

Teoría del muestreo para señales digitales y DFT*

1. Señales digitales y DFT

Las señales digitales (también llamadas discretas) no son otra cosa que sucesiones de números reales o complejos. Aunque en principio es posible pensar en señales discretas infinitas (por ejemplo, la señal que resulta de tomar muestras de una señal analógica $x \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R})$ para valores $t = kT$, $k \in \mathbb{Z}$), en la práctica todas las señales con las que se trabaja en aplicaciones empiezan y terminan en tiempo finito y, por tanto, para el estudio de señales digitales podremos suponer sin problemas que éstas son sucesiones finitas de números¹. En consecuencia, ofrecemos el siguiente modelo de señal digital:

Definición 1 *El espacio de las señales digitales (unidimensionales) de tamaño N es el conjunto*

$$l^2(\mathbb{Z}_N) = \{x : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C} : x \text{ es una aplicación}\}.$$

Este conjunto se puede, de hecho, identificar con el conjunto de las señales N -periódicas $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$l^2(\mathbb{Z}_N) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ aplicación} : x(k+N) = x(k) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}.$$

En aplicaciones reales, una señal digital (unidimensional) será una sucesión de números $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$, donde N es posiblemente muy grande. Entonces, por economía de espacio, etc., podría resultar muy interesante saber si a partir del conocimiento de la señal x en una muestra de valores $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq N-1$ es posible recuperar completamente la señal $x(k)$ para todo k . Este es precisamente el problema del muestreo (irregular) para señales digitales.

Evidentemente, si trabajamos con señales arbitrarias $x \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, entonces no será posible la recuperación de éstas a partir de valores de una muestra fija $0 < n_i < n_{i+1} < \dots < N$. Sin embargo, veremos que esto es posible cuando la señal es de banda limitada². Se verá, de hecho, que la teoría de señales digitales se soporta en conceptos y métodos sencillos de Álgebra Lineal.

En realidad, es claro que lo que hemos llamado anteriormente $l^2(\mathbb{Z}_N)$ no es otra cosa que una nueva forma de escribir el espacio vectorial \mathbb{C}^N , interpretando sus elementos, los vectores $v =$

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, “Matemáticas para la recuperación de señales”, Grupo Editorial Universitario, 2005.

¹Algunos autores llaman finitas a este tipo de señales. De hecho, es también posible restringir la atención sobre las señales finitas que además están cuantizadas, es decir, que sólo pueden tomar un número finito de valores. Esto, sin embargo, no resulta cómodo desde un punto de vista matemático.

²Este concepto se define, para el caso discreto, en la siguiente sección

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ como las funciones $x(k) = \alpha_k$ ($k = 0, \dots, N-1$). Entonces, algunos conceptos como la norma y el ángulo que forman dos vectores se pueden trasladar al contexto de las señales digitales de forma inmediata. Así pues, llamamos **energía** de la señal $x \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ al escalar

$$\mathbf{E}(x) = \|x\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, el producto escalar de dos señales $x, y \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ está dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \overline{y(k)}.$$

En particular, las señales x, y anteriores se dicen ortogonales si se verifica que

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \overline{y(k)} = 0.$$

Como es natural, en lo que sigue vamos a suponer que se ha fijado el tamaño N de las señales con las que se desea trabajar. Entonces $l^2(\mathbb{Z}_N)$, el espacio de las señales digitales de periodo N , es un espacio vectorial complejo de dimensión (finita) N (dimensión $2N$, si se considera como espacio vectorial real, y de nuevo dimensión N , como e.v. real, si se considera que las señales toman solo valores reales). En este espacio el Análisis de Fourier es, por tanto, muy sencillo.

Teorema 1 La familia $\{e_k(n) = e^{\frac{2\pi i k n}{N}}\}_{k=0}^{N-1}$ es una base ortogonal de $l^2(\mathbb{Z}_N)$. Además, $\|e_k\| = \sqrt{N}$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Demostración. Como $\dim_{\mathbb{C}} l^2(\mathbb{Z}_N) = N$, bastará comprobar que las señales $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ definidas anteriormente son ortogonales dos a dos. Veámoslo:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} e_k(n) \overline{e_l(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i l n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}} \right)^n \end{aligned}$$

Ahora, como $1 + x + \dots + x^{N-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$ (si $x \neq 1$), entonces tenemos que

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1 - e^{2\pi i (k-l)}}{1 - e^{\frac{2\pi i (k-l)}{N}}} = 0$$

para $k \neq l$ y $\langle e_k, e_k \rangle = N$ para todo k . Esto finaliza la prueba. \square

Como consecuencia del resultado anterior, es claro que podemos escribir cualquier señal $x \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ en la forma

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k(n) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}, \quad (2)$$

donde

$$\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \quad (3)$$

denota la **transformada de Fourier discreta (DFT)** de la señal $x = \{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$. De hecho, la fórmula (2) responde al cálculo de la **transformada inversa de Fourier discreta**, pudiendo considerar (3) y (2) como procesos inversos. Es decir, el operador $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_N)$, $x \rightarrow \mathcal{F}(x) = \hat{x}$ es un isomorfismo de espacios de Banach cuyo operador inverso está descrito por la expresión (2). Por otra parte, es evidente que se satisface la siguiente fórmula de Plancherel

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{x}(k)|^2.$$

En este contexto, podemos definir la convolución circular de las señales $x, y \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ considerándolas como señales periódicas de periodo N ,

$$x \odot y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n - k)$$

Teorema 2 *Supongamos que $x, y \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ son señales digitales periódicas de periodo N y sea $z = x \odot y$ su convolución circular. Entonces $\hat{z} = \hat{x} \cdot \hat{y}$, donde $u \cdot v$ denota el producto, componente a componente, de los vectores u y v (i.e., $(u_1, \dots, u_N) \cdot (v_1, \dots, v_N) = (u_1 v_1, \dots, u_N v_N)$). Análogamente, se tiene que $IDFT(X \cdot Y) = IDFT(X) \odot IDFT(Y)$.*

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{n=0}^{N-1} y(n-k) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y(n-k) e^{-\frac{2\pi i m (n-k)}{N}} \\
 &= \hat{x}(m) \sum_{n=0}^{N-1} y(n-k) e^{-\frac{2\pi i m (n-k)}{N}}.
 \end{aligned}$$

Ahora, como y es N -periódica, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{N-1} y(n-k) e^{-\frac{2\pi i m (n-k)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} = \hat{y}(m)$$

y, por tanto, $\hat{z}(m) = \hat{x}(m)\hat{y}(m)$ para todo m . Esto concluye la primera parte del resultado. Veamos ahora que se satisface también la segunda parte. Para ello, tomamos $z = \text{IDFT}(X) \odot \text{IDFT}(Y)$ y calculamos su transformada de Fourier discreta. Por la primera parte del teorema sabemos que $\hat{z} = X \cdot Y$ y, por tanto, $z = \text{IDFT}(X \cdot Y)$, que es lo que deseábamos probar. \square

Si $x \in l^2(\mathbb{Z}_N)$, entonces el cálculo completo de su transformada de Fourier discreta $\hat{x} = \{\hat{x}(k)\}_{k=0}^{N-1}$ requiere N^2 multiplicaciones y sumas de números complejos. Esto supone un elevado esfuerzo computacional. Por ello, ha habido un enorme interés en el desarrollo de algoritmos para el cálculo eficiente de la DFT. Dichos algoritmos reciben el nombre genérico de **transformadas de Fourier rápidas (FFT)**³ Vamos a explicar la idea básica subyacente. Para ello, supongamos que N es par. Entonces podemos reordenar la suma

$$\hat{x}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \quad (0 \leq k < N)$$

de la siguiente forma: si $m = 2k$ es par, agrupamos los términos n y $n + N/2$, obteniendo que

$$x(n) e^{-\frac{2\pi i 2k n}{N}} + x(n + \frac{N}{2}) e^{-\frac{2\pi i 2k (n+N/2)}{N}} = x(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} + x(n + \frac{N}{2}) e^{-\frac{2\pi i k (n+N/2)}{N/2}},$$

de modo que

$$\hat{x}(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) + x(n + \frac{N}{2})) e^{-\frac{2\pi i k n}{N/2}} \tag{4}$$

³Obsérvese que estamos llamando transformada a lo que en realidad es simplemente un algoritmo para su cálculo.

Agrupando nuevamente los términos n y $n + N/2$, obtenemos que

$$\hat{x}(2k + 1) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi in}{N}} (x(n) - x(n + \frac{N}{2})) e^{\frac{-2\pi ikn}{N/2}}. \quad (5)$$

Se sigue, pues, que las componentes frecuenciales de índice par, $\hat{x}(2k)$ se pueden obtener mediante el cálculo de la transformada de Fourier discreta de la señal $N/2$ -periódica

$$x_e(n) = x(n) + x(n + N/2)$$

y las componentes frecuenciales de índice impar $\hat{x}(2k + 1)$ se obtienen calculando la DFT de la señal $N/2$ -periódica

$$x_o(n) = e^{\frac{2\pi in}{N}} (x(n) - x(n + N/2)).$$

De esta forma, si N es par, entonces el cálculo de su DFT tiene el coste del cálculo de dos DFT's de tamaño $N/2$ más $O(N)$ sumas y multiplicaciones (para el cálculo de las nuevas señales x_e, x_o). Por supuesto, este proceso se puede reiterar tantas veces como sea posible, siendo el caso óptimo aquel en el que $N = 2^M$ para cierto entero $M > 0$.

2. Señales digitales de banda limitada: Propiedades básicas

En esta sección vamos a presentar el modelo matemático básico que se utiliza en para el estudio de la teoría del muestreo de señales digitales. En particular, para nuestra presentación vamos a seguir el enfoque expuesto por Grochenig en [27] y Strohmer en [67]. Se trata de introducir el concepto digital análogo del concepto de señal de banda limitada que se ha estudiado en capítulos anteriores. La idea es muy simple: basta cambiar la transformada de Fourier usual por la transformada de Fourier discreta.

Definición 2 Decimos que la señal $x \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ es de banda limitada, con ancho de banda $\leq M$ (donde $0 < M < N/2$), si

$$\hat{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi ikn/N} = 0 \text{ para todo } k \text{ tal que } M < |k| \leq N/2.$$

El espacio de las señales de banda limitada con ancho de banda $\leq M$ se denota por \mathcal{B}_M . Evidentemente, $x \in \mathcal{B}_M$ si y solo si existe $y \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ tal que $y(k) = 0$ para $M < |k| \leq N/2$ y $x = \mathcal{F}^{-1}(y)$. Es decir,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M y(k) e^{\frac{2\pi ikn}{N}}.$$

Se sigue que \mathcal{B}_M es un espacio vectorial complejo de dimensión $2M + 1$.

Como los operadores DFT e IDFT conservan la ortogonalidad de las señales, podemos aprovechar la observación anterior para realizar el cálculo de la proyección ortogonal de $l^2(\mathbb{Z}_N)$ en \mathcal{B}_M , \mathbf{P} :

$l^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \mathcal{B}_M$. Para ello, bastará tener en cuenta que $\widehat{\mathbf{P}(x)}(k) = \hat{x}(k)$ para $|k| \leq M$ y $\widehat{\mathbf{P}(x)}(k) = 0$ para $M < |k| \leq N/2$ y calcular la transformada inversa de Fourier discreta de $\widehat{\mathbf{P}(x)}$. En fórmulas⁴,

$$\mathbf{P}(x)(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

Si $x \in \mathcal{B}_M$, entonces $x = \mathbf{P}(x)$ y, por tanto,

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \text{ para } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Se sigue que el problema del muestreo irregular puede plantearse como el siguiente problema de álgebra lineal: ¿Qué debemos exigir a $\{0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq N\}$ para garantizar que las ecuaciones

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{\frac{2\pi i k n_j}{N}} = x(n_j) \text{ para } j = 1, \dots, r \quad (6)$$

(para las que se conocen los valores $\{x(n_j)\}_{j=1}^r$) tengan una (única) solución $\{\hat{x}(k)\}_{k=-M}^M$? Como $A = (a_{jk})_{j=1, \dots, r}^{k=-M, \dots, M}$, donde

$$a_{jk} = e^{\frac{2\pi i k n_j}{N}} = \left(e^{\frac{2\pi i n_j}{N}} \right)^k$$

es una matriz de Vandermonde, es claro que tiene rango máximo (i.e., $\text{rank}(A) = \min\{r, 2M+1\}$) y, por tanto, se tiene que el problema del muestreo irregular admite una única solución⁵ siempre que $r \geq 2M+1$.

Es interesante observar que si nos quedamos con exactamente $2M+1$ de las ecuaciones que aparecen en (6), entonces el correspondiente sistema de ecuaciones se puede resolver en $\mathcal{O}(M^2)$ operaciones, recuperando la DFT de x (de modo que para recuperar x , bastará aplicar a continuación la IDFT a \hat{x}). Sin embargo, es conocido que el desprecio a la información proporcionada por las muestras redundantes que se desechan según este procedimiento, tiende a convertir el sistema en uno mal condicionado. Es por tanto importante la búsqueda de algoritmos que, haciendo uso de toda la información disponible, sean bien condicionados. (De esta forma, se logrará mayor estabilidad en los cálculos y fiabilidad en los resultados). Así, tenemos en el problema del muestreo irregular discreto un ejemplo importante de aplicación del álgebra lineal numérica.

3. El Teorema del muestreo digital uniforme

Antes de abordar la solución del problema del muestreo digital irregular, sería interesante estudiar el caso uniforme. En esta sección vamos a demostrar la versión digital del teorema clásico del muestreo.

⁴Otra forma de expresar esto es la siguiente: Para hallar $\mathbf{P}(x)$, primero se calcula \hat{x} , la DFT de x , luego se define $y(k) = \hat{x}(k)f(k)$, donde $f(k) = 1$ para $k \in \{0, 1, \dots, M\} \cup \{N-1-M, N-M, \dots, N-1\}$ y $f(k) = 0$ para $M < k < N-1-M$ y, finalmente, se calcula $\mathbf{P}(x) = \text{IDFT}(y)$. Es decir: filtramos la transformada de Fourier de x y luego calculamos la transformada de Fourier inversa, para obtener $\mathbf{P}(x)$.

⁵Por la forma como se ha planteado, sabemos que las ecuaciones admiten al menos una solución: nuestro máximo interés es, pues, la unicidad de soluciones.

Sea $x \in \mathcal{B}_M$. Entonces $\hat{x}(k) = \hat{x}(k)\chi_M(k)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ (donde $\chi_M(k) = 1$ para $k \in \{0, \dots, M\} \cup \{N-M, N-M, \dots, N-1\}$ y $\chi_M(k) = 0$ para $M < k < N-M$) y, por tanto,

$$x = \text{IDFT}(\hat{x}) = \text{IDFT}(\hat{x} \cdot \chi_M) = x \odot \text{IDFT}(\chi_M)$$

Definición 3 Llamamos seno cardinal discreto a la señal $\text{sinc}_M := \text{IDFT}(\chi_M)$. Esta señal es, como veremos, el análogo discreto de la señal sinc. En particular, es claro que si $x \in \mathcal{B}_M$ entonces $x = x \odot \text{sinc}_M$.

Lema 1

$$\text{sinc}_M(n) = \frac{\sin(\pi(2M+1)n/N)}{N \sin(\pi n/N)} \text{ para } n \neq 0; \text{ y } \text{sinc}_M(0) = \frac{2M+1}{N}.$$

Demostración. Por definición,

$$\text{sinc}_M(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{i k \tau},$$

con $\tau = \frac{2\pi n}{N}$. Si $n = 0$ entonces es obvio que $\text{sinc}_M(n) = \frac{2M+1}{N}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-M}^M e^{i k \tau} &= e^{-i M \tau} \sum_{k=0}^{2M} (e^{i \tau})^k = e^{-i M \tau} \frac{e^{i(2M+1)\tau} - 1}{e^{i \tau} - 1} \\ &= \frac{e^{i(M+1)\tau} - e^{-i M \tau}}{e^{i \tau} - 1} = \frac{e^{i(M+1)\tau} - e^{-i M \tau}}{e^{i \tau} - 1} \frac{e^{-i \tau/2}}{e^{-i \tau/2}} \\ &= \frac{e^{i(M+\frac{1}{2})\tau} - e^{-i(M+\frac{1}{2})\tau}}{e^{i \tau/2} - e^{-i \tau/2}} = \frac{\sin((M+\frac{1}{2})\tau)}{\sin \frac{\tau}{2}}, \end{aligned}$$

de modo que, para $n \neq 0$, el resultado se sigue fácilmente tomando en la expresión anterior $\tau = \frac{2\pi n}{N}$. \square

Teorema 3 (Teorema del muestreo digital uniforme) Sea $x \in \mathcal{B}_M$ y sea d un divisor de N tal que $d(2M+1) \leq N$. Entonces la señal x queda determinada por el conjunto de valores $\{x(dj)\}_{j=0}^R$, donde $R = N/d - 1$. De hecho,

$$x(n) = \sum_{j=0}^R dx(dj) \text{sinc}_M(n - dj). \quad (7)$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{B}_M$. Esto significa que

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=-M}^M \hat{x}(t) e^{\frac{2\pi i t n}{N}}, \text{ para } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Sea $z(n) = \sum_{j=0}^R dx(dj) \text{sinc}_M(n - dj)$. Como $\text{sinc}_M(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$ y $d/N = 1/(R + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{j=0}^R \left(\frac{d}{N} x(dj) \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i k (n-dj)}{N}} \right) \\ &= \sum_{j=0}^R \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{t=-M}^M \hat{x}(t) e^{\frac{2\pi i t dj}{N}} \right) \left(\frac{d}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i k (n-dj)}{N}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^R \left(\sum_{t=-M}^M \hat{x}(t) \left(\frac{d}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i nk}{N} + \frac{2\pi i (t-k)jd}{N}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{t=-M}^M \hat{x}(t) \left(\sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i nk}{N}} \left(\frac{1}{R+1} \sum_{j=0}^R e^{\frac{2\pi i (t-k)j}{R+1}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que $d(2M + 1) \leq N$ equivale a decir que $\frac{N}{d} = R + 1 \geq 2M + 1$ y, por tanto, bajo las hipótesis del teorema sabemos que si $\{t, k\} \subset \{-M, -M + 1, \dots, 0, 1, \dots, M\}$ y $t \neq k$, entonces $\frac{t-k}{R+1} \notin \mathbb{Z}$ y, por tanto,

$$\frac{1}{R+1} \sum_{j=0}^R e^{\frac{2\pi i (t-k)j}{R+1}} = \delta_{t,k}$$

De modo que

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=-M}^M \hat{x}(t) e^{\frac{2\pi i n t}{N}} = x(n),$$

que es lo que queríamos probar. □

A continuación incluimos un programa de Matlab válido para utilizar el teorema anterior para la recuperación de señales a partir de valores muestrales uniformemente distribuidos en $0, \dots, N - 1$.

```
function xrec=muestreouniforme(N,M,d);
% Funcion muestreouniforme(N,M,d)
% Este programa genera, de forma aleatoria, una señal x(n) de tamaño N y ancho de banda M
% muestrearla uniformemente con paso d, la recupera utilizando el teorema del muestreo dig
%
% Evidentemente, este programa se puede modificar de forma muy simple para que, en vez de
% de modo aleatorio, tome dicha señal como dato y a dicha señal el teorema del muestreo (E

% N=longitud de la señal
% M=ancho de banda
% d=espaciado de la muestra
% xrec = la salida
% %%%%%%%%%%%
% Generamos una señal aleatoria (con distribución normal) de tamaño N.
close all;
```

```

y=randn(1,N);
% Usamos dicha señal para convertirla en una señal de banda limitada con ancho de banda <=
filt1=ones(1,M+1);
filt2=zeros(1,N-2*M-1);
filt3=ones(1,M);
filt=[filt1 filt2 filt3];
y=y.*filt;
x=1000*ifft(y);
% Calculamos las muestras que nos haran falta para aplicar el teorema del muestreo digital
r=(N/d)-1;
% Aplicamos el teorema del muestreo digital uniforme (Para ello, haremos uso de la función
% discretsincvector.m, que mostramos implementada a continuación de este algoritmo).
sincvector=discretsincvector(M,N);
for t=0:1:N-1
    for j=0:1:r
        tau(j+1)=d*x((d*j)+1)*sincvector(t-d*j+N);
    end
xrec(t+1)=sum(tau);
end

% Dibujamos los resultados logrados.

% Dibujamos la parte real de: la señal original, los valores muestrales, y la señal recuperada
z=1:1:N;
xp=0:d:N-1;
figure;
subplot(3,1,1); plot(z,real(x)); xlabel('Parte real de la señal');
subplot(3,1,2); stem(xp,real(x(xp+1))); xlabel('Valores muestrales');
subplot(3,1,3); plot(z,real(xrec),'r'); xlabel('Parte real de la señal recuperada');
figure;
% Dibujamos la parte imaginaria de: la señal original, los valores muestrales, y la señal
subplot(3,1,1); plot(z,imag(x)); xlabel('Parte imaginaria de la señal');
subplot(3,1,2); stem(xp,imag(x(xp+1))); xlabel('Valores muestrales');
subplot(3,1,3); plot(z,imag(xrec),'r'); xlabel('Parte imaginaria de la señal recuperada');
% Dibujamos los errores cometidos tanto para la parte real como para la parte imaginaria
figure;
subplot(2,1,1); plot(z,real(x-xrec)); xlabel('Parte real del Error');
subplot(2,1,2); plot(z,imag(x-xrec)); xlabel('Parte imaginaria del Error');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Función auxiliar discretsincvector
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function SM = discretsincvector(M,N)
% function SM = discretsincvector(M,N)
% Calcula el analogo discreto de la función seno cardinal para trabajar con señales de banda
% (ancho de banda M) y tamaño N dados. Calcula dicha función entre -(N-1) y N-1, que es do
%
% Parametros:
% M: ancho de banda
% N: tamaño de la señal

```

```

% SM: vector salida
%
% Autores: J. M. Almira, A. E. Romero (2005).
%
% Vector de abcisas
t = (-N+1):(N-1);

% Reservamos memoria: la señal SM (salida) será un vector 1xN (todo a cero, inicialmente)
SM = repmat(double(0), size(t));

% Calculamos la función muestreo para valores distintos de cero
% Ojo al direccionamiento con vectores

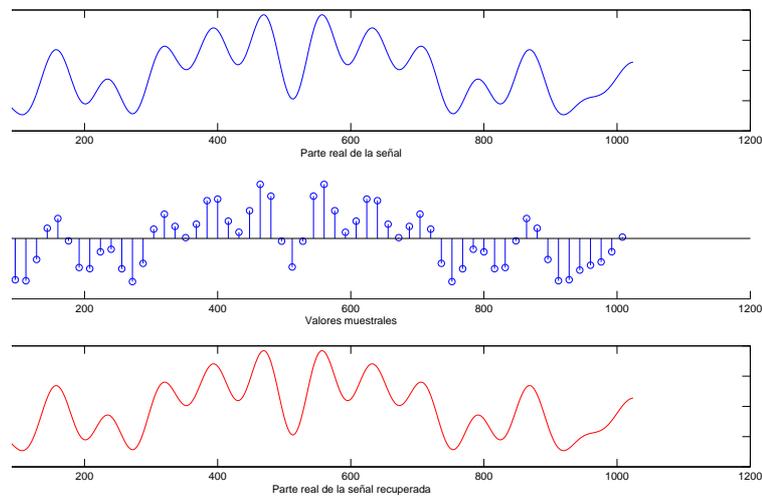
SM( t>0 ) = sin(pi*(2*M+1)*t(t>0)/N) ./ (N*sin(pi*t(t>0)/N));
SM( t<0 ) = sin(pi*(2*M+1)*(t(t<0)+N)/N) ./ (N*sin(pi*(t(t<0)+N)/N));

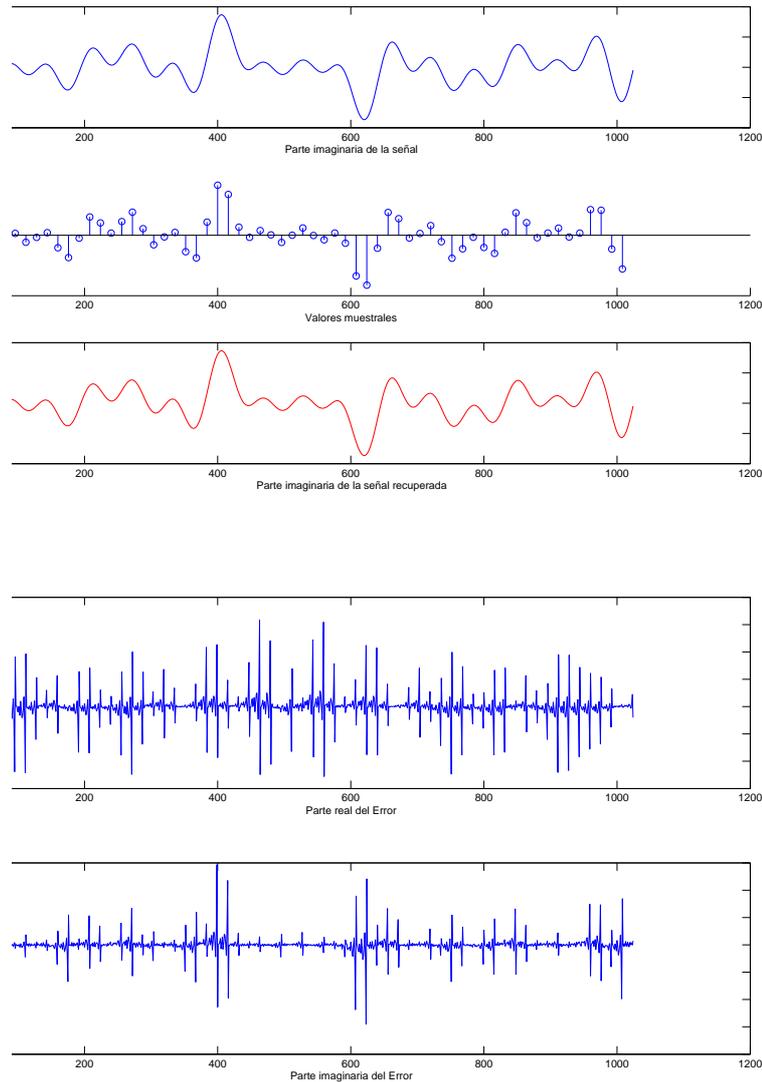
% Asignamos el valor (en el límite) de la función para t = 0

SM( t==0 ) = (2*M+1)/N;

```

Aplicando el algoritmo **muestreouniforme(N,M,d)** anterior, con $N = 1024$, $M = 16$, $d = 16$, obtenemos los siguientes gráficos:





4. Métodos iterativos para recuperación de señales discretas, basados en el muestreo irregular

En esta sección vamos a estudiar varios métodos iterativos, introducidos por K. Gröchenig en 1993 (ver [27]), para reconstruir señales $x \in \mathcal{B}_M$ a partir de sus muestras

$$\{x(n_1), x(n_2), \dots, x(n_r)\},$$

donde $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq N - 1$, $r \geq 2M + 1$. Generalmente, para construir uno de tales métodos se tiene en cuenta la siguiente propiedad:

Proposición 1 Sea $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal tal que $\|I - A\| < 1$. Entonces A es un isomorfismo lineal. En particular, si existe un operador lineal $A : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$, tal que para el cálculo

de Ax basta conocer los valores $\{x(n_i)\}_{i=1}^r$ y además satisface la desigualdad $\|I - A\| < 1$, entonces toda señal $x \in \mathcal{B}_M$ queda completamente determinada a partir de sus valores $\{x(n_i)\}_{i=1}^r$.

Demostración. Para demostrar la primera afirmación basta tener en cuenta que, como \mathbb{C}^n es un espacio vectorial de dimensión finita, si $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es inyectiva entonces es biyectiva. Ahora bien, si $\|I - A\| < 1$ entonces A es inyectiva puesto que, si $Ax = 0$ (con $x \neq 0$) entonces $\|x\| = \|(I - A)(x)\| \leq \|I - A\|\|x\| < \|x\|$, lo que es absurdo. La segunda afirmación es consecuencia de la primera, unido a que $x = A^{-1}(Ax)$ y $Ax = F(x(n_1), \dots, x(n_r))$ por hipótesis. \square

Podemos, por tanto, concluir que un método razonable para resolver el problema del muestreo digital irregular con señales de banda limitada, se puede basar en los siguientes pasos:

- Encontrar un operador lineal $A : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$, al cual llamamos “operador de aproximación”(y que juega el papel de, dados los valores muestrales de nuestra señal, proporcionar una “aproximación inicial”de la misma) tal que:
 - (a) Para el cálculo de Ax basta conocer los valores $\{x(n_i)\}_{i=1}^r$.
 - (b) Para cierto valor $\gamma \in (0, 1)$, y toda señal $x \in \mathcal{B}_M$ se satisface la desigualdad $\|x - Ax\| \leq \gamma\|x\|$
- Denotando $b = Ax$, utilizar un algoritmo adecuado para el cálculo de $x = A^{-1}b$.

En las condiciones que acabamos de describir, el cálculo de $A^{-1}b$ se suele basar en el uso del siguiente resultado técnico (que es probablemente uno de los antecedentes más importantes (debido a C. Neumann⁶) del conocido Teorema de la Aplicación Contractiva):

Lema 2 (C. Neumann, 1887) Sean X un espacio de Banach y $A : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. Si $\|x - Ax\|_X \leq \gamma\|x\|_X$ para todo $x \in X$ y cierta constante $\gamma \in (0, 1)$ entonces x se puede reconstruir a partir de Ax mediante la iteración

$$x_0 = Ax \text{ y } x_{n+1} = x_n + A(x - x_n) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Además, se verifica la siguiente estimación para el error cometido en el paso n -ésimo del algoritmo:

$$\|x - x_n\|_X \leq \gamma^{n+1}\|x\|_X.$$

Demostración. Veamos cuál es el efecto de la ejecución del algoritmo: Como $x_{n+1} = x_n + A(x - x_n) = (I - A)x_n + Ax$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (I - A)x_n + Ax \\ &= (I - A)((I - A)x_{n-1} + Ax) + Ax = (I - A)^2x_{n-1} + (I - A)Ax + Ax \\ &\vdots \\ &= (I - A)^{n+1}x_0 + (I - A)Ax + \dots + (I - A)Ax + Ax \end{aligned}$$

⁶C. G. Neumann (1832-1925). Fundamentalmente, trabajó en cuestiones de Matemática Aplicada, como Física Matemática, Teoría del potencial, o Electrodinámica. En la década de 1860 escribió varios trabajos sobre el principio de Dirichlet y el potencial logarítmico, que fue introducido por él. En 1890, Emile Picard utilizó los resultados de Neumann para desarrollar su conocido método de aproximaciones sucesivas (que utilizó para probar la existencia de soluciones en varios problemas de ecuaciones diferenciales). El Teorema de la Aplicación Contractiva (cuya versión abstracta general se debe a Banach) está inspirado en el método de Picard. Ver [51],[52],[65].

y, como $x_0 = Ax$, se concluye que

$$x_{n+1} = ((I - A)^{n+1} + (I - A)^n + \cdots + (I - A) + I) Ax$$

Por hipótesis, la norma del operador $I - A$ verifica $\|I - A\| \leq \gamma < 1$ y, por tanto, $\|(I - A)^k\| \leq \gamma^k$ para todo $k \geq 0$, de modo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^k$ es absolutamente convergente y converge en norma a cierto operador $T : X \rightarrow X$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} I - \sum_{k=0}^n (I - A)^k A &= I - \sum_{k=0}^n (I - A)^k (I - (I - A)) \\ &= I - \sum_{k=0}^n ((I - A)^k - (I - A)^{k+1}) \\ &= I - (I - (I - A)^{n+1}) \\ &= (I - A)^{n+1} \end{aligned}$$

y, por tanto, $\|x - x_n\| = \|(I - A)^{n+1}x\| \leq \gamma^{n+1}\|x\| \rightarrow 0$. Esto demuestra simultáneamente que $T = A^{-1}$ y la cota del error asegurada por el lema. \square

Nota 1 Para las aplicaciones es importante obtener una cota del error $\|x - x_n\|$ que no dependa de la norma de x puesto que se supone que desconocemos dicho dato. Esto se puede lograr fácilmente, si tenemos en cuenta que $I = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k A$ y que $\|x - x_n\| = \|(I - A)^{n+1}x\|$. Para verlo, basta realizar la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &\leq \|I - A\|^n \|(I - A)x\| \leq \gamma^n \|(I - A)x\| \\ &\leq \gamma^n \left\| \left(\sum_{i=0}^{\infty} (I - A)^i A - \sum_{i=0}^n (I - A)^i A \right) x \right\| = \gamma^n \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k \right) (A - A^2)x \right\| \\ &\leq \gamma^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|I - A\|^k \right) \|(A - A^2)x\| \\ &\leq \gamma^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \right) \|x_0 - x_1\| \\ &= \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

Nota 2 En la nota anterior hemos obtenido una estimación a priori del error cometido en el paso n -ésimo del algoritmo descrito por el Lema de Neumann. Por otra parte, si tenemos en cuenta que $x_n = ((I - A)^n + (I - A)^{n-1} + \cdots + (I - A) + I)Ax$, y, por tanto, $x_n - x_{n-1} = (I - A)^n Ax$, entonces podemos hacer la siguiente estimación a posteriori del error:

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \|(I - A)(I - A)^n x\| = \|(I - A)A^{-1}(I - A)^n Ax\| \\ &\leq \|I - A\| \|A^{-1}\| \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \gamma \frac{1}{1 - \gamma} \|x_n - x_{n-1}\|, \text{ puesto que } A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k. \end{aligned}$$

Como se verá, los cálculos descritos en las dos últimas notas permiten claramente especificar criterios de parada muy precisos a la hora de implementar algoritmos basados en el Lema de Neumann.

Nota 3 El Teorema de la aplicación contractiva garantiza que, si $F : X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva definida sobre el espacio métrico completo (X, d) (i.e., $d(F(x), F(y)) \leq \gamma d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y un cierto $\gamma \in (0, 1)$) entonces F tiene un único punto fijo (i.e. un punto $\alpha \in X$ tal que $F(\alpha) = \alpha$) y, además, para todo punto $x_0 \in X$ se tiene que el algoritmo descrito por

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge geoméricamente al único punto fijo de F .

En el contexto preciso del Lema de Neumann, basta tomar $F(z) = x_0 + (I - A)z$, donde $x_0 = Ax$. Evidentemente, F es contractiva y su único punto fijo es $x = A^{-1}x_0$.

Aunque el Lema de Neumann garantiza la convergencia geométrica del algoritmo, es frecuentemente necesario emplear métodos propios del álgebra lineal numérica para la aceleración de la convergencia. Por ejemplo, si A es una matriz definida positiva o un operador regular en un espacio de Hilbert, entonces los procesos de aceleración de la convergencia de Chebychev o del gradiente conjugado proporcionan excelentes resultados.

Ya podemos enunciar el resultado principal de este capítulo. Se trata del siguiente algoritmo para la reconstrucción de señales $x \in \mathcal{B}_M$ a partir de muestras irregularmente espaciadas en el tiempo.

Teorema 4 (Gröchenig, 1993) Supongamos que $0 \leq n_1 < \dots < n_r \leq N - 1$ satisface $2M(2[d/2] + 1) < N$, donde $d = \max\{n_{i+1} - n_i\}_{i=1}^r$ y $n_{r+1} = n_1 + N$. Entonces toda señal $x \in \mathcal{B}_M$ queda completamente determinada por sus muestras $\{x(n_i)\}_{i=1}^r$ y, de hecho, puede reconstruirse mediante el siguiente algoritmo:

$$x_0 = \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^r x(n_i) \chi_i \right) \quad (8)$$

$$x_{n+1} = x_n + \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^r (x(n_i) - x_n(n_i)) \chi_i \right), \quad (9)$$

donde χ_i denota la función característica asociada al conjunto $\{l_{i-1} + 1, l_{i-1} + 2, \dots, l_i\}$, y $l_i := \lceil \frac{n_i + n_{i+1}}{2} \rceil$ para $i = 1, \dots, r$; $l_0 = l_r - N$. Además, la convergencia del algoritmo es geométrica con razón $\gamma = \frac{\sin \frac{\pi M}{N}}{\sin \frac{\pi}{4[d/2]+2}}$. En particular⁷ se satisfacen las siguientes estimaciones del error:

$$\|x - x_n\| \leq \gamma^{n+1} \|x\|, \quad (10)$$

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|x_0 - x_1\|, \quad (11)$$

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (12)$$

⁷En realidad, las estimaciones (11) y (12) que aparecen en este teorema no se encuentran en el trabajo original de Gröchenig. Las hemos incluido aquí, con el objetivo de proporcionar buenos criterios de parada para este algoritmo. Lo mismo sucede en los otros resultados sobre recuperación de señales digitales que aparecerán posteriormente en este capítulo.

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 2 y las Notas 1, 2, sólo tendremos que realizar la estimación de $\|x - Ax\|$ para $x \in \mathcal{B}_M$ y $Ax = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r x(n_i)\chi_i)$. Tal como están definidas, es claro que las funciones χ_i satisfacen que $\sum_{i=1}^r \chi_i = 1$ para todo i , de modo que, para $x \in \mathcal{B}_M$, se tiene que

$$x = \mathbf{P}(x) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^r x\chi_i\right)$$

y, por tanto, podemos estimar $\|x - Ax\|$ como sigue:

$$\begin{aligned} \|x - Ax\|^2 &= \|\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^r (x - x(n_i))\chi_i\right)\|^2 \\ &\leq \left\|\sum_{i=1}^r (x - x(n_i))\chi_i\right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left|\sum_{i=1}^r (x(n) - x(n_i))\chi_i(n)\right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} |x(n) - x(n_i)|^2. \end{aligned}$$

Para continuar con esta estimación será necesario estudiar las diferencias $|x(n) - x(n_i)|$ anteriores, lo que se traduce en el uso de los siguientes resultados técnicos:

Lema 3 (Desigualdad de Bernstein Discreta) Denotemos por Δx la sucesión de diferencias $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$, donde forzamos, para conseguir periodicidad, la identidad $\Delta x(N-1) = x(0) - x(N-1)$. Entonces, para cada $x \in \mathcal{B}_M$ se tiene que

$$\|\Delta x\| \leq 2 \sin \frac{\pi M}{N} \|x\|.$$

Demostración. Tomemos $w = \exp(2\pi i/N)$. Entonces, para toda señal $x \in \mathcal{B}_M$, se tiene que

$$\widehat{(\Delta x)}(k) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n+1) - x(n))\bar{w}^{kn} = \widehat{x}(k)(w^k - 1).$$

Como la DFT es un operador unitario y $\widehat{x}(k) = 0$ para $M < |k| \leq N/2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| &= \|\widehat{\Delta x}\| = \left(\sum_{k=-M}^M |\widehat{x}(k)|^2 |w^k - 1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_{|k| \leq M} |w^k - 1| \left(\sum_{k=-M}^M |\widehat{x}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \sin \frac{\pi M}{N} \|x\|, \end{aligned}$$

ya que, para $|k| \leq M$ se tiene que

$$|w^k - 1| = |e^{2\pi ik/N} - 1| = 2 \sin \frac{\pi k}{N} \leq 2 \sin \frac{\pi M}{N}.$$

Esto concluye la prueba. \square

Lema 4 (Desigualdad de Wirtinger Discreta) *Se tiene que:*

- Si $x \in \mathcal{B}_M$, $x(1) = 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^d |x(n)|^2 \leq \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2d-1)}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{d-1} |\Delta x(n)|^2.$$

- Si $x \in \mathcal{B}_M$, $x(0) = x(d+1) = 0$ y $\Delta^2 x(n) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$, entonces

$$\sum_{i=1}^d |x(n)|^2 \leq \left(16 \sin^4 \frac{\pi}{2(d+1)}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{d-1} |\Delta^2 x(n)|^2.$$

Demostración. La idea es utilizar ciertas propiedades espectrales de las matrices Hermíticas. Sea H una matriz Hermítica de orden n . Entonces sus valores propios son todos reales y podemos, por tanto, ordenarlos de mayor a menor: $\sigma(H) = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n\}$. Como H es Hermítica, es diagonalizable con un cambio de base ortogonal y, por tanto, podemos afirmar que existe una base ortogonal de \mathbb{C}^n formada por vectores propios de H . Sea, pues, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una tal base, con $Hv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Lema 5 *Se tiene que:*

- $i)$ $\langle Hx, x \rangle \geq \lambda_n \langle x, x \rangle$ para todo x en el n -espacio \mathbb{C}^n .
- $ii)$ Si x es ortogonal a v_n , entonces $\langle Hx, x \rangle \geq \lambda_{n-1} \langle x, x \rangle$.
- $iii)$ Además, si $\lambda_{n-3} > \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} > \lambda_n$, entonces todo vector x ortogonal a v_n verifica que

$$(\langle Hx, x \rangle = \lambda_{n-1} \langle x, x \rangle) \Leftrightarrow x \in \text{span}\{v_{n-2}, v_{n-1}\}$$

Demostración. Dado $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, se tiene que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$ y

$$\begin{aligned} \langle Hx, x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \lambda_i \bar{a}_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i \\ &\geq \|x\|^2 \lambda_n. \end{aligned}$$

Esto demuestra i). Además, si x es ortogonal a v_n , entonces $x = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i$. Por tanto,

$$\langle Hx, x \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^2 \lambda_i \geq \lambda_{n-1} \|x\|^2$$

Esto demuestra ii). La tercera afirmación se sigue de forma análoga. \square

Consideremos ahora el problema del cálculo del valor mínimo de la expresión

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{d-1} |x(i) - x(i+1)|^2.$$

Es evidente que podemos escribir

$$\begin{aligned} \tau(x) &= (x(1) - x(2), \dots, x(d-1) - x(d)) \overline{(x(1) - x(2), \dots, x(d-1) - x(d))^t} \\ &= \langle Ax, Ax \rangle, \end{aligned}$$

donde la matriz A está dada por

$$A = \mathbf{fil}[(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1)] \in \mathbf{M}_{d-1 \times d}(\mathbb{C}).$$

De modo que

$$\tau(x) = \langle Ax, Ax \rangle = \overline{(Ax)}^t Ax = \overline{x}^t \overline{A}^t Ax = \overline{x}^t A^t Ax = \langle Hx, x \rangle,$$

donde $H = A^t A$ es la matriz Hermítica dada por

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{fil}[(2, -1, 0, \dots, 0); (-1, 2, -1, 0, \dots, 0); \dots \\ &\quad \dots; (0, \dots, 0, -1, 2, -1); (0, \dots, 0, -1, 2)] \end{aligned}$$

Ahora bien, en 1947 Rutherford calculó el polinomio característico de esta matriz (ver [61]), demostrando que

$$p_H(\lambda) = \det(\lambda I - H) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\lambda - 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{2n-1} \right).$$

Se sigue que el mínimo de los autovalores de H es

$$2 \left(1 + \cos \frac{2(d-1)\pi}{2d-1} \right) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2d-1)}$$

\square

Ahora vamos a continuar con nuestra demostración del Teorema 4. Tenemos que estimar las sumas

$$\sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} |x(n) - x(n_i)|^2; \quad i = 1, \dots, r.$$

Para realizar dicha estimación lo que se hace es descomponer la suma en dos trozos, teniendo en cuenta que $l_{i-1} + 1 \leq l_{i-1} + 2 \leq \dots \leq n_i \leq \dots \leq l_i$. Entonces, si definimos las señales discretas

$$\tilde{x}_1(j) = x(n_i + 1 - j) - x(n_i) \text{ para } j = 1, \dots, n_i - l_{i-1},$$

y

$$\tilde{x}_2(j) = x(n_i - 1 + j) - x(n_i) \text{ para } j = 1, \dots, l_i - n_i + 1,$$

se observa de forma trivial que los valores

$$\{|\tilde{x}_1(1)|^2, |\tilde{x}_1(2)|^2, \dots, |\tilde{x}_1(n_i - l_{i-1})|^2\}$$

recorren biunívocamente la sucesión de valores $\{|x(n) - x(n_j)|^2\}_{n=l_{i-1}+1}^{n_i}$ y los valores

$$\{|\tilde{x}_2(1)|^2, |\tilde{x}_2(2)|^2, \dots, |\tilde{x}_2(l_i - n_i + 1)|^2\}$$

recorren biunívocamente la sucesión de valores $\{|x(n) - x(n_j)|^2\}_{n=n_i}^{l_i}$. Además, es importante observar que para $n = n_i$, $|x(n) - x(n_i)|^2 = 0$ y que

$$\Delta \tilde{x}_1(j) = \tilde{x}_1(j+1) - \tilde{x}_1(j) = x(n_i - j) - x(n_i - (j-1)) = \Delta x(n_i - (j-1))$$

y también

$$\Delta \tilde{x}_2(j) = \tilde{x}_2(j+1) - \tilde{x}_2(j) = x(n_i - j) - x(n_i - (j-1)) = \Delta x(n_i - (j-1)).$$

Teniendo todo esto en cuenta, podemos utilizar las desigualdades de Wirtinger discretas con las señales \tilde{x}_i , $i = 1, 2$, para obtener que

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_i}^{l_i} |x(n) - x(n_i)|^2 &= \sum_{j=1}^{l_i - n_i + 1} |\tilde{x}_2(j)|^2 \\ &\leq \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(l_i - n_i + 1) - 1)}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{l_i - n_i} |\Delta \tilde{x}_2(j)|^2 \\ &= \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(l_i - n_i + 1) - 1)}\right)^{-1} \sum_{n=n_i}^{l_i-1} |\Delta x(n)|^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=l_{i-1}+1}^{n_i} |x(n) - x(n_i)|^2 &= \sum_{j=1}^{n_i - l_{i-1}} |\tilde{x}_1(j)|^2 \\ &\leq \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(n_i - l_{i-1}) - 1)}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n_i - l_{i-1} - 1} |\Delta \tilde{x}_1(j)|^2 \\ &= \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(n_i - l_{i-1}) - 1)}\right)^{-1} \sum_{n=l_{i-1}+1}^{n_i-1} |\Delta x(n)|^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, es fácil comprobar que $\max\{l_1 - n_i + 1, n_i - l_{i-1}\} \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ y, por tanto,

$$\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}\right)^{-1} \geq \max \left\{ \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(l_i - n_i + 1) - 1)}\right)^{-1}, \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2(n_i - l_{i-1}) - 1)}\right)^{-1} \right\},$$

de modo que hemos logrado la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|x - Ax\|^2 &\leq \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}\right)^{-1} \sum_{i=1}^r \sum_{n=l_{i-1}+1}^{l_i} |\Delta x(n)|^2 \\ &= \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}\right)^{-1} \|\Delta x\|^2 \end{aligned}$$

Utilizamos ahora el hecho de que $x \in \mathcal{B}_M$ para aplicar la desigualdad de Bernstein en la estimación de la norma $\|\Delta x\|^2$, obteniendo que

$$\|x - Ax\|^2 \leq \frac{\sin^2 \frac{\pi M}{N}}{\sin^2 \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}} \|x\|^2.$$

Se sigue que la norma de $I - A$ como operador definido sobre \mathcal{B}_M , satisface

$$\|I - A\| \leq \frac{\sin \frac{\pi M}{N}}{\sin \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}}.$$

Como la función $\sin(\cdot)$ es monótona creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$, y $0 < \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}, \frac{\pi M}{N} < \frac{\pi}{2}$, se sigue que la norma del operador $I - A$ es menor que uno siempre que $\frac{\pi M}{N} < \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}$, lo que está garantizado por las hipótesis del teorema. Esto, unido al uso del Lema 2, finaliza la demostración. \square

Un objetivo perfectamente razonable, una vez se ha demostrado el Teorema 4, es buscar algoritmos que mejoren dicho resultado, bien porque sean más sencillos de implementar (manteniendo las mismas propiedades de convergencia) o bien porque se logra una velocidad de convergencia superior a la garantizada por este teorema. El propio Gröchenig incorpora, en su artículo de 1993 (ver [27]), dos mejoras del Teorema 4, la primera de las cuales se traduce en el siguiente resultado.

Teorema 5 (Gröchenig, 1993) *Supongamos que $0 \leq n_1 < \dots < n_r \leq N - 1$ satisface $2M(2\lfloor d/2 \rfloor + 1) < N$, donde $d = \max\{n_{i+1} - n_i\}_{i=1}^r$ y $n_{r+1} = n_1 + N$, y sea $\lambda \in (0, \frac{2}{(1+\gamma)^2})$ un parámetro de relajación, donde $\gamma = \frac{\sin \frac{\pi M}{N}}{\sin \frac{\pi}{4\lfloor d/2 \rfloor + 2}}$. Entonces toda señal $x \in \mathcal{B}_M$ puede reconstruirse mediante el siguiente algoritmo:*

$$x_0 = \lambda \sum_{i=1}^r w_i x(n_i) P_{\varepsilon_{n_i}} \tag{13}$$

$$x_{n+1} = x_n + \lambda \sum_{i=1}^r (x(n_i) - x_n(n_i)) w_i P_{\varepsilon_{n_i}}, \tag{14}$$

donde $w_i = l_{i+1} - l_i$, $l_i := \left\lceil \frac{n_i + n_{i+1}}{2} \right\rceil$ para $i = 1, \dots, r$, $l_{r+1} = l_1 + N$; y

$$P_{\varepsilon_l}(j) = \frac{\sin \frac{(2M+1)\pi(j-l)}{N}}{N \sin \frac{\pi(j-l)}{N}} = \text{sinc}_M(j-l). \quad (15)$$

Además, la convergencia del algoritmo es geométrica con razón $\bar{\gamma} = \max\{|1 - \lambda(1 + \gamma)^2|, |1 - \lambda(1 - \gamma)^2|\}$. En particular, se satisfacen las siguientes estimaciones del error:

$$\|x - x_n\| \leq \bar{\gamma}^{n+1} \|x\|, \quad (16)$$

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\bar{\gamma}^n}{1 - \bar{\gamma}} \|x_0 - x_1\|, \quad (17)$$

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\bar{\gamma}}{1 - \bar{\gamma}} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (18)$$

Demostración. Lo primero que vamos a hacer es explicar el significado de las señales P_{ε_l} , definidas en (15). Para ello, tomamos $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y definimos la señal $\varepsilon_l \in l^2(\mathbb{Z}_N)$ como $\varepsilon_l(k) = \delta_{l,k}$. Si denotamos por \mathbf{P} la proyección ortogonal sobre \mathcal{B}_M , entonces se puede comprobar fácilmente que $P_{\varepsilon_l} = \mathbf{P}(\varepsilon_l)$. Veámoslo. Para empezar, es claro que

$$\widehat{\varepsilon}_l(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_l(n) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{l,n} e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = e^{-\frac{2\pi i k l}{N}}$$

Por tanto,

$$\mathbf{P}(\varepsilon_l)(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \widehat{\varepsilon}_l(k) e^{\frac{2\pi i k j}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M e^{\frac{2\pi i k (j-l)}{N}} = \text{sinc}_M(j-l) = P_{\varepsilon_l}(j),$$

que es lo que queríamos demostrar. Es por tanto evidente que el algoritmo descrito por este teorema es una variante del descrito por el Teorema 4, en la que cambiamos el operador $A : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$, dado por $Ax = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r x(n_i)\chi_i)$ por el operador $B : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$ dado por $Bx = \lambda \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i)\varepsilon_{n_i})$. Es decir: cambiamos las señales χ_i por las señales ε_{n_i} .

Para poder demostrar la convergencia geométrica del algoritmo, con razón de convergencia $\bar{\gamma} \in (0, 1)$ es necesario demostrar que la norma del operador $I - B$ satisface $\|I - B\| \leq \bar{\gamma}$.

Ahora bien: ¿Cómo estimamos la norma $\|I - B\|$? La idea es utilizar que $I - B$ es un operador autoadjunto sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{B}_M \simeq \mathbb{C}^{2M+1}$ y, por tanto, su norma se puede determinar en términos de los productos escalares $\langle (I - B)x, x \rangle$, $x \in \mathcal{B}_M$, como queda reflejado en los siguientes dos lemas técnicos (recordemos que el operador $L : H \rightarrow H$ se dice autoadjunto si, para todo $x, y \in H$, se tiene que $\langle Lx, y \rangle = \langle x, Ly \rangle$).

Lema 6 El operador $B : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$ dado por $B(x)(n) = \lambda \sum_{i=1}^r w_i x(n_i) P_{\varepsilon_{n_i}}(n)$ es autoadjunto.

Demostración. Ya hemos probado que el operador B se puede escribir como $Bx = \lambda \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i})$. Por tanto, si $x, y \in \mathcal{B}_M$, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle Bx, y \rangle &= \langle \lambda \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}), y \rangle \\
 &= \langle \lambda \mathbf{P}(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}), \mathbf{P}(y) \rangle \quad (\text{pues } y = \mathbf{P}(y)) \\
 &= \lambda \langle \sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}, y \rangle \quad (\text{pues } \mathbf{P} \text{ conserva el producto escalar}) \\
 &= \lambda \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}(n) \overline{y(n)} \right) \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \overline{y(n_i)} \\
 &= \overline{\lambda \sum_{i=1}^r w_i y(n_i) \overline{x(n_i)}} \\
 &= \langle x, By \rangle,
 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Lema 7 Sea $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal autoadjunto. Entonces

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle Lx, x \rangle|}{\|x\|^2}$$

En particular, si existen constantes α, β tales que $\alpha \|x\|^2 \leq \langle Lx, x \rangle \leq \beta \|x\|^2$, para toda señal $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\|L\| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Demostración. Sea $c := \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle Lx, x \rangle|}{\|x\|^2}$. Como $|\langle Lx, x \rangle| \leq \|Lx\| \|x\| \leq \|L\| \|x\|^2$, es claro que $c \leq \|L\|$. Queremos demostrar que, si L es autoadjunto, entonces $\|L\| = c$.

Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$, es claro que

$$\begin{aligned}
 \langle Lu, v \rangle + \langle Lv, u \rangle &= \frac{1}{2} (\langle L(u+v), u+v \rangle - \langle L(u-v), u-v \rangle) \quad (\text{pues } L \text{ es autoadjunto}) \\
 &\leq \frac{c}{2} (\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \quad (\text{pues, } \forall z \in \mathbb{C}^n : |\langle Lz, z \rangle| \leq c \|z\|^2) \\
 &= c (\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (\text{por la identidad del paralelogramo}).
 \end{aligned}$$

Tomamos ahora dos señales arbitrarias $x, y \in \mathbb{C}^n$ y representamos el producto escalar $\langle Lx, y \rangle$ en forma polar, $\langle Lx, y \rangle = |\langle Lx, y \rangle| e^{i\alpha}$. Si tomamos $u = \frac{e^{-i\alpha}}{\|x\|} x$ y $v = \frac{1}{\|y\|} y$, obtenemos que

$$\langle Lu, v \rangle = \frac{e^{-i\alpha}}{\|x\|} \frac{1}{\|y\|} \langle Lx, y \rangle = \frac{|\langle Lx, y \rangle|}{\|x\| \|y\|}$$

y, análogamente,

$$\langle Lv, u \rangle = \frac{|\langle Lx, y \rangle|}{\|x\|\|y\|}.$$

Por tanto, si aplicamos la desigualdad que acabamos de probar a los vectores u, v , obtenemos que

$$\frac{2|\langle Lx, y \rangle|}{\|x\|\|y\|} = |\langle Lu, v \rangle + \langle u, Lv \rangle| \leq c(\|u\|^2 + \|v\|^2) = 2c$$

o, lo que es lo mismo,

$$|\langle Lx, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|c$$

Tomamos $y = Lx$ y sustituimos en la desigualdad anterior, obteniendo que $\|Lx\|^2 \leq c\|x\|\|Lx\|$ y, por tanto, $\|Lx\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Es decir, $\|L\| \leq c$, que es lo que deseábamos probar. \square

Continuamos ahora con la prueba del Teorema 5. Como B es autoadjunto, también el operador $L = I - B : \mathcal{B}_M \rightarrow \mathcal{B}_M$ es autoadjunto. Además para toda señal $x \in \mathcal{B}_M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle (I - B)x, x \rangle &= \langle x - \lambda \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}\right), x \rangle \\ &= \|x\|^2 - \lambda \langle \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}\right), \mathbf{P}(x) \rangle \quad (\text{pues } x = \mathbf{P}(x)) \\ &= \|x\|^2 - \lambda \langle \sum_{i=1}^r w_i x(n_i) \varepsilon_{n_i}, x \rangle \quad (\text{pues } \mathbf{P}(x) \text{ conserva el producto escalar}) \\ &= \|x\|^2 - \lambda \sum_{i=1}^r w_i |x(n_i)|^2. \end{aligned}$$

Se sigue que, para poder aplicar el Lema 7 al operador $L = I - B$, es necesario antes obtener estimaciones de la suma $\sum_{i=1}^r w_i |x(n_i)|^2$ en términos de una constante multiplicada por la norma $\|x\|^2$. Ahora bien, como $\|I - A\| < \gamma$ y, por tanto, $\|A^{-1}\| < (1 - \gamma)^{-1}$ entonces, para toda señal $x \in \mathcal{B}_M$, se tiene que

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)^2 \|x\|^2 &= (1 - \gamma)^2 \|A^{-1}Ax\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma)^2 \|A^{-1}\|^2 \|Ax\|^2 \\ &= (1 - \gamma)^2 \|A^{-1}\|^2 \|\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^r x(n_i) \chi_i\right)\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^r x(n_i) \chi_i \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^r |x(n_i)|^2 w_i \end{aligned}$$

Además,

$$\sum_{i=1}^r |x(n_i)|^2 w_i \leq (\|x\| + \|x - \sum_{i=1}^r x(n_i) \chi_i\|)^2 \leq (1 + \gamma)^2 \|x\|^2$$

Se sigue que, para toda señal $x \in \mathcal{B}_M$,

$$(1 - \lambda(1 + \gamma)^2)\|x\|^2 \leq \langle (I - B)x, x \rangle = \|x\|^2 - \lambda \sum_{i=1}^r |x(n_i)|^2 w_i \leq (1 - \lambda(1 - \gamma)^2)\|x\|^2$$

y, por tanto, aplicando el lema anterior,

$$\|I - B\| \leq \max\{|1 - \lambda(1 + \gamma)^2|, |1 - \lambda(1 - \gamma)^2|\} \leq 1 \text{ siempre que } \lambda \in (0, \frac{2}{(1 + \gamma)^2}).$$

Esto concluye la demostración. □

Nota 4 Se puede calcular el valor óptimo del parámetro de relajación λ . Para ello, basta observar que la función $\varphi(\lambda) = \max\{|1 - \lambda(1 + \gamma)^2|, |1 - \lambda(1 - \gamma)^2|\}$, alcanza, en el intervalo $(0, \frac{2}{(1 + \gamma)^2})$, su mínimo en $\lambda = \frac{2}{(1 + \gamma)^2 + (1 - \gamma)^2}$. Dicho valor es:

$$\min_{\lambda \in (0, \frac{2}{(1 + \gamma)^2})} \max\{|1 - \lambda(1 + \gamma)^2|, |1 - \lambda(1 - \gamma)^2|\} = \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2}.$$

Terminamos esta sección implementando el algoritmo descrito por el Teorema 5.

```
function grochenig(func,dt,L,r,tol)
% function grochenig(func,dt,L,r,tol)
% Este programa, a partir de una señal analógica f(t) (implementada en el fichero de nomb
% genera una señal digital tomando las muestras x(n)=f(n*dt), para n=0,1,...,N-1 y (N-1)dt
% A continuación construye, de forma aleatoria, un conjunto de puntos
%
%      0<=n_0<n_1<...<n_r<N
% distribuidos de forma irregular en {0,1,...,N-1} y calcula M con la propiedad de que
%
%      2M(2[delta/2]+1)<N
% y, por tanto, nuestro vector es valido para el muestreo de señales digitales
% de tamaño N y ancho de banda M
%
% Finalmente, utiliza los valores muestrales x(n_0),...,x(n_r) para recuperar la señal x(
% mediante la aplicación del Teorema de Grochenig (Teorema 5.4.10 del texto).
%
% Autores: J. M. Almira, J. A. Cid, A. E. Romero (2005)
%
close all;
h=0:dt:L;
x=feval(func,h);
N=length(x);
% elegimos r índices para muestra aleatoria (Para ello se usa una función de Matlab que im
% continuación de este algoritmo: la función muestrairreg.m)
xp=muestrairreg(N,r);
% calculamos los pesos correspondientes
wp=pesos(xp,N);
%calculamos el maximo ancho de banda M para ese r
t=2:1:r; xp2=[xp(t),xp(1)+N] ;
```

```

xp1=[xp(t-1),xp(r)];
delta = max(xp2-xp1)
Mmax =floor(N/(2*(2*floor(delta/2)+1)))
M=input('Introduzca el valor de M: ');
% Cálculo de la matriz matrix=lambda*wp*P
gamma=((sin(pi*M/N))/(sin(pi/(4*floor(delta/2) + 2))));

%%% Cálculo del parámetro óptimo de relajación %%%

lambda=2/((1+gamma)^2+(1-gamma)^2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% A continuación hacemos uso de la función discretsincvector.m, que ya habíamos hecho expl
% programa de Matlab que implementa el teorema del muestreo digital uniforme. De todos mod
% también ahora dicho fichero, por completitud (ver el final del algoritmo)
sinc=discretsincvector(M,N);
for i=1:r
    for j=1:N
        matrix(i,j)=lambda*wp(i)*sinc(j-1-xp(i)+N);
    end
end
x0=x(xp)*matrix;
x1=x0;

% Calculamos el número de máximo iteraciones (usando la estimación a priori del teorema)

gammabar=max(abs(1-lambda*(1+gamma)^2),abs(1-lambda*(1-gamma)^2))
nitermax=floor(log(tol*(1-gammabar)/(norm(x0)))/log(gammabar)+1)+1

% Realizamos las iteraciones pero introducimos como criterio de parada que
% ||x_{n+1}-x_n||.(gamma/(1-gamma))<=toletancia. Al final, se verá
% cuántas iteraciones (comparadas con lo estimado a priori) se han tenido
% que realizar.
for i=1:nitermax
    x2=x1+x0-x1(xp)*matrix;
    if (norm(x2-x1) < tol*(1-gammabar)/gammabar )
        print('Convergencia alcanzada en las siguientes iteraciones')
        i
        x1=x2;
        break
    end
    x1=x2;
end

figure(1);
subplot(4,1,1);plot(1:N,real(x),'r');zoom on; xlabel('Señal original');
subplot(4,1,2);stem(xp,real(x(xp)));zoom on; xlabel('Muestras tomadas');
subplot(4,1,3);plot(1:N,real(x1),'b');zoom on; xlabel('Señal recuperada');
subplot(4,1,4);plot(1:N,real(x - x1),'r');zoom on; xlabel('Error');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
```

```
% Función auxiliar muestrairreg
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function xp=muestrairreg(N,r);
% Construye de forma aleatoria, un conjunto de puntos
%          0<=n_0<n_1<...<n_r<N
% distribuidos de forma irregular en {0,1,...,N-1} y calcula M con la propiedad de que
%          2M(2[delta/2]+1)<N
% y, por tanto, nuestro vector es valido para el muestreo de señales digitales de tamaño N
% y ancho de banda M
%
% Parametros:
% N: tamaño de la señal a muestrear
% M: ancho de banda de la señal x.
% r+1: numero de puntos de la muestra
% xp: señal de salida
%
% Autores: J. M. Almira, A. E. Romero (2005).
%

d=floor(N/(r+1));
xp=d:d:r*d;
modif=-1+2*rand(1,r);
modif=sign(modif);
xp=xp+floor(d/3)*modif;
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Función auxiliar discretsincvector
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function SM = discretsincvector(M,N)
% function SM = discretsincvector(M,N)
% Calcula el análogo discreto de la función seno cardinal para trabajar con señales de banda
% (ancho de banda M) y tamaño N dados. Calcula dicha función entre -(N-1) y N-1, que es do
%
% Parámetros:
% M: ancho de banda
% N: tamaño de la señal
% SM: vector salida
%
% Autores: J. M. Almira, A. E. Romero (2005).
%

% Vector de abcisas
t = (-N+1):(N-1);

% Reservamos memoria: la señal SM (salida) será un vector 1xN (todo a cero, inicialmente)
SM = repmat(double(0), size(t));

% Calculamos la función muestreo para valores distintos de cero
% Ojo al direccionamiento con vectores

SM( t>0 ) = sin(pi*(2*M+1)*t(t>0)/N) ./ (N*sin(pi*t(t>0)/N));
SM( t<0 ) = sin(pi*(2*M+1)*(t(t<0)+N)/N) ./ (N*sin(pi*(t(t<0)+N)/N));

% Asignamos el valor (en el límite) de la función para t = 0

SM( t==0 ) = (2*M+1)/N;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Función auxiliar pesos
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function W = pesos(x,N);

r=length(x);
x=[x, x(1)+N];
L=0.*(1:1:(r+1));
W=0.*(1:1:r);
for k=1:1:r
    L(k)=floor((x(k)+x(k+1))./2)
end
L(r+1)=L(1)+N;
for k=1:1:r

```

```
W(k)=L(k+1)-L(k)
end;
```

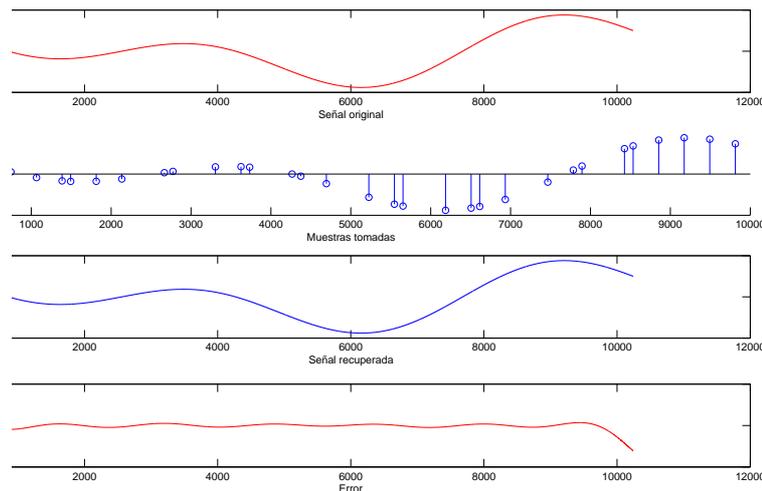
Ejemplo 1 Ejemplificamos el uso del anterior programa con la función

$$x(t) = \cos\left(\frac{t}{10}\right) + \sin\left(-\frac{t}{5}\right),$$

que guardamos en el fichero siguiente:

```
function y = mifuncion(t)
k=0.1;
y=cos(k.*t)+sin(-2*k.*t);
```

Si ejecutamos la sentencia `grochenig('mifuncion', pi/512, 20 * pi, 31, 10-3)`, se produce como salida el siguiente conjunto de gráficos (cuya interpretación es obvia):



5. Otra interpretación del problema del muestreo discreto

En esta sección vamos a proporcionar una descripción del problema del muestreo discreto que lo convierte en un problema de interpolación de polinomios trigonométricos, y vamos a desarrollar algoritmos específicos para la solución del problema más general.

Sea $x \in \mathcal{B}_M$. Entonces $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{2\pi i k n / N}$, de modo que podemos interpretar x como la restricción del polinomio trigonométrico de periodo 1 y grado $\leq M$ dado por

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{2\pi i k t}$$

sobre la sucesión $\{\frac{n}{N}\}_{n=0}^{N-1} \subset [0, 1)$. Se sigue que el problema del muestreo discreto para la señal $x \in \mathcal{B}_M$ se traduce en el problema de la reconstrucción del polinomio p a partir de sus muestras $p(\frac{n_j}{N})$, $j = 1, \dots, r$. Ahora, desde este punto de vista, resulta completamente irrelevante si los puntos de $[0, 1)$ en los que se conoce $p(t)$ están o no en progresión aritmética: lo esencial es que, al ser p un polinomio trigonométrico de grado $\leq M$, entonces éste queda completamente determinado a partir de sus valores sobre cualquier conjunto de puntos de tamaño $\geq 2M + 1$.

Se sigue de la discusión anterior que el problema de la interpolación de polinomios trigonométricos mediante el uso de otros polinomios trigonométricos generaliza al problema del muestreo de señales digitales.

Teorema 6 Sea $p \in \mathcal{T}_M$ un polinomio trigonométrico de grado $\leq M$ y sea $\{0 \leq t_1 < \dots < t_j < \dots < t_r\} \subset [0, 1)$, $t_0 = t_r - 1$, $t_{r+1} := t_0 + 1$. Si

$$\delta = \max_{j=0, \dots, r} (t_{j+1} - t_j) < \frac{1}{2M}$$

entonces $\{t_j\}_{j=1}^r$ es un conjunto de unicidad para p . Además, para todo $\lambda \in (0, \frac{2}{(1+2\delta M)^2})$, el algoritmo iterativo descrito por

$$p_0(t) = \lambda \sum_{j=1}^r p(t_j) w_j D_M(t - t_j) \tag{19}$$

$$p_{n+1} = p_n(t) + \lambda \sum_{j=1}^r (p(t_j) - p_n(t_j)) w_j D_M(t - t_j), \tag{20}$$

donde $w_j = \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2}$, $t_0 = t_r - 1$, $t_{r+1} = t_1 + 1$, y

$$D_M(t) = \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k t} = \frac{\sin(2M + 1)\pi t}{\sin \pi t}$$

es el núcleo de Dirichlet; produce una sucesión de polinomios trigonométricos de grado $\leq M$ que converge a p geoméricamente en la norma L^2 , con razón de convergencia al menos

$$\gamma = \max\{|1 - \lambda(1 + 2\delta M)^2|, |1 - \lambda(1 - 2\delta M)^2|\}.$$

Demostración. Como $\delta < \frac{1}{2M}$, se sigue que $r \geq 2M + 1$ y, por tanto, $p \in \mathcal{T}_M$ queda completamente determinado a partir de los valores $\{p(t_j)\}_{j=1}^r$.

Denotemos por $\chi_j = \chi_{[y_{j-1}, y_j]}$ la función característica asociada al intervalo $[y_{j-1}, y_j]$ y definamos el operador

$$\mathcal{A}(p) = P\left(\sum_{j=1}^r p(x_j)\chi_j\right),$$

donde P denota la proyección ortogonal de $L^2(0, 1)$ en \mathcal{T}_M .

Nota: Obviamente,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \sum_{k=-M}^M \hat{x}(k) e^{2\pi i k t} \\
 &= \int_0^1 x(s) \sum_{k=-M}^M e^{-2\pi i k(t-s)} ds \\
 &= \langle x, D_M(\cdot - s) \rangle \\
 &= x * D_M.
 \end{aligned}$$

Se sigue de la definición de \mathcal{A} que

$$\|p - \mathcal{A}(p)\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^r \int_{y_{j-1}}^{y_j} |p(t) - p(t_j)|^2 dt$$

Al ser $|y_j - t_j|, |t_j - y_{j-1}| \leq \delta/2$, podemos aplicar la desigualdad de Wirtinger clásica para estimar las integrales anteriores, restringiéndonos a los intervalos $[y_{j-1}, t_j]$ y $[t_j, y_j]$, obteniendo que

$$\sum_{j=1}^r \int_{y_{j-1}}^{y_j} |p(t) - p(t_j)|^2 dt \leq \frac{\delta^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^r \int_{y_{j-1}}^{y_j} |p'(t)|^2 dt = \frac{\delta^2}{\pi^2} \|p'\|_2^2.$$

Además, como $p \in \mathcal{T}_M$, podemos estimar $\|p'\|_2 \leq 2\pi M \|p\|_2$ y, por tanto:

$$\|p - \mathcal{A}(p)\|_2 \leq 2\delta M \|p\|_2.$$

En particular, si $2M\delta < 1$, entonces \mathcal{A} es invertible sobre \mathcal{T}_M , $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq (1 - 2\delta M)^{-1}$ y p se puede reconstruir a partir de sus valores $\{p(t_j)\}_{j=1}^r$ utilizando el operador \mathcal{A} y el procedimiento descrito en el Lema 2.

Ahora bien, se puede demostrar que

$$(1 - 2\delta M)^2 \|p\|_2^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^r p(t_j) \chi_j \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^r |p(t_j)|^2 w_j \leq (1 + 2\delta M)^2 \|p\|_2^2$$

y, por tanto, si definimos el operador $B : \mathcal{T}_M \rightarrow \mathcal{T}_M$ como

$$B(p)(t) = \sum_{j=1}^r p(t_j) w_j D_M(t - t_j),$$

entonces es claro que

$$\langle B(p), p \rangle = \sum_{j=1}^r |p(t_j)|^2 w_j.$$

Por tanto, el espectro del operador B está completamente contenido en el intervalo $[(1 - 2\delta M)^2, (1 + 2\delta M)^2]$. Se sigue que B es invertible (pues $0 \notin \sigma(B)$). El algoritmo descrito por (19) y (20) es precisamente: $p_0 = \lambda B(p)$ y $p_{n+1} = p_n + \lambda B(p - p_n)$, de modo que

$$\|p - p_{n+1}\| = \|p - p_n + \lambda B(p - p_n)\| \leq \|1_d - \lambda B\| \|p - p_n\|; \quad n = 0, 1, \dots$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \|p - p_{n+1}\| &\leq \|1_d - \lambda B\| \|p - p_n\| \\ &\leq \|1_d - \lambda B\|^2 \|p - p_{n-1}\| \\ &\leq \dots \leq \|1_d - \lambda B\|^{n+1} \|p - p_0\|. \end{aligned}$$

Se sigue que, si $\|1_d - \lambda B\| < 1$ entonces el algoritmo converge geoméricamente. Ahora bien, $\sigma(1_d - \lambda B) = 1 - \lambda\sigma(B)$ y, como $\sigma(B) \subset [(1 - 2\delta M)^2, (1 + 2\delta M)^2]$, se concluye que

$$\sigma(1_d - \lambda B) = [1 - \lambda(1 - 2\delta M)^2, 1 - \lambda(1 + 2\delta M)^2]$$

Se sigue que, si $\gamma = \max\{|1 - \lambda(1 + 2\delta M)^2|, |1 - \lambda(1 - 2\delta M)^2|\} < 1$ entonces $\|1_d - \lambda B\| < 1$ y el algoritmo converge geoméricamente con razón de convergencia γ . \square

Si identificamos los polinomios trigonométricos con sus coeficientes (para lo que basta hacer uso del isomorfismo natural $i : \mathcal{T}_M \rightarrow \mathbb{C}^{2M+1}$, $i(\sum_{k=-M}^M a_k e^{2\pi i k t}) = (a_{-M}, a_{-M+1}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_M)$), entonces el algoritmo descrito por el Teorema 6 se puede interpretar como un algoritmo en \mathbb{C}^{2M+1} . Para ello, veamos cómo actúa el operador B en términos de los coeficientes de los polinomios $p \in \mathcal{T}_M$:

$$\begin{aligned} B(p)(t) &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=-M}^M a_k e^{2\pi i k t_j} \right) w_j D_M(t - t_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=-M}^M a_k e^{2\pi i k t_j} \right) w_j \sum_{l=-M}^M e^{2\pi i l(t - t_j)} \\ &= \sum_{l=-M}^M \left[\sum_{k=-M}^M \left(\sum_{j=1}^r w_j e^{-2\pi i t_j(l-k)} a_k \right) \right] \\ &= \sum_{l=-M}^M \left(\sum_{k=-M}^M C_{l,k} a_k \right), \end{aligned}$$

donde $C_{l,k} = \sum_{j=1}^r w_j e^{-2\pi i t_j(l-k)}$. De modo que, si \mathbf{a} denota el vector de coeficientes de p y \mathbf{b} denota el vector de coeficientes de $B(p)$, entonces la relación anterior se expresa como

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{C} = (C_{l,k})_{|k|,|l| \leq M} \in \mathbf{M}_{2M+1}(\mathbb{C})$. La matriz \mathbf{C} anterior tiene la particularidad de que, si definimos los valores

$$\gamma_l = \sum_{j=1}^r w_j e^{-2\pi i t_j l}; \quad (|l| \leq 2M),$$

entonces $C_{l,k} = \gamma_{l-k}$ y, por tanto, es constante en las diagonales $l - k = \text{cte}$. Además, $\gamma_s = \overline{\gamma_{-s}}$ para todo s , de modo que $C_{l,k} = \overline{C_{k,l}}$ para todo k, l . Estas observaciones nos llevan a concluir que el algoritmo descrito por (19) y (20) se puede reformular de la siguiente forma:

Teorema 7 Supongamos que $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1$. Si $\delta = \max\{t_{j+1} - t_j\}_{j=1}^r < \frac{1}{2M}$ entonces la matriz \mathbf{C} definida anteriormente es una matriz de Toeplitz autoadjunta, invertible y definida positiva. Además, \mathbf{C} tiene número de condición

$$\text{cond } \mathbf{C} \leq \left(\frac{1 + 2\delta M}{1 - 2\delta M} \right)^2.$$

Además, todo polinomio trigonométrico $p \in \mathcal{T}_M$ se puede reconstruir a partir de sus valores $\{p(t_j)\}_{j=1}^r$, de la siguiente forma:

- Tomamos $\mathbf{a}^{(0)} = (a_{-M}^{(0)}, \dots, a_M^{(0)})$, donde

$$a_l^{(0)} = \sum_{j=1}^r p(t_j) w_j e^{-2\pi i t_j l}; \text{ para } |l| \leq M.$$

- Hacemos, para $n = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{a}^{(n+1)} = \mathbf{a}^{(n)} + \lambda \mathbf{C}(\mathbf{a}^{(0)} - \mathbf{a}^{(n)}).$$

Entonces el vector de coeficientes de p está dado por $\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}^{(0)}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}^{(n)} - \mathbf{a}\| = 0$$

(para cualquier norma que se considere sobre \mathbb{C}^{2M+1}) siempre que el parámetro de relajación λ verifique que $0 < \lambda < \frac{2}{(1+2\delta M)^2}$.

Referencias

- [1] **J. M. Almira**, An introduction to Fourier Series and Signal Processing, Technische Universität Chemnitz, Preprint 2001-13 (2001).
- [2] **J. Arias de Reyna**, *Pointwise convergence of Fourier Series*, Springer-Verlag, 2002.
- [3] **N. Aronszajn**, La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, Proc. Cambridge Phil. Soc. 39 (1943) 133-153.
- [4] **J. J. Benedetto**, Irregular sampling and frames, in *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.) Academic Press (1992), 445-507.
- [5] **R. P. Boas**, *Entire Functions*, Academic Press, 1954.
- [6] **S. Bochner**, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Universidad **689**, Alianza Ed. (1991).
- [7] **W. Bolton**, *Laplace and Z-transforms*, Logman (1998).

- [8] **F. Bombal**, Laurent Schwartz: El matemático que quería cambiar el mundo, La Gaceta de la R.S.M.E. **6** 1 (2003)
- [9] **R. M. Bracewell**, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series (1965).
- [10] **J. L. Brown**, On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the band-pass sampling theorem, J. Math. Anal. Appl **18** (1967) 75-84.
- [11] **J. R. Buck, M. M. Daniel, A. C. Singer**, *Computer Explorations in Signals and Systems Using Matlab*, Signal Processing Series, Prentice Hall (1997).
- [12] **P. L. Butzer, R. L. Stens**, Sampling theory for non-necessarily band-limited functions: a historical overview, SIAM Rev. **34** (1992) 40-53.
- [13] **A. Cañada Villar**, *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos*, Ed. Pirámide, 2002.
- [14] **D. C. Champeney**, *A handbook of Fourier Theorems*, Cambridge university Press (1987).
- [15] **R. Duffin, A. Shaeffer**, A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952) 341-366.
- [16] **P.P.G. Dyke**, *An introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer (2001).
- [17] **J. W. Eaton et al.**, GNU Octave, disponible en www.octave.org.
- [18] **R. E. Edwards**, *Fourier series (A modern introduction) Vol 1*, Graduate Texts in Mathematics **64**, Springer (1979).
- [19] **K. Fan, O. Taussky, J. Todd**, Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, Monasch. Math. **59** (1955) 73-90.
- [20] **G. B. Folland**, *Fourier analysis and its applications*, Brooks-Cole Publishing Co. (1992).
- [21] **S. Forcada**, *Introducción a la integral de Lebesgue*, Promociones y Publicaciones Universitarias, Barcelona, 1988.
- [22] Free Software Foundation, The GNU Scientific Library, disponible en <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [23] **R. A. Goldberg**, *Fourier transforms*, Cambridge University Press (1965).
- [24] **E. A. González-Velasco**, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic-Press (1995).
- [25] **H. G. Feichtinger, K. Gröchenig**, Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions, J. of Math. Anal. Appl. **167** (1992) 530-556.

- [26] **K. Gröchenig**, Reconstruction algorithms in irregular sampling, *Math. Comput.* **59** (1992) 181-194.
- [27] **K. Gröchenig**, A discrete theory of irregular sampling, *Linear Alg. and its Appl.* **193** (1993) 129-150.
- [28] **K. Gröchenig**, Irregular sampling, Toeplitz matrices and the approximation of entire functions of exponential type, *Math. of Comp.* **68** (1999) 749-765.
- [29] **R. W. Hamming**, *Digital Filters (Third Edition)*, Dover (1998).
- [30] **G. Hardy, W. W. Rogosinski**, *Fourier Series*, Dover (1999).
- [31] **G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya**, *Inequalities*, (2nd Edition) Cambridge University Press, 1952.
- [32] **S. Haykin, B. Van Veen**, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons Inc. (1999).
- [33] **J. R. Higgins**, *Sampling Theory in Fourier Analysis and Signal Analysis*, Oxford University Press (1996).
- [34] **P. Jacklam**, MATLAB array manipulation tips and tricks, disponible en <http://home.online.no/~pjacklam/matlab/doc/mtt/doc/mtt.pdf>.
- [35] **M. I. Kadec**, The exact value of the Paley-Wiener constant, *Soviet. Math. Dokl.* **5** (1964) 559-561.
- [36] **D. W. Kammler**, *A first course in Fourier Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey (2000).
- [37] **Y. Katznelson**, *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover (1976).
- [38] **V. A. Kotelnikov**, On the transmission capacity of ether and wire electrocominucations, *Izd. Red. Upr. Svgazi RKKa*, 1933.
- [39] **S. G. Krantz**, *A panorama of Harmonic Analysis*, *The Carus Math. Monographs* **27** Math. Assoc. Amer. (1999)
- [40] **A. Kufner, J. Kadled**, *Fourier Series*, Academia Praha (1971).
- [41] **P. Lancaster, K. Salkauskas**, *Transform Methods in Applied Mathematics*, Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, John-Wiley & Sons (1996).
- [42] **C. Lanczos**, *Discourse on Fourier Series*, Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.
- [43] **H. Landau**, Neccesary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, *Acta Math.* **117** (1967) 37-52.
- [44] **R. Lasser**, *Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker, 1996.
- [45] **T. Love**, Matlab vectorisation tricks, disponible en <http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/tpl/programs/Matlab/tricks.html>.

- [46] **S. Mallat**, *A wavelet tour of signal processing*, 2^a Ed., Academic Press (1999).
- [47] **J. B. Mariño, F. Vallverdú, J. A. Rodríguez, A. Moreno**, *Tratamiento digital de la señal*, Ed. UPC (1999).
- [48] **P. Marziliano, M. Vetterli**, Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations, *IEEE Transactions on Signal Processing* **48** 12 (2000) 3462-3471.
- [49] The MathWorks, MATLAB website, www.mathworks.com.
- [50] The MathWorks, Code Vectorization Guide, disponible en <http://www.mathworks.com/support/tech-notes/1100/1109.html>.
- [51] **C. Neumann**, Zur theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials, *Ber. Verh. Math.-Phys. Classe Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **32** (1870) 49-56, 264-321.
- [52] **C. Neumann**, *Über die methode des Arithmetischen Mittels*, Hirzel, Leipzig, 1887.
- [53] **A. Papoulis**, *Sistemas digitales y analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación espectral*, Marcombo (1986).
- [54] **J. R. Partington**, *Interpolation, Identification and Sampling*, Oxford University Press (1997).
- [55] **A. Pinkus**, Weierstrass and Approximation Theory, *J. Approx. theory* **107** (2000) 1-66.
- [56] **A. Pinkus, S. Zafrany**, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge University Press (1997).
- [57] **W. H. Press et al.**, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [58] **M. H. Protter, C.B. Morrey**, *Análisis Real*, Editorial AC, 1986.
- [59] **V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn**, *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific Publishing Co., (1999).
- [60] **W. Rudin**, *Análisis real y complejo*, Editorial Alhambra, 1985.
- [61] **D. E. Rutherford**, Some continuant determinants arising in Physics and Chemistry, II. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **62A** (1947) 229-236.
- [62] **K. Seip**, On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2(-\pi, \pi)$, *J. Functional Anal.* **130** (1995) 131-160.
- [63] **H. Shapiro**, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Mathematics **187**, Springer-Verlag (1971).
- [64] **I. Stewart, D. Tall**, *Complex Analysis*, Cambridge Univ. Press (1983).

- [65] **O. Steinbach, W. L. Wendland**, On C. Neumann's method for second order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries, *J. of Math. Anal. and Appl.* **262** (2001) 733-748.
- [66] **G. Strang**, A proposal for Toeplitz matrix calculations, *Stud. Appl. Math.* **74** (1986) 171-176.
- [67] **T. Strohmer**, Efficient methods for digital signal and image reconstruction from nonuniform samples, Ph. Thesis, Viena, 1993.
- [68] **M. Unser**, Sampling: 50 years after Shannon, *Proc. IEEE* **88** 4 (2000) 569-587.
- [69] **J. I. Richards, H. K. Yoon**, *Theory of Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [70] **D.A. Watt**, "Programming Language Concepts and Paradigms". Prentice Hall International, 1991
- [71] **R. Young**, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, CRC Press, 1993.
- [72] **A. I. Zayed**, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press, 1993.