega^+) = D^-$ (resp. $f(\Omega^+) = D^+$). Para ver esto basta demostrar que si $w_0 = f(z_0) \in D^-$ y $w = f(z) \in D^-$ entonces $z \in \Omega^+$. Efectivamente, el segmento $[w_0, w]$ está contenido en D^- y por lo tanto $\sigma(t) = f^{-1}(w_0 + t(w - w_0))$, $0 \leq t \leq 1$, es un camino continuo en Ω, con origen z_0 y extremo z, que no pasa por el eje real. En virtud del teorema de Bolzano, la función continua $\operatorname{Im} \sigma(t)$ no cambia de signo. Puesto que $\operatorname{Im}(\sigma(0)) = \operatorname{Im}(z_0) > 0$ también se tendrá $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(\sigma(1)) > 0$, es decir $z \in \Omega^+$.

Ejercicio 9.20.

Sea $f : D(0,1) \longrightarrow Q$ *un isomorfismo conforme entre el disco* $D(0,1)$ *y el cuadrado* $Q := \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$ *con* $f(0) = 0$. *Demuestre que* $f^{(n)}(0) = 0$ *si* $n - 1$ *no es múltiplo de* 4.

SOLUCIÓN.

Obsérvese que $if(z) \in Q$ para cada $z \in D(0,1)$ y por lo tanto se puede definir la función $h(z) = f^{-1}(if(z))$ con la que se obtiene un isomorfismo conforme $h : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ que verifica $h(0) = 0$ y $h'(0) = i$. Con el lema de Schwarz se obtiene que $h(z) = iz$ para todo $z \in D(0,1)$, es decir

$$f(iz) = if(z) \quad \text{para todo } z \in D(0,1).$$

Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f en $D(0,1)$ la condición anterior se traduce en

$$\sum_{n\geq 0} (a_n i^n - i a_n) z^n = 0 \quad \text{para todo } z \in D(0,1).$$

Entonces $a_n(i^{n-1} - 1) = 0$ para todo $n \geq 0$ y, por lo tanto, $a_n = 0$ cuando $n - 1$ no es múltiplo de 4.

Ejercicio 9.21. Teorema de Study.

Sea $f : D(0,1) \longrightarrow \Omega$ un isomorfismo conforme. Demuestre que si Ω es convexo o estrellado respecto a $f(0)$ también lo es cada $\Omega_r = f\big(D(0,r)\big)$, para $r \in (0,1)$.

SOLUCIÓN.

No es restrictivo suponer que $f(0) = 0$. Para cada par de puntos distintos $a, b \in \Omega_r$ debemos demostrar que el segmento $[a,b] = \{(1-t)a + tb \colon 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en Ω_r. Los puntos $\alpha = f^{-1}(a)$, $\beta = f^{-1}(b)$ cumplen $|\alpha| < r$ y $|\beta| < r$ y, si suponemos que $|\alpha| \leq |\beta|$, debe ser $\beta \neq 0$. Para todo $z \in D(0,1)$ es $|\alpha\beta^{-1}z| \leq |z| < 1$ y fijado $t \in [0,1]$ podemos definir la función

$$g(z) = (1-t)f(\alpha\beta^{-1}z) + tf(z).$$

Si Ω es convexo $g\big(D(0,1)\big)$ está contenido en Ω y podemos considerar la función $h = f^{-1} \circ g : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ que cumple $h(0) = 0$ (porque $g(0) = f(0) = 0$).

Según el lema de Schwarz, $|h(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$. En particular, $|h(\beta)| \leq |\beta|$, es decir, $|f^{-1}(g(\beta))| \leq |\beta| < r$, lo que significa que $(1-t)a + tb = g(\beta)$ pertenece a Ω_r.

Razonando igual con $b = f(0)$ se obtiene que si Ω es estrellado respecto a b, también lo es cada Ω_r.

Ejercicio 9.22.

Sea $\Omega = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ y $P = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Calcule:

a) $\sup\big\{|f'(0)| : f \in \mathscr{H}(\Omega),\ f(\Omega) \subset P,\ f(0) = 1\big\}$,

b) $\sup\big\{|f'(0)| : f \in \mathscr{H}(\Omega),\ f(\Omega) \subset \overline{D(0,1)}\big\}$.

¿Son accesibles estos supremos?.

SOLUCIÓN.

a) La transformación $T(z) = (z-1)/(z+1)$ establece un isomorfismo conforme de P sobre $D(0,1)$ con $T(1) = 0$. Sean $f, g : \Omega \longrightarrow P$ funciones holomorfas tales que $f(0) = g(0) = 1$. Cuando g es isomorfismo conforme está definida la composición

$$\varphi = T \circ f \circ g^{-1} \circ T^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$$

que cumple $\varphi(0) = 0$. Aplicando el lema de Schwarz se obtiene

$$|\varphi'(0)| = \frac{|f'(0)|}{|g'(0)|} \leq 1,$$

luego $|f'(0)| \leq |g'(0)|$. Esto prueba que el supremo es un máximo que se alcanza cuando $f = g$ es un isomorfismo conforme de Ω sobre P con $g(0) = 1$ (véase el ejercicio 9.23 para un resultado más general). Como $g(z) = e^z$ cumple estos requisitos se obtiene que el valor del máximo es $|g'(0)| = 1$.

b) Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset \overline{D(0,1)}$. Si f no es constante, en virtud del teorema de la aplicación abierta, $f(\Omega) \subset D(0,1)$. Si $a = f(0)$, considerando el automorfismo conforme de $D(0,1)$ dado por $S(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ se obtiene una función

$$F = S \circ f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$$

que cumple $F(0) = 0$ y

$$|F'(0)| = |S'(a)||f'(0)| = \frac{1}{1-|a|^2}|f'(0)| \geq |f'(0)|.$$

Esta desigualdad muestra que el supremo considerado en *b*) coincide con

$$\sup\{|F'(0)| : F \in \mathscr{H}(\Omega),\ F(\Omega) \subset D(0,1),\ F(0) = 0\}.$$

Razonando como en *a*) se concluye que este supremo es un máximo que se alcanza cuando $F = G$, donde G es un isomorfismo conforme de Ω sobre $D(0,1)$ tal que $G(0) = 0$ (véase el ejercicio 9.24 para un resultado más general). La función $G(z) = T(e^z)$ cumple estas condiciones, luego el valor máximo es

$$|G'(0)| = |T'(1)| = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 9.23.

Sea $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$. Demuestre que

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \text{máx}\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g(a) = 0\} \\ &= \text{máx}\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\} \\ &= \text{máx}\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \textit{ inyectiva}\}. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

Sea $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $g(\Omega) \subset D(0,1)$ y $g(a) = 0$. Aplicando el lema de Schwarz a la función $\psi = g \circ f^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$, que verifica $\psi(0) = 0$, se obtiene $|g'(a)/f'(a)| = |\psi'(0)| \leq 1$, es decir, $|g'(a)| \leq |f'(a)|$ y queda establecida la primera igualdad.

La segunda igualdad se deduce de la primera observando que para cada $g \in \mathscr{H}(\Omega)$, con $g(\Omega) \subset D(0,1)$, existe $h \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $h(\Omega) \subset D(0,1)$ tal que $h(a) = 0$ y $|h'(a)| \geq |g'(a)|$. Efectivamente, si $b = g(a)$ la función $h = T \circ g$, con $T(z) = (z - b)/(1 - \overline{b}z)$, cumple las condiciones requeridas pues

$$|h'(a)| = |T'(b)g'(a)| = \frac{|g'(a)|}{1 - |b|^2} \geq |g'(a)|.$$

Como f es inyectiva, la última igualdad es consecuencia inmediata de la segunda.

Ejercicio 9.24.

Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto conformemente equivalente a $D(0,1)$ y $f : \Omega \longrightarrow V$ un isomorfismo conforme. Si $a \in \Omega$ y $b = f(a)$, demuestre que

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\, g(\Omega) \subset V,\, g(a) = b\}.$$

SOLUCIÓN.

Sea $\varphi : V \longrightarrow D(0,1)$ un isomorfismo conforme. Podemos suponer que $\varphi(b) = 0$ (en el caso $\varphi(b) = c \neq 0$, podemos considerar $\psi = T \circ \varphi$, con $T(z) = (z - c)/(1 - \bar{c}z)$, que cumple $\psi(b) = 0$). De esta forma $g \to \widehat{g} = \varphi \circ g$ establece una biyección entre las familias de funciones

$$\{g \in \mathscr{H}(\Omega) \colon g(\Omega) \subset V,\, g(a) = b\} \;\text{ y }\; \{\widehat{g} \in \mathscr{H}(\Omega) \colon \widehat{g}(\Omega) \subset D(0,1),\, \widehat{g}(a) = 0\}$$

siendo $|\widehat{g}\,'(a)| = |\varphi'(b)||g'(a)|$ con $\varphi'(b) \neq 0$ (pues φ es inyectiva). Aplicando a la función $\widehat{f} = \varphi \circ f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ la primera igualdad establecida en el ejercicio 9.23 se obtiene el resultado.

Ejercicio 9.25.

Sea $\Omega = \{z : |z - 2| > 1,\, |z| < 3\}$ y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ la familia de las funciones $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ cuya parte real no toma los valores $+1, -1$ y verifican $f(0) = 0$.

a) Demuestre que existe $g \in \mathscr{F}$ tal que $|g'(0)| = \max\{|f'(0)| : f \in \mathscr{F}\}$ y calcule el valor del máximo.

b) Obtenga $f(\Omega)$ cuando $f \in \mathscr{F}$ y $|f'(0)| = 2/3$.

SOLUCIÓN.

Comenzamos observando que dada $f \in \mathscr{F}$, la imagen del abierto conexo Ω mediante la función continua $\operatorname{Re} f$ es un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que cumple $1 \notin I$, $-1 \notin I$ y $0 \in I$. Por consiguiente $I \subset (-1,1)$, luego $f(\Omega) \subset V$ donde $V := \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ y así

$$\mathscr{F} = \{f \in \mathscr{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset V,\, f(0) = 0\}.$$

a) Razonando como en el apartado *a*) del ejercicio 3.33, es fácil ver que V es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$, luego, según el ejercicio 9.24, cualquier isomorfismo conforme $g : \Omega \longrightarrow V$ con $g(0) = 0$ tiene la propiedad requerida en *a*). Entonces, para calcular el valor máximo $|g'(0)|$, basta obtener explícitamente uno de estos isomorfismos conformes. Como Ω es la región comprendida entre dos circunferencias tangentes en $z = 3$, para encontrar el isomorfismo conforme deseado se puede empezar considerando una transformación del tipo

$$T(z) = \frac{az+b}{z-3} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

que lleva Ω a la región comprendida entre dos rectas paralelas. Nótese que el eje real corta ortogonalmente a las dos circunferencias que limitan Ω. Como T deja invariante al eje real se sigue que T transforma estas circunferencias en dos rectas paralelas perpendiculares al eje real. En virtud del principio de simetría, para que T transforme la circunferencia $|z| = 3$ en la recta $\operatorname{Re} z = 1$ basta requerir que $T(\infty) = a$ y $T(0) = -b/3$ sean simétricos respecto a esta recta, lo que que equivale a $3a - b - 6 = 0$. Análogamente, para que T transforme la circunferencia $|z - 2| = 1$ en la recta $\operatorname{Re} z = -1$ basta que $T(\infty) = a$ y $T(2) = -2a - b$ sean simétricos respecto a dicha recta, lo que equivale a $a + b - 2 = 0$. Las dos ecuaciones anteriores dan como solución $a = 2$ y $b = 0$, luego $T(z) = 2z/(z - 3)$.

Como $0 \in \Omega$ y $T(0) \in V$ se concluye que T establece un isomorfismo conforme entre Ω y V. Afortunadamente $T(0) = 0$, luego $g = T$ es el isomorfismo conforme apropiado y el valor del máximo considerado en *a*) es $|g'(0)| = 2/3$ (si hubiese sido $T(0) = \alpha \neq 0$ habría que haber considerado $g := \varphi \circ T$, donde φ es un automorfismo conforme de V con $\varphi(\alpha) = 0$).

b) Si $f \in \mathscr{F}$ y $|f'(0)| = 2/3$ entonces $f(\Omega) = V$. Efectivamente, hay un isomorfismo conforme $h : V \longrightarrow D(0,1)$, con $h(0) = 0$, que permite definir

$$\varphi := h \circ f \circ g^{-1} \circ h^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$$

Como $\varphi(0) = 0$ y $|\varphi'(0)| = 1$, según el lema de Schwarz, φ es biyectiva, lo que lleva consigo que $f(\Omega) = V$.

Ejercicio 9.26.

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset D(0,1)$ y $a \in \Omega$. Se considera la condición

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\}. \tag{9.3}$$

Demuestre que si f cumple (9.3) y $f'(a) \neq 0$ entonces $f(a) = 0$.

Cuando Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$, demuestre que se verifica (9.3) si y sólo si f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $D(0,1)$ con $f(a) = 0$.

SOLUCIÓN.

Sea $T(z) = (z - b)/(1 - \overline{b}z)$, donde $b = f(a) \in D(0,1)$. Según el ejercicio 2.21, se cumple $T(D(0,1)) \subset D(0,1)$, luego $g = T \circ f$ es holomorfa en Ω y $g(\Omega) \subset D(0,1)$. Según la hipótesis,

$$|f'(a)| \geq |g'(a)| = |T'(b)f'(a)| = \frac{|f'(a)|}{1 - |b|^2}$$

Cuando $|f'(a)| > 0$ se cumplirá que $1 - |b|^2 \geq 1$, luego $f(a) = b = 0$.

Supongamos que existe un isomorfismo $F : \Omega \longrightarrow D(0,1)$, que podemos suponer elegido con la condición $F(a) = 0$. Como F es inyectiva ha de ser $F'(a) \neq 0$. Entonces, si f verifica (9.3), se cumplirá $|f'(a)| \geq |F'(a)| > 0$, luego, por lo probado antes, $f(a) = 0$. Entonces la función

$$\psi = f \circ F^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$$

cumple $\psi(0) = 0$ y se le puede aplicar el lema de Schwarz, con el que se obtiene la desigualdad $1 \geq |\psi'(0)| = |f'(a)|/|F'(a)|$, luego

$$|f'(a)| \leq |F'(a)|.$$

Por otra parte, si se cumple (9.3) se debe tener $|f'(a)| \geq |F'(a)|$, luego $|f'(a)| = |F'(a)|$, es decir, $|\psi'(0)| = 1$. Aplicando la última afirmación del lema de Schwarz se concluye que $\psi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$, luego $f(z) = \mu F(z)$ es un isomorfismo conforme de Ω sobre $D(0,1)$ con $f(a) = 0$.

Recíprocamente, si f es un isomorfismo conforme y $f(a) = 0$, según el ejercicio 9.23, cumple (9.3).

Ejercicio 9.27.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$ y $a \in D(0,1)$. Demuestre que la condición

$$|f'(a)| = \text{máx}\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(D(0,1)),\, g(D(0,1)) \subset D(0,1)\}$$

implica que f es un automorfismo conforme del disco $D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

En el ejercicio 9.26 se ha demostrado que $f(a) = 0$. Según el ejercicio 2.21 $T(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ define un automorfismo conforme del disco $D(0,1)$. Aplicando el lema de Schwarz a la función

$$\psi = f \circ T^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$$

que cumple $\psi(0) = 0$ se obtiene $1 \geq |\psi'(0)| = |f'(a)|(1-|a|^2)$, luego

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2} = |T'(a)|.$$

Por otra parte, en virtud de la hipótesis, $|f'(a)| \geq |T'(a)|$, y se obtiene la igualdad $|f'(a)| = 1/(1-|a|^2)$, es decir, $|\psi'(0)| = 1$. Aplicando la última afirmación del lema de Schwarz se concluye que $\psi(z) = \mu z$, con $|\mu| = 1$, es decir, $f(z) = \mu T(z)$ es un automorfismo de $D(0,1)$.

Ejercicio 9.28.

Sea $\mathscr{F} := \{f \in \mathscr{H}(D(0,1)) : f(0) = 1, \operatorname{Re} f(z) > 0, \forall z \in \Omega\}$. Demuestre que $|f'(0)| \leq 2$ para cada $f \in \mathscr{F}$ y que existe $g \in \mathscr{F}$ con $|g'(0)| = 2$, que necesariamente es de la forma

$$g(z) = \frac{1+az}{1-az} \quad \textit{con } |a| = 1.$$

SOLUCIÓN.

Consideramos la transformación de Möbius $T(z) = (z-1)/(z+1)$ que establece una isomorfismo conforme de $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ sobre $D(0,1)$, con $T(1) = 0$. Dada $f \in \mathscr{F}$, aplicando el lema de Schwarz a

$$\varphi = T \circ f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1),$$

que verifica $\varphi(0) = 0$, se obtiene $|\varphi'(0)| \leq 1$, es decir $|T'(1)f'(0)| \leq 1$, luego

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{|T'(1)|} = 2.$$

Las funciones de la forma $g(z) = (1+az)/(1-az)$ con $|a| = 1$ pertenecen a $\mathscr{F}$ y cumplen que $|g'(0)| = 2$. Por otra parte, si $g \in \mathscr{F}$ y $|g'(0)| = 2$, la función $\varphi = T \circ g$ cumple $|\varphi'(0)| = 1$ y, en este caso, el lema de Schwarz afirma que $\varphi(z) = az$ para algún $a \in \mathbb{C}$ con $|a| = 1$, luego

$$g(z) = T^{-1}(az) = \frac{1+az}{1-az}$$

9.3. Ejercicios propuestos

9.1 Si una sucesión (f_n) en $\mathscr{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre cada circunferencia en Ω, demuestre que converge uniformemente sobre compactos.

9.2 Sea $\alpha \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ una función sumadora, con polos simples $\mathscr{P}(\alpha) = \mathbb{Z}$, acotada sobre $\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{z \colon |z| = n+1/2\}$. Sea $\alpha_k = \operatorname{Res}(\alpha, k)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Si P y Q son polinomios con $\operatorname{grado}(Q) - \operatorname{grado}(P) \geq 3$ y $f = P/Q$ no tiene polos en $\mathbb{Z}$, demuestre que la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f(k)$ es absolutamente convergente.

Indicación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ aplique el teorema del módulo máximo a la función $\alpha(z)(z-n)(z+n)$, holomorfa en $\{z \colon n - 1/2 < |z| < n + 1/2\}$.

9.3 Sean f, g funciones holomorfas en un abierto conexo que contiene a $\overline{D(0,1)}$. Se supone que f y g no se anulan en $D(0,1)$, que $|f(z)| = |g(z)|$ cuando $|z| = 1$, y que $f(0) > 0$, $g(0) > 0$. Demuestre que $f = g$.

9.4 Si $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tal que $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$. Demuestre que f es de la forma

$$f(z) = \mu \prod_{j=1}^{m} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \overline{b}_i z}{z - b_i}$$

donde $|\mu| = 1$, $|a_j| < 1$ y $|b_i| < 1$, para $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq i \leq n$.

9.5 Si $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ y $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$, demuestre que

$$|f(z) - f(0)| \leq |z||1 - \overline{f(0)}f(z)|.$$

9.6 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conformemente equivalente a $D(0,1)$. Demuestre que todo automorfismo conforme de Ω con dos puntos fijos distintos es la identidad.

9.7 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conformemente equivalente a $D(0,1)$, $a \in \Omega$, y $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ un isomorfismo conforme tal que $f(a) = a$ y $f'(a) > 0$. Demuestre que f es la identidad.

9.8 Sea $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$. Demuestre que $|f'(0)| \le 2 \operatorname{Re} f(0)$.

9.9 Determine una función f holomorfa en el disco $D(0,1)$ que cumpla: $|f(z)| < 1$ si $|z| < 1$, $f(0) = 1/2$ y $f'(0) = 3/4$. ¿Queda determinada f de modo único mediante estas condiciones?

9.10 Si f es un automorfismo conforme del semiplano $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y a es un punto fijo de f, demuestre que $|f'(a)| = 1$.

9.11 Calcule

$$\sup\{|f'(a)| : f \in \mathscr{H}(\Omega),\ f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

donde $\Omega = \{x + iy : x > 0,\ |y| < x\}$ y $a \in \Omega$ es real positivo.

9.12 Sea $f \in \mathscr{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que $f\big(D(0,1)\big) \subset P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y $a = f(0)$. Demuestre que

$$|f(z)| \le |a| \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad \text{si } |z| < 1$$

y que si $f\big(D(0,1)\big) = P$ entonces existe $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$, tal que

$$f(z) = \frac{az - \overline{a}z}{c - z}$$

Calcule $\sup\big\{|g'(i)| : g \in \mathscr{H}(P),\ g(P) \subset D(0,1)\big\}$.

9.13 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conformemente equivalente al disco $D(0,1)$. Demuestre que para cada par de puntos $a, b \in \Omega$ existe una constante $M_\Omega(a,b)$ tal que

$$\big[f \in \mathscr{H}(\Omega),\ f(\Omega) \subset \Omega,\ f(a) = b,\ f'(a) = M_\Omega(a,b)\big] \Rightarrow f(\Omega) = \Omega.$$

Calcule $M_\Omega(a,b)$ cuando $\Omega = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Capítulo 10

Funciones armónicas

10.1. Preliminares teóricos

10.1.1. Funciones armónicas. Función armónica conjugada

Definición 10.1.1.

Una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que es armónica cuando

$$\Delta u(x, y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \Omega$, donde Δ es el operador diferencial de Laplace definido por

$$\Delta u = D_{11}u + D_{22}u.$$

En lo que sigue $A(\Omega)$ designa al espacio vectorial real de las funciones armónicas $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son armónicas en Ω. Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$, si existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u+iv$ es holomorfa en Ω se dice que v es una función *armónica conjugada* de u en Ω. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $v_1, v_2 \in A(\Omega)$ son funciones armónicas conjugadas de $u \in A(\Omega)$ entonces $v_1 - v_2$ es constante.

En lo que sigue se usa la terminología usual sobre formas diferenciales en el plano: una forma diferencial $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación que asocia a cada $(x, y) \in \Omega$ la aplicación lineal $\omega(x, y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(x, y)(h_1, h_2) = P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2.$$

La forma diferencial ω se dice que es exacta cuando existe una función diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$, es decir $\omega(x, y) = D_1f(x, y)dx + D_2f(x, y)dy$ y en este caso se dice que f es una primitiva de la forma diferencial ω. La forma diferencial ω se dice que es cerrada cuando es localmente exacta, es decir, cada $(x, y) \in \Omega$ posee un entorno abierto $U \subset \Omega$ tal que la restricción $\omega|_U$ es exacta.

En el problema de la existencia de función armónica conjugada de la función armónica $u \in A(\Omega)$ interviene la forma diferencial

$$d^*u = -u_y dx + u_x dy.$$

Proposición 10.1.2.

Si $u \in A(\Omega)$ entonces $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ es holomorfa en Ω y la forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es cerrada. Además, son equivalentes:

a) *d^*u una forma diferencial exacta en Ω;*

b) *existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω (es decir, existe una función armónica conjugada de u).*

Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva v de la forma diferencial d^*u es una función armónica conjugada de u en Ω.

Teorema 10.1.3.
Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

a) *$\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo;*

b) *cada función armónica $u \in A(\Omega)$ posee función armónica conjugada.*

En particular, toda función armónica en un disco $u \in A\big(D(z_0, r)\big)$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s, y_0)\, ds$$

con $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$.
Como consecuencia las funciones armónicas son de clase C^∞.

10.1.2. Principio del máximo

Una función continua $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que tiene la propiedad de la media cuando para todo $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ se verifica

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt$$

Proposición 10.1.4.
Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media. Si Ω es conexo y $u \in A(\Omega)$ alcanza un máximo relativo entonces u es constante.

En lo que sigue, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto $\overline{\Omega}^\infty$ y $\partial_\infty \Omega$ denotarán, respectivamente, su adherencia y su frontera en $\mathbb{C}_\infty$. Si Ω es acotado, $\overline{\Omega}^\infty = \overline{\Omega}$, $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega$, y si no es acotado se tiene $\overline{\Omega}^\infty = \overline{\Omega} \cup \{\infty\}$, $\partial_\infty \Omega = \partial \Omega \cup \{\infty\}$.

Dada una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, si $a \in \partial_\infty \Omega$ se define

$$\limsup_{z \to a} u(z) = \lim_{r \to 0} \big[\sup\{u(z) : z \in D(a, r) \cap \Omega\}\big]$$

(para $a = \infty$, $D(\infty, r) = \{z : |z| > 1/r\}$).

Proposición 10.1.5. Principio del máximo.
Sea $u \in A(\Omega)$ una función armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$. Entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$; además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

Corolario 10.1.6.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $u : \overline{\Omega}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua que es armónica en* Ω*. Si* $u(z) = 0$ *para cada* $z \in \partial_\infty \Omega$ *entonces* $u \equiv 0$

10.1.3. El problema de Dirichlet. Fórmula integral de Poisson

Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, el *problema de Dirichlet* para la región Ω, con la condición de frontera φ, consiste en encontrar, si existe, una función continua $u : \overline{\Omega}^{\infty} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_\Omega$ es armónica y $u|_{\partial_\infty \Omega} = \varphi$. El corolario 10.1.6 proporciona la unicidad de la solución del problema de Dirichlet: si u_1, u_2 son dos soluciones, basta aplicar el corolario a la diferencia $u = u_1 - u_2$ para obtener que $u_1 = u_2$.

El siguiente resultado es la clave para resolver el problema de Dirichlet en el disco $D(0,1)$. Proporciona una fórmula integral (la fórmula de Poisson) con la que se puede recuperar la función $u(z)$ a partir de sus valores $u(e^{it})$ sobre la circunferencia $|z| = 1$.

Teorema 10.1.7.

Si $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $u|_{D(0,1)}$ *es armónica, para cada* $z \in D(0,1)$ *se verifica:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z)\, dt, \tag{10.1}$$

donde

$$K(w,z) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$$

Utilizando coordenadas polares, $z = re^{i\alpha}$, se obtiene

$$K(e^{it}, re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1-r^2}{|1 - re^{i(\alpha - t)}|^2}$$

y la fórmula integral de Poisson (10.1) se escribe en la forma

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) P_r(\alpha - t)\, dt, \quad \text{con } 0 \le r < 1 \tag{10.2}$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \tag{10.3}$$

es el llamado núcleo de Poisson, que también viene dado por las fórmulas:

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) \tag{10.4}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \tag{10.5}$$

Teorema 10.1.8.

Si $\varphi : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua sobre* $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$, *existe una única función continua* $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $u|_{\mathbf{T}} = \varphi$ *y* $u|_{D(0,1)}$ *es armónica. La función* u *viene dada por la fórmula integral de Poisson:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) P_r(\alpha - t)\, dt,$$

para todo $z = re^{i\alpha} \in D(0,1)$.

Corolario 10.1.9.

Si $u : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua y* $u|_{D(0,1)}$ *es armónica entonces* $u|_{D(0,1)}$ *es la parte real de la función holomorfa*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt, \quad z \in D(0,1).$$

Corolario 10.1.10. Fórmula de Schwarz.

Para una función holomorfa $g = u + iv$ *en un abierto* $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ *se verifica:*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt + iv(0), \quad z \in D(0,1).$$

Teorema 10.1.11.

Toda función continua $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *con la propiedad de la media es armónica.*

10.2. Ejercicios resueltos

10.2.1. Propiedades de las funciones armónicas

Se incluyen en este primer apartado algunos ejercicios sobre propiedades generales de las funciones armónicas, existencia de función armónica conjugada y sus consecuencias

Ejercicio 10.1.

Dada una función u *de clase* C^2 *en un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, *definimos* $U(r,\theta) = u(re^{i\theta})$.

a) Obtenga la expresión del operador laplaciana en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

b) Determine las funciones armónicas en $D^*(0,\rho)$ *que sólo dependen de* $|z|$.

SOLUCIÓN.

a) Con la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

y resolviendo este sistema lineal, respecto a $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)U, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)U,$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) = \\ &= \alpha\cos^2\theta + \beta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Si en la expresión anterior se reemplaza θ por $\theta - \pi/2$ se obtiene la expresión análoga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha\operatorname{sen}^2\theta - \beta\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \gamma\cos^2\theta$$

y sumando resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha + \gamma = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}$$

b) Si $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ es una función armónica que sólo depende de $r = \sqrt{x^2+y^2}$, en virtud *a*), $f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = 0$ luego $\log f'(r) = -\log r + c$, es decir, $f'(r) = e^c/r$ y por lo tanto f es de la forma $f(r) = a\log r + b$.

Ejercicio 10.2.

Sea $u \in A(\Omega)$ y $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, definida en $\{(r,\theta)\colon re^{i\theta} \in \Omega\}$. Demuestre que la función

$$f(re^{i\theta}) = r\frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta) - i\frac{\partial U}{\partial\theta}(r,\theta)$$

es holomorfa en Ω.

SOLUCIÓN.

Si $z = x + iy = re^{i\theta}$ se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial\theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

Como u es armónica $\partial u = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})$ es holomorfa y por lo tanto

$$r\frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta) - i\frac{\partial U}{\partial\theta}(r,\theta) = (r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x+iy) = 2z\partial u(z)$$

también es holomorfa.

Ejercicio 10.3.

Sea $u \in A(\Omega)$ una función armónica no constante en un abierto conexo Ω y $M = \{z \in \Omega : \nabla u(z) = 0\}$. Demuestre que $M' \cap \Omega = \emptyset$.

SOLUCIÓN.

M es el conjunto de los ceros de la función holomorfa $2\partial u = u_x - iu_y$. Si fuese $M' \cap \Omega \neq \emptyset$ el principio de identidad implicaría que $M = \Omega$ y u sería constante.

Ejercicio 10.4.

Demuestre que la composición de una función holomorfa con una función armónica es armónica, es decir: si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $f \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $g \in A(\Omega_2)$ entonces $g \circ f \in A(\Omega_1)$.

SOLUCIÓN.

Usando las funciones $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, y la regla de la cadena para el cálculo de las derivadas parciales de la función compuesta $(g \circ f)(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ se obtiene:

$$D_1(g \circ f) = (D_1 g)u_x + (D_2 g)v_x.$$

Derivando nuevamente respecto a la variable x resulta:

$$D_{11}(g \circ f) = (D_{11}g)u_x^2 + 2(D_{12}g)u_x v_x + (D_{22}g)v_x^2 + (D_1 g)u_{xx} + (D_2 g)v_{xx}.$$

Escribiendo la expresión análoga para $D_{22}(g \circ f)$ y sumando miembro a miembro se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta(g \circ f) = D_{11}(g \circ f) + D_{22}(g \circ f) = \\ &= (D_{11}g)(u_x^2 + u_y^2) + 2(D_{12}g)(u_x v_x + u_y v_y) + (D_{22}g)(v_x^2 + v_y^2) + \\ &\quad + (D_1 g)(u_{xx} + u_{yy}) + (D_2 g)(v_{xx} + v_{yy})\end{aligned}$$

En virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann para la función f

$$\begin{gathered} u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2, \\ u_x v_x + u_y v_y = u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0, \end{gathered}$$

luego

$$\Delta(g \circ f) = (\Delta g)(u_x^2 + u_y^2) = (\Delta g)|f'|^2.$$

Con esta igualdad se obtiene que si $\Delta g = 0$entonces $\Delta(g \circ f) = 0$.

La segunda solución que proponemos está basada en la existencia, sobre un disco, de función armónica conjugada (véase el teorema 10.1.3).

Basta demostrar que cada $a \in \Omega_1$ posee un entorno $D(a, \delta) \subset \Omega_1$ tal que $g \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$. Sea $b = f(a)$ y $r > 0$ tal que $D(b, r) \subset \Omega_2$. Según lo que se ha indicado antes, existe $G \in \mathscr{H}(D(b, r))$ tal que $\operatorname{Re} G(z) = g(z)$ para todo $z \in D(b, r)$. Por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega_1$ y $f(D(a, \delta)) \subset D(b, r)$. De esta forma en el disco $D(a, \delta)$ está definida y es holomorfa la función compuesta $G \circ (f|_{D(a,r)})$, cuya parte real es $(g \circ f)|_{D(a,r)}$. Se sigue de esto que $g \circ f$ es armónica en $D(a, r)$.

Ejercicio 10.5.

Demuestre que la función $\log|z|$ es armónica en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no posee función armónica conjugada en este abierto.

SOLUCIÓN.

Es inmediato que la función $u(x,y) = \log|x+iy| = \log\sqrt{x^2+y^2}$ está definida y satisface la ecuación de Laplace en Ω:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Si existiese $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω, al ser v y Arg funciones armónicas conjugadas de u en el abierto conexo $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, la diferencia $v(z) - \operatorname{Arg}(z)$ sería constante en Ω_1. Pero esto es imposible porque v es continua en cada $x < 0$, mientras que $\operatorname{Arg}(z)$ no tiene límite cuando $z \to x$.

Ejercicio 10.6.

Compruebe que $u(z) = \log|(z-a)/(z-b)|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$ y obtenga una caracterización de los abiertos conexos $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde u posee función armónica conjugada.

SOLUCIÓN.

Como $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $f(z) = (z-a)/(z-b)$ no se anula en $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$, en virtud del ejercicio 10.4, la función $u(z) = \log|f(z)|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{a,b\}$.

Si u posee una función armónica conjugada v en Ω entonces $g = u + iv$ es holomorfa y $|e^{g(z)}/f(z)| = 1$ para todo $z \in \Omega$. En virtud del ejercicio 3.25 la función e^g/f es constante y si $e^{i\alpha}$ es su valor constante se sigue que $h = g - i\alpha$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω.

Recíprocamente, si existe $h \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $e^h = f$ entonces u posee función armónica conjugada en Ω ya que $u(z) = \log|f(z)| = \operatorname{Re} h(z)$.

En definitiva, los abiertos conexos Ω donde u posee función armónica conjugada son precisamente aquellos en los que f posee un logaritmo holomorfo. Esto ocurre si y sólo si los dos puntos a, b están en la misma componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ (véase el ejercicio 7.15).

Ejercicio 10.7.

Sean u, v funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_A = v|_A$ para algún abierto no vacío $A \subset \Omega$ demuestre que $u = v$.

Muestre que el resultado es falso si sólo se supone que $u|_M = v|_M$ donde $M \subset \Omega$ verifica $M' \cap \Omega \neq \emptyset$.

SOLUCIÓN.

Basta considerar el caso $v = 0$. Para probar que u es idénticamente nula se considera el conjunto $G \subset \Omega$ formado por los puntos $a \in \Omega$ para los que existe $r > 0$ verificando $u|_{D(a,r)} = 0$ y se demuestra que $G = \Omega$. Por hipótesis G es no vacío y como Ω es conexo basta demostrar que G es abierto y cerrado respecto a Ω con su topología relativa.

Es inmediato que G es abierto en Ω. Seguidamente se prueba que es cerrado en la topología relativa de Ω, es decir $\overline{G} \cap \Omega \subset G$.

Dado $a \in \overline{G} \cap \Omega$ existe una sucesión $a_n \in G$ tal que $\lim_n a_n = a$. Fijado un disco $D(a,r) \subset \Omega$ existe $f \in \mathscr{H}(D(a,r))$ tal que $\operatorname{Re} f = u|_{D(a,r)}$. Como la sucesión a_n penetra en $D(a,r)$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que $D(a_n,\delta) \subset D(a,r)$ y $u|_{D(a_n,\delta)}$ es idénticamente nula. Se sigue que $f(D(a_n,r))$ no es abierto y usando el teorema de la aplicación abierta se deduce que f es constante. Lo mismo le ocurre a su parte real $u|_{D(a,r)}$, que debe ser idénticamente nula debido a que $u(a_n) = 0$. Queda probado que $a \in G$.

Un ejemplo de función armónica que no es idénticamente nula en un abierto conexo Ω, aunque se anula sobre un subconjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$, es el siguiente: $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $M = \{z : |z| = 1\}$, $u(z) = \log |z|$.

Ejercicio 10.8.

Demuestre que toda función armónica no constante definida en un abierto conexo es abierta.

SOLUCIÓN.

Sea u una función armónica no constante definida en un abierto conexo Ω. Basta probar que $u(D(a,r))$ es abierto para cada $D(a,r) \subset \Omega$. En virtud del ejercicio 10.7 u no es constante sobre $D(a,r)$. Existe $f \in \mathscr{H}(D(a,r))$ tal que $\operatorname{Re} f = u|_{D(a,r)}$. Como f no es constante (porque su parte real no lo es) el teorema de la aplicación abierta asegura que $f(D(a,r))$ es abierto en $\mathbb{C}$ y por lo tanto la proyección sobre el eje real, $u(D(a,r))$, es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10.9.

Sea $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *armónica no constante. Demuestre que* $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ *y que la función* $A(r) = \sup\{u(z) : |z| = r\}$, $r > 0$, *es continua, estrictamente creciente y* $\lim_{r \to +\infty} A(r) = +\infty$.

SOLUCIÓN.

$u(\mathbb{C})$ es un intervalo (porque u es continua y $\mathbb{C}$ es conexo) y para demostrar que $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ basta ver que u no está acotada superiormente ni inferiormente.

Se puede suponer que $u = \operatorname{Re} f$ donde $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si u estuviese acotada superiormente (o inferiormente) $f(\mathbb{C})$ estaría contenido en un semiplano y considerando una transformación de Möbius T que transforme el semiplano en un disco se obtendría que $T \circ f$ es una función entera acotada no constante, lo cual es imposible por el teorema de Liouville.

Si $g(z) = e^{f(z)}$ y $M(r) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$ se tiene $|g(z)| = e^{u(z)}$ luego $A(r) = \log M(r)$. Las propiedades de $A(r)$ consideradas en el enunciado son consecuencia de las correspondientes propiedades de $M(r)$ establecidas en el ejercicio 9.8. También se pueden probar directamente usando el principio del máximo de las funciones armónicas y adaptando los razonamientos efectuados en la solución del ejercicio 9.8.

10.2.2. Sobre las funciones armónicas en una corona

Ejercicio 10.10.

Si u *es armónica en* $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$ *demuestre que existen* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *tales que* $u(z) = \alpha \log |z| + \operatorname{Re} f(z)$.

SOLUCIÓN.

Considerando el desarrollo de Laurent de la función holomorfa $\partial u = (u_x - i u_y)/2$,

$$\partial u(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad r < |z| < R$$

se obtiene $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $g'(z) = \partial u(z) - a_{-1}/z$ para todo $z \in \Omega$.

Si $v(z) = \log |z|$, es fácil ver que $2\partial v(z) = 1/z$ y teniendo en cuenta que

$$\partial(u-g)(z) = \partial u(z) - g'(z) = a_{-1}/z$$

se concluye que la función $h(z) = u(z) - g(z) - 2a_{-1}v(z)$ cumple la condición $\partial h(z) = 0$. Esto significa que $\bar{h}$ es holomorfa. Como $u(z) = 2a_{-1} \log |z| + g(z) + h(z)$ es real, resulta

$$u(z) = \alpha \log |z| + \operatorname{Re} f(z)$$

donde $\alpha = 2 \operatorname{Re} a_{-1}$ y $f = g + \bar{h}$ es holomorfa en Ω.

Ejercicio 10.11.

Si u es armónica en la corona $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$ demuestre que la función

$$m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad r < \rho < R,$$

es de la forma $m(\rho) = \alpha \log \rho + \beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 10.10 hay una función f holomorfa en Ω y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que $u(z) = \alpha \log |z| + \operatorname{Re} f(z)$, luego $m(\rho) = \alpha \log \rho + h(\rho)$ donde

$$h(\rho) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Basta ver que $h(\rho)$ no depende de $\rho \in (r, R)$. Como $f(z)/z$ es holomorfa en Ω, su integral a lo largo de $C_\rho(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, no depende de ρ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Lo mismo le ocurre a su parte parte real y por lo tanto h es constante.

También se puede resolver este problema utilizando el ejercicio 10.1. Como u es armónica se cumple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Derivando respecto a ρ la integral que define $m(\rho)$ y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta}(2\pi) - \frac{\partial u}{\partial \theta}(0) = 0$$

se obtiene que $m(\rho)$ satisface la ecuación diferencial $m''(\rho) + m'(\rho)/\rho = 0$ cuya solución general es $m(\rho) = \alpha \log \rho + \beta$. (La derivación bajo la integral se justifica usando el teorema usual sobre derivación de integrales dependientes de un parámetro).

Ejercicio 10.12.

Si u es armónica en $D^*(0, r)$ demuestre que se cumple una, y sólo una, de las condiciones siguientes:

a) $\lim_{z\to 0} u(z) = +\infty$, *(* $-\infty$*);*

b) $u(D^*(0,\varepsilon)) = \mathbb{R}$, *para cada* $\varepsilon \in (0,r)$*;*

c) existe $\lim_{z\to 0} u(z) = a \in \mathbb{R}$.

Si se cumple c) y se define $u(0) = a$ *se obtiene una función armónica en el disco* $D(0,r)$*. En este caso se dice que* $z = 0$ *es una singularidad evitable de* u*.*

SOLUCIÓN.

Las tres condiciones del enunciado son mutuamente excluyentes. Según el ejercicio 10.10 existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{H}(D^*(0,r))$ tales que $u(z) = \alpha \log|z| + \operatorname{Re} f(z)$.

Si f tiene en $z = 0$ una singularidad evitable y $\alpha = 0$, se cumple *c)* y, en este caso, definiendo $u(0) = a$ se obtiene una función armónica en $D(0,r)$.

Si f tiene en $z = 0$ una singularidad evitable y $\alpha \neq 0$ se cumple *a)*, con signo $+$ si $\alpha < 0$ y signo $-$ si $\alpha > 0$.

A continuación se demuestra que se cumple *b)* cuando f presenta en $z = 0$ una singularidad esencial o un polo.

Como $u(D^*(0,\varepsilon))$ es un intervalo (debido a la continuidad de u) bastará ver que este intervalo no está acotado superiormente ni inferiormente. Podemos suponer que $\varepsilon < 1$ y que $\alpha \geq 0$ (si $\alpha < 0$ se razona con $-u$). En estas condiciones para todo $z \in D^*(0,\varepsilon)$ se cumple

$$e^{u(z)} = |z|^\alpha |e^{f(z)}| \leq |e^{f(z)}|.$$

La función $e^{f(z)}$ presenta en $z = 0$ una singularidad esencial (véase el ejercicio 6.10) y con el teorema de Casorati-Weierstrass se obtiene que $|e^{f(z)}|$ toma en $D^*(0,\varepsilon)$ valores tan próximos a 0 como se quiera. En virtud de la desigualdad anterior lo mismo le ocurre a $e^{u(z)}$ y por lo tanto u no está acotada inferiormente en $D^*(0,\varepsilon)$. Por otra parte, si $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq \alpha$ la función $z^m e^{f(z)}$ también tiene en $z = 0$ una singularidad esencial por lo que $|z^m e^{f(z)}|$ toma en $D^*(0,\varepsilon)$ valores tan grandes como se quiera. Lo mismo le ocurre a $e^{u(z)} = |z|^\alpha |e^{f(z)}| \geq |z^m e^{f(z)}|$ lo que lleva consigo que u no está acotada superiormente en $D^*(0,\varepsilon)$.

Ejercicio 10.13.

Según el ejercicio 10.10 toda función armónica en $D^*(0,\rho)$ *es de la forma*

$$u(z) = \alpha \log|z| + \operatorname{Re} f(z)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathscr{H}(D^*(0,\rho))$*. Demuestre que si se cumple una de las condiciones*

a) $\lim_{z\to 0} z u(z) = 0$,

b) existen $A > 0$ *y* $0 < \varepsilon < \rho$ *tales que* $u(z) > A \log|z|$ *cuando* $0 < |z| < \varepsilon$,

entonces se puede suponer que f *es holomorfa en* $D(0,\rho)$*.*

SOLUCIÓN.

Basta demostrar, en cada caso, que f presenta una singularidad evitable en $z = 0$.

Si se cumple *a)*, como $\lim_{z\to 0} |z| \log|z| = 0$, se obtiene que $\lim_{z\to 0} z \operatorname{Re} f(z) = 0$ luego, en virtud del ejercicio 6.7, ∞ es singularidad evitable de $f(1/z)$, lo que significa que 0 es singularidad evitable de f.

Si se cumple b) y se elige $\varepsilon < 1$ entonces para todo $z \in D^*(0, \varepsilon)$ es $\log|z| < 0$. Entonces $\operatorname{Re} f(z) > (A - \alpha)\log|z| > n \log|z|$, donde $A - \alpha < n \in \mathbb{N}$, luego $|e^{f(z)}| > |z|^n$. Según el teorema de Casorati-Weierstrass la última desigualdad implica que 0 no es singularidad esencial de $e^{f(z)}/z^n$. Se sigue que 0 tampoco es singularidad esencial de $e^{f(z)}$ y por lo tanto f presenta en $z = 0$ una singularidad evitable (véase el ejercicio 6.10).

10.2.3. Sobre el principio del máximo y el problema de Dirichlet

Ejercicio 10.14.

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0, R))$ inyectiva tal que $f(0) = 0$. Se supone que existe $0 < r < R$ tal que la curva $\gamma_r(t) = f(re^{it})$ posee un argumento continuo creciente. Demuestre que la misma propiedad la tienen todas las curvas $\gamma_\rho(t) = f(\rho e^{it})$ para $0 < \rho < r$.

SOLUCIÓN.

Como f es inyectiva y $f(0) = 0$ se cumple que $f(z) \neq 0$ si $0 < |z| < R$. Por lo tanto, para cada $0 < \rho < R$, existe un logaritmo continuo de $\gamma_\rho(t) = f(\rho e^{it})$,

$$L_\rho(t) = \log|f(\rho e^{it})| + iA_\rho(t)$$

donde $A_\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ es un argumento continuo de γ_ρ.

Este logaritmo es derivable, porque se puede expresar localmente como la composición de $t \to f(\rho e^{it})$ con un logaritmo holomorfo de la identidad (véase el ejercicio 3.5), con derivada

$$L'_\rho(t) = i\rho e^{it} \frac{f'(\rho e^{it})}{f(\rho e^{it})}$$

Se sigue que A_ρ también es derivable y

$$A'_\rho(t) = \operatorname{Im}\left[i\rho e^{it} \frac{f'(\rho e^{it})}{f(\rho e^{it})}\right] = \operatorname{Re} F(\rho e^{it})$$

donde $F(z) := zf'(z)/f(z)$ es holomorfa en $D(0, R)$ (obsérvese que $z = 0$ es singularidad evitable de F debido a que f'/f tiene un polo simple en $z = 0$).

Como A_r es creciente, para todo $t \in [0, 2\pi]$ es $\operatorname{Re} F(re^{it}) = A'_r(t) \geq 0$, luego la función armónica $u := -\operatorname{Re} F$ verifica que $u(z) \leq 0$ cuando $|z| = r$.

Con el principio del máximo se obtiene que $u(z) \leq 0$ si $|z| = \rho < r$, es decir, $\operatorname{Re} F(\rho e^{it}) = A'_\rho(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Así queda demostrado que A_ρ es creciente cuando $0 < \rho \leq r$.

Ejercicio 10.15.

Si u es armónica en $\Omega = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ demuestre que

$$A(r) = \text{máx}\{u(re^{it}) : t \in [0, 2\pi]\}$$

definida para $r_1 < r < r_2$, es una función convexa de $\log r$, es decir: si $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ y $\log\rho = \alpha\log\rho_1 + \beta\log\rho_2$, donde $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha, \beta \geq 0$, entonces

$$A(\rho) \leq \alpha A(\rho_1) + \beta A(\rho_2).$$

Obtenga como consecuencia el teorema de los tres círculos de Hadamard: si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ *no se anula en* Ω *y* $M(\rho) = \max\{|f(\rho e^{it})| : t \in [0, 2\pi]\}$ *se verifica*

$$M(\rho) \leq M(\rho_1)^\alpha M(\rho_2)^\beta$$

donde $r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2$

$$\alpha = \frac{\log \rho_2 - \log \rho}{\log \rho_2 - \log \rho_1} \quad y \quad \beta = \frac{\log \rho - \log \rho_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1}$$

SOLUCIÓN.

$$v(z) := A(\rho_1)\frac{\log \rho_2 - \log |z|}{\log \rho_2 - \log \rho_1} + A(\rho_2)\frac{\log |z| - \log \rho_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1} - u(z)$$

es armónica en Ω y $v(z) \geq 0$ sobre la frontera de $\{z : \rho_1 < |z| < \rho_2\}$ luego, en virtud del principio del máximo, también es $v(z) \geq 0$ cuando $\rho_1 < |z| = \rho < \rho_2$.

Si α y β son los valores indicados en la última línea del enunciado, la desigualdad $v(z) \geq 0$ se traduce en $u(z) \leq \alpha A(\rho_1) + \beta A(\rho_2)$ y, tomando supremos sobre la circunferencia $|z| = \rho$, resulta

$$A(\rho) \leq \alpha A(\rho_1) + \beta A(\rho_2).$$

Aplicando esta desigualdad con $u(z) = \log |f(z)|$ se obtiene el teorema de los tres círculos de Hadamard.

Ejercicio 10.16.

El objetivo de este ejercicio es obtener una condición necesaria y suficiente para que dos coronas circulares sean conformemente equivalentes.

a) *Sea* f *una función holomorfa en la corona* $A(1, r) = \{z : 1 < |z| < r\}$ *que verifica* $|f(z)| = |z|^\alpha$ *para todo* $z \in A(1, r)$*, donde* $\alpha > 0$*. Demuestre que* $zf'(z) = \alpha f(z)$ *y deduzca de ello que* α *es un número entero y que* $f(z) = cz^\alpha$ *para algún* $c \in \mathbb{C}$ *con* $|c| = 1$.

b) *Sea* $f : A(1, r) \longrightarrow A(1, R)$ *n isomorfismo conforme que cumple*

$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1, \qquad \lim_{|z|\to r} |f(z)| = R.$$

Aplicando el principio del máximo a la función armónica

$$u(z) = \log |f(z)| - \alpha \log |z|, \ \text{con } \alpha = \log R / \log r$$

demuestre que $r = R$.

c) *Deduzca de lo anterior que una condición necesaria y suficiente para que las coronas* $\{z : r_1 < |z - a| < R_1\}$ *y* $\{z : r_2 < |z - b| < R_2\}$ *sean conformemente equivalentes es que se cumpla* $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

SOLUCIÓN.

a) Fijado $D(a,\varepsilon) \subset A(1,r)$, como las funciones z y $f(z)$ no se anulan en este disco, existen $g, L \in \mathscr{H}(D(a,\varepsilon))$ tales que $e^{L(z)} = z$ y $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in D(a,\varepsilon)$. Según la hipótesis, para cada $z \in D(a,\varepsilon)$ se cumple

$$e^{\operatorname{Re} g(z)} = |f(z)| = |z|^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Re} L(z)}$$

luego $\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re}(\alpha L(z))$ para todo $z \in D(a,\varepsilon)$ y, en virtud del teorema de la aplicación abierta, $g - \alpha L$ es constante en $D(a,\varepsilon)$. Derivando se obtiene que para todo $z \in D(a,\varepsilon)$ se cumple la igualdad

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z}$$

que, por el principio de identidad, persiste para todo $z \in A(1,r)$. Esta igualdad implica que α es un entero; en efecto, si $1 < \rho < r$, considerando la circunferencia $C_\rho(t) = \rho e^{it}$ y su imagen $\gamma(t) = f(C_\rho(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, se obtiene

$$\alpha = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}\,dz = \operatorname{Ind}(\gamma, 0).$$

Finalmente, si $\alpha = m \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\left(\frac{f(z)}{z^m}\right)' = \frac{zf'(z) - mf(z)}{z^{m+1}} = 0,$$

luego $f(z)/z^m = c$ es constante y la hipótesis $|f(z)| = |z|^m$ implica que $|c| = 1$.

b) Sea $f : A(1,r) \longrightarrow A(1,R)$ con la propiedad del enunciado y $\alpha = \log R/\log r$. La función armónica $u(z) = \log|f(z)| - \alpha\log|z|$ verifica

$$\lim_{|z|\to 1} u(z) = \lim_{|z|\to r} u(z) = 0$$

y aplicando el principio del máximo se concluye que $u \le 0$. Análogamente $-u \le 0$, luego u es idénticamente nula en $A(1,r)$. Esto significa que f cumple la condición considerada en *a*). Por lo tanto $\alpha = m \in \mathbb{Z}$ y $f(z) = cz^m$ con $|c| = 1$. Como f es biyectiva debe ser $m \in \{-1, 1\}$ y teniendo en cuenta que $\lim_{|z|\to r}|f(z)| = R$, con $1 < r < R$, se concluye que $m = 1$ y con ello que $R = r$.

c) Para $i = 1, 2$ la corona $\{z : r_i < |z| < R_i\}$ es conformemente equivalente a la corona $\{z : 1 < |z| < R_i/r_i\}$, luego la condición $R_1/r_1 = R_2/r_2$ implica que las coronas del enunciado son conformemente equivalentes. También se sigue de esta observación que, para el recíproco, basta demostrar que si $f : A(1,r) \longrightarrow A(1,R)$ es un isomorfismo conforme entonces $r = R$. Con este fin consideramos la circunferencia $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, de radio $0 < \rho < R$. El compacto $K = f^{-1}(C_\rho)$ está contenido en $A(1,r)$, luego $A(1, 1+\varepsilon) \cap K = \emptyset$ para algún $\varepsilon > 0$.

Ahora bien, $V = f(A(1, 1+\varepsilon))$ es un subconjunto conexo de $A(1,R)$ disjunto de C_ρ, luego o bien $V \subset A(1,\rho)$, o bien $V \subset A(\rho, R)$. Se puede suponer $V \subset A(1,\rho)$ (en otro caso se razona con R/f). Dada una sucesión z_n tal que $1 < |z_n| < 1+\varepsilon$ y $|z_n| \to 1$, la imagen $f(z_n)$ es una sucesión en V que no tiene puntos de acumulación en $A(1,R)$ (debido a la continuidad de f^{-1}) luego $\lim_n |f(z_n)| = 1$. Queda demostrado que $\lim_{|z|\to 1}|f(z)| = 1$. Análogamente se obtiene que $\lim_{|z|\to r}|f(z)| = R$ y aplicando *b*) se concluye que $R = r$.

Ejercicio 10.17.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, demuestre que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica si y sólo si es continua y satisface la propiedad de la media espacial:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} u(x, y)\, dx\, dy \quad \textit{para todo } \overline{D(z,r)} \subset \Omega.$$

SOLUCIÓN.

Si u es armónica, dado $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$, con un cambio de variable a coordenadas polares en la integral y usando la propiedad de la media en el sentido usual resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} u(x, y)\, dx\, dy &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho u(z + \rho e^{i\theta})\, d\theta\, d\rho = \\ &= \frac{2\pi u(z)}{\pi r^2} \int_0^r \rho\, d\rho = u(z).\end{aligned}$$

Recíprocamente, si u es continua y cumple la propiedad de la media espacial, para cada $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$ se cumple

$$u(z)\pi r^2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho u(z + \rho e^{i\theta})\, d\theta\, d\rho.$$

Derivando respecto a r, con el teorema fundamental del cálculo, se deduce que

$$2\pi r u(z) = \int_0^{2\pi} r u(z + r e^{i\theta})\, d\theta$$

es decir, u cumple la propiedad de la media en sentido usual y por consiguiente, en virtud de 10.1.11, es armónica.

Ejercicio 10.18.

Sea u una función real continua en el semidisco $A = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \leq 1\}$ y armónica en su interior, que verifica $u(x) = 0$ cuando $-1 \leq x \leq 1$.

Demuestre que existe una única función continua $P : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, armónica en $D = D(0,1)$, que verifica

a) $P(e^{it}) = u(e^{it})$ *si* $t \in [0, \pi]$, $P(e^{it}) = -u(e^{-it})$ *si* $t \in [\pi, 2\pi]$;

b) $P|_A = u$.

SOLUCIÓN.

La función $\varphi : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(z) = u(z) \text{ si } \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \varphi(z) = -u(1/z) \text{ si } \operatorname{Im} z \leq 0$$

es continua (la continuidad en los puntos $z = 1$ y $z = -1$ es consecuencia de la condición $u(1) = u(-1) = 0$).

Si $P : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en D que coincide con φ sobre ∂D (solución del problema de Dirichlet) es evidente que se cumple *a*).

Para ver que también se cumple b) basta demostrar que $P(x) = 0$ para cada $x \in (-1, 1)$, pues entonces P y u coinciden sobre ∂A y, aplicando el principio del máximo, se concluye que $P|_A = u$. Si $x \in (-1, 1)$, en virtud de la fórmula de Schwarz

$$P(x) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\,dt\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\,dt\right)$$

y si en la segunda integral se efectúa el cambio de variable $s = 2\pi - t$, se obtiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(e^{-is})\frac{e^{-is}+x}{e^{-is}-x}\,ds =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(e^{is})\frac{e^{-is}+x}{e^{-is}-x}\,ds.$$

Como $(e^{-is}+x)/(e^{-is}-x)$ y $(e^{is}+x)/(e^{is}-x)$ son complejos conjugados, tienen la misma parte real y, por ello,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\,dt\right) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(e^{is})\frac{e^{is}+x}{e^{is}-x}\,dt\right)$$

luego $P(x) = 0$. Así queda probada la existencia de una función P con los requisitos del enunciado. Para obtener su unicidad basta aplicar 10.7.

Ejercicio 10.19.

Demuestre que $\Omega = \{z : 0 < |z| < 1\}$ no es un dominio de Dirichlet (es decir, el problema de Dirichlet no tiene siempre solución).

SOLUCIÓN.

Dada una función continua $\varphi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$, la extendemos a una función $\widehat{\varphi}$ definida sobre $\partial\Omega = \mathbb{T} \cup \{0\}$ con un valor en 0, $\widehat{\varphi}(0) \neq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\,dt$. Entonces $\widehat{\varphi}$ es una función continua sobre $\partial\Omega$ para la que el problema de Dirichlet en Ω no tiene solución.

Efectivamente, supongamos que existe una función continua u sobre $\overline{\Omega} = \overline{D(0,1)}$, que es armónica en Ω y coincide con $\widehat{\varphi}$ sobre $\partial\Omega = \mathbb{T} \cup \{0\}$. Como u no cumple las dos primeras alternativas del ejercicio 10.12, debe cumplir la tercera. Por lo tanto es armónica en el disco $D(0, 1)$, donde es la solución del problema de Dirichlet para la condición de frontera φ. Según el teorema 10.1.8 se debe cumplir que $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\,dt$ y se llega así a una contradicción, ya que $u(0) = \widehat{\varphi}(0)$ y $u(e^{it}) = \varphi(e^{it})$.

10.3. Ejercicios propuestos

10.1 Demuestre que las funciones armónicas en $\mathbb{C}$ que se pueden expresar en la forma $u(re^{i\theta}) = \alpha(r)\beta(\theta)$, o bien son de la forma $A\log r + B$, o bien son de la forma $(A\cos n\theta + B\operatorname{sen} n\theta)r^n$, con $A, B \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

10.2 Demuestre que el ángulo visual $\alpha(z)$ con el que se ve un segmento $[a, b]$ del eje real desde el punto z es una función armónica en el semiplano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Calcule $\lim_{z\to x} \alpha(z)$ cuando $x \in \mathbb{R}$.

10.3 Si u y u^2 son armónicas en un abierto conexo, demuestre que u es constante.

10.4 Si u es armónica en un abierto simplemente conexo Ω, demuestre que existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, sin ceros en Ω, tal que $u = \log|f|$.

10.5 Si u es armónica en la corona $\Omega = \{z : r < |z| < R\}$ y para cada $z \in \Omega$ se define

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ze^{it})\,dt$$

demuestre que v es de la forma $v(z) = \alpha\log|z| + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\Omega = \{z : 0 < |z| < R\}$ y u es acotada, demuestre que u se puede extender a una función armónica en $D(0, R)$ y que v es constante.

10.6 A partir de la fórmula integral de Poisson para el disco unidad obtenga la fórmula de Poisson para cualquier disco: si $u : \overline{D(a, R)} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y armónica en $D(a, R)$ se verifica

$$u(a + re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - t) + r^2}\,dt$$

con $0 \le r < R$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.7 Sea u una función real continua en $\{\infty\} \cup \{z : \operatorname{Re} z \ge 0\}$ y armónica en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, tal que $\lim_{z\to\infty} u(z) = 0$. Demuestre que para cada $x + iy$ con $x > 0$ vale la fórmula de Poisson:

$$u(x + iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xu(it)}{x^2 + (y - t)^2}\,dt.$$

10.8 Sea $\Omega = \{z : |z| > 1\}$ y $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que existe una única función continua $v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $v|_{\Omega}$ es armónica, $v|_{\partial\Omega} = \varphi$ y $\lim_{z\to\infty} v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\,dt$, que viene dada por

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{|z|^2 - 1}{|z - e^{it}|^2}\,dt, \quad \text{si } |z| > 1.$$

¿Se puede asegurar que v es única cuando se prescinde de la última condición sobre el límite $\lim_{z\to\infty} v(z)$?

Indicación. Si u es armónica en $D(0, 1)$ entonces $v(z) = u(1/\overline{z})$ es armónica en Ω.

Capítulo 11

Representación de funciones

11.1. Preliminares teóricos

11.1.1. Productos infinitos

Definición 11.1.1.
Dada una sucesión $z_n \in \mathbb{C}$, si la sucesión de productos parciales

$$p_n = z_1 z_2 \cdots z_n$$

converge, con límite $\lim_n p_n = p \neq 0$*, se dice que el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *es estrictamente convergente hacia* p*.*

Si el producto $\prod_{n=m+1}^{\infty} z_n$ *es estrictamente convergente para algún* $m \in \mathbb{N}$ *se dice que el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente hacia*

$$p = z_1 z_2 \cdots z_m \prod_{n=m+1}^{\infty} z_n.$$

En este caso el símbolo $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *designa también el valor* p*.*

Según esta definición, un producto infinito convergente se puede anular pero, en ese caso, algún factor debe ser nulo y sólo puede haber una cantidad finita de factores nulos. Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente hacia p, entonces, para cada $n \geq 1$, el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k$ converge y su valor R_n cumple $z_1 z_2 \cdots z_n R_n = p$. Además $\lim_n R_n = 1$ y $\lim_n z_n = 1$.

En el ejercicio 11.1 se puede ver que una condición necesaria y suficiente para que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ sea estrictamente convergente es que $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ sea convergente.

Proposición 11.1.2.
Dado un producto infinito de números complejos $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$*, se verifica* $a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c)$*, siendo:*

a) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$*;*

b) el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ *converge;*

c) el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge.*

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ se dice que es absolutamente convergente cuando se cumple una de las condiciones equivalentes $a) \Leftrightarrow b)$ que intervienen en la proposición 11.1.2. Según esta proposición, todo producto infinito absolutamente convergente es convergente.

Definición 11.1.3.

Dada una sucesión de funciones $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge para cada $z \in \Omega$, se dice que converge puntualmente en Ω. Si además la sucesión $R_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ converge hacia 1 uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$ se dice que el producto converge uniformemente sobre compactos.

Proposición 11.1.4.

Dada una sucesión de funciones $a_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y un compacto $K \subset \Omega$ se verifica $a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c)$, siendo:

a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente sobre K;

b) el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n(z)|)$ converge uniformemente sobre K;

c) el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n(z))$ converge uniformemente sobre K.

Aplicando la proposición anterior en cada compacto $K \subset \Omega$ se obtiene que la convergencia uniforme sobre compactos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ es condición suficiente para la convergencia uniforme sobre compactos del producto $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Proposición 11.1.5.

Sea $f_n \in C(\Omega)$ una sucesión de funciones continuas tal que el producto infinito $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos. Entonces la sucesión de los productos parciales $\pi_n(z) = f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos hacia f y, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el producto $R_m(z) = \prod_{k=m+1}^{\infty} f_k(z)$ no se anula en K.

Teorema 11.1.6.

Sea $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones holomorfas tal que el producto infinito $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos. Entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y $\mathscr{Z}(f) = \bigcup_n \mathscr{Z}(f_n)$. Si los ceros de cada f_n son aislados, los ceros de f también lo son.

Además, para cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f_n(a) = 0\}$ es finito y $\nu(f,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(f_n, a)$ (hay un número finito de sumandos no nulos).

Se llaman factores de Weierstrass a las funciones

$$E_0(z) = 1 - z;$$
$$E_n(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right), \quad \text{si } n \geq 1.$$

Lema 11.1.7.

Para $|z| \leq 1$ los factores de Weierstrass verifican la desigualdad

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1}$$

Teorema 11.1.8.
Sea $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *una sucesión con* $\lim_k |a_k| = +\infty$ *y* $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *una sucesión tal que para todo* $R > 0$ *es* $\sum_{k=1}^{\infty} (R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ *(por ejemplo,* $n_k = k - 1$*). Entonces el producto*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función entera $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *tal que* $\mathscr{Z}(f) = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$*. Para cada* $a \in \mathscr{Z}(f)$*, su multiplicidad* $\nu(f, a)$ *es el número de elementos del conjunto* $\{k : a_k = a\}$*.*

Corolario 11.1.9.
Sea $M \subset \mathbb{C}$ *un conjunto sin puntos de acumulación y* $m : M \longrightarrow \mathbb{N}$ *una aplicación que asigna a cada* $a \in M$ *un número natural* $m(a) \in \mathbb{N}$*. Entonces existe una función entera* $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *tal que* $\mathscr{Z}(f) = M$ *y la multiplicidad de cada* $a \in \mathscr{Z}(f)$ *es* $\nu(f, a) = m(a)$*.*

Teorema 11.1.10.
Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *una función entera no idénticamente nula, con infinitos ceros y* $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *la sucesión de sus ceros no nulos, repetidos según multiplicidades. Entonces existe una sucesión* $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y una función entera* $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ *tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(z/a_k)$$

donde $p = 0$ *si* $f(0) \neq 0$*,* $p = \nu(f, 0)$ *si* $f(0) = 0$ *y el producto infinito converge uniformemente sobre compactos.*

Proposición 11.1.11.
Sea $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *un producto infinito de funciones* $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ *que converge uniformemente sobre compactos. Se supone que los ceros de todas las funciones* f_n *son aislados. Entonces*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

donde la serie de funciones meromorfas converge uniformemente sobre compactos.

11.1.2. La función Γ de Euler

La función $\Gamma(z)$, introducida por Euler, es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que extiende a la función de $n \in \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (n-1)!$.

Se suele definir en la forma $f = 1/F$ donde $F \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tiene ceros simples $\mathscr{Z}(F) = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$. Según el corolario 11.1.10 la forma general de una función entera $F \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con estos ceros es

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{11.1}$$

donde $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ es una función entera que se elige, de la forma más sencilla posible, para que $f = 1/F$ cumpla las condiciones:

$$f(1) = 1; \quad f(z+1) = zf(z) \text{ si } z \neq 0. \tag{11.2}$$

La función f cumple $f(z+1) = zf(z)$ si y sólo si $1 = e^{[g(z+1)-g(z)-\gamma]}$, donde $\gamma = \lim_m \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log\, m\right)$ es la célebre constante de Euler (aún no se sabe si es irracional) cuyo valor aproximado es $0.5772\cdots$. Como $F(1) = e^{[g(1)-\gamma]}$, resulta que $f(1) = 1$ si y sólo si $1 = e^{[g(1)-\gamma]}$. Es claro que $g(z) = \gamma z$, es la función entera más sencilla que satisface las condiciones requeridas

$$1 = e^{[g(z+1)-g(z)-\gamma]}, \quad 1 = e^{[g(1)-\gamma]}$$

y con ella se define la función Γ.

Definición 11.1.12.
Sea $F \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ la función entera definida por el producto

$$F(z) = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

La función Γ de Euler es la función meromorfa $\Gamma \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ definida por

$$\Gamma(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+z}\right) e^{z/n}$$

Proposición 11.1.13.
La función Γ satisface la ecuación funcional

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ si } z \neq 0, \tag{11.3}$$

no tiene ceros y tiene polos simples en $\{0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots\}$ con residuos

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Considerando el límite de los productos parciales del producto infinito con el que se ha definido la función Γ se llega a la fórmula de Gauss en la que no interviene la constante de Euler γ:

Proposición 11.1.14. Fórmula de Gauss.
Si $z \notin \{0, -1, -2, \cdots - n, \cdots\}$

$$\Gamma(z) = \lim_n \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

Proposición 11.1.15. Fórmula de los complementos.
Si $z \notin \mathbb{Z}$ se cumple:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Con la proposición 11.1.15 se obtiene que $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ y, teniendo en cuenta que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$, resulta $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Con la ecuación funcional 11.3 se calculan los valores

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 11.1.16. Representación integral.

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \quad \textit{si } \operatorname{Re} z > 0.$$

Además, la integral impropia $f_0(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ *converge uniformemente sobre compactos en el semiplano* $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ *donde define una función holomorfa y la integral impropia* $f_1(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ *converge uniformemente sobre compactos en* $\mathbb{C}$ *donde define una función entera (véase el ejercicio 5.52).*

11.1.3. La función ζ de Riemann

La función ζ se define inicialmente en $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ mediante la serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Con los ejercicios de este capítulo se establece que ζ se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo (simple) en $z = 0$ y que sus ceros fuera de la banda crítica $B = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ (los llamados ceros triviales) son $\mathscr{Z}(\zeta) \setminus B = \{-2n : n \in \mathbb{Z}\}$. La conjetura de Riemann afirma que los infinitos ceros de ζ en la banda crítica están en la recta $\operatorname{Re} z = 1/2$. Este es uno de los problemas abiertos más celebres de las matemáticas y su solución positiva tendría importantes repercusiones en la teoría de números.

11.2. Ejercicios resueltos

11.2.1. Factorización de funciones

Ejercicio 11.1.

Demuestre que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge estrictamente si y sólo si* $z_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ *converge. (*$\operatorname{Log} z$ *denota el logaritmo principal de* $z \neq 0$ *determinado por* $-\pi < \operatorname{Im}(\operatorname{Log} z) \leq \pi$*).*

SOLUCIÓN.

Si el producto es estrictamente convergente la sucesión $p_n = z_1 z_2 \cdots z_n$ converge hacia un valor $p \neq 0$ y $\lim_n z_n = 1$. Sea $A(z)$ un argumento continuo de z definido en $\Omega_p = \mathbb{C} \setminus \{tp : t \leq 0\}$. Si $a \in \log p$ la función $\operatorname{Log}_p z = \operatorname{Log}(z/p) + a$, que está definida y es continua en Ω_p, verifica $e^{\operatorname{Log}_p z} = z$ para todo $z \in \Omega_p$, luego la función continua $A(z) = \operatorname{Im}(\operatorname{Log}_p z)$ determina un argumento de z en Ω_b (véase el ejercicio 3.3). Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $p_n \in \Omega_p$, luego la sucesión $\theta_n = A(p_n)$ converge hacia $\theta = A(p)$. Es inmediato que $z_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y podemos considerar la sucesión

$S_n = \sum_{k=1} \operatorname{Log} z_k$ que cumple $e^{S_n} = p_n$. Puesto que S_n es de la forma $S_n = \log|p_n| + i\alpha_n$, con $\alpha_n \in \arg(p_n)$, para demostrar que S_n converge basta demostrar que α_n converge.

Como $\text{lím}_n z_n = 1$, usando la continuidad de $\operatorname{Log} z$ en $z = 1$ se obtiene que la sucesión $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \operatorname{Im}(S_{n+1} - S_n) = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} z_{n+1})$ converge hacia 0. También se cumple que $\text{lím}_n(\theta_{n+1} - \theta_n) = \theta - \theta = 0$, luego la sucesión de enteros

$$h_n = \frac{\alpha_n - \theta_n}{2\pi}$$

cumple $\text{lím}_n(h_{n+1} - h_n) = 0$, por lo que es eventualmente constante, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $h_n = k$ desde un valor de n en adelante. Se sigue de esto que $S_n = \log|p_n| + i(\theta_n + 2\pi h_n)$ converge hacia $S = \log|p| + i(\theta + 2\pi k)$.

Recíprocamente, si $z_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k$ converge hacia S, es inmediato que $p_n = z_1 z_2 \cdots z_n = e^{S_n}$ converge hacia $p = e^S \neq 0$ y, por lo tanto, el producto infinito es estrictamente convergente.

Ejercicio 11.2.

Obtenga la factorización

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

donde el producto converge uniformemente sobre compactos. Concluya que, en particular, para $z = 1/2$, se tiene $2/\pi = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 1/(4n^2)\right)$.

SOLUCIÓN.

La función $f(z) = \operatorname{sen} \pi z$ tiene ceros simples en los enteros

$$\mathscr{Z}(f) = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots n, -n, \cdots\}$$

y la sucesión constante $n_k = 1$ cumple la condición requerida en el teorema 11.1.8. Aplicando este teorema se obtiene

$$f(z) = e^{g(z)} z E_1(z) E_1(-z) E_1(z/2) E_1(-z/2) \cdots E_1(z/n) E_1(-z/n) \cdots$$

Teniendo en cuenta que $E_1(z) = (1 - z)e^z$, resulta $E_1(z/n)E_1(-z/n) = 1 - z^2/n^2$, luego los productos parciales de índice par adoptan la forma más simple

$$E_1(z)E_1(-z)E_1(z/2)E_1(-z/2) \cdots E_1(z/m)E_1(-z/m) = \prod_{n=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Se obtiene así que

$$f(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

donde el nuevo producto infinito sigue siendo uniformemente convergente sobre compactos (esto también se puede ver directamente usando la proposición 11.1.4). En virtud de la proposición 11.1.11

$$\pi \cot \pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

y, teniendo en cuenta el desarrollo obtenido en el ejercicio 8.23, resulta $g' = 0$, luego $g(z) = c$ es constante. Para calcular su valor basta sustituir $z = 0$ en

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{z} = e^c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

y se obtiene que $\pi = e^c$.

Ejercicio 11.3.

Obtenga la factorización

$$e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

donde el producto converge uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

La sucesión de los ceros de la función $f(z) = e^z - 1$ es

$$\mathscr{Z}(f) = \{0, 2\pi i, -2\pi i, 3\pi i, -3\pi i, \cdots, n\pi i, -n\pi i, \cdots\}$$

por lo que, al aplicar el teorema 11.1.10, se puede usar la sucesión constante $n_k = 1$. Según este teorema existe $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$e^z - 1 = e^{g(z)} z E_1\left(\frac{z}{2\pi i}\right) E_1\left(\frac{z}{-2\pi i}\right) \cdots E_1\left(\frac{z}{2n\pi i}\right) E_1\left(\frac{z}{-2n\pi i}\right) \cdots$$

donde el producto converge uniformemente sobre compactos y $E_1(z) = (1 - z)e^z$.

Teniendo en cuenta que

$$E_1\left(\frac{z}{2n\pi i}\right) E_1\left(\frac{-z}{2n\pi i}\right) = 1 + \frac{z^2}{4\pi n^2}$$

podemos considerar el producto infinito como límite de los productos finitos de índice par y se obtiene así la representación

$$e^z - 1 = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

donde el nuevo producto infinito sigue siendo uniformemente convergente sobre compactos (esto se puede comprobar usando la proposición 11.1.4).

Para obtener la función entera g aplicamos el teorema 11.1.11, con el que se obtiene

$$\frac{e^z}{e^z - 1} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} \tag{11.4}$$

Utilizando el método expuesto en la proposición 8.1.7 se puede calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$$

y sustituyendo en (11.4) se obtiene que $g'(z) = 1/2$, luego existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z/2 + c$. El valor de c se determina haciendo $z = 0$ en la igualdad

$$\frac{e^z - 1}{z} = e^{c+z/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

Se obtiene así que $1 = e^c$ y con ello queda establecido el desarrollo propuesto.

Ejercicio 11.4.

Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ un abierto conexo no vacío y $M \subset \Omega$ un subconjunto sin puntos de acumulación en Ω ($M' \cap \Omega = \emptyset$). Dada una aplicación $m : M \longrightarrow \mathbb{N}$ que asigna a cada $a \in M$ un número natural $m(a) \in \mathbb{N}$ demuestre que existe una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y la multiplicidad de cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ es $m(a)$.

SOLUCIÓN.

Cuando M es finito el resultado es trivial (la solución se obtiene con un polinomio). Suponemos en lo que sigue que M es infinito. Según 2.39 la condición $M' \cap \Omega = \emptyset$ implica que M es numerable. Sea z_k una sucesión inyectiva formada numerando los puntos de M.

a) Suponemos en primer lugar que $\infty \in \Omega$, $\infty \notin M$. En este caso $S = \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = \mathbb{C} \setminus \Omega$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y como ∞ no es punto de acumulación de M, existe $R > 0$ tal que $\{z : |z| > R\} \subset \Omega$ y $|z_k| \leq R$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $\lim_k d(z_k, S) = 0$. Efectivamente, en caso contrario existiría $\varepsilon > 0$ y una subsucesión z_{k_j} tal que $d(z_{k_j}, S) \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$; esta subsucesión, al ser acotada, tendría una subsucesión convergente hacia un punto $z \in M'$ que cumpliría $d(z, S) \geq \varepsilon$, luego $z \in \Omega$, lo que es imposible por hipótesis.

La sucesión (a_k) obtenida a partir de la sucesión inyectiva (z_k) repitiendo términos según la función m del enunciado también verifica $\lim_k d(a_k, S) = 0$. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(z) = E_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

donde $w_n \in S$ es un punto tal que $d(a_n, S) = d(a_n, w_n) = |a_n - w_n|$. Cada función f_n es holomorfa en Ω, cumple $f_n(\infty) = 1$ y tiene un cero simple en a_n.

Probemos ahora que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. Si $0 < \eta < d(K, S)$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se cumple $|a_n - w_n| \leq 2\eta$. Entonces, para $n > m$ y todo $z \in K$ se cumple

$$\left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{|a_n - w_n|}{\eta} \leq \frac{1}{2}$$

y utilizando el lema 11.1.7 se llega a la desigualdad $|f_n(z) - 1| \leq (1/2)^{n+1}$, válida para todo $n > m$ y todo $z \in K$, con la que se obtiene la convergencia uniforme de la serie sobre el compacto K (criterio de Weierstrass).

En virtud de la proposición 11.1.4 el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω y define una función f, holomorfa en $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\infty\}$, continua en ∞ (esto es consecuencia de la convergencia uniforme sobre compactos de los productos finitos vista en la proposición 11.1.5). Esta función cumple $f(\infty) = \lim_m \prod_{n=1}^m f_n(\infty) = 1$ y por construcción tiene los ceros y las multiplicidades requeridos.

b) Consideremos ahora el caso general de un conjunto infinito $M \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en el abierto $\Omega \subsetneq \mathbb{C}_\infty$. Fijando un punto $a \in \Omega \setminus M$, con la transformación $h(z) = 1/(z-a)$ el abierto Ω se transforma en otro abierto $\Omega_1 = h(\Omega) \neq \mathbb{C}_\infty$ tal que $\infty \in \Omega_1$ y M se transforma en un conjunto $M_1 = h(M)$ sin puntos de acumulación en Ω_1 tal que $\infty \notin M_1$. Según lo que se ha demostrado en el caso preliminar existe $f_1 \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ tal que $\mathscr{Z}(f_1) = M_1$ y cada $h(a) \in M_1$ es un cero de f_1 de multiplicidad $m(a)$. Se comprueba fácilmente que $f(z) = f_1(h(z))$ tiene los ceros deseados con las multiplicidades requeridas (obsérvese que f es holomorfa en $z = a$, porque $\lim_{z\to a} f(z) = f_1(\infty) = 0$).

Ejercicio 11.5.

Sea $a_k \in D^*(0,1)$ una sucesión tal que $\sum_{k=1}^\infty (1-|a_k|) < +\infty$. Demuestre que el producto

$$f(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{|a_k|}{a_k}\left(\frac{a_k - z}{1-\overline{a_k}z}\right)$$

converge uniformemente sobre compactos en $D(0,1)$ donde define una función $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ con ceros $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, tal que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

Las funciones

$$f_k(z) = \frac{|a_k|}{a_k}\left(\frac{a_k - z}{1-\overline{a}_k z}\right)$$

son automorfismos conformes del disco $D(0,1)$, luego $|f_k(z)| \le 1$ si $|z| \le 1$.

La serie $\sum_{k=1}^\infty |1 - f_k(z)|$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset D(0,1)$, ya que para todo $z \in K$ y todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$|1 - f_n(z)| = \left|\frac{a_k - |a_k|^2 z - a_k|a_k| + |a_k|z}{a_k(1-\overline{a_k}z)}\right| = \left|\frac{(a_k + |a_k|z)(1-|a_k|)}{a_k(1-\overline{a_k}z)}\right| \le$$

$$\le \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|a_k|) \le \frac{1+r}{1-r}(1-|a_k|)$$

donde $r = \max\{|z| : z \in K\} < 1$, y con el criterio de Weierstrass se obtiene el resultado. Entonces, de acuerdo con el teorema 11.1.5, podemos asegurar que la función f está definida y es holomorfa en $D(0,1)$ con ceros $\mathscr{Z}(f) = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Los productos parciales $\pi_n(z) = f_1(z)\cdots f_n(z)$ también cumplen que $|\pi_n(z)| \le 1$ si $|z| \le 1$, luego $|f(z)| = \lim_n |\pi_n(z)| \le 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Finalmente, con el teorema del módulo máximo se concluye que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in D(0,1)$.

Ejercicio 11.6.

Sea $M \subset \mathbb{C}$ tal que $M' = \emptyset$. Se supone que para cada $a \in M$ se ha fijado una sucesión finita de números complejos $\{c_n(a) \in \mathbb{C} : 0 \le n \le m(a)\}$. Demuestre que existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $f^{(n)}(a) = n!\, c_n(a)$, para cada $a \in M$ y cada $0 \le n \le m(a)$.

Indicación. Dada una sucesión finita de números complejos $c_0, c_1, \dots, c_m$ *y un desarrollo en serie de potencias de la forma*

$$F(z) = a_{m+1}z^{m+1} + a_{m+2}z^{m+2} + a_{m+3}z^{m+3} + \cdots, \quad |z| < r$$

con $a_{m+1} \neq 0$*, existe una función racional de la forma*

$$P(1/z) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_{m+1}}{z^{m+1}}$$

tal que el desarrollo en serie de potencias de $P(1/z)F(z)$ *en* $z = 0$ *comienza así:*

$$P(1/z)f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m + \cdots$$

SOLUCIÓN.

Comencemos estableciendo la indicación. En $z = 0$ la función F tiene un cero de multiplicidad $m+1$ y la función $P(1/z)$ un polo de la misma multiplicidad, luego $P(1/z)f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ que suponemos eliminada. Efectuando el producto

$$P(1/z)F(z) = \left(\frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_{m+1}}{z^{m+1}}\right)\left(a_{m+1}z^{m+1} + a_{m+2}z^{m+2} + \cdots\right)$$

se obtienen los sucesivos coeficientes del desarrollo del producto:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_{m+1}b_{m+1} \\
c_1 &= a_{m+1}b_m + a_{m+2}b_{m+1} \\
c_2 &= a_{m+1}b_{m-1} + a_{m+2}b_m + a_{m+3}b_{m+1} \\
\cdots & \qquad \cdots \\
c_m &= a_{m+1}b_1 + a_{m+2}b_2 + \cdots + a_{2m+1}b_{m+1}
\end{aligned}$$

Si queremos que estos coeficientes tomen los valores prefijados podemos usar la primera igualdad para determinar $b_{m+1} = c_0/a_{m+1}$, la segunda para determinar b_m y así sucesivamente, hasta la última igualdad con la que se determina b_1. De esta forma queda justificada la indicación del enunciado.

Utilizando el teorema 11.1.9 se puede definir una función $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que cada $a \in M$ es un cero de g con multiplicidad $m(a) + 1$. Utilizando la indicación podemos obtener, para cada $a \in M$, una parte principal

$$P_a(1/(z-a)) = \sum_{k=1}^{m(a)+1} \frac{b_k(a)}{(z-a)^k}$$

tal que $g(z)P_a(1/(z-a))$ tiene alrededor de a un desarrollo en serie de potencias que comienza en la forma deseada

$$g(z)P_a(1/(z-a)) = c_0(a) + c_1(a)(z-a) + \cdots + c_{m(a)}(z-a)^{m(a)} + \cdots \tag{11.5}$$

El teorema 6.1.16 afirma que existe una función meromorfa $h \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ tal que cada $a \in M$ es polo de h con parte principal $P_a(1/(z-a))$. La función $f(z) = g(z)h(z)$ presenta singularidades evitables en cada $a \in M$ (pues a es cero de g y polo de h con la misma multiplicidad) y eliminando estas singularidades, obtenemos una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con las propiedades requeridas. Efectivamente, en un entorno de $a \in M$, la función h se expresa en la forma $h(z) = P_a(1/(z-a)) + h_a(z)$, donde h_a es holomorfa en el entorno.

La función $h(z)g(z) = P_a(1/(z-a))g(z) + h_a(z)g(z)$ tiene alrededor de a un desarrollo en serie de potencias cuyos términos de grado menor o igual que $m(a)$ son iguales a los del desarrollo 11.5 (ya que $h_a g$ tiene en a un cero de multiplicidad $m(a) + 1$).

11.2.2. Sobre la función Γ

Ejercicio 11.7.

Demuestre que para cada $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$ *se verifica*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}$$

(γ es la constante de Euler) y que la serie converge uniformemente sobre compactos. Deduzca de ello que $\log \Gamma(x)$ *es una función convexa en* $(0, +\infty)$.

SOLUCIÓN.

La derivada logarítmica de la función Γ se obtiene aplicando la proposición 11.1.11 al producto infinito utilizado para definirla. Para poder aplicar esta proposición debemos comprobar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+z}\right) e^{z/n}$$

que interviene en la definición de Γ converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω. Según la proposición 11.1.4 una condición suficiente para ello es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{n}{n+z} e^{z/n}\right|$$

sea uniformemente convergente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

En efecto, para $n > R = \max\{|z| : z \in K\}$ se cumple

$$\left|1 - \frac{ne^{z/n}}{n+z}\right| = \left|\frac{n}{n+z}\right| \left|\left(\frac{n+z}{n}\right) - \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{z}{n}\right)^3 + \cdots\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{n}{n+z}\right| \left(\frac{1}{2!}\left(\frac{R}{n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{R}{n}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$\leq \frac{n}{n-R}\left(\frac{R}{n}\right)^2 C = \frac{CR^2}{n(n-R)} = \mu_n$$

donde $C = \sum_{n=2}^{\infty}(1/n!)$. Como la serie numérica de término general μ_n es convergente, con el criterio de Weierstrass se obtiene la convergencia uniforme sobre K de la serie.

Al aplicar la proposición 11.1.11 se obtiene que la serie del enunciado converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$, lo que permite utilizar el teorema de Weierstrass para derivarla término a término y obtener la derivada de $f = \Gamma'/\Gamma$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

Por otra parte, para $x > 0$ es $\Gamma(x) > 0$, luego está definida $\varphi(x) = \log \Gamma(x)$. Como $\varphi'(x) = f(x) > 0$ y $\varphi''(x) = f'(x) > 0$, se concluye que φ es convexa.

Ejercicio 11.8. Teorema de Bohr-Mollerup.

Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *una función que verifica* *a)* $\log f(x)$ *es convexa;*

b) $f(1) = 1$*;*

c) $f(x+1) = xf(x)$ *para todo* $x > 0$*.*

Demuestre que entonces $f(x) = \Gamma(x)$ *para cada* $x > 0$*.*

SOLUCIÓN.

Basta demostrar que $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leq 1$, ya que entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumplirá

$$f(n+x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x) = \Gamma(n+x).$$

Como $\varphi(x) = \log f(x)$ es convexa, para todo $n \geq 2$ y $0 < x \leq 1$ se verifica

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{\varphi(n+x) - \varphi(n)}{(n+x) - n} \leq \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{(n+1) - n}$$

Es decir

$$x\big[\log f(n) - \log f(n-1)\big] \leq \log f(n+x) - \log f(n) \leq x\big[\log f(n+1) - \log f(n)\big]$$

y teniendo en cuenta que $f(m) = (m-1)!$ resulta

$$x\log(n-1) \leq \log f(n+x) - \log f(n) \leq x\log n$$

Tomando exponenciales se obtiene

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x(n-1)!$$

y sustituyendo $f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x)$ se llega a la desigualdad

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}$$

Pasando al límite cuando $n \to +\infty$, con la fórmula de Gauss se obtiene que $f(x) = \Gamma(x)$.

Ejercicio 11.9.

Si $z \notin \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$ *demuestre que la función* $f = \Gamma'/\Gamma$ *verifica*

$$f'(z) + f'(z+1/2) = 4f'(2z)$$

y deduzca de ello la fórmula de duplicación de Legendre:

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2).$$

SOLUCIÓN.

Con la fórmula para la derivada de f obtenida en el ejercicio 11.7, se tiene

$$\begin{aligned} f'(z)+f'(z+1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+2n+1)^2}= \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+2n+1)^2}= \\ &=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2z+m)^2}=4f'(2z)\end{aligned}$$

luego existe una constante $a\in\mathbb{C}$ tal que $f(z)+f(z+1/2)=2f(2z)+a$.

Para cada una de las funciones $\Gamma(z)$, $\Gamma(z+1/2)$ y $\Gamma(2z)$ la imagen de $z=1$ pertenece a $\Omega=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$. Como las tres funciones son continuas en $z=1$, hay un disco $D(1,r)$ cuya imagen, mediante cada una de ellas, está contenida en Ω, donde está definido el logaritmo principal $\operatorname{Log}z$. Por lo tanto, en $D(1,r)$ están definidas las funciones $\operatorname{Log}\Gamma(z)$, $\operatorname{Log}\Gamma(z+1/2)$ y $\operatorname{Log}\Gamma(2z)$, cuyas derivadas (que son $f(z)$, $f(z+1/2)$ y $2f(2z)$) verifican

$$\big(\operatorname{Log}\Gamma(z)\big)'+\big(\operatorname{Log}\Gamma(z+1/2)\big)'=\big(\operatorname{Log}\Gamma(2z)\big)'+a$$

luego existe una constante $b\in\mathbb{C}$ tal que para todo $z\in D(1,r)$ se cumple

$$\operatorname{Log}\Gamma(z)+\operatorname{Log}\Gamma(z+1/2)=\operatorname{Log}\Gamma(2z)+az+b$$

Tomando exponenciales se obtiene la igualdad

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\Gamma(2z)e^{az+b}$$

válida para cada $z\in D(1,r)$. En virtud del principio de identidad la igualdad también se cumple en todos los puntos del abierto conexo $z\in\mathbb{C}\setminus\{n\in\mathbb{Z}:n\le 0\}$ donde son holomorfas las funciones que intervienen en ella.

Las constantes a, b se calculan considerando los valores $z=1$ y $z=1/2$ con los que se obtienen las ecuaciones $\sqrt{\pi}=e^{a/2+b}$, $\sqrt{\pi}/2=e^{a+b}$, que, escritas en la forma

$$a/2+b=\log\sqrt{\pi};\quad a+b=\log(\sqrt{\pi}/2)$$

permiten obtener $a=-2\log 2$ y $b=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2$. Con estos valores se obtiene el resultado deseado ya que $e^{az+b}=e^{az}eb=2^{-2z}\sqrt{\pi}2=\sqrt{\pi}/2^{2z-1}$.

11.2.3. Sobre la función ζ

Ejercicio 11.10.

Sea $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^z$ *definida en* $\Omega_1=\{z:\operatorname{Re}z>1\}$. *Si* (p_n) *es la sucesión de los números primos,* $(2,3,5,7,\dots)$, *demuestre que para* $z\in\Omega_1$ *se verifica*

$$\zeta(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-z}}$$

donde el producto converge uniformemente sobre cada compacto $K\subset\Omega_1$.

SOLUCIÓN.

Con el criterio de Weierstrass se comprueba que la serie converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$: obsérvese que $\alpha = \text{mín}\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$ y que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$ se cumple

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Como hay convergencia uniforme sobre compactos, según el teorema de Weierstrass, la suma de la serie define una función $\zeta(z)$ holomorfa en el semiplano Ω_1. Según la proposición 11.1.4 para ver que el producto infinito converge uniformemente sobre el compacto $K \subset \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ basta comprobar que la serie de término general

$$\left|1 - \frac{1}{1 - p_n^{-z}}\right|$$

converge uniformemente sobre K. Esto se consigue con el criterio de Weierstrass ya que $\alpha = \text{mín}\{\operatorname{Re} z : z \in K\} > 1$ y para todo $z \in K$ se cumple

$$\left|1 - \frac{1}{1 - p_n^{-z}}\right| = \left|\frac{1}{p_n^z - 1}\right| \leq \frac{1}{|p_n^z| - 1} = \frac{1}{p_n^x - 1} \leq \frac{1}{p_n^\alpha - 1} \leq \frac{1}{n^\alpha - 1}$$

Según el teorema 11.1.6 el producto infinito define una función holomorfa en Ω_1. En virtud del principio de identidad, para conseguir la igualdad del enunciado basta demostrar que $f(x) = \zeta(x)$ para todo $x > 1$. Multiplicando los desarrollos en progresión geométrica de razón $p_n^{-x} < 1$,

$$\frac{1}{1 - p_n^{-x}} = 1 + p_n^{-x} + p_n^{-2x} + p_n^{-3x} + \cdots p_n^{-kx} + \cdots \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

se obtiene

$$\prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m = 0}^{+\infty} \left[p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}\right]^{-x} = \sum_{n \in A_m} \frac{1}{n^x}$$

donde A_m es el conjunto de los números naturales que no admiten divisores primos mayores que p_m. Se obtienen así las desigualdades

$$\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{n=1}^{m} \frac{1}{1 - p_n^{-x}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$$

y pasando al límite cuando $m \to +\infty$ se obtiene el resultado deseado $\zeta(x) = f(x)$.

Ejercicio 11.11.

Sea $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$ *la función de Riemann definida para* $\operatorname{Re} z > 1$ *(véase el ejercicio 11.10). Demuestre que para* $\operatorname{Re} z > 1$ *se verifica*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Utilice este resultado y el obtenido en los ejercicio 5.53 y 6.33 para demostrar que la función ζ *se puede prolongar analíticamente a una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con un único polo simple en* $z = 1$ *y ceros en los puntos* $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

SOLUCIÓN.

Según el ejercicio 5.53 la integral del enunciado define una función $F(z)$ que es holomorfa en $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$. Como las tres funciones que intervienen en la igualdad del enunciado $\zeta(z)\Gamma(z) = F(z)$ son holomorfas en Ω_1, en virtud del principio de identidad bastará demostrar la igualdad para $z = x \geq 2$. En este caso, considerando el desarrollo en serie geométrica de razón $e^{-t} < 1$, se obtiene que para todo $t > 0$ se cumple

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1}}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{t^{x-1}}{e^t}\sum_{n=0}^{m} e^{-nt} + R_m(t)$$

donde

$$R_m(t) = \frac{t^{x-1}}{e^t}\sum_{n=m+1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{t^{x-1}}{e^{(m+1)t}}\frac{1}{e^t-1} \leq \frac{t^{x-2}}{e^{(m+1)t}}$$

Como $x \geq 2$ se obtiene que la desigualdad $R_m(t) \leq e^{-(m+1)t}$ es válida para todo $t \in [0,1]$ y con ella se deduce que $\lim_n \int_0^1 R_m(t)\,dt = 0$. Por otra parte, para $t \geq 1$ vale la desigualdad $R_m(t) \leq t^{x-2}e^{-t}/e^m$ con la que se obtiene fácilmente que $\lim_m \int_1^{+\infty} R_m(t)\,dt = 0$. Queda justificado que $\lim_m \int_0^{+\infty} R_m(t)\,dt = 0$, luego

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt = \lim_m \sum_{n=0}^{m}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+1)t}dt =$$

$$= \lim_m \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(n+1)^x}\int_0^{+\infty} s^{x-1}e^{-s}\,ds = \zeta(x)\Gamma(x)$$

Combinando lo obtenido en los ejercicios 5.53 y 6.33 se concluye que la función F admite una prolongación meromorfa $\widehat{F}$, cuyos polos, todos simples, son $\{1, 0, -1, -3, \dots, -(2n+1), \dots\}$. Entonces, en virtud de lo obtenido anteriormente, $\widehat{F}/\Gamma$ es una prolongación meromorfa de ζ a todo el plano complejo que seguimos denotando igual, ζ. Los polos simples que tiene $\widehat{F}$ en $\{0, -1, -3, \dots, -(2n+1), \dots\}$ se cancelan con los polos simples de Γ en los mismos puntos, luego ζ tiene un único polo simple en $z = 1$. Los polos de Γ que no se han cancelado, $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$, dan lugar a ceros de la función ζ mencionados en el enunciado.

Ejercicio 11.12.

Establezca la ecuación funcional de Riemann:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

Utilícela para demostrar que los únicos ceros de ζ en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ *son* $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

SOLUCIÓN.

Por el principio de identidad basta establecer la igualdad cuando $z = x \in (-1, 0)$.

En la solución del ejercicio 11.3, utilizando el método de los residuos, se ha calculado la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2+4\pi^2n^2} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta los ejercicios 11.11 y 6.34 se obtiene

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \widehat{F}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{x-1}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^x}{t^2 + 4\pi^2 n^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2t^x}{t^2 + 4\pi^2 n^2}\, dt$$

donde la última igualdad se puede justificar mediante un resultado bien conocido de la integral de Lebesgue, según el cual se puede realizar una integración término a término en las series de funciones no negativas. También se puede justificar la integración término a término con recursos elementales, usando que la serie converge uniformemente sobre cada intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Obsérvese que para todo $t \in [a, b]$ se cumple la desigualdad

$$0 \leq \frac{2t^x}{t^2 + 4\pi^2 n^2} \leq \frac{C}{4\pi^2 n^2}$$

donde $C = \max\{2t^x : a \leq t \leq b\}$. Si en las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^x}{t^2 + 4\pi^2 n^2}\, dt$$

se hace el cambio $t = 2\pi n s$ se obtiene

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{2(2\pi n)^{x-1} s^x}{1 + s^2}\, ds = 2(2\pi)^{x-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1-x}} \right) \int_0^{\infty} \frac{s^x}{1 + s^2}\, ds.$$

Con el método de los residuos se puede obtener el valor

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^x}{1 + s^2}\, ds = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}}$$

que, sustituido arriba, conduce a la igualdad

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1} \zeta(1 - x) \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}}$$

Según la fórmula de los complementos $1/\Gamma(x) = \Gamma(1 - x)(\operatorname{sen} \pi x)/\pi$, luego

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1} \zeta(1 - x) \Gamma(1 - x) \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi} \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} =$$

$$= 2(2\pi)^{x-1} \zeta(1 - x) \Gamma(1 - x) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right)$$

Finalmente, si $\operatorname{Re} z < 0$ entonces $\operatorname{Re}(1 - z) > 1$ y por lo tanto, en virtud del resultado obtenido en el ejercicio 11.10, se cumple que $\zeta(1-z) \neq 0$. Entonces, en virtud de la ecuación funcional la función ζ tiene en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ los mismos ceros que $\operatorname{sen}(\pi z/2)$, es decir $\{-2n : n \in \mathbb{N}\}$.

11.3. Ejercicios propuestos

11.1 Demuestre que para $|z| < 1$ se verifica

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z^2}$$

11.2 Si $|a| < 1$, demuestre que $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - a^{n+1}z)$ define una función entera y obtenga su desarrollo en serie de potencias.

Indicación. $f(z) = (1 - az)f(az)$.

11.3 Sea $r > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$. Demuestre que el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n z^n)$ define una función holomorfa en $D(0, r)$.

11.4 Defina una función entera f, con ceros simples $\mathscr{Z}(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $0 < |a_1| < \cdots < |a_n| < |a_{n+1}| \cdots$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$ y verificando, además,

$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad \lim_n \int_{C_n} \frac{f'(w)}{f(w)w(w - z)}\, dw = 0$$

donde $C_n(t) = R_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $|a_n| < R_n < |a_{n+1}|$.

11.5 Sea $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ una sucesión estrictamente creciente de números reales no nulos que cumple $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$. Demuestre que el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función entera f cuya derivada tiene un único cero en cada intervalo (a_n, a_{n+1}).

11.6 Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con infinitos ceros $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, todos simples y tales que $0 < |a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \cdots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-2} < +\infty$. Se supone que hay una sucesión ρ_n, con $|a_n| < \rho_n < |a_{n+1}|$, y tal que $\lim_{n\to\infty} M_n/\rho_n = 0$ donde

$$M_n = \sup\{|f'(z)/f(z)| : |z| = \rho_n\}.$$

Utilice el ejercicio propuesto 8.13 para obtener que

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

11.7 Considerando un producto de la forma $\prod_{n=1}^{+\infty}(z - a_n)/(z - b_n)$ demuestre que existe una función f no idénticamente nula y holomorfa en el semiplano $P = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ tal que cada punto del eje real es un punto de acumulación de ceros de f.

Si $a + bi \in P$ establezca la igualdad

$$\limsup_n \frac{1}{n!} \sqrt[n]{|f^{(n)}(a + bi)|} = 1/b.$$

11.8 Demuestre que

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{nz}{n-1}\right)^{n}\right)$$

define una función holomorfa en $D(0,1)$ que, para todo $a\in D(0,1)$, verifica

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}}=\frac{1}{1-|a|}$$

11.9 Demuestre que el producto

$$f(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)\exp\left(-\frac{z}{\sqrt{n}}+\frac{z^2}{2n}\right)$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función entera que verifica

$$f(z)f(-z)\Gamma(-z^2)=e^{g(z)}$$

donde g es una función entera que hay que determinar.

11.10 Demuestre que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple $x\,\mathrm{sh}\,\pi x|\Gamma(ix)|^2=\pi$.

11.11 Demuestre que para $0<x<y$ se verifican las desigualdades:

$$\Gamma'(x)\Gamma(y)<\Gamma(x)\Gamma'(y)\quad\text{y}\quad\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right)<\sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)}.$$

11.12 Demuestre que la función $f=\Gamma'/\Gamma$ verifica:

$$f(z+1)-f(z)=1/z\quad\text{y}\quad f(1-z)-f(z)=\pi\cot\pi z.$$

11.13 Si $\mathrm{Re}\,z>0$ demuestre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tz}}{1-e^{-t}}\,dt=\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)'$.

11.14 Si $\alpha>0$ y $|z|<1$ demuestre que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-z}\,dt=\Gamma(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)^{\alpha}}$$

donde la integral define una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:x\geq 1\}$.

Capítulo 12

Familias y sucesiones de funciones holomorfas

12.1. Preliminares teóricos

12.1.1. Topología en $C(\Omega)$

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, sea $C(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, denotada τ_K en lo que sigue. Esta topología se define mediante una base de entornos de cada $f \in C(\Omega)$:

$$\mathscr{B}_f = \{V(f, K, \varepsilon) : K \subset \Omega \,\text{compacto}, \, \varepsilon > 0\}$$

$$V(f, K, \varepsilon) = \{g \in C(\Omega) : \|f - g\|_K < \varepsilon\}$$

donde $\|\varphi\|_K = \text{máx}\{|\varphi(z)| : z \in K\}$.

Un conjunto de funciones $A \subset C(\Omega)$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f \in A$ existe $V \in \mathscr{B}_f$ tal que $V \subset A$. Así queda definida en $C(\Omega)$ una topología separada para la cual $\mathscr{B}_f$ es una base de entornos de f. Es claro que una sucesión de funciones $f_n \in C(\Omega)$ es convergente en esta topología si y sólo si converge uniformemente sobre compactos. Esta topología es metrizable.

Según el ejercicio 2.38, para el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si para $f, g \in C(\Omega)$ se define

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f, g), \quad \text{con} \quad \rho_n(f, g) = \text{mín}\{1, \|f - g\|_{K_n}\}$$

entonces ρ es una distancia en $C(\Omega)$ cuya topología asociada es la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Además, $(C(\Omega), \rho)$ es un espacio métrico completo.

En la caracterización de los subconjuntos compactos de este espacio métrico interviene la noción de familia equicontinua:

Definición 12.1.1.

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega)$ *se dice que es equicontinua en* $a \in \Omega$ *cuando para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $D(a, r) \subset \Omega$ *tal que*

$$[z \in D(a, r),\ f \in \mathscr{F}] \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

Se dice que $\mathscr{F}$ *es equicontinua si es equicontinua en cada punto* $a \in \Omega$.

Teorema 12.1.2. Ascoli.

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega)$ *es relativamente compacta para la topología* τ_K *de la convergencia uniforme sobre compactos si y sólo cumple las dos condiciones siguientes*

a) $\mathscr{F}$ *es equicontinua;*

b) para cada $z \in \Omega$ *el conjunto* $\mathscr{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathscr{F}\}$ *es acotado.*

12.1.2. Familias normales de funciones holomorfas

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, el espacio de las funciones holomorfas $\mathscr{H}(\Omega) \subset C(\Omega)$ se considera dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, es decir, la inducida por la topología τ_K de $C(\Omega)$. Esta topología es metrizable mediante la restricción a $\mathscr{H}(\Omega)$ de la distancia ρ ya definida en $C(\Omega)$.

El teorema de Weierstrass (5.1.15) se puede reformular diciendo que $\mathscr{H}(\Omega)$ es un subconjunto cerrado de $C(\Omega)$ y que el operador de derivación $D : \mathscr{H}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{H}(\Omega)$, $D(f) = f'$ es continuo. Como el espacio métrico $(C(\Omega, \mathbb{C}), \rho)$ es completo y $\mathscr{H}(\Omega)$ es un subconjunto ρ-cerrado de este espacio, se sigue que $(\mathscr{H}(\Omega), \rho)$ también es un espacio métrico completo.

Definición 12.1.3.

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ *se dice que es normal cuando de cada sucesión* $f_n \in \mathscr{F}$ *se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos, es decir,* $\mathscr{F}$ *es un subconjunto relativamente compacto de* $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.

Definición 12.1.4.

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ *se dice que es acotada cuando para cada compacto* $K \subset \Omega$ *se cumple* $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathscr{F}\} < +\infty$.

Teorema 12.1.5. Montel.

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ *es normal si y sólo si es acotada. Por lo tanto* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ *es* τ_K*-compacta si y sólo si es* τ_K*-cerrada y acotada.*

Combinando el teorema de Montel con el principio de identidad se obtiene el siguiente resultado que suele resultar muy útil para demostrar que una sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente sobre compactos. Su demostración utiliza un conocido resultado de la topología de los espacios metrizables que afirma que una sucesión contenida en un compacto es convergente si y sólo si tiene un único punto de aglomeración (lo que significa que todas las subsucesiones convergentes tienen el mismo límite).

Teorema 12.1.6. Vitali.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión acotada que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces f_n converge uniformemente sobre compactos. Su límite $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ queda determinado por la condición $\lim_n f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in M$.

Si en el teorema anterior se supone que la sucesión f_n converge puntualmente en todo Ω se puede eliminar la hipótesis de conexión ya que las hipótesis del teorema se cumplen en cada componente conexa de Ω.

La demostración del siguiente resultado, útil para demostrar que una familia concreta es normal, se puede ver en el ejercicio 12.4.

Proposición 12.1.7.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ verifica

a) *existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado;*

b) $\overline{\bigcup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$

entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal.

12.1.3. Sucesiones de funciones armónicas

Teorema 12.1.8.

Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ también es armónica.

Teorema 12.1.9.

Para una sucesión creciente de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se cumple una de las alternativas siguientes:

a) $\lim_n u_n(z) = u(z) < +\infty$ *para todo* $z \in \Omega$;

b) $\lim_n u_n(z) = +\infty$ *para todo* $z \in \Omega$.

En ambos casos la convergencia es uniforme sobre compactos. Cuando se cumple a) la función límite $u(z) = \lim_n u_n(z)$ es armónica.

12.2. Ejercicios resueltos

Ejercicio 12.1.

Sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ una familia acotada de funciones holomorfas. Demuestre que la función $\varphi(z) = \sup\{|f(z)| : f \in \mathscr{F}\}$ es continua en Ω.

SOLUCIÓN.

Por ser $\mathscr{F}$ una familia acotada se cumple que $\varphi(z) < +\infty$ para cada $z \in \Omega$. Según el teorema de Montel la familia acotada $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es equicontinua: para cada $a \in \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a,\delta) \subset \Omega$ tal que si $z \in D(a,\delta)$ y $f \in \mathscr{F}$ entonces $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$, luego

$$|f(a)| - \varepsilon \leq |f(z)| \leq |f(a)| + \varepsilon.$$

Tomando supremos cuando f varía en $\mathscr{F}$ se obtiene que para $z \in D(a,\delta)$

$$\varphi(a) - \varepsilon \leq \varphi(z) \leq \varphi(a) + \varepsilon.$$

Ejercicio 12.2.

Sean Ω, U subconjuntos abiertos del plano complejo y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ una familia tal que $f(\Omega) \subset U$ para cada $f \in \mathscr{F}$. Se supone que $h \in \mathscr{H}(U)$ transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Demuestre que si $\mathscr{F}$ es una familia normal entonces la familia $\mathscr{G} = \{h \circ f : f \in \mathscr{F}\}$ también lo es. Muestre con un ejemplo que el resultado es falso cuando h no transforma acotados en acotados.

SOLUCIÓN.

Según el teorema de Montel basta demostrar que si la familia $\mathscr{F}$ es acotada entonces la familia $\mathscr{G}$ también es acotada.

Si $\mathscr{F}$ es acotada, para cada compacto $K \subset \Omega$ el conjunto

$$\mathscr{F}(K) = \bigcup\{f(K) : f \in \mathscr{F}\} \subset U$$

es acotado. Por hipótesis h transforma este conjunto en el conjunto acotado $h(\mathscr{F}(K)) = \{g(K) : g \in \mathscr{G}\}$, lo que significa que la familia $\mathscr{G}$ es acotada.

El siguiente ejemplo muestra que el resultado es falso cuando g no transforma acotados en acotados: consideremos los abiertos $\Omega = \mathbb{C}$, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y la función $h(z) = 1/z$, definida en U. Es claro que la familia de funciones constantes $\mathscr{F} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, pero la familia de funciones constantes $\mathscr{G} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ no lo es.

Ejercicio 12.3.

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ una familia tal que $f(\Omega) \subset U$ para cada $f \in \mathscr{F}$. Si $h \in \mathscr{H}(U)$ es inyectiva, demuestre que la familia $\mathscr{F}$ es τ_K-compacta si y sólo si la familia $\mathscr{G} = \{h \circ f : f \in \mathscr{F}\}$ es τ_K compacta.

SOLUCIÓN.

En virtud del teorema de la aplicación abierta $V = h(U)$ es abierto y $h : U \longrightarrow V$ es un isomorfismo conforme. Basta demostrar que la aplicación $\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ definida por $f \to h \circ f$ es un homeomorfismo cuando $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ se consideran con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Sólo demostraremos la continuidad de $f \to h \circ f$ ya que el mismo argumento proporciona la continuidad de la transformación inversa $g \to h^{-1} \circ g$. En definitiva, hay que demostrar que si $f_n \in \mathscr{F}$ converge hacia $f \in \mathscr{F}$ uniformemente sobre compactos entonces $h \circ f_n$ converge hacia $h \circ f$ uniformemente sobre compactos.

Dado $\varepsilon > 0$ y un compacto $K \subset \Omega$, como $f(K) \subset U$ es compacto, existe $\alpha > 0$ tal que $M_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : d(w, f(K)) \leq \alpha\}$ está contenido en U. Por la continuidad uniforme de h sobre el conjunto cerrado y acotado M_α, existe $0 < \delta < \alpha$ tal que

$$w, w' \in M_\alpha, \ |w - w'| < \delta \Rightarrow |h(w) - h(w')| < \varepsilon.$$

Como f_n converge hacia f uniformemente sobre K, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n(\delta) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| \leq \delta \text{ para todo } z \in K.$$

Sea $n \geq n(\delta)$ y $z \in K$. Como $0 < \delta < \alpha$ y $f(z) \in f(K)$ se sigue que $f_n(z) \in M_\alpha$, luego

$$n \geq n(\delta) \Rightarrow \left|h(f_n(z)) - h(f(z))\right| < \varepsilon \text{ para todo } z \in K.$$

Queda probado que $h \circ f_n$ converge hacia $h \circ f$ uniformemente sobre K.

Ejercicio 12.4.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ una familia que verifica

a) existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado;

b) $\overline{\bigcup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$.

Demuestre que $\mathscr{F}$ es normal.

SOLUCIÓN.

En virtud de *b*) existe un disco $D(b, r)$ tal que para cada $f \in \mathscr{F}$ se cumple $D(b, r) \cap f(\Omega) = \emptyset$. Si $f \in \mathscr{F}$ la función $R(f) = g$, definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

es holomorfa en Ω y verifica $|g(z)| \leq 1/r$ para todo $z \in \Omega$.

La familia $\mathscr{G} = \{R(f) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotada, y por lo tanto normal (teorema de Montel), lo que significa que su clausura $\overline{\mathscr{G}}$ en la topología τ_K es compacta para esta topología. Demostraremos que las funciones de $\overline{\mathscr{G}}$ no tienen ceros, lo que permitirá definir en $\overline{\mathscr{G}}$ la transformación inversa de R,

$$S : \overline{\mathscr{G}} \longrightarrow \mathscr{H}(\Omega), \quad S(g) = b + \frac{1}{g}$$

Veremos luego que S es continua, para las topologías de convergencia uniforme sobre compactos. Como las funciones continuas transforman compactos en compactos se obtendrá que $S(\overline{\mathscr{G}})$ es compacto en $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ y con ello que $\mathscr{F} \subset S(\overline{\mathscr{G}})$ es una familia normal.

Para ver que las funciones de $\overline{\mathscr{G}}$ no tienen ceros, observemos en primer lugar que, en virtud de *a*), existe $B > 0$ tal que $|f(a)| < B$ para cada $f \in \mathscr{F}$. Entonces, para cada $g = R(f) \in \mathscr{G}$ se cumple

$$|g(a)| = \frac{1}{|f(a) - b|} \geq \frac{1}{B + |b|} = C > 0.$$

Para $g \in \overline{\mathscr{G}}$, también se cumple $|g(a)| \geq C$, y existe una sucesión $g_n \in \mathscr{G}$ que converge uniformemente sobre compactos hacia g. Como las funciones de $\mathscr{G}$ no tienen ceros y Ω es conexo, un corolario del teorema de Hurwitz garantiza que, o bien $0 \notin g(\Omega)$, o bien g es idénticamente nula. Como la segunda eventualidad no se puede presentar se concluye que g no tiene ceros en Ω.

Para establecer la continuidad de S basta ver que si $g_n \in \overline{\mathscr{G}}$ converge hacia $g \in \overline{\mathscr{G}}$ uniformemente sobre compactos entonces $1/g_n$ también converge hacia $1/g$ uniformemente sobre compactos.

Si $K \subset \Omega$ es compacto y $2M = \min\{|g(z)| : z \in K\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ y todo $z \in K$ se verifica $|g_n(z) - g(z)| \leq M$, luego

$$|g_n(z)| \geq |g(z)| - |g_n(z) - g(z)| \geq 2M - M = M$$

Entonces para todo $n > m$ y todo $z \in K$ se cumple

$$\left|\frac{1}{g_n(z)} - \frac{1}{g(z)}\right| = \frac{|g_n(z) - g(z)|}{|g_n(z)g(z)|} \leq \frac{1}{M^2}|g_n(z) - g(z)|$$

y se sigue de esto que $1/g_n$ converge hacia $1/g$ uniformemente sobre K.

Nota. Un profundo teorema de Montel-Caratheodory (véase [4], 4.1) afirma que el resultado de la proposición anterior se sigue verificando cuando la condición b) se sustituye por la condición más débil:

b') Existen $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ tales que cada $f \in \mathscr{F}$ omite los valores a y b.

Ejercicio 12.5.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ una familia que verifica

a) *existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado;*

b) *$f(\Omega)$ no corta al semieje real negativo para cada $f \in \mathscr{F}$.*

Demuestre que $\mathscr{F}$ es normal.

SOLUCIÓN.

Si $\sqrt{z}$ es la raíz cuadrada principal, definida en el complemento del eje real negativo, la condición b) permite definir la familia $\mathscr{G} = \{\sqrt{f} : f \in \mathscr{F}\}$ que es normal en virtud del ejercicio 12.4 (pues $\{g(a) : g \in \mathscr{G}\}$ es acotado y $g(\Omega) \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ para cada $g \in \mathscr{G}$). Como z^2 transforma acotados en acotados, $\mathscr{F} = \{g^2 : g \in \mathscr{G}\}$ también es normal (véase el ejercicio 12.2).

Ejercicio 12.6.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, $a \in \Omega$ y $\mathscr{F} \subset \{f \in \mathscr{H}(\Omega) : f(a) = 0\}$. Demuestre que la familia $\mathscr{G} = \{e^f : f \in \mathscr{F}\}$ es normal (resp. compacta) si y sólo si $\mathscr{F}$ es normal (resp. compacta)

SOLUCIÓN.

a) Veamos en primer lugar que si $\mathscr{F}$ normal (resp. compacta) entonces $\mathscr{G}$ es normal (resp. compacta). Para ello basta ver que la aplicación $f \to e^f$ es continua para la topología natural de $\mathscr{H}(\Omega)$, es decir, que si $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces $g_n = e^{f_n}$ converge uniformemente sobre compactos hacia $g = e^f$.

Si $K \subset \Omega$ es compacto y $M_K = \max\{|e^{f(z)}| : z \in K\}$, para cada $z \in K$ se cumple

$$|g_n(z) - g(z)| = |e^{f(z)}||e^{f_n(z)-f(z)} - 1| \leq M_K|e^{f_n(z)-f(z)} - 1|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|e^w - 1| < \varepsilon/M_K$ si $|w| < \delta$. Por la convergencia uniforme sobre K, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_\delta$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \delta$ para todo $z \in K$. Por lo tanto $|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_\delta$ y todo $z \in K$.

b) Veamos en segundo lugar que si $\mathscr{G}$ es normal entonces $\mathscr{F}$ es normal.

Para obtener que $\mathscr{F}$ es normal basta demostrar que para cada $b \in \Omega$ hay un disco $D(b,\rho) \subset \Omega$ tal que la familia de las restricciones $\mathscr{F}|_{D(b,\rho)}$ es normal en $\mathscr{H}(D(b,\rho))$. Consideremos el subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ formado por los puntos $b \in \Omega$ tales que hay un disco $D(b,\rho) \subset \Omega$ con la propiedad que se acaba de mencionar. Demostraremos, con el argumento típico de conexión, que $\Omega_0 = \Omega$.

Comenzamos viendo que $\Omega_0 \neq \emptyset$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Puesto que $\mathscr{G}$ es normal existe $\alpha > 0$ tal que $|e^{f(z)}| \leq \alpha$ para cada $f \in \mathscr{F}$ y cada $z \in D(a,r)$. Como $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ resulta $\operatorname{Re} f(z) \leq \log \alpha$ para todo $z \in D(a,r)$. Como $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\} = \{0\}$ es acotado, usando el ejercicio 12.4 se obtiene que $\mathscr{F}|_{D(a,r)}$ es normal en $\mathscr{H}(D(a,r))$ y con ello que $a \in \Omega_0$.

Se comprueba fácilmente que Ω_0 es abierto y basta demostrar que también es cerrado en la topología relativa de Ω, para concluir, en virtud de la conexión de Ω, que $\Omega = \Omega_0$ y con ello que $\mathscr{F}$ es normal.

En definitiva, hay que demostrar que si $b \in \Omega$ es límite de una sucesión $b_n \in \Omega_0$ entonces $b \in \Omega_0$. Efectivamente, sea $\rho > 0$ tal que $\overline{D(b,\rho)} \subset \Omega$. Fijando un $b_m \in D(b,\rho)$, y razonando como antes, se obtiene $\beta > 0$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \leq \log \beta$ para todo $z \in D(b,\rho)$. Como el conjunto $\{f(b_m) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado (porque $b_m \in \Omega_0$) con el ejercicio 12.4 se obtiene que $\mathscr{F}|_{D(b,r)}$ es normal, y con ello que $b \in \Omega_0$.

c) Veamos por último que si $\mathscr{G}$ es compacta entonces $\mathscr{F}$ también lo es.

Después de lo demostrado en b) basta ver que $\mathscr{F}$ es cerrado en $\mathscr{H}(\Omega)$, es decir, que si $f_n \in \mathscr{F}$ converge hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ uniformemente sobre compactos entonces $f \in \mathscr{F}$.

Según hemos visto en a) la sucesión $e^{f_n} \in \mathscr{G}$ converge uniformemente sobre compactos hacia e^f y como $\mathscr{G}$ es cerrado debe ser $e^f \in \mathscr{G}$, lo que significa que existe $h \in \mathscr{F}$ con $e^f = e^h$. Como Ω es conexo y $f(a) = \lim_n f_n(a) = 0 = h(a)$ se sigue que $f = h \in \mathscr{F}$.

Ejercicio 12.7.

a) *Se considera una familia de funciones $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(D(0,1))$ y la familia de sus restricciones $\mathscr{F}|_\Omega = \{f|_\Omega : f \in \mathscr{F}\}$ a la corona $\Omega = \{z : \rho < |z| < 1\}$. Demuestre que $\mathscr{F}$ es normal (resp. compacta) en $\mathscr{H}(D(0,1))$ si y sólo si $\mathscr{F}|_\Omega$ es normal (resp. compacta) en $\mathscr{H}(\Omega)$.*

b) *Sea $f_n \in \mathscr{H}(D(0,1))$ una sucesión que cumple*

i) $|f_n(z)| > 1$ *para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$;*

ii) *existe* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *para todo $x \in (1/2, 1)$.*

Demuestre que f_n converge uniformemente sobre cada compacto K contenido en $D(0,1)$.

SOLUCIÓN.

a) La aplicación restricción $\mathscr{H}(D(0,1)) \longrightarrow \mathscr{H}(\Omega)$, $f \to f|_\Omega$, es continua para las topologías de convergencia uniforme sobre compactos. Como las funciones continuas transforman conjuntos compactos (resp. relativamente compactos) en conjuntos compactos (resp. relativamente compactos) se obtiene que $\mathscr{F}|_\Omega$ es compacta (resp. normal) si $\mathscr{F}$ es compacta (resp. normal).

Recíprocamente, si $\mathscr{F}|_\Omega$ es normal (resp. compacta) para ver que $\mathscr{F}$ tiene la misma propiedad basta demostrar que cada sucesión $f_n \in \mathscr{F}$ posee una subsucesión uniformemente convergente sobre compactos hacia una función $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ (resp. $f \in \mathscr{F}$).

Efectivamente, si suponemos que $\mathscr{F}|_\Omega$ es normal (resp. compacta) entonces existe una subsucesión $f_{n_j}|_\Omega$ que converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de Ω hacia una función $\varphi \in \mathscr{H}(\Omega)$ (resp. $\varphi \in \mathscr{F}|_\Omega$). En particular la convergencia es uniforme sobre cada circunferencia $\{z : |z| = r\} \subset \Omega$ con $\rho < r < 1$ y, usando el teorema del módulo máximo junto con la condición de Cauchy para la convergencia uniforme, se obtiene que f_{n_j} converge uniformemente sobre cada disco compacto $\{z : |z| \leq r\}$ con $\rho < r < 1$ (y por lo tanto sobre cada compacto $K \subset D(0,1)$). Claramente, su límite f es una prolongación analítica de φ, es decir una función $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ que verifica $f|_\Omega = \varphi$.

Obsérvese que cuando $\mathscr{F}|_\Omega$ es compacta la condición $f|_\Omega = \varphi \in \mathscr{F}|_\Omega$ implica que para alguna $g \in \mathscr{F}$ se verifica $f|_\Omega = g|_\Omega$ y, con el principio de identidad, se concluye que $f = g \in \mathscr{F}$.

b) Si $f_n \in \mathscr{H}(D(0,1))$ es una sucesión de funciones que cumple *i*) y *ii*), en virtud del ejercicio 12.4, la familia $\{f_n|_\Omega : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en $\mathscr{H}(\Omega)$ y aplicando el resultado anterior se obtiene que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal en $\mathscr{H}(D(0,1))$. Como la sucesión $f_n(x)$ converge para todo $x \in (r,1)$, con el teorema de Vitali se concluye que la sucesión f_n converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset D(0,1)$.

Ejercicio 12.8.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado, $a \in \Omega$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset \Omega$ y $f(a) = a$. Demuestre que $|f'(a)| \leq 1$ y que si $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo conforme entonces $|f'(a)| = 1$.

SOLUCIÓN.

Consideremos la sucesión $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ definida por $f_1 = f$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $f_n(\Omega) \subset \Omega$, donde Ω es acotado, luego la sucesión f_n es acotada. Según el teorema de Montel, f_n es una sucesión normal y, por lo tanto, posee una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente sobre compactos. El teorema de Weierstrass afirma que la sucesión de las derivadas f'_{n_k} también converge uniformemente sobre compactos y en particular la sucesión $f'_{n_k}(a)$ es convergente. Según la regla de la cadena $f'_n(a) = f'(a)^n$, luego la sucesión $f'(a)^{n_k}$ es convergente y por lo tanto $|f'(a)| \leq 1$.

Cuando f es un isomorfismo conforme, aplicando lo que se acaba de demostrar a la inversa $g = f^{-1}$ se obtiene que $|g'(a)| = 1/|f'(a)| \leq 1$, luego $|f'(a)| = 1$.

Nota. Si en vez de suponer que Ω es acotado se supone solamente que $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$ se obtiene la misma conclusión pues, en este caso, utilizando el ejercicio 12.4, también se obtiene que la sucesión f_n es normal.

Ejercicio 12.9.

Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, un punto $a \in \Omega$ y constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, se considera la familia de funciones

$$\mathscr{F} = \{f \in \mathscr{H}(\Omega) : |f'(a)| \geq \beta,\ |f(z)| \leq \alpha,\ \forall z \in \Omega\}.$$

Si $K \subset \Omega$ es compacto, sea $N(f, K)$ el número de ceros de $f \in \mathscr{F}$ en K, repetidos según multiplicidades. Demuestre que

$$\sup\{N(f, K) : f \in \mathscr{F}\} < +\infty.$$

SOLUCIÓN.

Cada $f \in \mathscr{F}$ no es idénticamente nula en el abierto conexo Ω, luego sus ceros son aislados por lo que, en virtud del teorema del punto de acumulación, no puede haber infinitos ceros de f en el compacto K, es decir, $N(f, K) < +\infty$.

Supongamos que para algún compacto $K \subset \Omega$ se cumple

$$\sup\{N(f, K) : f \in \mathscr{F}\} = +\infty.$$

En ese caso existiría una sucesión $f_n \in \mathscr{F}$ tal que $N(f_n, K) > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que la familia $\mathscr{F}$ es cerrada y acotada y, por lo tanto, compacta para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathscr{H}(\Omega)$. Por lo tanto, de la sucesión $f_n \in \mathscr{F}$ se podría extraer una subsucesión f_{n_k} uniformemente convergente sobre compactos hacia una función $f \in \mathscr{F}$.

El compacto K se podría recubrir con una cantidad finita de discos cerrados $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{D_j}$ sin ceros de f en sus fronteras. Aplicando el teorema de Hurwitz a la sucesión f_{n_k}, sobre cada uno de estos discos obtendríamos $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n_k > m$ las funciones f y f_{n_k} presentarían el mismo número de ceros en cada $\overline{D_j}$. Entonces $q = \sum_{j=1}^{m} N(f, \overline{D_j})$ sería una cota superior de la sucesión no acotada $N(f_{n_k}, K)$, y con esta contradicción termina la demostración.

Ejercicio 12.10.

Demuestre que la sucesión $f_n(z) = (1+z/n)^n$ converge uniformemente sobre compactos hacia e^z.

SOLUCIÓN.

Cuando $z = x \in \mathbb{R}$ es bien conocido que $\lim_n f_n(x) = e^x$. La sucesión es acotada pues, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, si $R = \max\{|z| : z \in K\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$ se cumple

$$|f_n(z)| \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{R}{n}\right)^n \leq e^R.$$

Aplicando el teorema de Vitali con $M = \mathbb{R}$ se obtiene el resultado.

Ejercicio 12.11.

Sea f una función holomorfa y acotada en $\Omega := \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ tal que su restricción al eje real verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

Demuestre que la sucesión $f_n(z) = f(n + z)$ converge hacia 0 uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.

SOLUCIÓN.

Como f es acotada la sucesión f_n es acotada en $\mathscr{H}(\Omega)$ y por lo tanto normal (en virtud del teorema de Montel). Por ello basta ver que si g es un punto de aglomeración de la sucesión f_n, para la topología de convergencia uniforme sobre compactos, entonces g es la función constante 0. Efectivamente, si f_{n_k} es una subsucesión que converge hacia g uniformemente sobre compactos, en virtud de la hipótesis se cumple

$$g(x) = \lim_k f(x + n_k) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

y, usando el principio de identidad, se concluye que g es idénticamente nula.

Ejercicio 12.12.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión acotada. Se supone que existe $a \in \Omega$ tal que para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la sucesión $\left(f_n^{(m)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

Basta demostrar que todas las subsucesiones τ_K-convergentes de f_n tienen el mismo límite. Sean $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiones que convergen uniformemente sobre compactos hacia g_1 y g_2 respectivamente. En virtud de la hipótesis y del teorema de Weierstrass, para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple

$$g_1^{(m)}(a) = \lim_k f_{n_k}^{(m)}(z) = \lim_n f_n^{(m)}(a) = \lim_j f_{m_j}^{(m)}(a) = g_2^{(m)}(a)$$

lo que garantiza que g_1 y g_2 tienen el mismo desarrollo en serie de potencias en $D(a, r) \subset \Omega$. Como Ω es conexo, el principio de identidad asegura que $g_1 = g_2$.

Ejercicio 12.13.

Dada $\varphi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\varphi(0) = 1$; para cada $t \in [-1, 1]$ se define

$$f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n, \quad \textit{donde } a_n(t) = n\varphi(t/n).$$

a) Compruebe que estas series de potencias tienen radio de convergencia 1 y que la familia $\mathscr{F} := \{f_t : |t| \leq 1\}$ es compacta en $\left(\mathscr{H}(D(0, 1)), \tau_K\right)$.

b) Justifique la existencia del límite $\lim_{t\to 0} f_t$, en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y calcule su valor.

SOLUCIÓN.

El radio de convergencia de las series de potencias es 1 pues

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n(t)|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\varphi(t/n)} = 1.$$

Si demostramos que es continua la aplicación $t \to f_t$, definida en $[-1, 1]$ con valores en el espacio $\left(\mathscr{H}(D(0, 1)), \tau_K\right)$, se obtendrá *a*) usando que $\mathscr{F}$ es la imagen continua del compacto $[-1, 1]$. También se obtendrá la existencia del límite $\lim_{t \to 0} f_t = f_0$ en la topología τ_K, siendo

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z(1 + 2z + 3z^2 + \cdots) =$$
$$= z(z + z^2 + z^3 + \cdots)' = z(z/(1-z))' = z/(1-z)^2$$

Si $M = \max\{|\varphi(t)| : |t| \leq 1\}$, dado $0 < r < 1$, para todo $z \in D(0, r)$ y todo $t \in [-1, 1]$ se cumple $|f_t(z)| \leq M(r)$, con $M(r) = M \sum_{n=0}^{\infty} n r^n < +\infty$. Con esto queda demostrado que la familia $\{f_t : |t| \leq 1\}$ es acotada en $\mathscr{H}(D(0,1))$ y por lo tanto normal, en virtud del teorema de Montel.

Para establecer la continuidad de la aplicación $t \to f_t$ hay que demostrar que si t_n es una sucesión en $[-1, 1]$ con $\lim_n t_n = t$, entonces $\lim_n f_{t_n} = f_t$ uniformemente sobre compactos. Para ello podemos razonar como en el ejercicio 12.12: utilizando que la familia $\mathscr{F}$ es normal y que f_t es el único punto de aglomeración de la sucesión f_{t_n} en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Obsérvese que, para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple $a_m(t) = \lim_n a_m(t_n)$, es decir, $f_t^{(m)}(0) = \lim_n f_{t_n}^{(m)}(0)$.

Ejercicio 12.14.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión que verifica:

a) existe $a \in \Omega$ tal que $\lim_{n \to \infty} f_n(a) = 1$;

b) $|f_n(z)| > 1$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que la sucesión f_n converge hacia 1, uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

En virtud del ejercicio 12.4 la sucesión f_n es normal y basta probar que si f_{n_k} es una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ entonces f es la función constante 1. Como la subsucesión f_{n_k} sigue verificando las condiciones *a*) y *b*), su límite f debe cumplir $f(a) = 1$ y $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \Omega$.

La función $1/f$ es holomorfa en Ω y $|1/f(z)| \leq 1 = |1/f(a)|$ para todo $z \in \Omega$. Con el teorema del módulo máximo se concluye que $1/f$ es constante en Ω. Obviamente el valor constante es 1, pues $f(a) = 1$.

Ejercicio 12.15.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $a \in \Omega$. Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es una sucesión normal demuestre que cada una de las siguientes condiciones implica su convergencia uniforme sobre compactos. Obtenga el límite en cada caso.

a) $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$, $\lim_{n \to \infty} |f_n(z)| = 1$ cuando $|z - a| = r$ y $\lim_n f_n(a) = 1$.

b) $0 \notin f_n(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n f_n(a) = 0$.

c) Cada f_n es inyectiva, $\lim_n f_n(a) = 1$ y $\lim_n f_n'(a) = 0$.

SOLUCIÓN.

Basta demostrar, en cada caso, que la sucesión f_n posee un único punto de aglomeración para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Sea f un punto de aglomeración de la sucesión f_n para esta topología y sea f_{n_k} una subsucesión que converge hacia f uniformemente sobre compactos.

a) $f(a) = \lim_k f_{n_k}(a) = 1$ y, para $|z - a| = r$, se cumple $|f(z)| = \lim_k |f_{n_k}(z)| = 1$. Con el teorema del módulo máximo se obtiene que $f(z) = 1$ para todo $z \in D(a, r)$ y con el principio de identidad se obtiene que $f(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$.

b) La sucesión f_{n_k} está formada por funciones que no se anulan nunca. Como $f(a) = 0$, con el teorema de Hurwitz se obtiene que f es idénticamente nula.

c) Según el teorema de Weierstrass la sucesión de las derivadas f'_{n_k} converge uniformemente sobre compactos hacia f'. Como las derivadas f'_{n_k} no se anulan nunca (porque las funciones f_{n_k} son inyectivas) y $f'(a) = 0$, aplicando el teorema de Hurwitz se obtiene que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Como Ω es conexo y $f(a) = 1$ se concluye que $f(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$.

Queda demostrado que la sucesión converge uniformemente sobre compactos hacia la función constante 1 en los casos *a*) y *c*), y hacia la función idénticamente nula en el caso *b*).

Ejercicio 12.16.

Se supone que $f_n \in \mathscr{H}\big(D(0,2)\big)$ *es una sucesión acotada que verifica*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1/j) = 1/j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) *f_n se anula en $D(0,2)$ cuando n es suficientemente grande;*

b) *la sucesión $f_n(1/n)$ es convergente.*

SOLUCIÓN.

Con el teorema de Vitali se obtiene que la sucesión f_n converge uniformemente sobre compactos hacia la función z.

a) Es consecuencia directa del teorema de Hurwitz.

b) Como f_n converge uniformemente sobre el compacto $\{0\}\cup\{1/k : k \in \mathbb{N}\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n(\varepsilon)$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple $|f_n(1/k)) - 1/k| < \varepsilon$ y, en particular, $|f_n(1/n) - 1/n| < \varepsilon$. Se obtiene así que $\lim_n (f_n(1/n) - 1/n) = 0$, luego $\lim_n f_n(1/n) = 0$.

Ejercicio 12.17.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $a_n \in \Omega$ una sucesión que converge hacia $a \in \Omega$, tal que $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se supone que $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ verifica:

a) $|f_n(z)| < 1$, *para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$;*

b) $\lim_{n\to\infty} |f_n(a_n)| = 1$.

Demuestre que la sucesión de funciones continuas $|f_n|$ converge hacia 1 uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

En virtud de a), con el teorema de Montel, se obtiene que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión normal. Esto significa que la sucesión está contenida en una familia compacta $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$. Como la aplicación

$$(\mathscr{H}(\Omega), \tau_k) \longrightarrow (C(\Omega), \tau_k), \quad f \to |f|$$

es continua, podemos asegurar que $|\mathscr{F}| = \{|f| : f \in \mathscr{F}\}$ es un subconjunto compacto de $(C(\Omega), \tau_K)$. Entonces, para ver que la sucesión de funciones continuas $|f_n|$ converge hacia 1 uniformemente sobre compactos basta demostrar que la función constante 1 es el único punto de aglomeración de la sucesión $|f_n|$.

Sea $\varphi \in |\mathscr{F}|$ un punto de aglomeración, para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, de la sucesión de funciones continuas $|f_n|$. Es decir una función que es límite, en esta topología, de una subsucesión $|f_{n_k}|$. Como esta subsucesión de funciones holomorfas es normal se puede extraer de ella una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia una función $f \in \mathscr{F}$, y es claro que ha de ser $|f| = \varphi$.

Como $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ es compacto podemos asegurar que

$$\lim_k |f_{n_k}(a_{n_k}) - f(a_{n_k})| = 0$$

y pasando al límite en la desigualdad

$$|f(a) - f_{n_k}(a_{n_k})| \leq |f(a) - f(a_{n_k})| + |f(a_{n_k}) - f_{n_k}(a_{n_k})|$$

se obtiene $f(a) = \lim_k f_{n_k}(a_{n_k})$, luego $|f(a)| = \lim_k |f_{n_k}(a_{n_k})| = 1$.

Por otra parte, la condición a) implica que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$ y, con el teorema del módulo máximo, se obtiene que f es constante. Como $|f(a)| = 1$ se sigue que $\varphi = |f|$ es la función constante 1. Queda demostrado así que la función constante 1 es el único punto de aglomeración de la sucesión de funciones continuas $|f_n|$

Ejercicio 12.18.

Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que converge en un punto $a \in \Omega$ y verifica

$$0 < |f_n(z)| < |f_{n+1}(z)| < \cdots \ \textit{para todo } z \in \Omega \textit{ y todo } n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

Como f_n no se anula en Ω, $g_n = 1/f_n$ es una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Bastará probar que g_n converge uniformemente sobre compactos hacia una función $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ sin ceros en Ω, porque esto implica que $f_n = 1/g_n$ converge hacia $1/g$ uniformemente sobre compactos (véase el razonamiento hecho en la última parte del ejercicio 12.4)

La sucesión g_n es acotada, pues si C_K es una cota de $|g_1|$ sobre el compacto $K \subset \Omega$, también es cota de cada $|g_n|$ sobre K. En virtud del teorema de Montel la sucesión g_n es normal y, para demostrar que es convergente en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, basta ver que tiene un único punto de aglomeración en esta topología.

Si h_1, h_2 son puntos de aglomeración, se cumple

$$h_1(a) = h_2(a) = 1/f(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad |h_1(z)| = |h_2(z)| = \lim_n |g_n(z)|$$

para todo $z \in \Omega$. En virtud del teorema de Hurwitz las funciones h_1, h_2 no se anulan nunca, luego h_1/h_2 es holomorfa en el abierto conexo Ω y tiene módulo constante. Es bien sabido que esta condición implica que h_1/h_2 es constante y teniendo en cuenta que $h_1(a) = h_2(a)$ se concluye que $h_1 = h_2$.

Ejercicio 12.19.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión tal que la sucesión de sus partes reales converge uniformemente sobre compactos.

a) Si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y $f_n(a)$ converge, demuestre que f_n converge uniformemente sobre $D(a,r)$.

b) Utilice a) para demostrar que si f_n converge en algún punto entonces converge uniformemente sobre compactos.

SOLUCIÓN.

a) Sea $\rho > r$ tal que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$ y $f_n = u_n + iv_n$. La fórmula de Schwarz para $f_n - f_m$ es

$$(f_n - f_m)(a+\rho z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_n - u_m)(a+\rho e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta + i(v_n(a) - v_m(a))$$

Si $|z| \le t = r/\rho$ se cumple $\left|\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right| \le M$, con $M = \dfrac{1+t}{1-t}$, luego

$$|f_n(a+\rho z) - f_m(a+\rho z)| \le \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_n(a+\rho e^{i\theta}) - u_m(a+\rho e^{i\theta})|d\theta + |v_n(a) - v_m(a)|$$

Como la sucesión $v_n(a)$ converge y u_n converge uniformemente sobre $\{z : |z-a| = \rho\}$, de la última desigualdad se deduce que f_n cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme sobre $D(a,t\rho) = D(a,r)$ y con ello queda demostrada la afirmación *a*).

Se puede dar otra demostración de *a*) basada en la teoría de las familias normales. Razonando como antes, si $\rho > r$ es tal que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$ entonces $u_n|_{D(a,\rho)}$ es uniformemente acotada (porque es uniformemente convergente) y por lo tanto existe un semiplano H tal que $f_n(D(a,\rho)) \subset H$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Según el ejercicio 12.4 $\{f_n|_{D(a,\rho)} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión normal en $\mathscr{H}(D(a,\rho))$. Esta sucesión converge uniformemente sobre compactos (y en particular sobre $\overline{D(a,r)}$) debido a que posee un único punto de aglomeración en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. En efecto, si $g, h \in \mathscr{H}(D(a,\rho))$ son dos puntos de aglomeración, $g - h$ tiene parte real idénticamente nula y, por el teorema de la aplicación abierta, es constante. Como $g(a) = h(a) = \lim_n f_n(a)$ se concluye que $g = h$ y con ello finaliza la segunda demostración de *a*).

b) Sea C el subconjunto no vacío de Ω formado por los puntos a donde la sucesión $f_n(a)$ converge. Demostraremos que $C = \Omega$ y con ello que la sucesión f_n converge uniformemente sobre compactos (pues cada compacto $K \subset \Omega$ se puede cubrir con una cantidad finita de discos sobre los que hay convergencia uniforme).

La demostración de la igualdad $C = \Omega$ se hace con el argumento típico de conexión, viendo que C es abierto y cerrado en Ω (con su topología relativa). Después de a) es claro que C es abierto y sólo queda demostrar que $\overline{C} \cap \Omega \subset C$. Si $a \in \overline{C} \cap \Omega$ existe una sucesión $a_n \in C$ con $a = \lim_n a_n$. Dado $r > 0$ tal que $\overline{D(a, 2r)} \subset \Omega$ existe $a_n \in D(a, r)$. Como $a_n \in C$ y $\overline{D(a_n, r)} \subset D(a, 2r) \subset \Omega$, aplicando a) se obtiene que f_n converge en todos los puntos de $D(a_n, r)$. Como $a \in D(a_n, r)$ queda demostrado que $a \in C$.

Ejercicio 12.20.

Sea u_n una sucesión de funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, que converge uniformemente sobre compactos hacia la función u.

Demuestre que para cada $a \in \Omega$ hay un disco $D(a, r) \subset \Omega$ y una sucesión $f_n \in \mathscr{H}(D(a, r))$ que converge uniformemente sobre $D(a, r)$ hacia una función $f \in \mathscr{H}(D(a, r))$, de modo que

$$\operatorname{Re} f = u|_{D(a,r)} \quad y \quad \operatorname{Re} f_n = u_n|_{D(a,r)} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como consecuencia obtenga que si $m, j, k \in \mathbb{N}$ y $m = j+k$ entonces la sucesión $\dfrac{\partial^m u_n}{\partial x^j \partial y^k}$ converge uniformemente sobre compactos hacia $\dfrac{\partial^m u}{\partial x^j \partial y^k}$.

SOLUCIÓN.

En virtud de la convergencia uniforme sobre compactos, la función límite u es armónica. Dado $a \in \Omega$ se elige $r > 0$ de modo que $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Sea $\rho > r$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$. Existe $f \in \mathscr{H}(D(a, \rho))$ tal que $\operatorname{Re} f = u|_{D(a,\rho)}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in \mathscr{H}(D(a, \rho))$ tal que $\operatorname{Re} f_n = u_n|_{D(a,\rho)}$. Podemos suponer $\operatorname{Im} f_n(a) = 0$, $\operatorname{Im} f(a) = 0$ y así tenemos garantizado que la sucesión $f_n(a) = u_n(a)$ converge hacia $f(a) = u(a)$.

Según el ejercicio 12.19, f_n converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $D(a, \rho)$. Su límite tiene la misma parte real que f y se anula en a y por lo tanto, en virtud del teorema de la aplicación abierta, es la función f.

Según el teorema de Weierstrass, para cada $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $f_n^{(m)}$ converge hacia $f^{(m)}$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $D(a, \rho)$, y en particular lo hace sobre $\overline{D(a, r)}$. Teniendo en cuenta este hecho y las relaciones

$$D_1 f_n = f_n', \;\; D_2 f_n = i f_n', \;\; D_{11} f_n = f_n'', \;\; D_{12} f_n = i f_n'', \;\; D_{22} f_n = -f_n''$$

se deduce que las sucesiones

$$D_1 f_n, \;\; D_2 f_n, \;\; D_{11} f_n, \;\; D_{12} f_n, \;\; D_{22} f_n$$

convergen uniformemente sobre compactos (respectivamente) hacia las funciones

$$D_1 f, \;\; D_2 f, \;\; D_{11} f \;\; D_{12} f, \;\; D_{22} f.$$

Tomando partes reales se obtiene el resultado pedido para $m \in \{1, 2\}$ y, razonando de modo recurrente, se obtiene para todo $m \in \mathbb{N}$.

12.3. Ejercicios propuestos

12.1 Estudie si las sucesiones

$$\frac{1}{n}(e^{nz}-1), \quad ze^{-\frac{1}{2}n^2z^2}$$

son normales en $\mathscr{H}(D(0,1))$.

12.2 Sea $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(D(0,1))$ la familia de las funciones holomorfas en $D(0,1)$ cuyo desarrollo en serie de potencias es de la forma $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ donde $|a_n| \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\mathscr{F}$ es una familia compacta en $\mathscr{H}(D(0,1))$.

12.3 Utilice el teorema de Vitali para demostrar que la sucesión $\operatorname{tg} nz$ converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ y obtenga su límite.

12.4 Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en $D(0,1)$, que no toman valores reales. Se supone que existen dos puntos distintos $a, b \in D(0,1)$ tales que $\lim_n f_n(a) = \lim_n f_n(b) = w \notin \mathbb{R}$. Demuestre que f_n converge, uniformemente sobre compactos de $D(0,1)$, hacia la función constante w.

12.5 Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω cuyas partes reales $\operatorname{Re} f_n$ forman una sucesión que converge uniformemente sobre compactos. Si la sucesión $f_n(a)$ converge para algún $a \in \Omega$ demuestre que f_n converge uniformemente sobre compactos.

12.6 Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos, donde Ω_1 es conexo, Ω_2 es simplemente conexo y $\Omega_1 \subset \Omega_2 \neq \mathbb{C}$. Se supone que $f_n \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ es una sucesión formada por funciones que cumplen $f_n(\Omega_1) \subset \Omega_2$, $f_n(a) = b$ $(a \in \Omega_1)$ y que para cada $z \in \Omega_1$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Demuestre que $f \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ y $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$.

12.7 Demuestre que toda sucesión uniformemente acotada de funciones armónicas en un abierto simplemente conexo posee una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos. ¿Se obtiene la misma conclusión cuando el abierto no es simplemente conexo?

12.8 Sea f_n una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo Ω que converge en algún punto y tal que la sucesión de sus partes reales es creciente. Demuestre que f_n converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

12.9 Se supone que u_n es una sucesión de funciones armónicas positivas en el abierto $\Omega = \{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$, que converge puntualmente hacia una función no idénticamente nula u. Demuestre que hay una sucesión $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos, tal que $\operatorname{Re} f_n = u_n$. Obtenga que u es una función armónica que no se anula en ningún punto de Ω.

12.10 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión que, para todo $z \in \Omega$, verifica

$$0 < |f_1(z)| < |f_2(z)| \cdots < |f_n(z)| < |f_{n+1}(z)| < \cdots$$

Se supone que existe $a \in \Omega$ tal que $|f_n(a)| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que la sucesión $\log |f_n|$ converge uniformemente sobre compactos hacia una función armónica en Ω.

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, Third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. MR 510197 (80c:30001) Citado en pág. 2.

[2] Tom M. Apostol, *Análisis matemático*, Segunda ed., Editorial Reverté S.A., 1976. MR 0344384 (49 #9123) Citado en págs. 14, 15 y 114.

[3] Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Avec le concours de Reiji Takahashi, Enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1961. MR 0147623 (26 #5138) Citado en pág. 2.

[4] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York, 1978. MR 503901 (80c:30003) Citado en págs. 2 y 374.

[5] Philip J. Davis, *The Schwarz function and its applications*, The Mathematical Association of America, Buffalo, N. Y., 1974, The Carus Mathematical Monographs, No. 17. MR 0407252 (53 #11031) Citado en pág. 2.

[6] Denis Feyel and Arnaud de la Pradelle, *Ejercicios sobre las funciones analíticas*, Paraninfo, Madrid, 1980. MR 636507 (82m:30001) Citado en pág. 1.

[7] Maurice Heins, *Complex function theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 28, Academic Press, New York, 1968. MR 0239054 (39 #413) Citado en págs. 2, 28 y 146.

[8] Einar Hille, *Analytic function theory. Vol. I*, Introduction to Higher Mathematics, Ginn and Company, Boston, 1959. MR 0107692 (21 #6415) Citado en pág. 2.

[9] ———, *Analytic function theory. Vol. II*, Introductions to Higher Mathematics, Ginn and Co., Boston, Mass.-New York-Toronto, Ont., 1962. MR 0201608 (34 #1490) Citado en pág. 2.

[10] Jan G. Krzyż, *Problems in complex variable theory*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971, Translation of the 1962 Polish original. MR 0447533 (56 #5844) Citado en pág. 1.

[11] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. Vol. I, II, III*, english ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1977, Translated and edited by Richard A. Silverman. MR 0444912 (56 #3258) Citado en pág. 2.

[12] Rolf Nevanlinna and V. Paatero, *Introduction to complex analysis*, Translated from the German by T. Kövari and G. S. Goodman, Addison-Wesley Publishing Co.,

Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR 0239056 (39 #415) Citado en pág. 2.

[13] Walter Rudin, *Análisis real y complejo*, Tercera ed., McGraw-Hill / Interamericana de España, Madrid, 1988. MR 924157 (88k:00002) Citado en pág. 2.

[14] Stanisław Saks and Antoni Zygmund, *Analytic functions*, Second ed., Państwowe Wydawnietwo Naukowe, Warsaw, 1965, Translated by E. J. Scott. MR 0180658 (31 #4889) Citado en pág. 2.

[15] Hans Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers. Circle geometry, Moebius transformation, non-Euclidean geometry*, Dover Publications Inc., New York, 1979, A corrected reprinting of the 1962 edition. MR 620163 (82g:51032) Citado en págs. 2 y 71.

[16] Gabriel Vera, *Lecciones de análisis complejo*, http://webs.um.es/ gvb/AC, 2011. Citado en págs. 13 y 113.

[17] L. Volkovysky, G. Lunts, and I. Aramonovich, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, Second ed., Mir Publishers, Moscow, 1977. MR 0444913 (56 #3259) Citado en pág. 1.

Índice terminológico