3.- PROPAGACIÓN EN SISTEMAS CON SIMETRÍA TRASLACIONAL. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

3.1- Formulación del problema.

(1-14.1) Se entiende por sistema de transmisión con simetría de traslación aquel sistema con una dirección privilegiada, que denominamos z y que coincide con la dirección de propagación de la onda electromagnética, a lo largo de la cual se conserva la sección transversal del sistema.

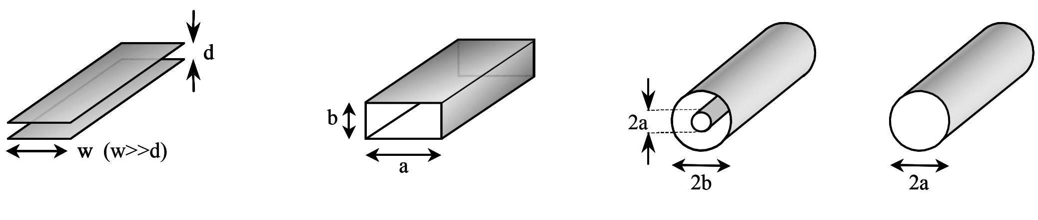


Fig.3.1 Líneas de simetría sencilla. *(tomada de Ref.3)*

(3-2.3) La denominación *líneas de transmisión* o *guía de ondas* no implica una diferencia aceptada de forma universal. Generalmente se discrimina “línea” de “guía reservando el término “guía” para las líneas constituidas por un solo conductor.

Dado que hemos privilegiado la componente z como dirección de propagación a lo largo de la cual suponemos que nuestro sistema posee simetría de traslación, descompondremos los vectores campo y el operador ∇ en su componente longitudinal z y las otras dos que llamaremos, de forma agrupada, transversales. Nuestro objetivo es expresar las componentes transversales en función de la componente longitudinal *z* de los campos ***E*** y ***H***, estas componentes las obtendremos a partir de la ecuación de ondas con las condiciones de contorno de la estructura que estemos estudiando, una vez hayamos modificado la ecuación de ondas teniendo en cuenta la dirección privilegiada *z* que hemos elegido. Para ello descompondremos las ecuaciones de Maxwell de acuerdo con este criterio.

***3.1.1**- Expresión para las componentes transversales.*

Las ecuaciones de Maxwell, para campos armónicos, toman la forma, para las divergencias:

$$\nabla_t \vec{E}_t + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla_t \vec{H}_t + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Para los rotacionales:

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_x - \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_y \right) E_z - \frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{u}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{u}_y + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \vec{u}_z = -j\omega\mu \vec{H}$$

el primer término del segundo miembro lo podemos escribir como $-\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z$:

$\nabla_t E_z = \boldsymbol{u}_x \, \partial E_z/\partial x + \boldsymbol{u}_y \, \partial E_z/\partial y$ calculemos $\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_x & \boldsymbol{u}_y & \boldsymbol{u}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \partial E_z/\partial x & \partial E_z/\partial y & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{u}_x \, \partial E_z/\partial y + \boldsymbol{u}_y \, \partial E_z/\partial x$$

$$-\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z + \boldsymbol{u}_z \wedge \partial \mathbf{E}_t/\partial z + \nabla_t \wedge \mathbf{E}_t = -j\,\omega\,\mu\,(\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z) \qquad \textbf{\textit{3.1.1}}$$

Descomponemos la expresión en las componentes transversales.

$$-\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z + \boldsymbol{u}_z \wedge \partial \mathbf{E}_t/\partial z = -j\,\omega\,\mu\,\mathbf{H}_t \qquad \textbf{\textit{3.1.2}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \qquad \textbf{\textit{3.1.3}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y \qquad \textbf{\textit{3.1.4}}$$

y la longitudinal z:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ E_x & E_y \end{vmatrix} = -j\omega\mu H_z \qquad \nabla_t \wedge \mathbf{E}_t = -j\,\omega\,\mu\,H_z\,\boldsymbol{u}_z$$

Similarmente con el rotacional de **H**

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_x - \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_y \right) H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z}\vec{u}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z}\vec{u}_y + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ H_x & H_y \end{vmatrix} \vec{u}_z = j\omega\varepsilon \vec{E}$$

Descomponemos en la componente longitudinal z, y las transversales.

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_x \qquad \textbf{\textit{3.1.5}}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon E_y \qquad \textbf{\textit{3.1.6}}$$

$$- \boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t H_z + \boldsymbol{u}_z \wedge \partial \mathbf{H}_t / \partial z = j\,\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E}_t \qquad \textbf{\textit{3.1.7}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ H_x & H_y \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon E_z \qquad\qquad \nabla_t \wedge \mathbf{H}_t = j\,\omega\,\varepsilon\,E_z\,\boldsymbol{u}_z$$

Recordemos que nuestro objetivo es expresar las componentes transversales de los campos en función de la longitudinal z. Tomemos, por ejemplo, como referencia E_x, de las expresiones ***3.1.4*** y ***3.1.5*** podemos eliminar H_y . Derivando ***3.1.4*** respecto a z y utilizando ***3.1.5*** nos queda:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = j\omega\mu \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega^2 \mu\varepsilon E_x$$

$$\left(\omega^2 \mu\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad \textbf{\textit{3.1.8}}$$

Análogamente obtendríamos una expresión para la otra componente transversal, E_y, en función de las componentes longitudinales z:

$$\left(\omega^2 \mu\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_y = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \textbf{\textit{3.1.9}}$$

Ambas expresiones se pueden expresar conjuntamente como:

$$\left(\omega^2 \mu\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}_t = j\omega\mu \left(\vec{u}_z \times \nabla_t H_z \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t E_z \qquad \textbf{\textit{3.1.10}}$$

al mismo resultado llegamos si eliminamos $\mathbf{H}_t$ entre las ecuaciones ***3.1.2*** y ***3.1.7***, para ello derivamos la primera de ellas respecto a z

$$- \boldsymbol{u}_z \wedge \partial \left(\nabla_t E_z \right) / \partial z + \boldsymbol{u}_z \wedge \partial^2 \mathbf{E}_t / \partial z^2 = -j\,\omega\,\mu\,\partial \mathbf{H}_t / \partial z$$

multiplicamos ***3.1.7*** por $-j\,\omega\,\mu$ y sustituimos

$$-(-j\,\omega\,\mu)\,\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t H_z + \boldsymbol{u}_z \wedge \left[-\boldsymbol{u}_z \wedge \partial(\nabla_t E_z)/\partial z + \boldsymbol{u}_z \wedge \partial^2 \mathbf{E}_t/\partial z^2\right] = (-j\,\omega\,\mu)\,j\,\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E}_t$$

teniendo en cuenta que los triples productos se reducen al último término cambiado de signo dado que son perpendiculares a $\boldsymbol{u}_z$:

$$\boldsymbol{A} \wedge [\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}_z \wedge [\boldsymbol{u}_z \wedge \mathbf{A}] = \boldsymbol{u}_z \cdot(\boldsymbol{u}_z \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}\,(\boldsymbol{u}_z \cdot \boldsymbol{u}_z) = -\mathbf{A}$$

$$(\omega^2\,\mu\,\varepsilon + \partial^2/\partial z^2)\,\mathbf{E}_t = j\,\omega\,\mu\,\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t H_z + \partial(\nabla_t E_z)/\partial z$$

Que es la expresión ***3.1.10***. Procediendo de forma similar al proceso seguido con $\mathbf{E}_t$ para las componentes transversales del vector **H**, obtenemos:

$$-\left(\omega^2\mu\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{H}_t = j\omega\varepsilon\,(\vec{u}_z \times \nabla_t E_z) - \frac{\partial}{\partial z}\nabla_t H_z \qquad \textbf{3.1.11}$$

De modo que si conocemos E_z y H_z podemos deducir inmediatamente sus componentes transversales.

3.1.2- Dependencia con la variable longitudinal.

Nuestro objetivo ahora es encontrar las soluciones para las componentes longitudinales z, recordemos que esta es la componente que hemos elegido para asignarle la dirección privilegiada de nuestras guías a lo largo de la cual existe la simetría longitudinal. Escribimos la expresión ***1.0.1***, la ecuación de onda:

$$\nabla^2\,\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = -\,\omega^2\,\mu\,\varepsilon\,\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad (\nabla^2 + \omega^2\,\mu\varepsilon)\,\mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

tomemos la parte correspondiente a la componente longitudinal z, también podríamos escribirla para las demás componentes:

$$(\nabla_t^2 + \partial^2/\partial z^2 + \omega^2\,\mu\varepsilon)\,E_z(\boldsymbol{r}) = 0$$

Si suponemos que la solución admite separación de variables:

$$E_z(\boldsymbol{r}) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

Sustituyendo y dividiendo por X·Y·Z en la ecuación diferencial

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + \omega^2\,\mu\varepsilon = 0$$

Para que esta igualdad se cumpla, cada uno de los términos debe ser constante dada la suposición realizada de separación de variables. A la parte dependiente de z la llamaremos $-\beta_n^2$, el subíndice n nos indica que su valor va a depender de las condiciones de contorno de la estructura con simetría longitudinal que estudiemos, no confundir con la de medios indefinidos $\beta = \omega \sqrt{(\mu\varepsilon)}$,

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{d z^2} = -\beta_n^2$$

por lo que la dependencia con esta variable será de la forma:

$$Z(z) = -Z_0\, e^{\pm j \beta_n z}$$

$$d\,Z(z) / d\,z = -(\pm j\,\beta_n)\, Z_0\, e^{\pm j \beta_n z}$$
$$d^2\, Z(z) / d\,z^2 = (\pm j\,\beta_n)^2 \left[-Z_0\, e^{\pm j \beta_n z} \right] = -\beta_n^2\, Z$$

y la ecuación de ondas dependiente de x e y para una señal que se propaga en el sentido de las z crecientes cumple con la ecuación:

$$Z\,\partial^2 (X\cdot Y) / \partial x^2 + Z\,\partial^2 (X\cdot Y) / \partial y^2 + X\cdot Y\,(-\beta_n^2\, Z) + \omega^2 \mu\varepsilon\,(X\cdot Y\, Z) = 0$$

$$\left(\nabla_t^2 + \omega^2 \mu\varepsilon - \beta_n^2\right) E_{zt}(x, y) = 0 \qquad \mathbf{3.1.12}$$
$$\left(\nabla_t^2 + \omega^2 \mu\varepsilon - \beta_n^2\right) H_{zt}(x, y) = 0 \qquad \mathbf{3.1.13}$$

De forma análoga hemos escrito una expresión similar para H_z. Nuestra estrategia para estudiar la propagación de ondas en sistemas con simetría longitudinal consistirá en resolver las ecuaciones tipo ***3.1.12 - 13*** sometidas a las condiciones de contorno del problema concreto que tengamos, y obtener las componentes transversales de los campos aplicando las ecuaciones ***3.1.10*** y ***3.1.11*** que, una vez conocida la dependencia con z de las componentes longitudinales, y teniendo en cuenta que la dependencia con z de las otras componentes será idéntica, podemos reescribir como:

$$\gamma^2\, \vec{E}_t = j\omega\mu\,(\vec{u}_z \times \nabla_t H_z) - j\beta_n\, \nabla_t E_z \qquad \mathbf{3.1.14}$$
$$-\gamma^2\, \vec{H}_t = j\omega\varepsilon\,(\vec{u}_z \times \nabla_t E_z) + j\beta_n\, \nabla_t H_z \qquad \mathbf{3.1.15}$$

donde hemos llamado $\omega^2 \mu\varepsilon - \beta_n^2 = \gamma^2$

Antes de estudiar algunas estructuras concretas, veamos algunas propiedades generales dependiendo de las componentes longitudinales de los campos, que van a ser nuestros principales objetos de estudio.

3.2 Modos de transmisión.

(1-14.2) Las soluciones naturales de la ecuación de ondas homogénea en un medio isótropo indefinido, es decir en ausencia de contornos, son las ondas planas. Podemos buscar soluciones a nuestro problema como superposición de ese tipo de ondas pero el camino a seguir consiste en encontrar distribuciones de campo electromagnético que constituyan soluciones más naturales que las ondas planas para medios del tipo descrito en la figura 3.1. Dichas distribuciones, a las que denominaremos modos, resultan ser básicamente de tres tipos: TE (Transversal Eléctrico, es decir, $E_z = 0$), TM (Transversal Magnético, es

decir, $H_z = 0$) y TEM (Transversal Electro Magnético, $E_z = 0$, $H_z = 0$) cuando el sistema de transmisión es homogéneo.

Veremos la forma que toman en estos tres casos las expresiones ***3.1.14*** y ***3.1.15*** así como la relación entre los campos transversales y qué particularidades imponen las condiciones de contorno en cada una de las situaciones bajo estudio teniendo en cuenta la simetría de nuestro problema como se aprecia en la figura *3.2*.

Obtuvimos, expresiones ***3.1.11*** y ***3.1.12***, que la ecuación de ondas homogénea se reduce a una ecuación en dos dimensiones:

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma_n^2\right) \varphi_n = 0 \qquad \textbf{\textit{3.1.16}}$$

donde φ_n representa bien E_z bien H_z . La ecuación ***3.1.16*** unida a las condiciones de contorno de nuestro sistema conforma un problema de autovalores

3.2.1- *Modos TE ($E_z = 0$)*

En este caso las expresiones para las componentes transversales en función de las longitudinales, de acuerdo con ***3.1.14*** y ***3.1.15***, se reducen a

$$\boldsymbol{H}_t = -\,(j\,\beta_n \,/\, \gamma_n^2\,)\ \nabla_t H_z$$
$$\boldsymbol{E}_t = (j\,\omega\mu \,/\, \gamma_n^2\,)\ \boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t H_z$$

Podemos encontrar una relación entre las componentes transversales de los campos eliminando $\nabla_t H_z$:

$$\nabla_t H_z = -(\,\gamma_n^2 \,/\, j\,\beta_n\,)\ \boldsymbol{H}_t$$

$$\boldsymbol{E}_t = -\,(j\,\omega\mu \,/\, \gamma_n^2\,)\,(\,\gamma_n^2 \,/\, j\,\beta_n\,)\ \boldsymbol{u}_z \wedge \boldsymbol{H}_t = \pm\, \omega\mu/\beta_n\ \boldsymbol{u}_z \wedge \boldsymbol{H}_t \qquad \textbf{\textit{3.2.1}}$$

Conviniendo que el signo menos se corresponde a ondas propagándose según z creciente.

De las expresiones anteriores se deduce que las componentes transversales del campo eléctrico y magnético son siempre perpendiculares y relacionadas entre si por la impedancia de onda $\boldsymbol{Z_{nTE}}$ que viene relacionada con la impedancia del medio y las constantes de propagación en el vacío y en la estructura:

$$Z_{nTE} = \frac{|\boldsymbol{E}_t|}{|\boldsymbol{H}_t|} = \frac{\omega\mu}{\beta_n} = (\mu/\varepsilon)^{1/2}\ \frac{\omega\sqrt{(\mu\varepsilon)}}{\beta_n} = \eta\,\frac{\beta}{\beta_n} \qquad \textbf{\textit{3.2.2}}$$

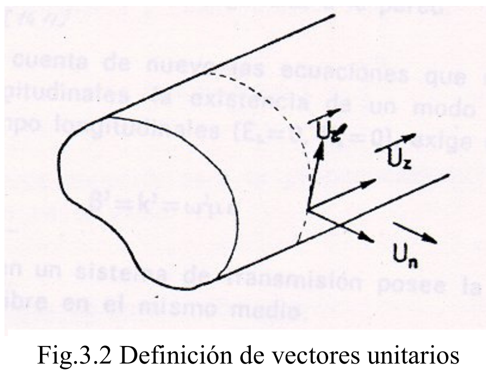


Fig.3.2 Definición de vectores unitarios en el contorno. *(tomada de Ref.1)*

En este tipo de modos, *TE*, la magnitud básica es el campo longitudinal H_z , a partir del cual obtendremos todas las demás componentes como se puede ver en las anteriores expresiones ***3.2.1***. H_z tiene que ser solución de ***3.1.9*** y cumplir las condiciones de contorno en las paredes metálicas, es decir, campo magnético tangente. Si utilizamos el sistema de coordenadas visualizado en la figura, H_z es tangente a las paredes, veamos qué sucede con la componente transversal $\boldsymbol{H}_t$ que, de acuerdo con estas coordenadas, vendrá dada por:

$$\boldsymbol{H}_t = \pm (j\, \beta_n \,/\, \gamma_n^2)\left[(\partial H_z \,/\, \partial n)\, \boldsymbol{u}_n + (\partial H_z \,/\, \partial l)\, \boldsymbol{u}_l\right]$$

Dado que el segundo término del segundo miembro ya es tangente al contorno, para que $\boldsymbol{H}_t$ también sea tangente a la superficie metálica tendrá que cumplirse:

$$\left[\partial H_z \,/\, \partial n\right]_{\text{contorno}} = 0 \qquad \textbf{\textit{3.2.3}}$$

sobre las paredes metálicas del sistema, supuesto que son conductores perfectos. Esta es la condición de contorno que impondremos, en el caso de modos *TE*, para obtener los autovalores en los casos concretos de guías de onda que estudiaremos.

3.2.2*- Modos TM (H_z = 0)*

Ahora en la expresión ***3.1.10*** nos quedará el segundo término.

$$\boldsymbol{E}_t = -j\, (\beta_n / \gamma_n^2)\, \nabla_t E_z \qquad \textbf{\textit{3.2.4}}$$

$$\boldsymbol{H}_t = -j\, (\omega\, \varepsilon / \gamma_n^2)\, \boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z = \omega\, \varepsilon \sqrt{\mu} / (\gamma_n^2 \sqrt{\mu})\, (\gamma_n^2 / \beta_n)\ \boldsymbol{u}_z \wedge \boldsymbol{E}_t =$$
$$= \sqrt{(\varepsilon / \mu)}\, (\beta / \beta_n)\ \boldsymbol{u}_z \wedge \boldsymbol{E}_t = (1 / \eta)\, (\beta / \beta_n)\ \boldsymbol{u}_z \wedge \boldsymbol{E}_t$$

$$Z_{nTM} = |\boldsymbol{E}_t| / |\boldsymbol{H}_t| = \eta\, (\beta_n / \beta) \qquad \textbf{\textit{3.2.5}}$$

En los modos *E*, o transversales magnéticos, la magnitud básica es el campo longitudinal eléctrico E_z a partir del cual obtenemos las componentes transversales de ambos, E_z lo obtendremos como solución de la ecuación ***3.1.14*** con las condiciones de contorno impuestas por la estructura correspondiente, es decir E_z = 0 en las paredes metálicas del sistema. Con esta condición se cumple automáticamente que el campo eléctrico sobre el contorno es perpendicular a las citadas paredes si tenemos en cuenta la expresión ***3.2.2*** y el sistema de coordenadas indicado en la anterior figura:

$$\boldsymbol{E}_t = -j\, (\beta_n / \gamma_n^2)\left[(\partial E_z / \partial n)\, \boldsymbol{u}_n + (\partial E_z / \partial l)\, \boldsymbol{u}_l\right]$$

Dado que el segundo término del segundo miembro es nulo pues la condición E_z = 0 sobre el contorno conlleva que su derivada a lo largo de ese contorno, $(\partial E_z / \partial l)\, \boldsymbol{u}_l$ también lo sea, nos queda que el campo transversal es perpendicular a la superficie:

$$\boldsymbol{E}_{t\,\text{contorno}} = -j\, (\beta_n / \gamma_n^2)\, (\partial E_z / \partial n)\, \boldsymbol{u}_n$$

3.2.3*- Modos TEM (E_z = 0, H_z =0)*

Si las dos componentes longitudinales de los campos son nulas esto exige, de acuerdo con ***3.1.10*** y ***3.1.11***, que lo sea γ, por lo que $\beta_n^2 = \omega^2 \mu\, \varepsilon$, esto significa que un modo TEM tiene la misma constante de propagación que la señal en un medio libre. Este modo de transmisión posee una importancia especial por diferentes razones prácticas y conceptuales; por un lado constituye el modo principal de propagación en líneas de transmisión y, sin embargo, no puede transmitirse en estructuras monoconductoras como son las guías de onda, tal como veremos a continuación.

La ausencia de componentes longitudinales del campo electromagnético, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas al separar operadores y componentes de los campos en sus partes longitudinal y transversal, conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_t \cdot \mathbf{A}_t + \partial A_z/\partial z = 0 \\ \nabla_t \wedge \mathbf{A}_t = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \mathbf{A}_t = -\nabla_t \cdot \Phi \quad \text{y} \quad \nabla_t \cdot \Phi^2 = 0$$

donde hemos simbolizado $\mathbf{A}_t$ para ambos campos. Así pues, el problema de la distribución transversal de campos electromagnético de una onda TEM queda localizado en un problema estático bidimensional. Evidentemente, en una guía hueca, al imponer las condiciones de contorno homogéneas a las paredes, la única solución de tipo estático es la correspondiente a campo idénticamente nulo en el interior, necesitamos de otro conductor que pueda soportar otro potencial así como las corrientes que equilibren a las del otro conductor para poder obtener campos transversales.

La relación entre los campos la obtenemos de ***3.1.2*** teniendo en cuenta que derivar respecto a z equivale en nuestro caso a multiplicar por $-j\,\beta_n$

$$\boldsymbol{u}_z \wedge \partial \mathbf{E}_t/\partial z = -j\,\omega\,\mu\,\mathbf{H}_t \qquad -j\,\beta_n\,\boldsymbol{u}_z \wedge \mathbf{E}_t = -j\,\omega\,\mu\,\mathbf{H}_t \qquad \mathbf{H}_t = \sqrt{(\varepsilon/\mu)}\,\boldsymbol{u}_z \wedge \mathbf{E}_t$$

que es la relación que tienen los campos de una onda propagándose en un medio libre.

3.2.4- Diagrama ω - β para los modos de transmisión.

Los diagramas de dispersión ω - β para los modos de transmisión están basados en la relación:

$$\omega^2\,\mu\varepsilon = \beta_n^{\,2} + \gamma_n^{\,2}$$

donde β_n es la constante de propagación en la estructura y γ_n el autovalor correspondiente que viene determinado por la geometría y el índice del modo. Vemos cómo la constante de propagación β_n puede variar de forma complicada con la frecuencia.

Supuesto que la propagación se efectúa en medio homogéneo y sin pérdidas, lo primero que se observa, para modos no TEM, es la existencia de una frecuencia denominada de corte. Cuando se cumpla $\omega^2\,\mu\varepsilon = \gamma_n^{\,2}$ la constante de propagación β_n se hace cero, el valor de esta ***frecuencia de corte*** valdrá $\omega_{cn} = \gamma_n / (\mu\varepsilon)^{1/2}$ o lo que es lo mismo

$$f_{cn} = c\,\gamma_n / (2\,\pi).$$

Se denomina modo fundamental al de menor frecuencia de corte.

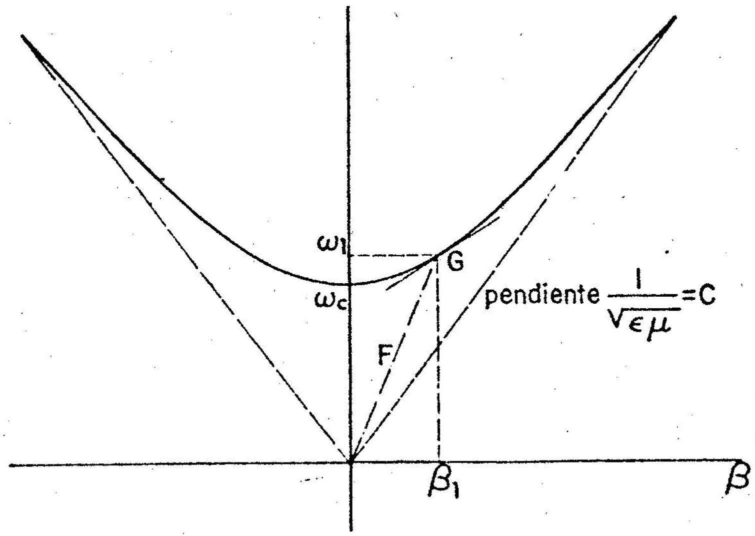
(7-7.8) En la naturaleza no existen ondas absolutamente monocromáticas, como las ecuaciones básicas son lineales, es fácil en principio realizar la superposición de las soluciones para las diversas frecuencias. Por sencillez consideraremos ondas escalares en

una dimensión. La amplitud $u(x, t)$ puede considerarse como una de las componentes del campo electromagnético.

Para permitir la posibilidad de dispersión consideraremos ω como una función de β_n

$$\omega = \omega(\beta_n) = \omega(-\beta_n)$$

debe ser una función par de β_n ya que las propiedades dispersivas no deben depender de si la onda viaja hacia la derecha o hacia la izquierda.



La representación de la relación de dispersión ω - β suele realizarse en un diagrama como el de la figura. Teniendo en cuenta las definiciones de velocidad de fase y de grupo

$$v_F = \omega / \beta_n \quad \text{y} \quad v_G = \partial\omega / \partial \beta_n$$

la velocidad de fase resulta ser mayor o igual que la de la luz, mientras que la de grupo, que es la que tiene significado a efectos de propagación de energía o información, resulta inferior o, como máximo, igual a c. Para frecuencias próximas al corte la velocidad fase tiende a infinito mientras que la de grupo tiende a cero y para frecuencias muy elevadas ambas tienden asintóticamente a *c*.

De la relación de dispersión se deduce que $v_F \cdot v_G = c^2$.

$$2\,\mu\varepsilon\,\omega\,\partial\omega/\partial\beta_n = 2\,\beta_n \quad \Longrightarrow \quad (\omega/\beta_n)\;\partial\omega/\partial\beta_n = c^2$$

3.3 Propiedades de ortogonalidad.

3.4 Desarrollo del campo en modos normalizados.

3.5 Solución general para guías ideales.