Discretización de la segunda derivada

Si una fúnción es derivable, la derivada se puede expresar como

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)}{\Delta x}$$

Así, tenemos en el límite de $\Delta x \to 0$ las dos ecuaciones que después vamos a usar,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 - \frac{\Delta x}{2}) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Y ahora, podemos pasar a discretizar la segunda derivada, puesto que

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

Que por las ecuaciones anteriores queda en

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

A la hora de programar, nos interesará obtener el valor en $x_0 + \Delta x$, por lo que necesitaremos conocer los dos puntos anteriores. Así, si $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \alpha$, entonces

$$f(x) = \Delta x^2 \alpha + 2f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)$$