

3.6- Líneas de transmisión.

(3 – 2.3) Utilizamos “línea” para designar cualquier objeto físico que se utilice como soporte para propagar campos, independientemente del número de conductores que tenga. En la teoría de circuitos de baja frecuencia se asume implícitamente que las dimensiones de los circuitos son muy pequeñas en comparación con la longitud de onda de la señal que se propaga. En las líneas que se utilizan para transmitir señales de alta frecuencia, la amplitud y la fase de la señal no es la misma en todos los puntos de la línea. Debido a esta falta de coincidencia, la mayor parte de las magnitudes que utilizaremos dependerán de la posición z , variable que hemos privilegiado por ser en esta dirección en la que se produce la simetría de la línea. A pesar de estas peculiaridades, la teoría de líneas de transmisión aprovecha muchas de las leyes y propiedades que se estudian en electrónica de baja frecuencia.

(1 - 15.1) La forma práctica más generalizada de utilizar las líneas de transmisión es operando en el modo fundamental TEM. Este análisis será también útil para los problemas de propagación en guías, debido a la línea equivalente que puede asociarse a cada modo de propagación. En este apartado nos centraremos en el análisis de la propagación en la dirección longitudinal.

3.6.1.- Ecuaciones de las líneas de transmisión.

(3 – 2.3) Las ecuaciones que estudiaremos asumen que por la línea se propaga un *modo TEM*, es decir que las componentes longitudinales de los campos eléctrico y magnético son siempre nulas. Esta hipótesis es necesaria para garantizar la unicidad en las definiciones de V e I .

(4 – 2.1.1) Consideremos una sección arbitrariamente pequeña dz , de una línea de transmisión formada por dos hilos paralelos. Entre ellos, en cada plano z , existe una diferencia de potencial $v(z, t)$, y están recorridos por una corriente $i(z, t)$,

(5 – 3.2) Las ecuaciones diferenciales de una línea de transmisión uniforme se encuentran estudiando una sección arbitrariamente pequeña dz , esta sección de la línea tiene una resistencia total en serie $R \Delta z$, una inductancia en serie $L \Delta z$, una capacitancia paralela $C \Delta z$ y una conductancia paralela $G \Delta z$. Su circuito equivalente en la forma de una red cuadripolar se puede dibujar de diferentes formas.

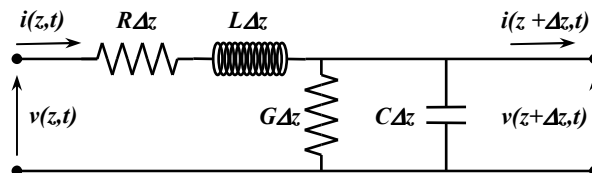


Fig. Modelo equivalente de una sección de línea, de longitud muy pequeña en comparación con la longitud de onda. (tomada de Ref.3)

$$\begin{aligned} v(z + \Delta z, t) &= v(z, t) - i(z, t) R \Delta z - L \Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ i(z + \Delta z, t) &= i(z, t) - v(z, t) G \Delta z - C \Delta z \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Pasando $v(z, t)$ e $i(z, t)$ al primer miembro, dividiendo por Δz , en el límite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} &= -i(z, t) R(z, t) - L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} &= -v(z, t) G(z, t) - C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

obtenemos las ecuaciones básicas de las líneas de transmisión. Si suponemos una dependencia armónica describimos el potencial y la intensidad en forma compleja:

$$\begin{aligned} v(z, t) &= V(z) e^{j\omega t} \\ i(z, t) &= I(z) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad 3.6.1$$

Donde $V(z)$ e $I(z)$ serán magnitudes fasoriales dependientes únicamente de z .

$$\begin{aligned} d V(z) / dz &= - (R + j\omega L) I(z) = - Z I(z) \\ d I(z) / dz &= - (G + j\omega C) V(z) = - Y V(z) \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden:

$$d^2 V(z) / dz^2 = (R + j\omega L) (G + j\omega C) V(z) = \gamma^2 V(z)$$

La solución será de la forma:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z} \quad 3.6.2$$

Donde la constante de propagación viene dada por:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \left[(R + j\omega L) (G + j\omega C) \right]^{1/2}$$

Análogamente obtendríamos para la función $I(z)$ la solución:

$$I(z) = I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{+\gamma z}$$

Donde el primer término del segundo miembro se corresponde con una señal propagándose hacia la parte positiva de las zetas y la segunda hacia la parte negativa.

3.6.2.-Impedancia característica.

Sustituyendo esta solución $V(z)$, ecuación 3.6.2, en la ecuación diferencial para V obtenemos

$$\begin{aligned} d V(z) / dz &= -\gamma V^+ e^{-\gamma z} + \gamma V^- e^{+\gamma z} = - (R + j\omega L) I(z) \\ I(z) &= \frac{\gamma}{R + j\omega L} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}) = \frac{(G + j\omega C)^{1/2}}{(R + j\omega L)^{1/2}} (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}) \\ I(z) &= (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}) / Z_0 \end{aligned} \quad 3.6.3$$

Donde hemos llamado:

$$Z_0 = \left[(R + j\omega L) / (G + j\omega C) \right]^{1/2} = (V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}) / (I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{+\gamma z})$$

Que llamamos impedancia característica y que no depende de z . (I-15.9). Hemos introducido Z_0 de un modo algo artificial dándole un nombre comprometido, veremos sentido físico y justificación en el próximo apartado.

En el caso de una línea sin pérdidas la impedancia característica es real y tiene por valor:

$$Z_0 = \sqrt{L/C}$$

3.6.3.- Líneas terminadas en cargas, impedancia de la línea, coeficiente de reflexión, razón de onda estacionaria.

Si hay dos señales que se propagan en sentidos opuestos es porque ha habido una reflexión de la señal debido a un cambio en la impedancia, como se muestra en la siguiente figura:

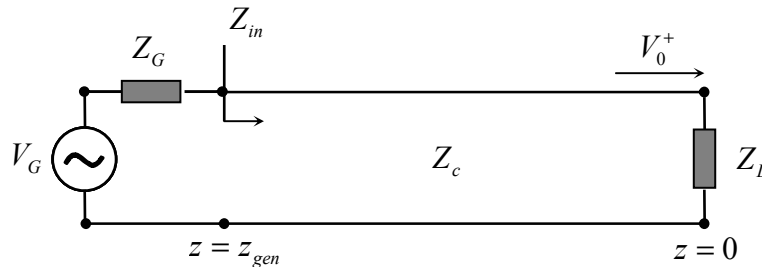


Fig. Línea de transmisión terminada en una carga Z_L . (tomada de Ref.3)

Definimos impedancia de la línea a la relación entre tensión e intensidad en general será dependiente de z :

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}}{I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{+\gamma z}} = Z_0 \frac{V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}}$$

Volvamos sobre el significado de la impedancia característica Z_0 . ¿En qué condiciones la impedancia $Z(z)$ será Z_0 en toda la línea? Es decir:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0$$

Esto sucederá cuando V^- sea cero, según se aprecia en 3.6.3, es decir, cuando no haya señal reflejada, cuando la línea es indefinida y recíprocamente, esto implica que si en un lugar de nuestra línea insertamos una impedancia igual a Z_0 la señal reflejada V^- será cero. Esta propiedad es muy importante en la propagación de señales pues en este caso las reflexiones son indeseables.

Volvamos a la definición de impedancia. Según varía z la fase entre la onda progresiva y reflejada varía, lo cual significa que el voltaje total y la intensidad total varían con z , por lo que también lo hará la impedancia. Para caracterizar la reflexión definamos **coeficiente de reflexión de voltaje** como la relación entre las componentes del potencial reflejado e incidente

$$\rho(z) = \frac{V^- e^{+\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z}} = \rho(0) e^{2\gamma z} \quad 3.6.4$$

Observemos que la fase de esta magnitud es el doble que el de las señales incidente y reflejada, que $\rho(0)$ es un número complejo cuyo módulo variará entre uno y cero correspondiente a que la carga refleje toda la señal, $|V^-| = |V^+|$, o no haya señal reflejada $V^- = 0$, el ángulo de fase del coeficiente de reflexión $\rho(0)$ es debido al hecho de que la señal reflejada no está, en general, en fase con la incidente.

En la figura una impedancia de carga Z_L tiene un coeficiente de reflexión de módulo 0.35 y un ángulo de fase de 60 grados. Esto significa que, en la parte final derecha de la línea, la onda de voltaje reflejada tiene una amplitud que es el 35% de la onda incidente, y que la fase de la onda reflejada aventaja a la onda incidente en 60 grados.

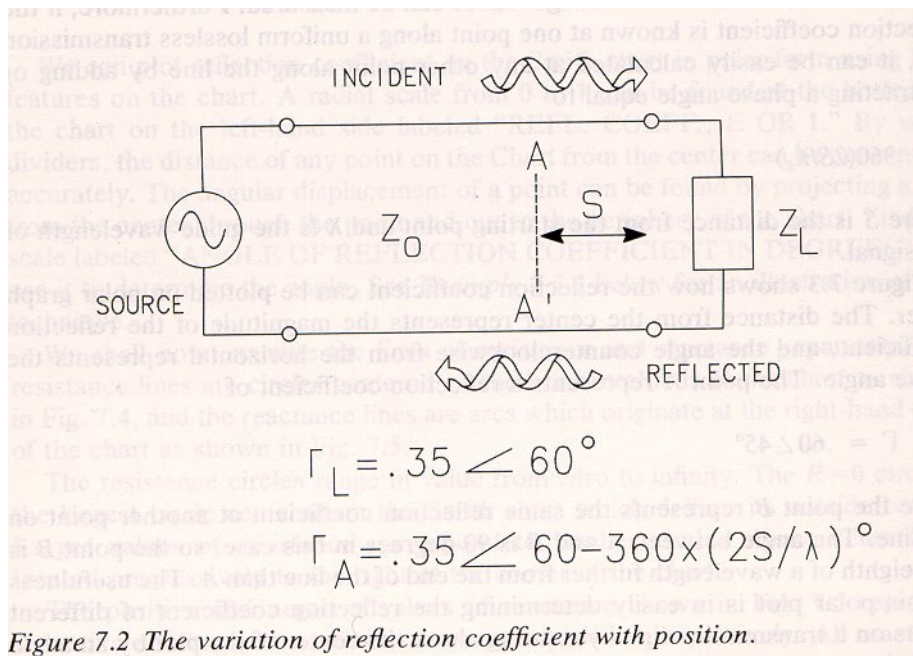


Figure 7.2 The variation of reflection coefficient with position.

(8 – 7.2)

Consideremos ahora la situación en A-A'. Si la línea de transmisión no tiene pérdidas, la amplitud de la onda incidente y reflejada será la misma que al final de la línea, pero la fase de la onda incidente medida en A-A' estará avanzada un ángulo

$$360 S/\lambda_g$$

donde λ_g es la longitud de onda de la señal en la línea. Como la onda reflejada viaja en sentido opuesto su fase estará retrasada en la misma cantidad. El resultado será que las ondas incidente y reflejada tendrán en A-A' la misma amplitud y estarán desfasadas en ángulo que es menor que el ángulo de desfase en la carga igual a:

$$\theta = 360 \cdot 2S/\lambda_g$$

Por ejemplo, si la longitud de onda en la línea es

$$\lambda_g \text{ 15 mm}$$

y la distancia S desde el final de la línea es 1.3 mm, el coeficiente de reflexión en A-A' será 0.35 con un ángulo de

$$60 - 360 \cdot (2 \cdot 1.3 / 15) = 60 - 62.4 = -2.4^\circ$$

Si conocemos el coeficiente de reflexión en algún punto de la línea sin pérdidas, podemos conocerlo en cualquier punto añadiendo o sustrayendo el ángulo de fase igual a $360 \cdot 2 \cdot S / \lambda_g$

La impedancia, teniendo en cuenta 3.6.3 y 3.6.4, la podemos escribir en función de esta nueva magnitud:

$$Z(z) = Z_0 \frac{V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad 3.6.5$$

(1 - 15.13)

$$Z_N = Z / Z_0 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Hemos denominado Z_N como impedancia normalizada. O bien

$$\rho = (Z_N - 1) / (Z_N + 1) \quad 3.6.6$$

(4-2.1.4) Donde tanto ρ como Z_N son números complejos funciones de la posición, el módulo del coeficiente de reflexión es siempre menor que la unidad, $|\rho(0)| < 1$, de forma que la amplitud de la onda reflejada es siempre menor o igual que la incidente, la igualdad se produce en los casos extremos, si la carga es un cortocircuito, $Z_L = 0$ y $\rho(0) = -1$, si la carga es un circuito abierto, $Z_L = \infty$ y $\rho(0) = 1$.

(5 - 7.1) Calculemos el coeficiente de reflexión de acuerdo con algunos valores de la impedancia normalizada.

Z_N	ρ	$ \rho $	φ	
$1 + j 0$	$0 + j 0$	0	indeterminada	Igual a la impedancia característica
$0 + j 0$	$-1 + j 0$	1	π	Corto circuito
infinita	$1 + j 0$	1	0	Circuito abierto
$0 + j 1$	$0 + j 1$	1	$\pi/2$	Si Z_0 es real, Z es una reactancia inductiva igual a Z_0
$0 - j 1$	$0 - j 1$	1	$-\pi/2$	Si Z_0 es real, Z es una reactancia capacitiva igual a Z_0

La representación geométrica de la parte real e imaginaria de la impedancia normalizada, Z_N , en el plano de coordenadas rectangulares ρ da lugar a la llamada carta de Smith.

EE 3FI4 (Prof. N. Georgieva) <http://www.ece.mcmaster.ca/faculty/georgieva/>
THEORY AND APPLICATIONS OF ELECTROMAGNETICS

Cap. 25 – transparencia 16

Determinar $Z(z)$ de una línea de transmisión sin pérdidas terminada con un cortocircuito ($Z(0) = 0$) si la longitud de la línea es $L = \lambda/4$

La impedancia la podemos conocer a partir del coeficiente de reflexión.

$$\rho(0) = (Z(0) - Z_0) / (Z(0) + Z_0) = -Z_0/Z_0 = -1$$

$$\beta L = (2\pi/\lambda) (\lambda/4) = \pi/2$$

$$\rho(L) = \rho_L e^{2j\beta L} = \rho_L e^{2j\pi/2} = -e^{j\pi} = -\cos(\pi) - j\sin(\pi) = 1$$

$$Z_{\lambda/4} = [1 + \rho(L)]/[1 - \rho(L)] = 2/0 = \infty$$

La impedancia de entrada de esta línea corresponde a un circuito abierto

(I-15.14) A efectos de caracterización experimental de una onda estacionaria se introduce como parámetro básico la **razón de onda estacionaria**, término comúnmente representado por las siglas **VSWR**, correspondiente a la denominación inglesa “*Voltage Standing Wave Ratio*”, este parámetro se introduce como cociente entre los valores de potencial en puntos correspondientes a un máximo y un mínimo:

$$S = |V_{\max}| / |V_{\min}|$$

Los valores de la tensión varían con la posición:

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z} = V^+ e^{-\gamma z} + V^+ e^{-\gamma z} \rho(0) e^{2\gamma z} = V^+ (e^{-\gamma z} + \rho(0) e^{+\gamma z})$$

El valor máximo de la tensión lo obtendremos cuando se sumen los voltajes y el mínimo cuando se resten:

$$S = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad 3.6.7$$

El valor de la razón de ondas estacionaria varía entre uno, cuando el módulo del coeficiente de reflexión sea cero, no hay onda reflejada, a infinito cuando se refleje toda la onda, $|\rho| = 1$

(4 – 2.2.1.b)

En los puntos en que $|V|$ es máximo, $|I|$ es mínimo y la impedancia es resistiva y toma el valor máximo R_M , supuesta una línea sin pérdidas.

En efecto, $|V|$ es máximo cuando $V^+ e^{-j\beta z}$ y $V^+ e^{+j\beta z}$, se suman en fase

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^+ e^{+j\beta z} = [|V^+| + |V^-|] e^{-j\beta z} e^{j\phi^+}$$

en cuyo caso $I^+ e^{-j\beta z}$ y $I^+ e^{+j\beta z}$, se suman en oposición de fase:

$$I = \frac{1}{Z_0} V^+ e^{-j\beta z} - \frac{1}{Z_0} V^- e^{+j\beta z} = \frac{[|V^+| - |V^-|] e^{-j\beta z} e^{j\phi^+}}{Z_0}$$

Para obtener el valor de la tensión recordamos la expresión 3.6.1 y supongamos que nos encontramos en una situación sin pérdidas:

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC} = j\beta$$

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \operatorname{Re} \{ V(z) e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ |V^+| e^{-\beta z} (1 + |\rho(0)| e^{j\theta} e^{2\beta z}) e^{j\omega t} \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ |V^+| (e^{j(\omega t - \beta z)} + |\rho(0)| e^{j(\omega t + \beta z + \theta)}) \} = |V^+| [\cos(\omega t - \beta z) + |\rho(0)| \cos(\omega t + \beta z + \theta)] \end{aligned}$$

donde suponemos que $|\rho(0)|$ puede variar entre 0 y +1

3.6.4.-Transformación coeficiente de reflexión –impedancia: Carta de Smith.

(4-2.2) Las expresiones para la impedancia en una línea de transmisión son de manejo un poco complicado. Una representación cartesiana de impedancias no es útil ya que hay situaciones en las que la parte reactiva varía de $-\infty$ a $+\infty$, sin embargo se observa que el coeficiente de reflexión es un vector complejo, de módulo menor o igual que la unidad, que gira cuando nos movemos a lo largo de la línea. Si se representa la impedancia normalizada sobre el plano del coeficiente de reflexión de voltaje, solamente necesitaremos un círculo de radio unidad.

(5 – 9.2) Asignamos una notación de números complejos a ρ y Z_N

$$\rho = u + jv$$

$$Z_N = r_n + j x_n$$

Sustituyendo en la expresión 3.6.6

$$u + jv = \frac{r_n + j x_n - 1}{r_n + j x_n + 1}$$

$$r_n (u - 1) - x_n v = -(u + 1)$$

$$r_n v - x_n (u - 1) = -v$$

Eliminando la parte reactiva x_n obtenemos:

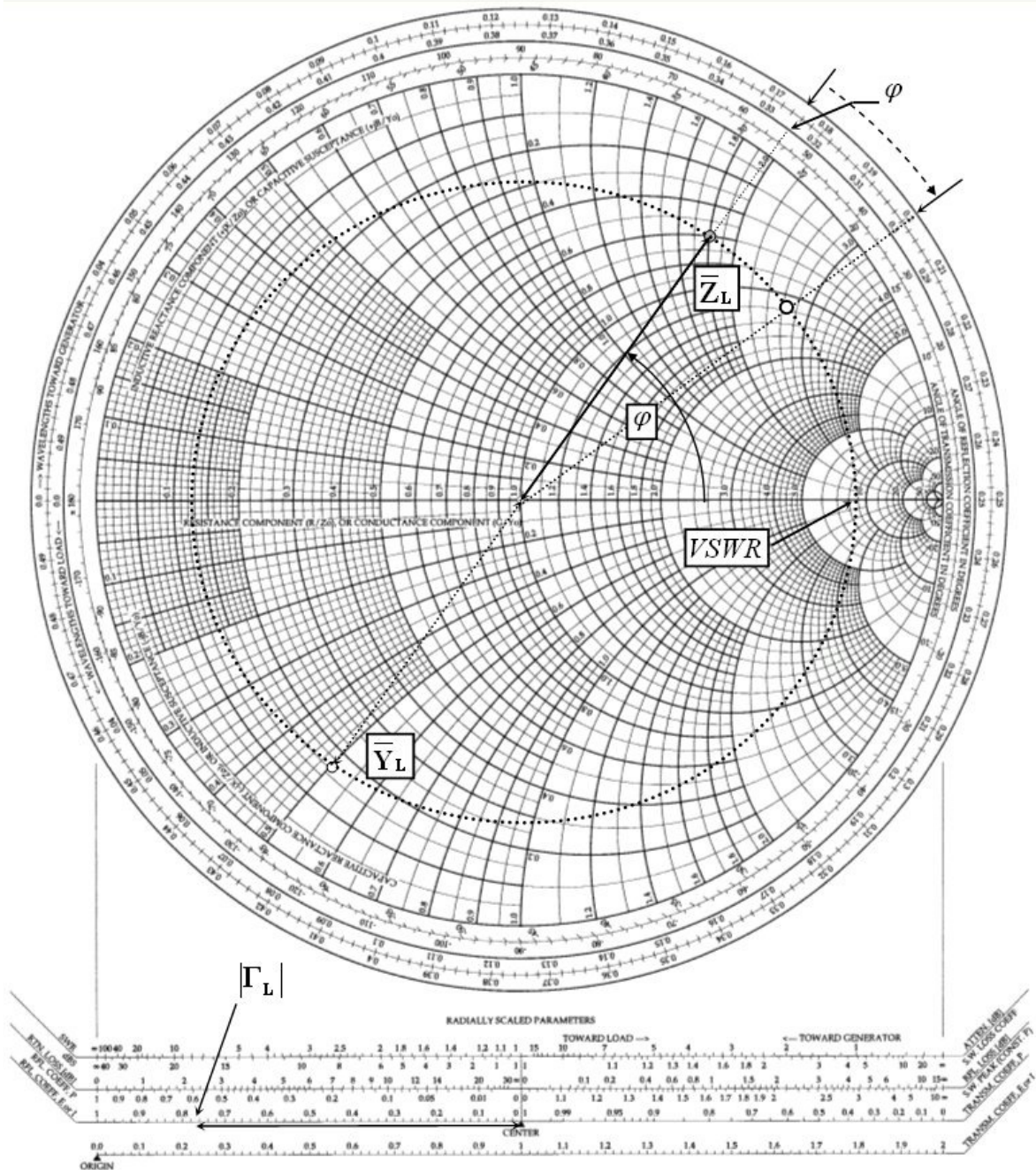
$$\left[u - r_n / (r_n + 1) \right]^2 + v^2 = 1 / (r_n + 1)^2$$

En coordenadas rectangulares de u y v , ésta es la ecuación de un círculo cuyo centro está localizado en $u = r_n / (r_n + 1)$, $v = 0$ y cuyo radio es $1 / (r_n + 1)$, estos serán los círculos correspondientes a impedancias resistivas constante. Si la parte resistiva es cero, la circunferencia será de radio unidad y el centro se encontrará en (0, 0). Según la parte resistiva tiende a infinito el centro tiende a desplazarse hacia el punto (1, 0), y el radio tiende a cero. Si $r_n = 1$, la circunferencia tendrá de centro el punto (0.5, 0) y de radio 0.5.

Si el procedimiento se repite, eliminando r_n en lugar de u_n , el resultado es

$$(u - 1)^2 + (v - 1/x_n)^2 = (1/x_n)^2$$

Serán circunferencias con centro en 1, $1/x_n$ y radio $1/x_n$,



a) Fijada Z_L calcular ρ_L

(5-9.3. ejemplo 9.1) Una línea de transmisión con impedancia característica de $Z_0 = 50 + j0$ ohmios, está terminada en una impedancia de $25 - j100$ ohmios. Determine el coeficiente de reflexión en la carga terminal de la línea.

La impedancia terminal de la carga normalizada es, $(25 - j100)/50 = 0.5 - j2$. (I-15.3.p 19) Dado que la representación está confeccionada en el plano correspondiente al coeficiente de reflexión en forma módulo argumental, una vez localizada Z_{LN} , la distancia al centro nos da $|\rho|$. En la parte inferior de la carta una de las escalas se corresponde con el módulo del ρ que varía de cero a uno, llevada la distancia del centro de la carta a la carga normalizada a esta escala se encuentra que vale 0.82. La escala angular, inmediatamente por fuera de la carta de Smith, es una escala del ángulo de fase del coeficiente de reflexión que nos da 309° . Luego el coeficiente de reflexión producido por una impedancia normalizada de $0.5 - j2$ es $\rho = 0.82 \angle 309^\circ = 0.52 - j0.64$

(Yo) La fase del coeficiente de transmisión viene directamente relacionada con la longitud de onda en la línea, **3.6.4**, $[2 * \pi / (\lambda / 2)] z$

Determinación de la VSWR.

(8-7.6) La razón de onda estacionaria viene relacionada con el módulo del coeficiente de reflexión por la expresión **(3.6.7)**. La razón de onda estacionaria de una impedancia de carga Z_A sólo depende del módulo de ρ por lo que en la carta de Smith todos los puntos de la circunferencia de radio ρ tienen la misma VSWR, puede conocerse a partir de la carta de Smith situando la carga Z_A en la carta, trazando la circunferencia que pase por ese punto y buscando el corte con el eje $+x$ nos da directamente la VSWR. En este punto $|V|$ es máximo, $|I|$ es mínimo y la impedancia es resistiva y toma el valor máximo R_M , supuesta una línea sin pérdidas. Otro modo de obtener la VSWR es en la escala que se encuentra en la parte inferior de la escala, en la parte izquierda indicada con las siglas VSWR.