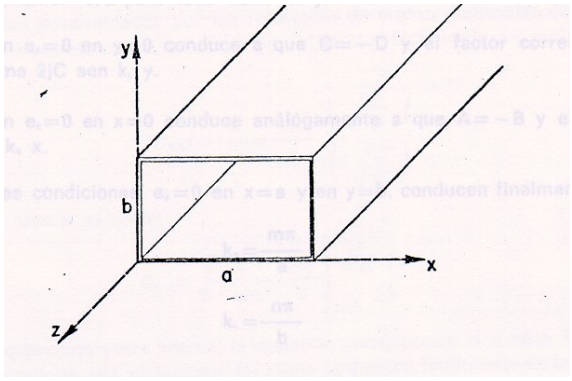
4.- GUÍAS DE ONDA HOMOGÉNEAS

4.1- Guía de sección rectangular.
4.1.1- *Solución general.*
4.1.2*- Modos TM.*
4.1.3*- Modos TE.*
4.1.4*- Análisis del modo fundamental.*
4.1.5*- Distribución de campos, modo* TE_{10}*.*
4.2- Guía de sección circular.
4.3- Guía coaxial.
4.4- Potencia en guías: atenuación.
4.4.1*-Cálculo de la atenuación en guías.*

4.1- Guía de sección rectangular.

(1-16.1) El problema a resolver en el caso de guías homogéneas y uniformes, queda siempre planteado en los mismos términos: resolución de la ecuación de Helmholtz para las componentes longitudinales del campo, ecuaciones ***3.1.12*** y ***3.1.13***, sometida a las condiciones de contorno fijadas por la geometría del problema, las componentes transversales se obtienen aplicando las expresiones ***3.1.7*** y ***3.1.8*** a las componentes longitudinales.

Vamos a estudiar el caso en que las condiciones de contorno vienen determinadas por las paredes metálicas de una guía rectangular tal como se muestra en la siguiente figura.



4.1.1- Solución general.

La ecuación a resolver para campos armónicos y con una dirección privilegiada *z* es de la forma ***(3.1.12-13)***

$$\left[\nabla_t^2 + (\omega^2 \mu\varepsilon - \beta_n^{\,2})\right] \varphi_n = 0$$

Recordemos que la función φ depende únicamente de *x* e *y* y que representa indistintamente la componente *z* del campo eléctrico o magnético. Suponiendo la solución de variables separadas:

$$\varphi\,(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

sustituyendo y dividiendo por XY:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{d x^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{d y^2} + \gamma^2 = 0$$

Cada uno de los términos debe ser una constante, tomemos

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{d y^2} = -\,k_y^{\,2}$$

Nos queda:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{d x^2} = k_y^{\,2} - \gamma^2 = -\,k_x^{\,2} \qquad \textbf{4.1.1}$$

Las soluciones son de tipo exponencial:

$$e_z = (A\, e^{j\,k_x x} + B\, e^{-j\,k_x x})\,(C\, e^{j\,k_y y} + D\, e^{-j\,k_y y}) \qquad \textbf{4.1.2}$$

$$h_z = (A'\, e^{j\,k_x x} + B'\, e^{-j\,k_x x})\,(C'\, e^{j\,k_y y} + D'\, e^{-j\,k_y y}) \qquad \textbf{4.1.3}$$

y las constantes vendrán determinadas por las condiciones de contorno de las cuales obtendremos también el autovalor.

$$\gamma^2 = k_x^{\,2} + k_y^{\,2} \qquad \textbf{4.1.1}$$

La dependencia con *z* y *t* para ondas propagándose con z creciente la obtendremos multiplicando la solución por $e^{\,j(\omega t\,-\,\beta z)}$ y los campos tomando la parte real de estas expresiones.

4.1.2*- Modos TM.*

Impongamos las condiciones de contorno impuestas por la estructura de la guía de ondas rectangular, mostrada en la figura, para modos ***TM*** (h_z=0). Esto significa que la componente *z* del campo eléctrico debe ser cero sobre las paredes de la guía.

Para que el campo eléctrico sea cero en $y = 0$ tienen que ser C = - D, lo cual nos lleva a que este factor es de la forma $2jC\ sen(k_y y)$, por motivo similar A tiene que ser igual a –B con lo que el otro factor queda $2jA\ sen(k_x x)$.

$$E_z = \text{Cte.}\ sen(k_x x).\ sen(k_y y)$$

Para que estas funciones sean cero en $x = a$ e $y = b$ debe cumplirse que

$$k_x\, a = m\,\pi \qquad \text{y} \qquad k_y\, b = n\,\pi$$

siendo *m* y *n* números enteros, el autovalor de nuestra ecuación diferencial valdrá, ***4.1.1***:

$$\gamma_{mn}^2 = (m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2 \qquad \textbf{4.1.4}$$

relacionado con la constante de propagación mediante:

$$\gamma_{mn}^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - \beta_{m\,n}^2 \quad \Rightarrow \quad \beta_{m\,n}^2 = \beta_0^2 - \left[(m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2\right] \qquad \textbf{4.1.5}$$

siendo β_0 la constante de propagación en el medio libre. Hemos obtenido así la expresión para la componente longitudinal del campo eléctrico para modos TM,

$$\mathbf{E}_{z\,m\,n} = \boldsymbol{A}_{m\,n}\ \mathbf{sen}(m\,\pi\,\boldsymbol{x}/a)\ \mathbf{sen}(n\,\pi\,\boldsymbol{y}/b) \qquad \textbf{4.1.6}$$

la del campo magnético hemos supuesto que era cero dado que son TM, y las componentes transversales las obtenemos a partir de la expresión ***3.1.14***.

$$\boldsymbol{E}_{t\,m\,n} = -j\,\frac{\beta_{m\,n}}{\gamma_{mn}^2}\,\nabla_t E_{z\,mn}$$

Obtendremos las componentes transversales del campo eléctrico.

$$E_{x\,m\,n} = -j\,\frac{\beta_{m\,n}}{\gamma_{m\,n}^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \left(-j\,\frac{\beta_{m\,n}}{\gamma_{m\,n}^2}\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sen\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$E_{y\,m\,n} = -j\,\frac{\beta_{m\,n}}{\gamma_{m\,n}^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} = \left(-j\,\frac{\beta_{m\,n}}{\gamma_{m\,n}^2}\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\,sen\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

y para las componentes magnéticas utilizamos la expresión ***3.1.15***:

$$-\gamma^2\,\boldsymbol{H}_t = j\,\omega\,\varepsilon\,\boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t E_z = j\,\omega\,\varepsilon\,(-\partial E_z/\partial y\,\boldsymbol{u}_x + \partial E_z/\partial x\,\boldsymbol{u}_y)$$

$$-\gamma^2\,H_x = -j\,\omega\,\varepsilon\,\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\,A_{mn}\left|\frac{n\,\pi\,\omega\,\varepsilon}{b}\right|sen(m\,\pi\,x/a)\,cos(n\,\pi\,y/b)$$

$$-\gamma^2\,H_y = j\,\omega\,\varepsilon\,\frac{\partial E_z}{\partial x} = j\,A_{mn}\,(m\,\pi\,\omega\,\varepsilon/a)\,cos(m\,\pi\,x/a)\,sen(n\,\pi\,y/b)$$

La constante de propagación vale:

$$\beta_{m\,n}^2 = \omega^2\,\mu\varepsilon - \left[(m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2\right]$$

la propagación solo será posible para valores reales de $\beta_{m\,n}$ es decir para valores de frecuencia superiores a la condición

$$\beta_{m\,n}^2 = \omega^2\,\mu\varepsilon - \left[(m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c\,m\,n} = c\left[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2\right]^{1/2}$$

Podemos escribir la constante de propagación $\beta_{m\,n}$ en términos de la frecuencia de corte.

$$f_{c\,m\,n} = c\left[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2\right]^{1/2}/2\pi = c\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^{1/2}/2$$

$$\beta_{m\,n} = \beta_0\left[1 - \left((m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2\right)/(\omega^2\,\mu\varepsilon)\right]^{1/2} = \beta_0\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}$$

para ondas propagantes la velocidad de fase y la longitud de onda vienen dadas por:

$$v_{pm\,n} = \omega/\beta_{m\,n} = \omega/\left[\omega^2\,\mu\varepsilon - \left[(m\,\pi/a)^2 + (n\,\pi/b)^2\right]\right]^{1/2} = c/\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}$$

$$\lambda_{mn} = v_{pm\,n}/f = c/\left(f\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}\right) = \lambda/\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}$$

Cuando la frecuencia de la señal se tiende a la frecuencia de corte, la velocidad de fase tiende y la longitud de onda tienden a infinito.

La impedancia de onda, definida como la relación entre las componentes transversales del campo eléctrico y del campo magnético, *3.2.5*, tiene la expresión:

$$Z_{TMmn} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-j\,A_{mn}\,m\,\pi\,\beta_{m\,n}/(a\,\gamma_{mn}^2)\,cos(m\,\pi\,x/a)\,sen(n\,\pi\,y/b)}{-j\,A_{mn}\,m\,\pi\,\omega\,\varepsilon/(a\,\gamma_{mn}^2)\,cos(m\,\pi\,x/a)\,sen(n\,\pi\,y/b)} = \frac{\beta_{m\,n}}{\omega\,\varepsilon}$$

En términos de la frecuencia de corte la podemos escribir como:

$$Z_{TMmn} = \beta\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}/(\omega\,\varepsilon) = \omega\,(\mu\varepsilon)^{1/2}\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}/(\omega\,\varepsilon)$$

$$Z_{TMmn} = \eta\left[1 - (f_{c\,m\,n}/f)^2\right]^{1/2}$$

4.1.3*- Modos TE.*

En este caso sólo tendremos componente longitudinal del campo magnético:

$$h_z = (A'\,e^{j\,k_x x} + B'\,e^{-j\,k_x x})\,(C'\,e^{j\,k_y y} + D'\,e^{-j\,k_y y})$$

que tiene que cumplir las condiciones de contorno ***3.2.3***:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \qquad \text{en } x = 0,\ a$$

$$\partial H_z/\partial y = 0 \qquad \text{en } y = 0,\ b$$

lo cual cambia los senos en la expresión ***5.1.3*** en cosenos al quedarnos la parte real de ***5.1.2*** . Al hacer la derivada con respecto a *x* el primer factor nos quedará:

$$j\,k_x\,A'\,e^{j\,k_x x} - j\,k_x\,B'\,e^{-j\,k_x x} \qquad \text{para } x = 0 \qquad \Rightarrow A' = B'$$

poniendo esta condición en la expresión para la dependencia x de la componente longitudinal de H, y desarrollando las exponenciales:

$$A' \left[cos(k_x x) + j\, sen(k_x x) + cos(k_x x) - j\, sen(k_x x) \right] = 2A'\, cos(k_x x)$$

Y de forma similar obtendríamos un término similar para la dependencia con y.

$$H_{z\,m\,n} = C'_{m\,n}\, cos(k_x x)\, cos(k_y y)$$

Derivando y poniendo las condiciones de contorno para x = a e y = b volvemos a encontrar el mismo valor para los autovalores, ***4.1.4***:

$$\gamma_{mn}^2 = \left(m\,\pi/a\right)^2 + \left(n\,\pi/b\right)^2 \qquad \textbf{4.1.7}$$

lo que significa que los modos TE $_{mn}$ y TM $_{mn}$ correspondientes a un mismo par de subíndices (m, n) son degenerados, con la misma constante de propagación. La expresión de la componente longitudinal del campo H toma la forma:

$$\mathbf{H_{z\,mn} = C'_{mn}\, cos(m\,\pi\, x/a)\, cos(n\,\pi\, y/b)} \qquad \textbf{4.1.8}$$

A partir de esta expresión obtenemos el resto de las componentes. De la expresión ***3.2.1*** tendremos:

$$\boldsymbol{H}_{t\,mn} = -j\,(\beta_{mn} / \gamma_{mn}^2)\, \nabla_t H_{z\,mn} \qquad \textbf{4.1.9}$$

$$H_{x\,m\,n} = -j\,(\beta_{m\,n} /\gamma_{mn}^2)\, \partial H_{z\,mn}/\partial x = j\left[\beta_{mn}\, m\,\pi / (a\,\gamma_{mn}^2)\right] A_{mn}\, sen(m\,\pi x/a)\, cos(n\,\pi y/b)$$
$$H_{y\,m\,n} = -j\,(\beta_{m\,n} /\gamma_{mn}^2)\, \partial H_{z\,mn}/\partial y = j\left[\beta_{mn}\, n\,\pi / (b\,\gamma_{mn}^2)\right] A_{mn}\, cos(m\,\pi x/a)\, sen(n\,\pi y/b)$$

Y las componentes del campo E a partir de la expresión ***3.1.14*** particularizada para modos TE:

$$\gamma_{mn}^2\, \boldsymbol{E}_t = j\,\omega\,\mu\, \boldsymbol{u}_z \wedge \nabla_t H_z = j\,\omega\,\mu\left(-\partial H_z/\partial y\, \boldsymbol{u}_x + \partial H_z/\partial x\, \boldsymbol{u}_y\right)$$

$$E_{x\,m\,n} = j\left[\omega\,\mu\, n\,\pi / (b\,\gamma_{mn}^2)\right] A_{mn}\, cos(m\,\pi x/a)\, sen(n\,\pi y/b)$$
$$E_{y\,m\,n} = -j\left[\omega\,\mu\, m\,\pi / (a\,\gamma_{mn}^2)\right] A_{mn}\, sen(m\,\pi x/a)\, cos(n\,\pi y/b)$$

La impedancia de onda la podemos calcular de ***3.2.2***

$$\boldsymbol{Z}_{TEmn} = \eta\,(\beta/\beta_n) = \eta\left[1 - \left(f_{c\,m\,n}/f\right)^2\right]^{-1/2}$$

4.1.4*- Análisis del modo fundamental.*

La utilización de una guía de ondas en una forma arbitraria puede dar lugar a que se propaguen por ella multitud de modos, con lo cual el análisis del campo en la guía es en general difícil. La forma usual de operación de una guía es con un solo modo

propagándose por su interior, lo cual es factible si se trabaja en el rango de frecuencias comprendido entre el modo fundamental y la del primer modo superior.

En una guía rectangular, dado que sólo para los modos TE pueden obtenerse modos con *m* o *n* nulos, el modo fundamental es de este tipo.

Si la guía fuese cuadrada, a = b, todos los modos subindicados por (m, n) y (n, m) serían degenerados en particular los modos TE_{10} y TE_{01}. Esta es quizás la razón fundamental que lleva a la utilización de guías de sección rectangular. En estas guías la notación más frecuentemente utilizada corresponde a la elección del eje x en la dirección del lado más ancho de la guía, de esta forma se tiene a>b y el modo fundamental, es decir, el de menor γ_{mn} o menor frecuencia de corte resulta ser, de acuerdo con la expresión ***4.1.4*** el modo TE_{10}. En el caso del modo TE_{10} la longitud de onda en la guía vendrá dada por, ***4.1.5*** :

$$(2\pi/\lambda_{G10})^2 = (2\pi/\lambda_0)^2 - (\pi/a)^2$$
$$\lambda_{G10} = \lambda_0 / \left[1 - (\lambda_0/2a)^2\right]^{1/2}$$

y la frecuencia de corte

$$(\omega_c)_{10} = c\,\gamma_{10} = c\,\pi/a$$

Frecuencias de corte para diferentes modos en guía rectangular con a = 2b:

TE_{10}	TE_{01} TE_{20}	TE_{11} TM_{11}	
1	2	$\sqrt{5}$	$\omega_c/(\omega_c)_{10}$

4.1.5*- Distribución de campos, modo TE_{10}.*

Particularizamos las expresiones dadas en el apartado ***4.1.3*** para modos TE con *m* = 1 y *n* = 0. Para el modo TE_{10} los campos vienen dados por las expresiones:

$$H_{z10} = A_{10}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad \textbf{4.1.10}$$

$$H_{x10} = j\frac{\beta_{10}}{\frac{\pi}{a}}A_{10}\,sen\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$E_{y10} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\beta_0}{\beta_{10}}H_{x10} = \left(-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\beta_0}{\beta_{10}}\right)j\frac{\beta_{10}}{\frac{\pi}{a}}A_{10}\,sen\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Para obtener las expresiones de los campos tenemos que multiplicar por $e^{j(\omega t - \beta_{10} z)}$ y tomar la parte real.

$$\mathcal{H}_{z10}(\boldsymbol{r}, t) = A_{10}\cos(\pi x/a)\cos(\omega t - \beta_{10} z)$$
$$\mathcal{H}_{x10}(\boldsymbol{r}, t) = -A_{10}\beta_{10}(a/\pi)\,sen(\pi x/a)\,sen(\omega t - \beta_{10} z)$$
$$\mathcal{E}_{y10}(\boldsymbol{r}, t) = -\omega\mu\frac{\pi}{a}A_{10}\,sen\left|\frac{\pi}{a}x\right|\,sen(\omega t - \beta_{10} z)$$

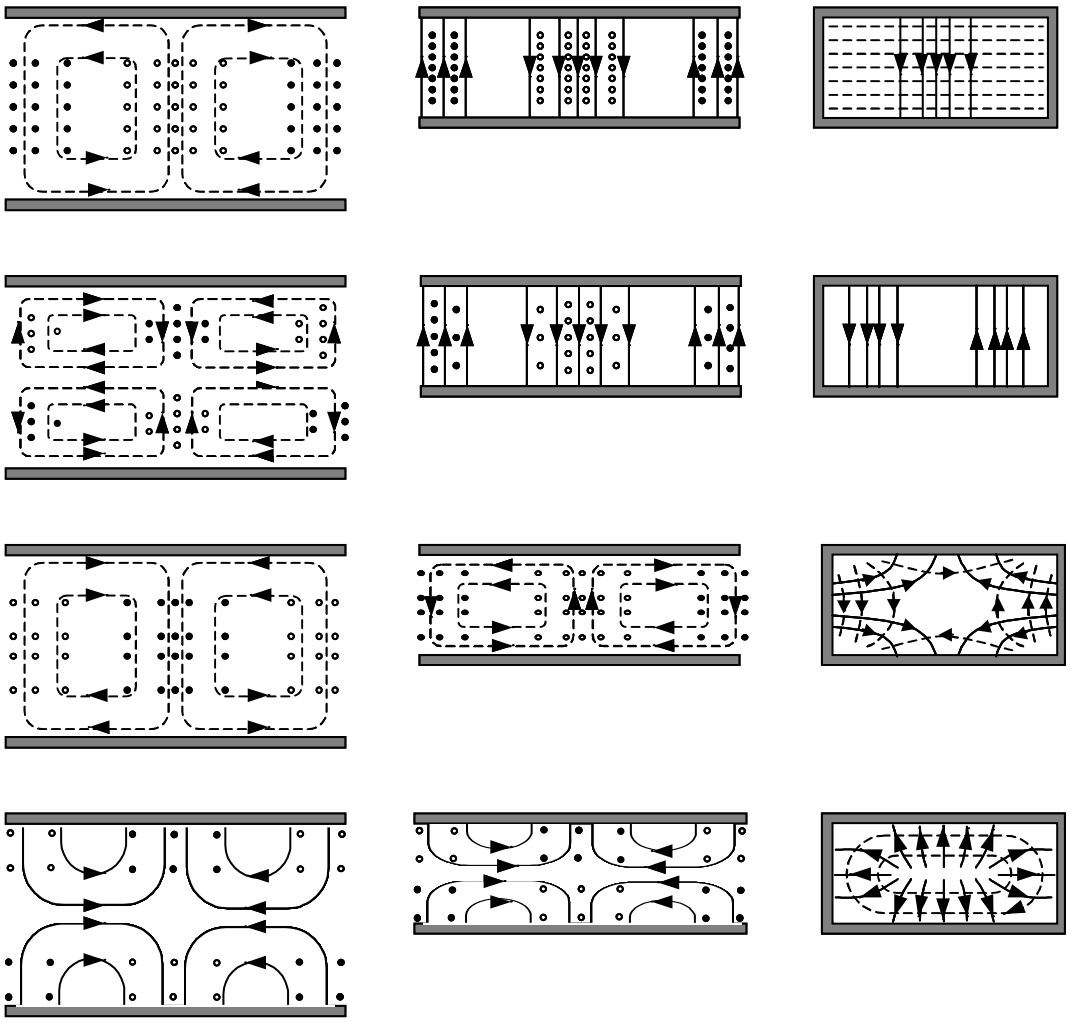


Figura 3.3 de ref. ***3*** – Campos de distintos modos en una guía rectangular. De arriba abajo, modo TE_{10}, TE_{20}, TE_{11}, y TM_{11}. De izquierda a derecha, plano y = b/2, plano E y vista frontal. El plano E es el x=a/2 para los modos TE_{10} y TM_{11}, el x = 3a/4 para el TE_{20} y el x = a para el TE_{11}.

Las dimensiones de las guías están normalizadas según el rango de frecuencia de operación (en el modo fundamental, se sobreentiende). A los rangos de frecuencia que resultan de la normalización citada se les denomina bandas.

Banda S: De 2.60 a 3.95 GHz
Banda J: De 5.30 a 8.20 GHz
Banda X: De 8.20 a 12.4 GHz
Banda P: De 12.4 a 18.0 GHz
Banda K: De 18.0 a 26.6 GHz

La banda X va de 8.2 a 12.4 GHz siendo las dimensiones de la guía estándar de 0.9 y 0.4 pulgadas, a = 2.286 cm y b = 1.016 cm.

Veamos el valor de β_{10} para una frecuencia de 9 GHz

$$\beta_{10}^2 = (2\pi f/c)^2 - (\pi/a)^2 = (2 \times 3.1416 \times 9\text{x}10^9\ s^{-1}/3\text{x}10^8\ ms^{-1})^2 - (3.1416/0.02286\ m)^2$$
$$= 188.496^2 - 137.428^2 = 16\,644.28$$
$$\beta_{10} = 129\ m^{-1}$$

y la longitud de onda en la guía:

$$\lambda_G = 2\,\pi\,/\,\beta_{10} = 2 \times 3.1416/\ 1.29\ cm = 4.87\ cm$$

Ejemplo. Guía rectangular banda P. Las dimensiones de una guía rectangular banda P (12 – 18 GHz) son de 1.58 cm y b = 0.79 cm, determinar:

a) las frecuencias de corte de los cinco modos de menor orden que pudieran propagarse por la guía.
b) ¿qué modos se propagan en la banda K?
c) la velocidad de fase y la longitud de onda de la guía para el modo TE_{10} a 15 GHz

a) Para guías de onda rectangulares llenas de aire, la frecuencia de corte viene dada por:

$$f_{c\,m\,n} = c\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^{1/2}/2 = 1.5\text{x}10^{10}\left[(m/1.58)^2 + (n/0.79)^2\right]^{1/2}$$

modo	TE_{10}	TE_{20}	TE_{01}	TE_{11}	TM_{11}
$f_{c\,m\,n}$ GHz	9.49	19	19	21.2	21.2

b) solamente el TE_{10}

c) $v_{p10} = c/\left[1 - (f_{c10}/f)^2\right]^{1/2} = c/\left[1 - (9.49/15)^2\right]^{1/2} = 1.29 \times 3\text{x}10^8 = 3.87\text{x}10^8$ m s^{-1}
$\lambda_{10} = \lambda/\left[1 - (f_{c10}/f)^2\right]^{1/2} = 1.29 \times \lambda = 1.29 \times c/f = 1.29 \times 3\text{x}10^8\ /15\text{x}10^9 = 2.58$ cm

4.2- Guía de sección circular.

El sistema de coordenadas lógicamente más adecuado para el estudio de estas guías es el cilíndrico (r, θ, z).

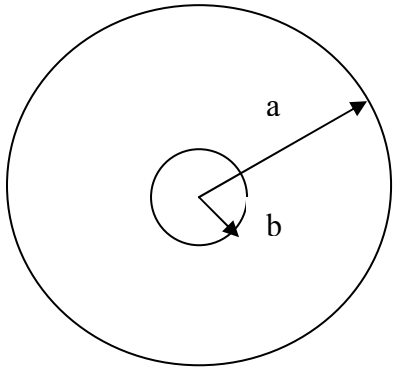
La ecuación de partida toma la forma:

$$\left[\nabla_t^2 + \gamma_n^2\right] \varphi_n = \left[\ \partial^2/\partial r^2 + 1/r\ \partial/\partial r + 1/r^2\ \partial^2/\partial\theta^2 + \gamma_n^2\right] \varphi_n = 0$$

por separación de variables $\varphi(r, \theta) = R(r)\ F(\theta)$

$$1/F\ \ \partial^2 F/\partial\theta^2 =$$

4.3- Guía coaxial.



4.4- Potencia en guías: atenuación.

(1-16.4) El estudio de la potencia transmitida y almacenada en el sistema se realiza en función de la distribución de los campos, uno de los objetivos será expresar las magnitudes de interés en términos de las componentes longitudinales del campo que, como venimos insistiendo en el tratamiento de los sistemas con simetría de traslación, son las componentes que hemos privilegiado.

El flujo medio de potencia a través de la sección transversal de la guía viene dado por:

$$<P> = 1/2 \int_{ST} [\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*] \, d\mathbf{s} = 1/2 \int_{ST} [\mathbf{E}_t \wedge \mathbf{H}_t^*] \, d\mathbf{s}$$

Para modos **TE** , ***3.2.1*,** nos interesa poner la expresión anterior en función de la componente longitudinal del campo magnético, puede expresarse en la forma:

$$<P> = 1/2 \int_{ST} \boldsymbol{Z}_{mnTE} \; [(\mathbf{H}_{tmn} \wedge \boldsymbol{u}_z) \wedge \mathbf{H}_{tmn}^*] \, \boldsymbol{u}_z \, ds$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$

$$\left[\boldsymbol{u}_z \, (\mathbf{H}_{tmn} \cdot \mathbf{H}_{tmn}^*) - \mathbf{H}_{tmn} \, (\mathbf{H}_{tmn}^* \, \boldsymbol{u}_z) \right] \boldsymbol{u}_z = \mathbf{H}_{tmn} \cdot \mathbf{H}_{tmn}^*$$

$$<P> = 1/2 \int_{ST} \boldsymbol{Z}_{mnTE} \, \mathbf{H}_{tmn} \cdot \mathbf{H}_{tmn}^* \, ds \qquad \textbf{\textit{4.4.1}}$$

expresamos ahora la potencia en términos de la componente longitudinal utilizando ***4.1.5***

$$<P> = 1/2 \, \boldsymbol{Z}_{nTE} \;\; (\beta_{mn} \beta_{mn}^* / \gamma_{mn}^{\,4}) \int_{ST} (\nabla_t H_{z\,mn} \cdot \nabla_t H_{z\,mn}^*) \, ds$$

teniendo en cuenta el teorema de Green, ***3.3.1***,

$$\int_{ST} (\psi \, \nabla_t^2 \, \Phi - \nabla_t \psi \cdot \nabla_t \Phi) ds = \int_L \psi \, \partial \, \Phi / \partial \, n \, dl$$

$$\int_{ST} (\nabla_t H_{z\,mn} \cdot \nabla_t H_{z\,mn}^*) \, ds = \int_{ST} (H_{z\,mn} \, \nabla_t^2 \, H_{z\,mn}^*) ds - \int_L (H_{z\,mn} \, \partial \, H_{z\,mn}^* / \partial n) \, dl$$

así como la ecuación de onda $\left[\nabla_t^2 + \gamma_n^2\right] H_z = 0$

y la condición de contorno para H_z

$$<P> = 1/2 \, \boldsymbol{Z}_{mnTE} \;\; (\beta_{mn} \beta_{mn}^* / \gamma_{mn}^{\,2}) \int_{ST} H_{z\,mn} \, H_{z\,mn}^* \, ds$$

4.4.1*-Cálculo de la atenuación en guías.*

(1-16.4.p 20) Supuesto un modo propagante, la atenuación del campo correspondiente en la guía es debida generalmente o bien a disipación en las paredes debida a su conductividad, que aunque normalmente es muy elevada no es infinita, o bien a pérdidas asociadas a los materiales que conforman el sistema, pérdidas que normalmente son de tipo dieléctrico.

Si es P la potencia transmitida por la guía, y llamamos P'_D la potencia disipada por unidad de longitud, en la dirección de propagación, la disminución de P con la distancia será coincidente con

$$- dP/dz = P'_D$$

Como la amplitud de la onda varía según $e^{-\beta'' z}$ siendo β'' el factor de atenuación, P variará según $e^{-2\beta'' z}$ con lo cual podemos escribir:

$$dP/dz = -2\,\beta''\,P \qquad \Rightarrow \qquad \beta'' = -\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz} = P'_D/(2P) \qquad \textbf{4.4.2}$$

Suponemos que la distribución de campo coincide fundamentalmente con la de la guía sin pérdidas; ahora bien, el campo magnético tangencial a la pared induce corrientes en la misma y al considerar la conductividad σ finita, dichas corrientes llevarán asociadas un campo eléctrico que será tangencial a la pared, este campo sería nulo si la pared fuera un conductor perfecto. La combinación de dichos campos da lugar a una energía dirigida hacia el interior de la pared, coincidente con la disipación por efecto Joule en el conductor. Si son **E** y **H** los campos en las proximidades de la pared, la potencia disipada por unidad de longitud vendrá dada por:

$$P'_D = (1/2)\, Real \int_L (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*)\, \boldsymbol{u}_n\, dl$$

Siendo L el contorno de la sección transversal de la guía y $\boldsymbol{u}_n$ el vector unitario normal a la pared y dirigido hacia el interior del conductor.

Las amplitudes de los campos vienen relacionados por la impedancia de onda en el conductor, ***1.2.1***

$$E/H = [\omega\,\mu/\sigma]^{1/2}\, e^{j45^o}$$

$$P'_D = (1/2)\,[\omega\,\mu/\sigma]^{1/2}\, Real\left\{ e^{j\pi/4} \int_L \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\, dl \right\} = (1/2)\,[\omega\,\mu/2\sigma]^{1/2} \int_L \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\, dl$$

Lo podemos expresar en términos de la profundidad de penetración, ***1.2.2***

$$[\omega\,\mu/2\sigma]^{1/2} = [\omega\,\mu\,\sigma/2\sigma^2]^{1/2} = 1/(\delta\,\sigma)$$

$$P'_D = \frac{1}{2\,\delta\,\sigma} \int_L \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\, dl \qquad \textbf{4.4.3}$$

Resultando para el coeficiente de atenuación de un modo n-simo:

$$\beta'' = \frac{1}{2\,\delta\,\sigma}\, \frac{\int_L \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\, dl}{\int_{ST} \boldsymbol{Z}\, \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{H}_t^*\, ds}$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión ***4.2.1*** de la potencia transmitida

BIBLIOGRAFÍA

1. Electromagnetismo. UNED. Unidad Didáctica 4. M. Rodríguez Vidal
2. Electromagnetic Waves. Umran
3. Ingeniería de Microondas. Técnicas Experimentales. J.M. Miranda, J.L. Sebastián, M. Sierra, J. Margineda
4. Microondas, notas de clase. J. Bará
5. Líneas de transmisión. R.A. Chipman. McGraw-Hill.
6. Foundations for Microwave Engineering. R.E. Collin. McGraw-Hill.
7. Electrodinámica Clásica. J.D. Jackson
8. Microwaves made simple. W. S. Cheung. Artech House, Inc. 1985.