II – ONDAS

II.1 – ¿A qué aspecto de la naturaleza llamamos onda? Una descripción

Tenemos un tema, el de las ondas o del movimiento ondulatorio, que debería ser de gran interés para un alumno que realice estudios de óptica. También es un tema muy interesante bajo el punto de vista de nuestro deseo por describir científicamente la naturaleza además de resultar de una belleza no simplemente formal, como sucede con muchos de los temas que tratamos desde la Física, sino de una belleza natural ¿alguien puede quedar indiferente ante un arco iris?. El estudio de los fenómenos ondulatorios ha producido aplicaciones prácticas de gran importancia, las gafas o las lentillas que muchos de nosotros por desgracia tenemos que llevar es un buen ejemplo.

Tema de lectura:
¿Cómo se forma el arco iris? Ver simulación en:
http://www.ub.edu/javaoptics/docs_applets/Doc_DisperEs.html
Grupo de Innovación Docente en Óptica Física y Fotónica. Universitat de Barcelona

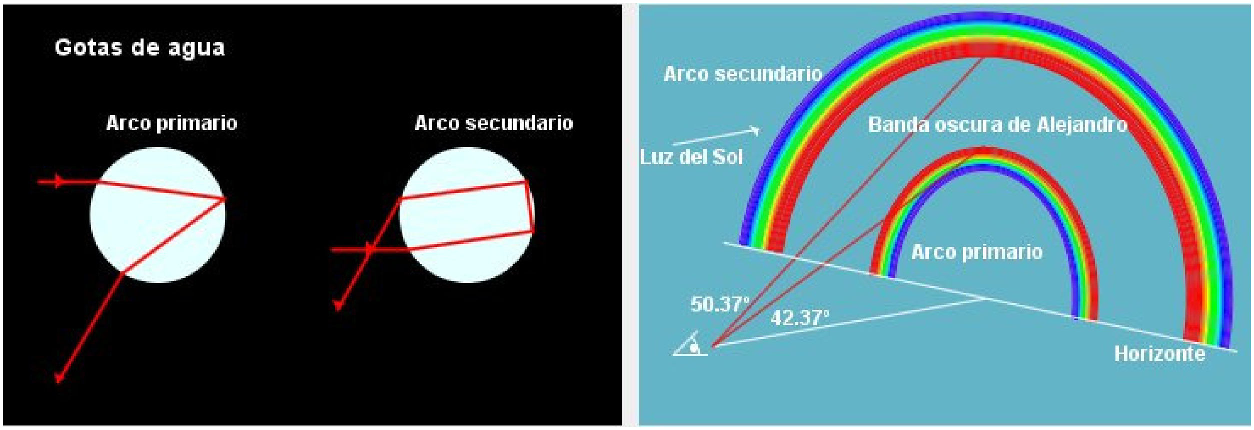


Imagen capturada del applet "Dispersión de la luz" en:
http://www.ub.edu/javaoptics/applets/DisperEs.html (Universitat de Barcelona)

Tarea II.1.1.-
Describe la formación del arco iris de acuerdo con la figura tomada de la simulación.

VÍDEO ARCO IRIS CIRCULAR EN: http://www.youtube.com/user/FernyGC#p/u/4/bEp8EPScAmQ

Tarea II.1.2.-
El arcos iris se forma:

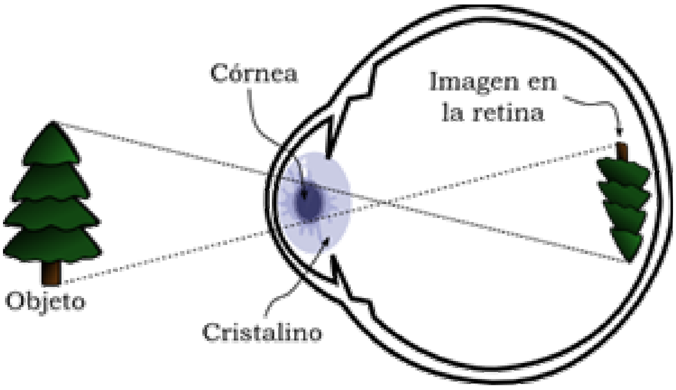
a) Entre el sol y el observador

b) Delante del observador, con el observador de espaldas al sol

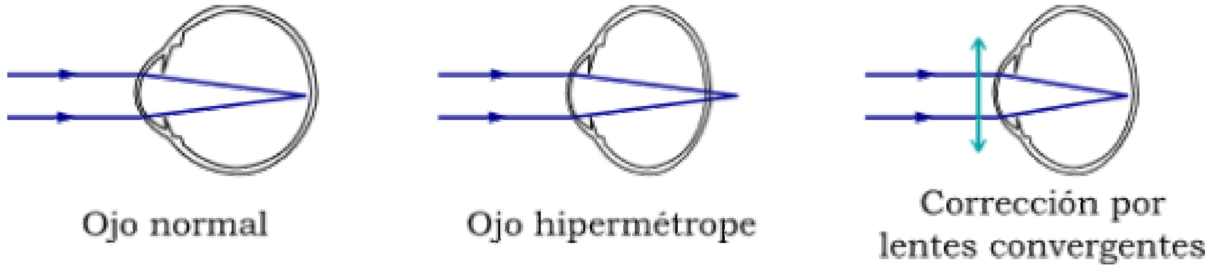
c) Es necesario que el sol se encuentre sobre la cabeza del observador

d) No depende de la posición del observador

Muchos fenómenos de transmisión de información son ondas, estás leyendo estas palabras porque una *"onda electromagnética"* viaja desde estos signos hasta tus ojos, también es una *"onda electromagnética"* la que te permite hablar por tu móvil, y cuando te cuentan un chiste una *"onda de presión"* es la encargada de transmitir la información desde la boca de tu colega hasta tus oídos y una *"onda eléctrica"* la llevará desde los oídos hasta el cerebro……



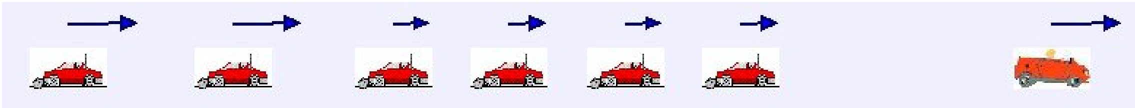
Lo que tratemos en este tema nos ayudará a conocer fenómenos tan interesantes como qué son los colores, tan espectaculares como el arco iris o tan importantes para un óptico como el mecanismo de captación de imágenes por los ojos, el funcionamiento de las gafas y su utilización para corregir los problemas de visión.



II.1.1 - Principal característica de una onda

Veamos qué características son comunes a fenómenos tan diversos. Vamos a poner un ejemplo que no tiene todas las propiedades del movimiento ondulatorio pero posee el más básico y nos resultará muy familiar. Supongamos que por la autovía vamos todos a la misma velocidad, como refleja la figura siguiente.

Supongamos que uno de los coches frena, el resto de los coches tendrá que ir frenando y rápidamente obtendremos una situación como la que muestra la siguiente figura.



Vemos que la distancia entre los coches varía, al cabo de un tiempo esta modificación de la distancia entre los coches se va propagando hacia los coches que vienen detrás.

Ver simulación en: http://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/ejs/Ejemplos/drawables/onda_zote.html

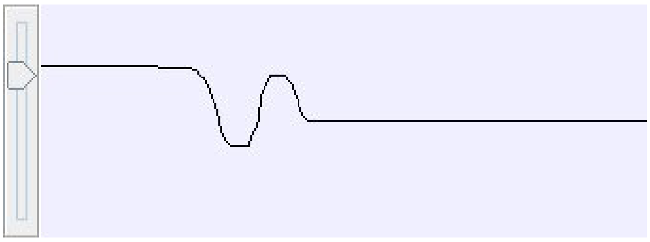
Tarea II.1.3.-
¿Qué podemos decir que se "desplaza"?

Tarea II.1.4.-
Comparando con el desplazamiento de una piedra ¿Qué propiedad podemos adjudicar a las ondas, o al movimiento ondulatorio?

Para ver más sobre ondas de tráfico: http://trafficwaves.org/

Otros ejemplos de propagación de perturbaciones pueden ser la ola que se realiza en los estadios deportivos, *ver http://maloka.org/fisica2000/waves_particles/stadium_wave.html*, o las piezas de dominó situadas de tal modo que al caer una de ellas esta caída se propaga a toda la fila. En estos tres ejemplos participan activamente las personas y muestran con claridad la característica principal de una onda: *Una perturbación que se propaga*, pero, como veremos más adelante, no cumplen muchas de las propiedades que poseen las ondas que nos encontramos en la naturaleza.

Veamos otra situación. Supongamos una cuerda tensa uno de cuyos extremos podemos desplazar a nuestra voluntad, la modificación que realicemos en este extremo se desplazará a lo largo de la cuerda. En este caso los átomos de la cuerda se encuentran unidos y al tirar verticalmente de uno de ellos este hace lo propio con el siguiente y así sucesivamente, a este tipo de ondas las llamaremos mecánicas, existen otras ondas, las electromagnéticas y entre ellas la luz, que tienen un mecanismo diferente, no necesitan de materia formada por átomos para su propagación.



Podemos jugar con esta simulación en:

http://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/ejs/Ejemplos/drawables/onda_desliza.html

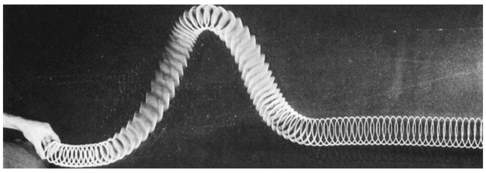
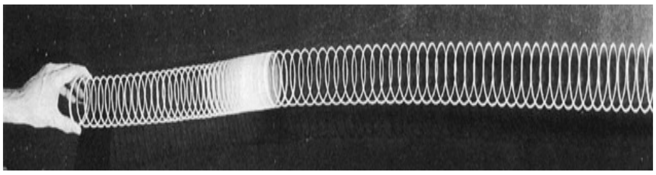
Tarea II.1.5.
En la simulación se muestra una cuerda tensa, si activamos "Animación" podemos desplazar el cursor izquierdo arriba y abajo.

¿Qué sucede?

Intenta realizar un movimiento periódico.

¿Cómo es la perturbación que se propaga?

Lo mismo podríamos haber hecho con un muelle de constante de recuperación pequeña, en este caso podemos realizar desplazamientos en vertical o en horizontal encontrando así dos tipos de ondas que llamaremos trasversales o longitudinales dependiendo de que la perturbación sea perpendicular a la dirección de propagación o en la misma dirección.

A la vista de lo expuesto, diremos que:

Una onda es una perturbación o una variación que se propaga, es algo que varía tanto en el espacio como en el tiempo.

II.1.2 - Hablando en nuestro idioma: las matemáticas

La perturbación puede ser los desplazamientos de una cuerda de arpa iniciados por la acción de los dedos del arpista o un rayo de sol que alcanza nuestros ojos después de viajar desde nuestra estrella. Para traducir esta expresión a una mucho más compacta utilizamos símbolos matemáticos:

$$y = f(x, t)$$

Tarea II.1.6.-
¿Cómo leemos esta expresión?

¿Qué puede representar y?

¿Qué significa x?

¿Qué significa t?

II.1.3 - Ondas mecánicas y electromagnéticas

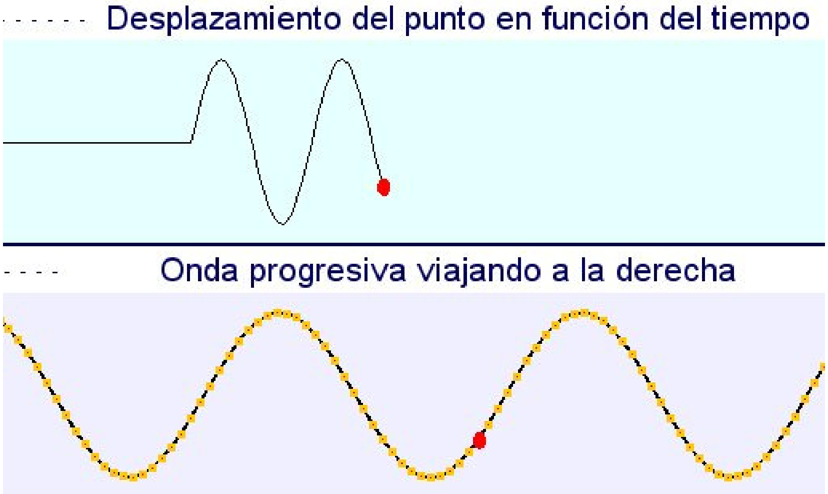
De las posibles ondas que conocemos hay muchos aspectos que resultarán comunes a todas ellas y también diferencias relevantes.

Tarea II.1.7.-
¿Qué diferencia significativa podemos encontrar entre las ondas en la cuerda del arpa y un rayo de sol?

Puede ser que una onda consista en un solo pulso o bien un tren de pulsos que se pueden producirse en forma periódica.

II.1.4 - Representación gráfica de ondas

En la siguiente dirección encontraremos una simulación en la que podremos visualizar, en la primera animación un pulso transversal, si desactivamos el pulso tendremos una onda armónica transversal. Además de la representación de la onda en el espacio también podemos ver la representación de la perturbación en un punto en función del tiempo.



http://webs.um.es/jmz/www_ondas/descripcion/descripcion.html

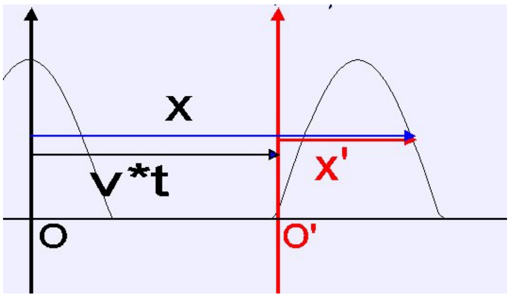
Tarea II.1.8.-
¿Cómo podemos representar gráficamente una onda?

En la parte superior se muestra el desplazamiento del punto rojo en función del tiempo, como vemos la variación espacial y temporal tienen formas similares, este hecho, cómo varía la señal con el espacio y con el tiempo, lo trataremos con detalle en el siguiente apartado. La imagen que se muestra se ha capturado de la simulación parando esta.

Tarea II.1.9.-
¿Qué tipo de representación es la que obtenemos?

II.2 - ¿Podemos decir algo de la forma que deben tener las expresiones matemáticas que representen una onda?

[1]Supongamos una cuerda tensa donde se genera un pulso propagándose de izquierda a derecha con velocidad ***v*** respecto a un sistema de referencia fijo *X, Y* (ejes negros) que en el instante *t = 0* está representado por la ecuación *y = f(x)*. Supongamos un nuevo sistema coordenado *X', Y' (ejes rojos)* que se mueve horizontalmente con la misma velocidad que el pulso. En el nuevo sistema de referencia el pulso es estacionario, es decir, independiente del tiempo por tanto no es una onda y su ecuación será del tipo



$$y' = f(x')$$

El desplazamiento relativo entre ambos sistemas de coordenadas es ***v*t***, podemos vincular en cualquier instante las coordenadas entre ambos sistemas

$$y' = y \qquad x' = x - v^*t$$

Por tanto el desplazamiento de un punto de la cuerda en el sistema fijo, **y** por ser igual al ***y',*** puede escribirse como

$$y = f(x - vt)$$

y esta es la expresión que representa la onda moviéndose hacia la derecha. El mismo razonamiento podemos aplicar a un pulso que se mueva hacia la izquierda

Tarea II.2.1.-
¿Qué podemos decir de la dependencia espacio temporal para una señal que se mueva hacia la izquierda?

[1] *Ver simulación en:http://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/ejs/Ejemplos/drawables/acompana_onda.html*

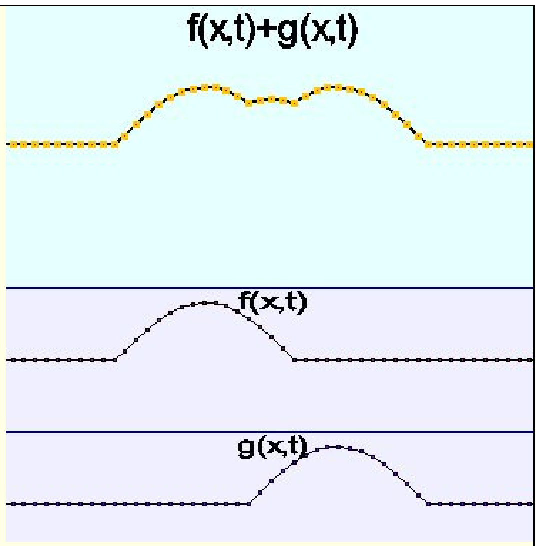
Podemos sacar como conclusión que cualquier función dependiente de ***x + v*t*** o de ***x - v*t*** puede ser una onda propagándose. La onda viajera se representa por la ***FUNCION DE ONDA*** que tiene este tipo de dependencia con la posición y el tiempo.

Veremos en algunos casos, concretamente para la propagación de ondas en cuerdas tensas y es válido para todas las ondas, que la velocidad con la que se propaga una onda depende de las características del medio. Esta es una propiedad que será fundamental para comprender porqué se curva la luz al atravesar una lente.

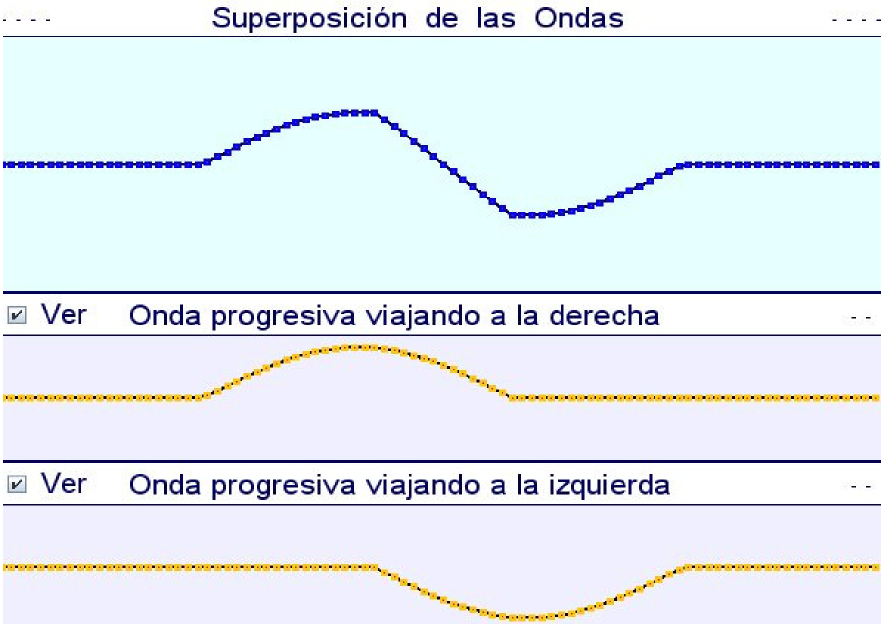
II.3 - Superposición de ondas.

Otra característica de las ondas esencialmente diferente al comportamiento del desplazamiento de objetos es el fenómeno de la superposición.

Tarea II.3.1.-
El pulso superior, f, se desplaza hacia la derecha con una velocidad v, el pulso inferior g se desplaza hacia la izquierda con velocidad v ¿Que podemos decir de sus expresiones matemáticas?



En las dos ventanas superiores de la imagen se muestran dos ondas que se desplazan por la misma cuerda pero en sentidos opuestos, en la parte inferior se muestra la situación real en la que la cuerda muestra la deformación debida a ambos pulsos, en un instante posterior vuelven a aparecer ambos pulsos en la cuerda como si no hubiesen coincidido, este hecho es extraordinariamente relevante en la naturaleza.



Simulación en: http://webs.um.es/jmz/www_ondas/superposicion/superposicion.html

En un punto del espacio se encuentran continuamente superponiéndose ondas electromagnéticas provenientes de todos los elementos que emiten luz, las ondas infrarrojas que irradian nuestros cuerpos y objetos, las ondas de las radios, las televisiones, los teléfonos móviles, los 50 ciclos de la red eléctrica ….

Si los pulsos que se propagan por la cuerda son iguales pero de amplitudes inversas, al coincidir la suma resultante nos dará un desplazamiento cero en todos los punto de la cuerda en cierto instante. Si son dos ondas armónicas iguales que se desplazan en sentidos opuestos obtendremos igualmente un instante en el que la cuerda se encuentra totalmente recta y un resultado con el tiempo peculiar que llamamos *onda estacionaria.* En la zona en la que coinciden las señales estas se suman, al tener la perturbación el mismo valor pero sentidos opuestos, estas se anulan en un cierto momento.

Tarea II.3.2.-
¿Cómo podemos "separar" las ondas que llegan a nuestro teléfono móvil del resto de ondas electromagnéticas que se encuentran en el mismo lugar?

II.4 - Ecuación de ondas … y la Luz se hizo.

El poder de las matemáticas: Del concepto de ONDA a la LUZ

Juguemos un poco con las matemáticas, es el mejor modo de aprender. Sabemos que la expresión matemática que nos represente una onda que se propaga hacia la derecha del eje x con velocidad v, debe ser una función que dependa del espacio y del tiempo, esto lo podíamos expresar:

$$y = f(x - vt)$$

Derivemos dos veces respecto a x y derivemos también dos veces respecto a t y comparemos estos resultados. Para ello llamaremos u a $x - vt$ y practicamos la regla de calcular lo que varía una función respecto de una variable de la que no depende directamente, concretamente f depende de x a través de u .

$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}$ puesto que la derivada de u respecto a x es uno, si volvemos a derivar respecto a x simplemente obtendremos la derivada segunda respecto a u

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial u}$ puesto que la derivada de u respecto a t es $-v$ volver a derivar respecto a t es lo mismo que derivar respecto a u y multiplicar por $-v$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

Comparando ambas expresiones llegamos a la conclusión de que si una función matemática representa una onda, derivando dicha expresión dos veces respecto al espacio y dos veces respecto al tiempo nos va a dar la misma función salvo un factor que resulta ser la velocidad de propagación de la onda al cuadrado

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad 4.1$$

Seguro que ha resultado algo duro este proceso matemático pero esperemos que el resultado compense el esfuerzo. En este tipo de expresiones nace algo que probablemente hoy nos resulte “casi” imprescindible, el móvil, a mediados del siglo XIX un físico matemático de nombre roquero Maxwell, encontró una expresión similar pero con el campo eléctrico como magnitud que se propagaba y su sorpresa fue que encontró que el valor que obtenía para *v* era del orden de 300 000 km/s ¡una razón más que justificada para afirmar que la luz era una onda electromagnética! Se había abierto la veda para el mundo de las comunicaciones.

El poder de las matemáticas: Del concepto de ONDA a la LUZ

1.-- Onda: Perturbación que se propaga	$y = f(x, t)$
2.-- Acompañando a la onda	$y = f(x - v^*t)$
3.-- Las variaciones de esta función respecto al espacio y respecto al tiempo son iguales salvo un factor que está relacionado con la velocidad de propagación de la onda.	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
4.-- Maxwell, jugando con las ecuaciones que cumplen los campos eléctricos y magnéticos, encuentra una ecuación similar:	*PUEDE HABER ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS*
5.-- El factor que le aparece relacionando las variaciones espaciales y temporales de los campos vale 300 000 km/s, la velocidad con la que se propaga la luz.	*LA LUZ ES UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA*

Tarea II.4.1.-
Describir cualitativamente cómo se llega del concepto de onda a la luz.

II.5 - ¿Por qué se propaga un pulso en una cuerda tensa?

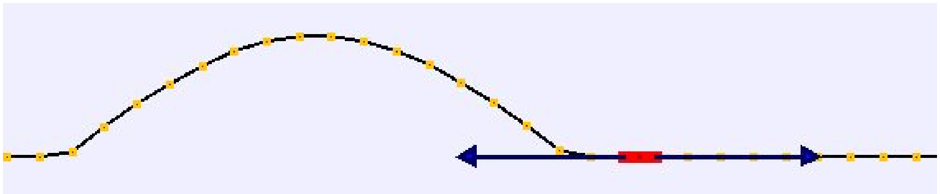
II.5.1 - Mecanismo de propagación de una onda en una cuerda tensa

Veamos el mecanismo de propagación de una onda en una cuerda tensa. Dividimos la cuerda en segmento y nos fijamos en uno de ellos que marcamos en rojo.

Tarea II.5.1.-
¿Qué hace falta para que este elemento comience a moverse? En nuestro caso a moverse hacia arriba.

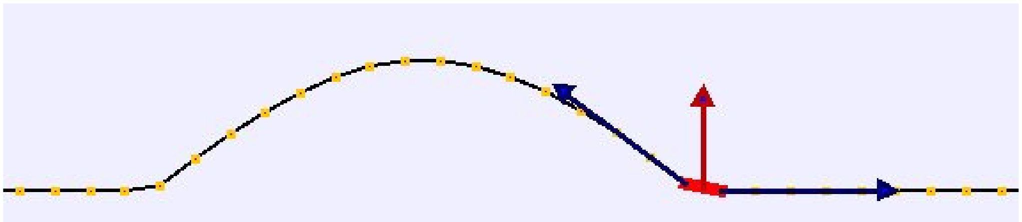
Para que una cierta masa modifique su velocidad hace falta que sobre ella actúe una fuerza.

Tarea II.5.2.-
¿Qué fuerza actúa sobre el elemento de cuerda antes de que llegue el pulso?



Si se encuentra un pulso viajando por la cuerda tensa, antes de que llegue este al elemento de cuerda actúan dos fuerzas de igual valor y dirección pero de sentidos opuesto, la tensión. El elemento de cuerda se encuentra en reposo y la resultante de las fuerzas que actúan sobre el es cero por lo que continúa en reposo.

Tarea II.5.3.-
¿Qué sucede cuando llega el pulso?



El pulso es una deformación de la posición de los elementos de la cuerda respecto de su posición de equilibrio, ahora las fuerzas que actúan sobre el elemento continúan siendo de igual valor pero las direcciones han cambiado por lo que la resultante ya no es nula. En la imagen se ha dibujado únicamente la componente vertical de la resultante, que es la que nos interesa para estudiar el desplazamiento del elemento de cuerda.

Podemos trabajar este aspecto con una simulación en:
http://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/ejs/Ejemplos/drawables/onda_fuerzas.html

En una cuerda tensa un pequeño trozo de la misma se encuentra sometido a dos fuerzas de igual valor pero de sentidos opuestos, la tensión de la cuerda; cuando llega una perturbación la dirección de las fuerzas cambia de modo que aparece una componente vertical que comunica una cierta aceleración al elemento de cuerda.

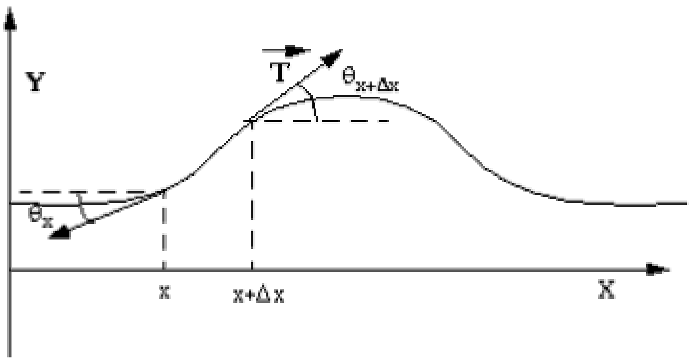
Tarea II.5.4.-
Conocida la fuerza que se ejerce sobre un objeto, en este caso nuestro elemento de cuerda, y la masa del mismo ¿cómo podremos conocer lo que sucede?

II.5.2 - Apliquemos nuestros modelos matemáticos.

Como siempre que queremos estudiar un movimiento utilizaremos la 2ª ley de Newton para estudiar el movimiento del elemento de cuerda.

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

En nuestro caso estudiamos el desplazamiento vertical del elemento de cuerda por lo que solamente trabajaremos con la componente *y* de esta ecuación.



El movimiento vertical de cualquier elemento infinitesimal esta originado por la fuerza resultante de las tensiones en ambos extremos, en una aproximación para pequeños desplazamientos. Esta fuerza tiene por tanto solo componente vertical y para estudiar el fenómeno debemos plantear que su valor es igual a la masa por la aceleración en el elemento considerado.

La figura permite amplificar una situación para analizar las fuerzas que actúan en cierto instante sobre un elemento de longitud infinitesimal. Supongamos éste comprendido entre las abcisas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x + \Delta x}$

El valor de su desplazamiento viene dado por la coordenada vertical y, por consideraciones geométricas, se obtiene que la fuerza vertical es

$$F_y = T\ (sen\ \theta_{x+\Delta x} - sen\ \theta_x)$$

Para ángulos pequeños podemos sustituir el seno por la tangente, luego se verá porqué hacemos este cambio.

$$F_y \approx T\ (tg\ \theta_{x+\Delta x} - tg\ \theta_x) = T\ \Delta x\ \frac{\Delta tg\theta}{\Delta x}$$

En donde hemos multiplicado y dividido por ***Δx***. Esta es la fuerza que produce las variaciones de velocidad del elemento de cuerda que estamos estudiando. Antes de utilizarla en la ecuación de Newton juguemos con ella, este juego resulta un poco farragoso y hasta trabalenguas por lo que posiblemente requiera de varias lecturas cuidadosas

Tarea II.5.5.-
¿Cómo llaman los matemáticos al cociente entre la variación de una función, en nuestro caso la tangente de un ángulo, y la variación de la variable, en nuestro caso la variación de la posición x?

Si utilizamos el concepto de derivada como límite de un cociente de incrementos podremos escribir:

$$\frac{\Delta\ tg\ \theta}{\Delta\ x} \Rightarrow \frac{\partial\ tg\ \theta}{\partial\ x}$$

Donde suponemos que $\Delta\ x$ es tan pequeño como queramos.

Vayamos ahora con la relación que existe entre la tangente y la interpretación gráfica de la derivada[2]. *"La tangente del ángulo que forma la tangente a una curva resulta coincidir con el valor de la derivada de la función en ese punto"*.

$$tg\ \theta = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

sustituimos el valor de la tangente en la anterior expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ tg\ \theta = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

obtenemos que esa fuerza la podemos escribir como

$$F_y = T.\Delta x.\frac{\partial}{\partial x} tg\ \theta = T.\Delta x.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Puesto que la interpretación geométrica de la derivada iguala su valor en un punto con la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva en ese punto. Suponiendo que la cuerda posee una masa por unidad de longitud ***μ***, la masa del elemento bajo estudio es ***μ*Δx***,

[2] *Revisar el final del apartado 3 del capítulo II: - Las leyes del movimiento de Newton.*
Ver interpretación gráfica de la derivada en:
http://www.catedu.es/matematicas_blecua/bacmat/temario/bac1/mat1_09derivada.htm

Tarea II.5.6.-
Escribe la ecuación de la dinámica Newtoniana para esta fuerza aplicada a nuestro elemento de cuerda.

Considerando la aceleración como derivada segunda del desplazamiento respecto al tiempo, la aplicación de la 2ª ley de Newton nos lleva a escribir la ecuación de movimiento como

$$T\ \Delta x\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\ \Delta x\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Simplificando obtenemos que el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda cumple una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{T}{\mu}\right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A este modelo de ecuación lineal (debido a que la función y sus derivadas se presentan solo en primera potencia) deducida para ángulos pequeños, le llamamos ECUACION DE ONDAS y sus soluciones particulares nos dan expresiones de la FUNCION DE ONDA.

La magnitud física que corresponde a la función de onda en el caso de cuerdas es el desplazamiento vertical. En la ecuación de onda vemos que la aceleración de un elemento, $\partial^2 y/\partial t^2$, está relacionada con el grado de curvatura de la cuerda $\partial^2 y/\partial x^2$.

Tarea II.5.7.-
¿A qué conclusión se llega comparando esta ecuación con la ecuación 3.1 encontrada al comienzo de este apartado 3 de este capítulo?

II.5.3 - Velocidad de propagación en cuerdas.

Comparando esta expresión con la general obtenida previamente para todas las ondas concluimos que la velocidad de propagación de una perturbación en una cuerda tensa viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Es un resultado bastante razonable: *la velocidad de propagación de una perturbación en una cuerda será mayor cuanto mayor sea la tensión en la cuerda y cuanto menor sea su densidad lineal*.
Vemos cómo la velocidad de propagación de una onda en una cuerda depende de características de la misma, ese hecho es extensible a otros medios: *la velocidad de propagación de una onda en un medio depende de las características de dicho medio.*

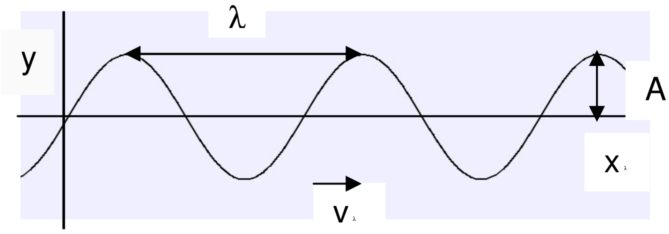
II.6 - Ondas armónicas.

Antes de iniciar este tema conviene repasar el movimiento armónico en el capítulo 02.
02.4 - Fuerzas elásticas: Resonancia

II.6.1 - Perturbación armónica. Características de las ondas armónicas

La forma de las ondas es muy variada, hay un caso de especial interés, si el emisor de la onda varía armónicamente con el tiempo la onda que se genera es una función armónica del tiempo y del espacio.

En la imagen podemos observar una fotografía de este tipo de ondas. Vamos a llamar longitud de onda λ a la distancia entre los puntos más próximos con igual valor de la perturbación y período T al tiempo que un punto tarda en recuperar un valor dado de la perturbación.



Supongamos que proponemos esta ecuación como representación de esta onda:

$$y = A\ sen(k\,x - \omega\,t)$$

Veamos qué significa k, tomemos dos puntos que, en un cierto instante t se encuentren separados una longitud de onda λ, por la definición que hemos dado ambos puntos tendrán igual valor de la perturbación.

$$A\ sen\ (k\,x - \omega\,t) = A\ sen\ [k\,(x + \lambda) - \omega\,t]$$

Tarea II.6.1:
¿Cuál es la condición para que se cumpla esta igualdad?

Imponiendo esa condición llegamos a

$$k = 2\,\pi/\lambda$$

De modo similar dejemos que para un punto x pase un período T.

$$A\ sen\ (k\,x - \omega\,t) = A\ sen\ [k\,x - \omega\,(t + T)]$$

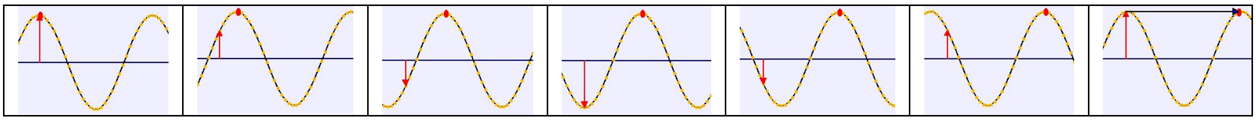
Tarea II.6.2:
Impón la condición para que se cumpla esta igualdad

A k se le llama número de onda y está relacionado con la longitud de onda. Podemos escribir nuestra ecuación para las ondas armónicas como:

$$y = A\ sen\ 2\,\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

En donde aparece explícitamente la dependencia con la longitud de onda y el período.

En las siguientes imágenes observamos el desplazamiento de una perturbación y el tiempo que transcurre hasta que recorre una longitud de onda.



Tarea II.6.3:
¿Cuánto tiempo tarda en desplazarse el punto una longitud de onda?

Tarea II.6.4:
¿Existe alguna relación entre la velocidad de propagación de la onda, la longitud de onda y el período?

Tarea II.6.5:
¿Existe alguna relación entre la velocidad de propagación de la onda, y la velocidad con la que se desplaza el punto verticalmente?

Tarea II.6.6:
*La función que represente una onda debe ser función de x - v*t ¿cumple esta exigencia la función armónica con la que estamos trabajando?*

II.6.2 - Energía transportada por una onda que viaja por una cuerda.

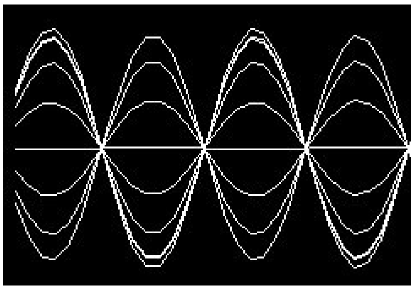
La energía media transportada por una señal periódica en una cuerda en un segmento viene dada por la expresión:

$$E_m = \mu\, \omega^2\, A^2\, \Delta x/2$$

Esta expresión se obtiene teniendo en cuenta las energías cinéticas y potenciales de este segmento, aunque para cada tipo de onda la expresión de la energía lógicamente variará, es relevante señalar la dependencia de la energía con la amplitud y la frecuencia de la señal.

II.7 - Ondas estacionarias, resonancia, armónicos.

II.7.1 – Ondas estacionarias



Cuando dos ondas de la misma frecuencia y amplitud viajan en sentidos opuestos se produce un fenómeno de interferencia que denominamos ondas estacionarias por aparecer alguna de las características sin variación en el tiempo. Podemos ver algunas experiencias en:

http://webs.um.es/jmz/IntroFisiCompu/ejs/Ejemplos/drawables/resonancia.html

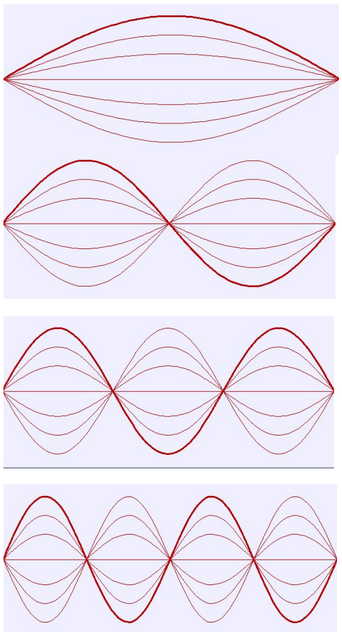
Supongamos dos ondas armónicas de igual amplitud y frecuencia propagándose en sentidos opuestos, la superposición de ambas nos dará:

$$A\,sen(kx - \omega\, t) + A\,sen(kx + \omega\, t) = 2A\,sen(kx)\cos(\omega\, t)$$

En donde hemos utilizado la identidad matemática suma de senos igual al doble del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia. Si representamos esta expresión nos encontramos con un seno en los que la amplitud de cada punto se ve modulada por el factor temporal $\cos(\omega\, t)$.

II.7.2 – Ondas estacionarias en cuerdas, cuerda fija por ambos extremos.

Si fijamos los dos extremos de una cuerda y la perturbamos, resulta que a ciertas frecuencias se obtienen unos patrones de ondas estacionarias semejantes a los indicados en la figura. En los extremos la amplitud debe ser cero, la frecuencia más baja a la que nos encontraremos esta situación es aquella en la que la longitud de onda sea el doble de la longitud de la cuerda. Si la longitud de la cuerda es L podremos escribir:



Longitud de onda fundamental:

$L = \lambda_1 /2 \qquad \lambda_1 = 2\,L$

Segundo armónico:

$L = \lambda_2 \qquad \lambda_2 = L = \lambda_1 / 2$

Tercer armónico

$L = 3/2\,\lambda_3 \qquad \lambda_3 = 2/3\,L = \lambda_1 / 3$

Cuarto armónico

$L = 2\,\lambda_4 \qquad \lambda_4 = L / 2 = \lambda_1 / 4$

Tarea II.7.1:
¿Cuál es la condición para que se produzcan ondas estacionarias en una cuerda?

En general podemos escribir:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \longrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Las longitudes de onda tienen que ser el doble de la longitud de la cuerda, la longitud de la cuerda, los dos tercios de la longitud de la cuerda …, y las frecuencias naturales de oscilación de la cuerda serán

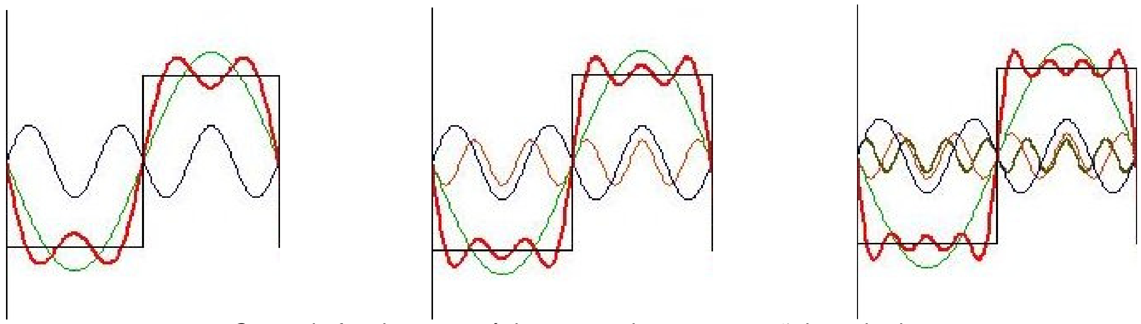
$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \longrightarrow f_n = n\, f_1$$

Que lógicamente están relacionadas con la longitud de la cuerda:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$$

II.7.3 – ¿Por qué estudiamos las ondas armónicas?

¿Por qué estudiamos las ondas armónicas si en la naturaleza no se dan? Una primera respuesta bastante usual en un físico es *porque resultan las más sencillas de estudiar*, en este caso, además de esta razón muy importante, tenemos afortunadamente otra que resulta muy poderosa y que tiene que ver con propiedades matemáticas como no podría ser de otro modo, cualquier señal podemos expresarla como suma de funciones armónicas, es la propiedad conocida en matemáticas como teorema de Fourier[3].



Suma de funciones armónicas para obtener una señal cuadrada

En la primera imagen observamos dos ondas, una de ellas de triple frecuencia que la fundamental, la de más baja frecuencia. En la segunda imagen observamos tres ondas, una de ellas de triple frecuencia y otra cinco veces mayor que la fundamental. En la tercera observamos cuatro ondas, las tres anteriores más una que tiene una frecuencia siete veces mayor que la fundamental, si sumamos estas ondas armónicas con las amplitudes mostradas, curva roja, obtenemos una onda periódica que se aproxima cada vez más a una forma casi rectangular.

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier

SOLUCIONES DE LAS TAREAS

Tarea II.1.1.- *El rayo de luz se refracta al entrar en la gota de agua, se produce una reflexión total, y se refracta nuevamente al salir de la gota.*

Tarea II.1.2.- *b) Para que el rayo doblemente refractado y reflejado por las gotas llegue al observador debe estar de espaldas al sol*

Tarea II.1.3.- *Aunque en este ejemplo los coches se desplazan, el fenómeno que para nosotros es relevante es la variación en la velocidad de los mismos, es la propagación de esta variación a la que denominamos "onda", en el ejemplo que hemos puesto también la distancia entre los coches varía y se propaga como una onda. Podemos concluir que una onda es una perturbación que se propaga por el espacio, variando con el espacio y con el tiempo.*

Tarea II.1.4.- *En la propagación de una onda no hay un desplazamiento neto de materia, pero si hay siempre propagación de información y de algún tipo, en el caso de la piedra se propaga también información, y si no que se lo pregunten al que le cae, pero con desplazamiento de masa.*

Tarea II.1.5*.- La forma del desplazamiento vertical en el origen se propaga hacia la derecha, si es periódica en lugar de un pulso, se propaga con esa forma.*

Tarea II.1.6.- *La expresión y = f(x, t) significa: el valor de y es función de la posición y del tiempo, y representa el valor de la perturbación en un cierto punto del espacio y en un cierto instante. Hemos puesto x por sencillez, la perturbación va a propagarse por el espacio, vamos a considerar que nuestra perturbación se va a propagar a lo largo del eje x.*

Tarea II.1.7.- *Las ondas que se propagan por la cuerda del arpa se propagan gracias a que los componentes atómicos de la cuerda se encuentran ligados, la perturbación en uno de ellos arrastra a los más próximos y así sucesivamente mientras que los rayos del Sol no necesitan de materia formada por átomos para propagarse.*

Tarea II.1.8.- *Para representar una onda tenemos que tener en cuenta que el valor a representar, la perturbación, depende de dos variables, una espacial y otra temporal, por lo tanto podemos realizar dos tipos de representación, una en la que representemos la perturbación en un punto en función del tiempo y otro tipo de representación sería "fotografiar" la onda, representar la perturbación en un instante dado en función del espacio.*

Tarea II.1.9.- *En la imagen lo que observamos es una fotografía de la onda. En la parte superior se representa la perturbación en función del tiempo en un punto dado, en la parte inferior se representa la perturbación en función del espacio para un instante determinado.*

Tarea II.2.1.- *Para una señal que se mueva hacia la izquierda encontramos que la dependencia espacio temporal será igual que la encontrada para el movimiento hacia la derecha pero con el signo más*

$$y = f(x + v\,t)$$

Tarea II.3.1*.- El pulso superior se puede representar matemáticamente por una expresión del tipo:*

$$y = f(x - v^*t)$$

El pulso inferior se puede representar matemáticamente por una expresión del tipo:

$$y = g(x + v^*t)$$

Tarea II.3.2*.- Diseñando aparatos que resuenen a la frecuencia deseada. Necesitamos un circuito que resuene a la frecuencia de la onda que deseamos sintonizar.*

Tarea II.4.1*.- Mediante los siguientes pasos:*
1. — Teniendo en cuenta el concepto de Onda: Perturbación que se propaga
*2. — Acompañando a la onda se llega a un tipo de dependencia: y = f(x – v*t)*

3. — Las variaciones de esta función respecto al espacio y respecto al tiempo son iguales salvo un factor que está relacionado con la velocidad de propagación de la onda.
4. — Maxwell, jugando con las ecuaciones que cumplen los campos eléctricos y magnéticos, encuentra una ecuación similar: "Puede haber ondas electromagnéticas"
5. — El factor que le aparece relacionando las variaciones espaciales y temporales de los campos vale 300 000 km/s, la velocidad con la que se propaga la luz:

La luz es una onda electromagnética

***Tarea II.3.2.-** Para que un elemento con una cierta masa comience a moverse hace falta que sobre el actúe una fuerza.*

***Tarea II.3.3.-** Cero que es la resultante de las tensiones.*

***Tarea II.3.4.-** Una de las tensiones modifica su dirección de modo que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ese elemento de cuerda ya no son cero.*

***Tarea II.3.5.-**Aplicando la ecuación de la dinámica de Newton: La fuerza aplicada a una masa le comunica una aceleración proporcional a la fuerza.*

***Tarea II.3.6.-** Derivada, límite de un cociente de incrementos*

$$\frac{\Delta \, tg\, \theta}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial\, tg\, \theta}{\partial x}$$

***Tarea II.3.7**.- Considerando la aceleración como derivada segunda del desplazamiento respecto al tiempo, la aplicación de la 2ª ley de Newton nos lleva a escribir la ecuación de movimiento como:*

$$T\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\,\Delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

***Tarea II.3.8**.- La velocidad de propagación de una perturbación en una cuerda será mayor cuanto mayor sea la tensión en la cuerda y cuanto menor sea su densidad lineal*

***Tarea II.6.1.-** Para que el seno sea igual basta con que los ángulos difieran en un múltiplo de 2π.*

$[k(x+\lambda) - \omega t)] - (k x - \omega t) = 2\pi$ $\qquad k\lambda = 2\pi$ $\qquad k = 2\pi/\lambda$

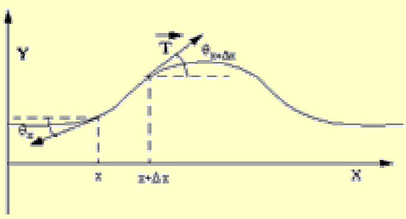
***Tarea II.6.2.-** La condición es la misma que en el caso anterior:*

$[k x - \omega (t + T)] - (k x - \omega t) = 2\pi$ $\qquad \omega T = 2\pi$ $\qquad \omega = 2\pi/T$

PARA REPASAR:

¿Tiene algo que ver el movimiento ondulatorio con el movimiento armónico?

¿Por qué se desplaza verticalmente un elemento de cuerda, que se encuentra tensa, cuando le llega un pulso?



*¿Cómo se plantea, utilizando la segunda ley de Newton, el movimiento de un elemento de cuerda **Δx** de masa por unidad de longitud **μ** cuando le alcanza un pulso? La cuerda se encuentra sometida a una tensión $\vec{T}$ (suponer deformaciones pequeñas que permitan aproximar el seno por la tangente, utilizar la interpretación geométrica de la tangente de un ángulo)*

BIBLIOGRAFÍA:
FÍSICA WILSON - BUFA. 5ª edición; capítulo 13 Vibraciones y ondas. Editorial PEARSON

Física para las Ciencias de la Vida. Alan H. Cromer. 2ª edición capítulo 13 Ondas Editorial Reverté, S. A.

Physics. Cutnell & Johnson. 7ª edición capítulo 16 Waves and Sound. Editorial Wiley

UNIVERSITY PHYSICS. Young and Freedman. 12th edition chapter 15 Waves. Editorial Pearson International

ENLACES
Curso de ondas. Adela Hernández Ramón
http://colos.inf.um.es/ondas/

Portal sobre la luz: http://www.educaplus.org/luz/

Vídeo sobre "Historia de los colores y mecanismo de la visión"
http://www.educaplus.org/luz/skin_granate.swf?archivo=videos_optica

Vídeo de la clase del Prof. Walter Lewin en el Massachussetts Institute of Technology
Traveling Waves. Standing Waves. Musical Instruments
http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Physics/8-02Electricity-and-MagnetismSpring2002/VideoAndCaptions/detail/embed26.htm

Física 2000, una jornada interactiva a través de la Física Moderna
http://maloka.org/fisica2000/index.html