

# La firma de un sistema coherente

Jorge L. Navarro Camacho

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Murcia



# Índice

## Conceptos básicos

Sistemas coherentes

Tiempos de vida

Estadísticos ordenados

Signatura de un sistema

## Representaciones basadas en firmas

Representación de Samaniego

Extensiones para componentes dependientes

## Comparaciones de sistemas usando firmas

Comparaciones estocásticas

Comparaciones de sistemas

## Impacto de la investigación y agradecimientos

Impacto de la investigación en firmas

Coautores

Agradecimientos

## Conceptos básicos

# ¿Qué es una firma?

## ¿Qué es una firma?

- ▶ Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **firma** tiene cuatro acepciones:

## ¿Qué es una firma?

- ▶ Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **firma** tiene cuatro acepciones:
- ▶ 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.

## ¿Qué es una firma?

- ▶ Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **firma** tiene cuatro acepciones:
- ▶ 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- ▶ 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.

## ¿Qué es una firma?

- ▶ Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **firma** tiene cuatro acepciones:
- ▶ 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- ▶ 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.
- ▶ 3. f. Tribunal de la corte pontificia compuesto de varios prelados, en el cual se determinan diversos negocios de gracia o de justicia.

## ¿Qué es una firma?

- ▶ Según el DRAE (Diccionario de la Real Academia de la Lengua), la palabra **firma** tiene cuatro acepciones:
- ▶ 1. f. Marca o nota puesta en una cosa para distinguirla de otras.
- ▶ 2. f. Señal de números y letras que se pone a un libro o a un documento para indicar su colocación dentro de una biblioteca o un archivo.
- ▶ 3. f. Tribunal de la corte pontificia compuesto de varios prelados, en el cual se determinan diversos negocios de gracia o de justicia.
- ▶ 4. f. Impr. Señal que con las letras del alfabeto o con números se ponía antes al pie de las primeras planas de los pliegos o cuadernos, y hoy solo al pie de la primera de cada uno de estos, para gobierno del encuadernador.

## Definición

- ▶ ¿Qué es un sistema?

## Definición

- ▶ ¿Qué es un sistema?
- ▶ ¿Qué es un sistema coherente?

## Definición

- ▶ ¿Qué es un sistema?
- ▶ ¿Qué es un sistema coherente?
- ▶ Formalmente, un sistema (binario con componentes binarias) es una función booleana

$$\phi : \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

que a cada vector  $(x_1, \dots, x_n)$  de ceros y unos le asocia un valor  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  cero o uno.

## Definición

- ▶ ¿Qué es un sistema?
- ▶ ¿Qué es un sistema coherente?
- ▶ Formalmente, un sistema (binario con componentes binarias) es una función booleana

$$\phi : \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

que a cada vector  $(x_1, \dots, x_n)$  de ceros y unos le asocia un valor  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  cero o uno.

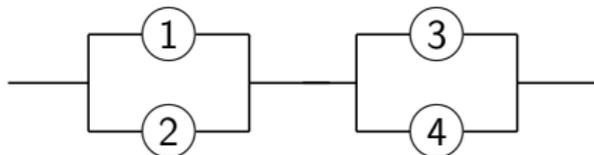
- ▶ Aquí  $x_i$  representa el estado de la componente  $i$ ésima (uno si funciona, cero si no) y  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  el estado del sistema (que depende del estado de las componentes).



Figura: Avión Airbus A340 que puede volar siempre que al menos funcione un motor en cada ala.

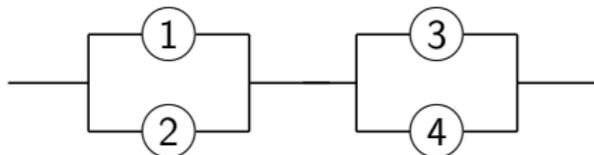
# Sistema de motores del avión

- El esquema de este sistema es



# Sistema de motores del avión

- ▶ El esquema de este sistema es

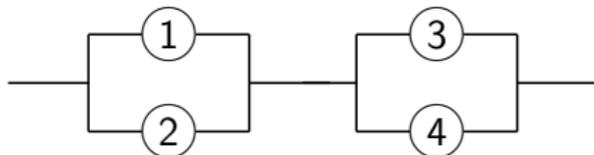


- ▶ Su función de estructura es

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min(\max(x_1, x_2), \max(x_3, x_4))$$

# Sistema de motores del avión

- ▶ El esquema de este sistema es



- ▶ Su función de estructura es

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{mín}(\text{máx}(x_1, x_2), \text{máx}(x_3, x_4))$$

- ▶ Por ejemplo,

$$\phi(0, 0, 1, 1) = \text{mín}(\text{máx}(0, 0), \text{máx}(1, 1)) = \text{mín}(0, 1) = 0$$

y

$$\phi(1, 0, 0, 1) = \text{mín}(\text{máx}(1, 0), \text{máx}(0, 1)) = \text{mín}(1, 1) = 1.$$

## Sistema coherente

- ▶ ¿Qué propiedades debe verificar un sistema  $\phi$  para ser un sistema coherente?

# Sistema coherente

- ▶ ¿Qué propiedades debe verificar un sistema  $\phi$  para ser un sistema coherente?
- ▶ (i)  $\phi(0, \dots, 0) = 0$ .

# Sistema coherente

- ▶ ¿Qué propiedades debe verificar un sistema  $\phi$  para ser un sistema coherente?
- ▶ (i)  $\phi(0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ (ii)  $\phi(1, \dots, 1) = 1$ .

## Sistema coherente

- ▶ ¿Qué propiedades debe verificar un sistema  $\phi$  para ser un sistema coherente?
- ▶ (i)  $\phi(0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ (ii)  $\phi(1, \dots, 1) = 1$ .
- ▶ (iii)  $\phi$  es creciente, es decir,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \leq \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ si } x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n.$$

Así, el estado del sistema no puede empeorar al mejorar una (o varias) componentes.

# Sistema coherente

- ▶ ¿Qué propiedades debe verificar un sistema  $\phi$  para ser un sistema coherente?
- ▶ (i)  $\phi(0, \dots, 0) = 0$ .
- ▶ (ii)  $\phi(1, \dots, 1) = 1$ .
- ▶ (iii)  $\phi$  es creciente, es decir,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \leq \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ si } x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n.$$

Así, el estado del sistema no puede empeorar al mejorar una (o varias) componentes.

- ▶ Si se cumplen esas propiedades  $\phi$  es un **sistema semicoherente**.

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.
- ▶ Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.
- ▶ Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- ▶ (iv)  $\phi$  no tiene componentes irrelevantes;

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.
- ▶ Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- ▶ (iv)  $\phi$  no tiene componentes irrelevantes;
- ▶ (v)  $\phi$  es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada  $i$  se verifica

$$\phi(x_1, \dots, x_n) < \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \dots, x_i < y_i, \dots, x_n = y_n.$$

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.
- ▶ Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- ▶ (iv)  $\phi$  no tiene componentes irrelevantes;
- ▶ (v)  $\phi$  es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada  $i$  se verifica

$$\phi(x_1, \dots, x_n) < \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \dots, x_i < y_i, \dots, x_n = y_n.$$

- ▶ En este caso  $\phi$  es un **sistema coherente**.

## Sistema coherente

- ▶ Con la definición anterior  $\phi(x_1, x_2) = x_1$  sería un sistema semicoherente.
- ▶ Este sistema tiene una componente irrelevante (no influye en el comportamiento del sistema). Para evitar esto se añade la propiedad:
- ▶ (iv)  $\phi$  no tiene componentes irrelevantes;
- ▶ (v)  $\phi$  es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto, es decir, para cada  $i$  se verifica

$$\phi(x_1, \dots, x_n) < \phi(y_1, \dots, y_n) \text{ para } x_1 = y_1, \dots, x_i < y_i, \dots, x_n = y_n.$$

- ▶ En este caso  $\phi$  es un **sistema coherente**.
- ▶ Basta con que se cumplan (iii) y (v).

# Tiempo de vida del sistema

- ▶ Queremos estudiar el tiempo de vida  $T$  del sistema.

# Tiempo de vida del sistema

- ▶ Queremos estudiar el tiempo de vida  $T$  del sistema.
- ▶ Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.

# Tiempo de vida del sistema

- ▶ Queremos estudiar el tiempo de vida  $T$  del sistema.
- ▶ Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- ▶ Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución**  $F(x) = \Pr(T \leq x)$ .

## Tiempo de vida del sistema

- ▶ Queremos estudiar el tiempo de vida  $T$  del sistema.
- ▶ Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- ▶ Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución**  $F(x) = \Pr(T \leq x)$ .
- ▶ En este contexto se prefiere utilizar la **función de fiabilidad** (o supervivencia)  $\bar{F}(x) = \Pr(T > x)$ .

# Tiempo de vida del sistema

- ▶ Queremos estudiar el tiempo de vida  $T$  del sistema.
- ▶ Esto es lo que en Probabilidad y Estadística llamamos **variable aleatoria** (v.a.) ya su funcionamiento depende del azar.
- ▶ Estas variables aleatorias se estudian mediante su **función de distribución**  $F(x) = \Pr(T \leq x)$ .
- ▶ En este contexto se prefiere utilizar la **función de fiabilidad** (o supervivencia)  $\bar{F}(x) = \Pr(T > x)$ .
- ▶ Obviamente  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ .

## Tiempos de vida de las componentes

- ▶ Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .

## Tiempos de vida de las componentes

- ▶ Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .
- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## Tiempos de vida de las componentes

- ▶ Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .
- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Las componentes son **idénticamente distribuidas (ID)** si  $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n$ .

## Tiempos de vida de las componentes

- ▶ Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .
- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Las componentes son **idénticamente distribuidas** (ID) si  $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n$ .
- ▶ Las componentes son **independientes** (I) si el valor de  $X_i$  no “afecta” a las otras componentes.

## Tiempos de vida de las componentes

- ▶ Lo mismo ocurre con los tiempos de vida de las componentes representados por las v.a.  $X_1, \dots, X_n$ .
- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_i(x) = \Pr(X_i > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Las componentes son **idénticamente distribuidas** (ID) si  $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n$ .
- ▶ Las componentes son **independientes** (I) si el valor de  $X_i$  no “afecta” a las otras componentes.
- ▶ Se puede demostrar que la función  $\phi$  se puede extender a los números reales  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que

$$T = \phi(X_1, \dots, X_n).$$

# Estadísticos ordenados

- ▶ ¿Qué son los estadísticos ordenados?

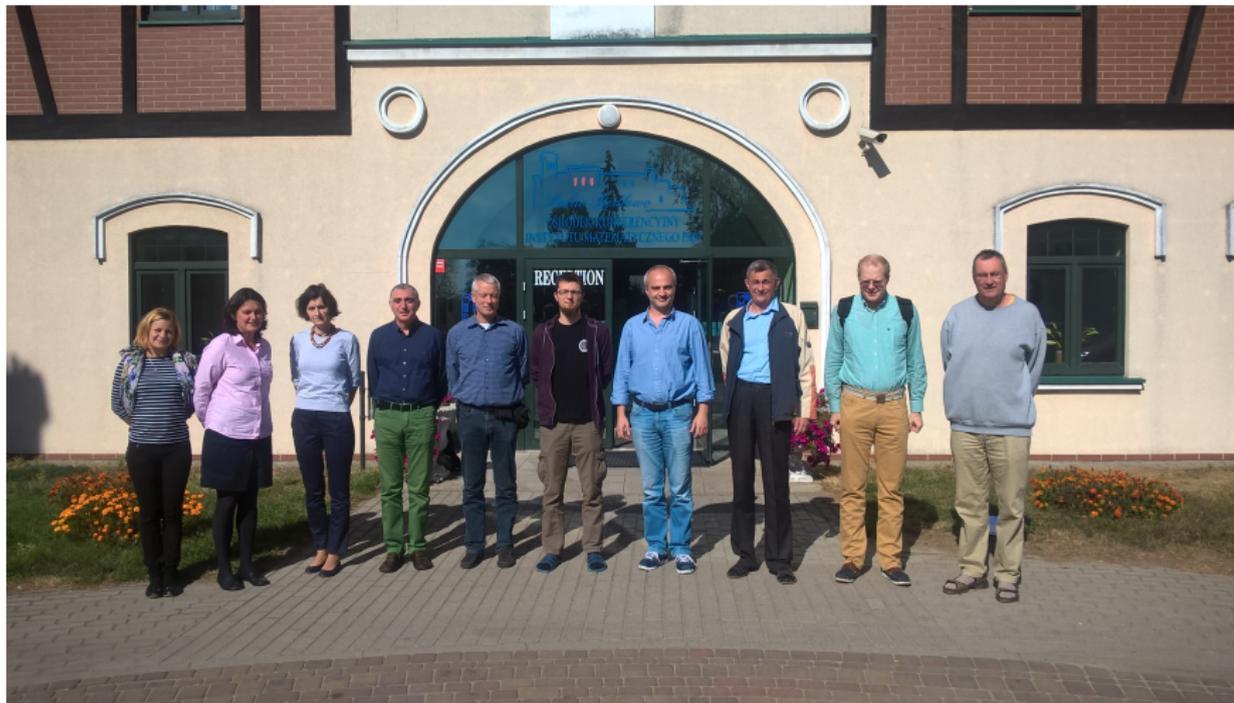


Figura: ¿Estadísticos ordenados? (Bedlewo, Polonia, 2005).

## Estadísticos ordenados

- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ .

## Estadísticos ordenados

- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ .
- ▶ Por ejemplo, si la muestra es 2, 4, 1, 1, 5, entonces

$$X_{1:5} = 1, X_{2:5} = 1, X_{3:5} = 2, X_{4:5} = 4, X_{5:5} = 5.$$

## Estadísticos ordenados

- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ .
- ▶ Por ejemplo, si la muestra es 2, 4, 1, 1, 5, entonces

$$X_{1:5} = 1, \quad X_{2:5} = 1, \quad X_{3:5} = 2, \quad X_{4:5} = 4, \quad X_{5:5} = 5.$$

- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## Estadísticos ordenados

- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ .
- ▶ Por ejemplo, si la muestra es 2, 4, 1, 1, 5, entonces

$$X_{1:5} = 1, \quad X_{2:5} = 1, \quad X_{3:5} = 2, \quad X_{4:5} = 4, \quad X_{5:5} = 5.$$

- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Se definen igual para las componentes (aunque no sean IID).

## Estadísticos ordenados

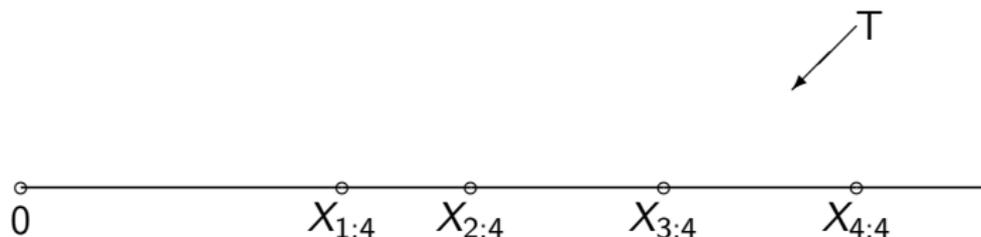
- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra (son v.a. IID), se llaman **estadísticos ordenados** a sus valores ordenados de menor a mayor  $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$ .

- ▶ Por ejemplo, si la muestra es 2, 4, 1, 1, 5, entonces

$$X_{1:5} = 1, \quad X_{2:5} = 1, \quad X_{3:5} = 2, \quad X_{4:5} = 4, \quad X_{5:5} = 5.$$

- ▶ Sus funciones de fiabilidad son  $\bar{F}_{i:n}(x) = \Pr(X_{i:n} > x)$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Se definen igual para las componentes (aunque no sean IID).
- ▶ En este contexto, representan los tiempos de vida de los sistemas  $k$ -out-of- $n$  (que funcionan si funcionan al menos  $k$  de sus  $n$  componentes).

# Proceso de fallo de un sistema con 4 componentes



# Firma de un sistema

- ▶ Sabemos que  $T = X_{i:n}$  para un  $i = 1, \dots, n$  (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).

# Firma de un sistema

- ▶ Sabemos que  $T = X_{i:n}$  para un  $i = 1, \dots, n$  (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- ▶ Podemos calcular  $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$  para  $i = 1, \dots, n$ .

# Firma de un sistema

- ▶ Sabemos que  $T = X_{i:n}$  para un  $i = 1, \dots, n$  (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- ▶ Podemos calcular  $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Si las componentes son IID,  $s_1, \dots, s_n$  no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de  $\phi$ ).

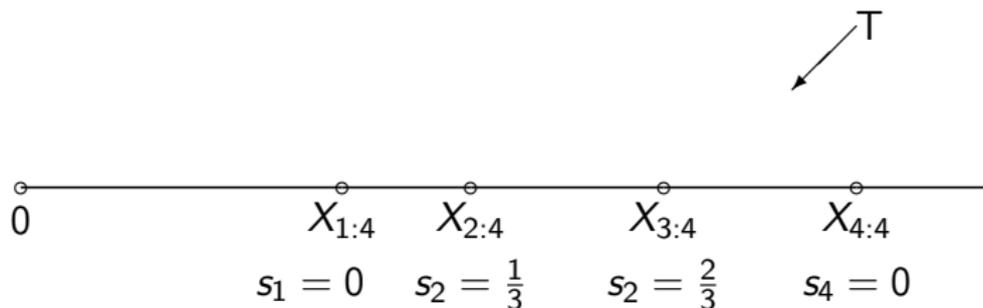
# Firma de un sistema

- ▶ Sabemos que  $T = X_{i:n}$  para un  $i = 1, \dots, n$  (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- ▶ Podemos calcular  $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Si las componentes son IID,  $s_1, \dots, s_n$  no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de  $\phi$ ).
- ▶ Se llama **firma** de  $\phi$  al vector  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .

# Firma de un sistema

- ▶ Sabemos que  $T = X_{i:n}$  para un  $i = 1, \dots, n$  (el sistema falla a la vez que uno de los componentes).
- ▶ Podemos calcular  $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Si las componentes son IID,  $s_1, \dots, s_n$  no dependen de las distribuciones de las componentes (solo dependen de  $\phi$ ).
- ▶ Se llama **firma** de  $\phi$  al vector  $s = (s_1, \dots, s_n)$ .
- ▶ Por ejemplo, para el avión (con componentes IID) se tiene:

# Proceso de fallo del avión con 4 componentes IID



# Representaciones basadas en firmas

# Representación de Samaniego, caso IID

- ▶ Francisco (Frank) J. Samaniego (Universidad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:

## Representación de Samaniego, caso IID

- ▶ Francisco (Frank) J. Samaniego (Universidad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- ▶ Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.

## Representación de Samaniego, caso IID

- ▶ Francisco (Frank) J. Samaniego (Universidad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- ▶ Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- ▶ Este artículo tiene 292 citas en Scopus.

## Representación de Samaniego, caso IID

- ▶ Francisco (Frank) J. Samaniego (Universidad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- ▶ Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- ▶ Este artículo tiene 292 citas en Scopus.
- ▶ Posteriormente publicó un libro sobre firmas:

## Representación de Samaniego, caso IID

- ▶ Francisco (Frank) J. Samaniego (Universidad de California, Davis), publicó la primera representación en el artículo:
- ▶ Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69–72.
- ▶ Este artículo tiene 292 citas en Scopus.
- ▶ Posteriormente publicó un libro sobre firmas:
- ▶ Samaniego, F.J. (2007). System Signatures and their Applications in Engineering Reliability. New York: Springer.

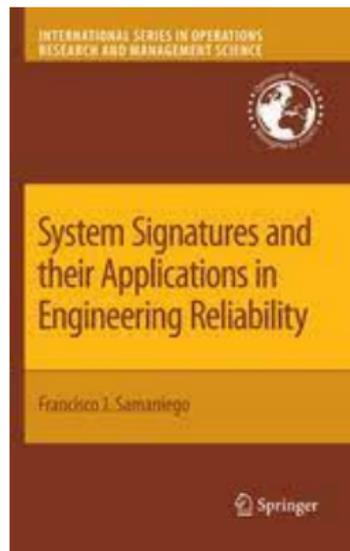


Figura: Frank Samaniego (izquierda, congreso MMR2015, Tokyo).

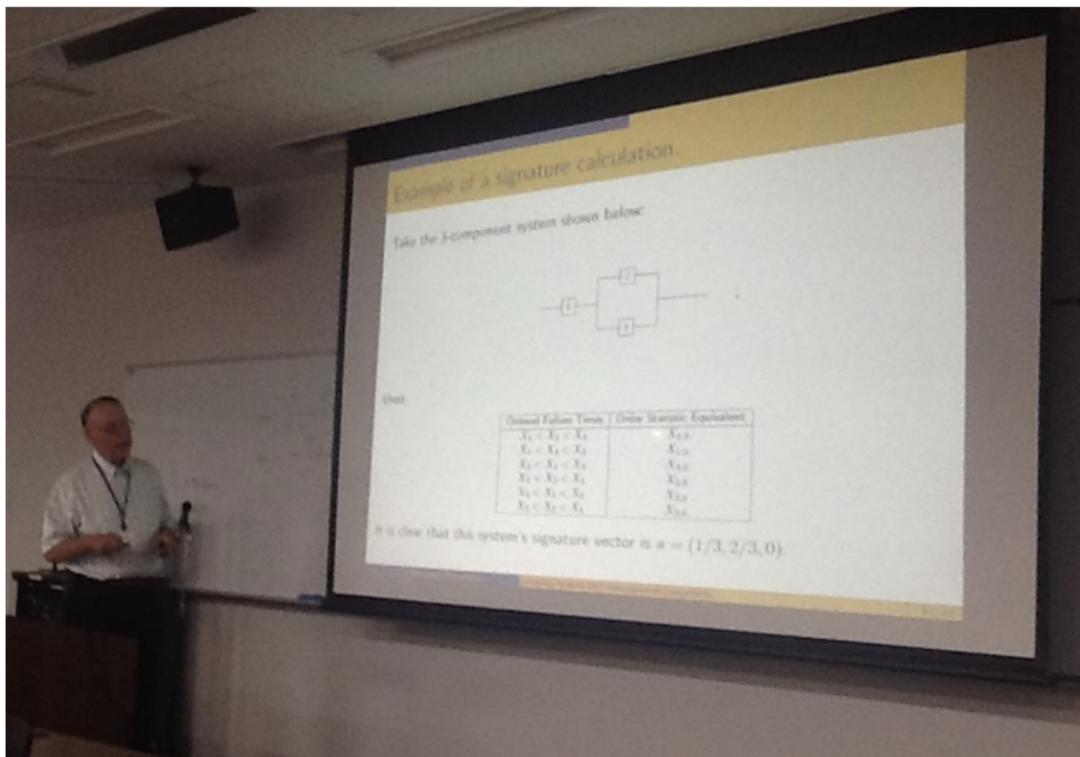


Figura: Frank Samaniego (Congreso MMR2015 Tokyo).

# Representación de Samaniego, caso IID

## Teorema (Samaniego, 1985)

Si  $X_1, \dots, X_n$  son IID con una función de fiabilidad continua, entonces la fiabilidad del sistema se puede calcular como

$$\bar{F}_T(t) = s_1 \bar{F}_{1:n}(t) + \dots + s_n \bar{F}_{n:n}(t) \quad (1)$$

para todo  $t$ , donde  $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$  para  $i = 1, \dots, n$ .

# Extensiones para componentes dependientes

- ▶ Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).

# Extensiones para componentes dependientes

- ▶ Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- ▶ La primera extensión apareció en el artículo:

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- ▶ La primera extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005).  
A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. *Statistics and Probability Letters* 72, 179–185. Citas JCR: 91.

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- ▶ La primera extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. *Statistics and Probability Letters* 72, 179–185. Citas JCR: 91.
- ▶ Una demostración formal para componentes intercambiables (EXC), para las que su distribución no cambia al permutarlos, y absolutamente continua se publicó en:

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ Las hipótesis del teorema son muy restrictivas (IID y cont.).
- ▶ La primera extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, José María Ruiz and Carlos J. Sandoval (2005). A note on comparisons among coherent systems with dependent components using signatures. *Statistics and Probability Letters* 72, 179–185. Citas JCR: 91.
- ▶ Una demostración formal para componentes intercambiables (EXC), para las que su distribución no cambia al permutarlos, y absolutamente continua se publicó en:
- ▶ Jorge Navarro and Tomasz Rychlik (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. *Journal of Multivariate Analysis* 98, 102–113. Citas JCR: 129.



Figura: Tomasz Rychlik (izquierda). Polish Academy of Science.

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ La siguiente extensión apareció en el artículo:

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ La siguiente extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ La siguiente extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- ▶ El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ La siguiente extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- ▶ El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).
- ▶ Ha sido elegido recientemente (8 de septiembre de 2021) Fellow of the Royal Society of Canada (FRSC).

## Extensiones para componentes dependientes

- ▶ La siguiente extensión apareció en el artículo:
- ▶ Jorge Navarro, Francisco J. Samaniego, N. Balakrishnan and Debasis Bhattacharya (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability. Naval Research Logistics 55, 313–327. Citas JCR: 162.
- ▶ El Prof. N. Balakrishnan (Bala), Universidad McMaster, Hamilton, Canadá es el mayor especialista mundial en estadísticos ordenados y autor de más de 1500 publicaciones (citas 81640, Índice h 86, fuente Google Scholar).
- ▶ Ha sido elegido recientemente (8 de septiembre de 2021) Fellow of the Royal Society of Canada (FRSC).
- ▶ Debasis Bhattacharya, Departamento de Estadística, Universidad Visva-Bharati, West Bengal, India.



**Figura:** Prof. N. Balakrishnan (izquierda) y Prof. Debasis Bhattacharya (derecha).

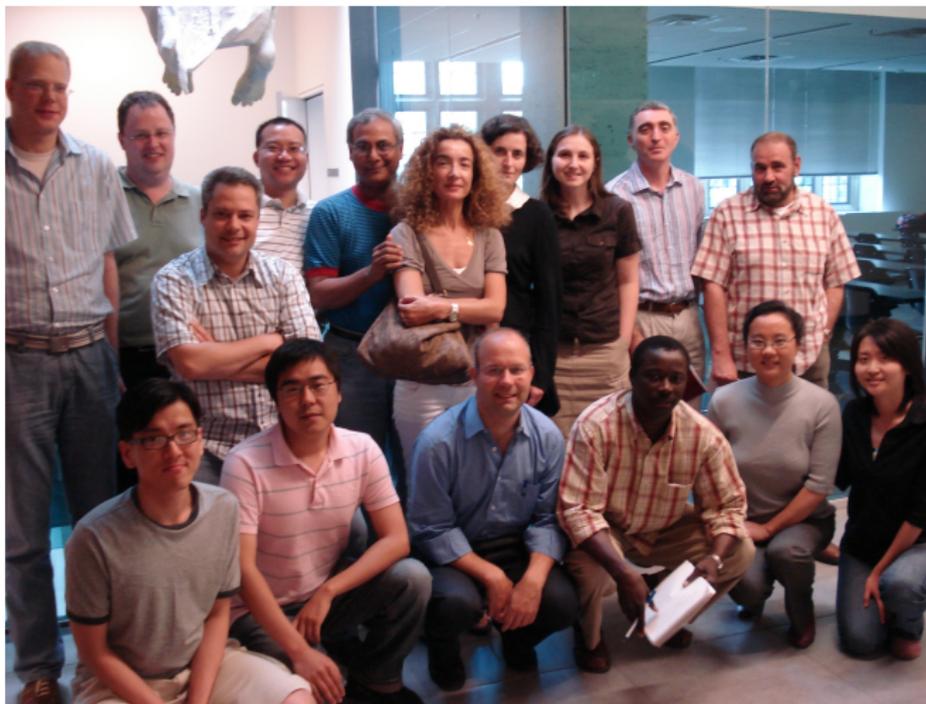


Figura: Prof. N. Balakrishnan, Hamilton, verano 2008.

# Representación basada firmas, caso EXC

## Teorema (Navarro et al., 2008)

*Si  $X_1, \dots, X_n$  son intercambiables (EXC) y  $\phi$  es un sistema semicoherente basado en algunos (o todos) de esos componentes, entonces la fiabilidad del sistema se puede calcular como*

$$\bar{F}_T(t) = s_1^{(n)} \bar{F}_{1:n}(t) + \dots + s_n^{(n)} \bar{F}_{n:n}(t) \quad (2)$$

*para todo  $t$ , donde  $s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)} \in \mathbb{R}$  solo dependen de  $\phi$ .*

# Representación basada firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.

## Representación basada firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.
- ▶ Si  $\phi$  es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.

## Representación basada en firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.
- ▶ Si  $\phi$  es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- ▶ En este caso  $s_i^{(n)}$  y  $\Pr(T = X_{i:n})$  pueden ser distintos.

## Representación basada firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.
- ▶ Si  $\phi$  es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- ▶ En este caso  $s_i^{(n)}$  y  $\Pr(T = X_{i:n})$  pueden ser distintos.
- ▶ Además ahora podemos representar sistemas con  $k$  componentes como si tuvieran  $n$  para cualquier  $n > k$ .

# Representación basada en firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.
- ▶ Si  $\phi$  es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- ▶ En este caso  $s_i^{(n)}$  y  $\Pr(T = X_{i:n})$  pueden ser distintos.
- ▶ Además ahora podemos representar sistemas con  $k$  componentes como si tuvieran  $n$  para cualquier  $n > k$ .
- ▶ El vector  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$  se llama **signatura de orden  $n$**  del sistema.

# Representación basada en firmas, caso EXC

- ▶ Ese resultado contiene diversas extensiones.
- ▶ Si  $\phi$  es coherente, se extiende el resultado de Navarro y Rychlik (2007) eliminando la condición de continuidad.
- ▶ En este caso  $s_i^{(n)}$  y  $\Pr(T = X_{i:n})$  pueden ser distintos.
- ▶ Además ahora podemos representar sistemas con  $k$  componentes como si tuvieran  $n$  para cualquier  $n > k$ .
- ▶ El vector  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$  se llama **signatura de orden  $n$**  del sistema.
- ▶ Un ejemplo en ese artículo prueba que las representaciones (1) y (2) no se cumplen si eliminamos la condición ID.

# Representación basada firmas, caso DD-ID cópulas

- ▶ Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.

## Representación basada firmas, caso DD-ID cópulas

- ▶ Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- ▶ El caso “componentes intercambiables” (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.

## Representación basada firmas, caso DD-ID cópulas

- ▶ Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- ▶ El caso “componentes intercambiables” (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- ▶ El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.

## Representación basada firmas, caso DD-ID cópulas

- ▶ Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- ▶ El caso “componentes intercambiables” (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- ▶ El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.
- ▶ En el artículo siguiente probamos que la condición de que la cópula sea simétrica sí se puede relajar mediante la condición de que sea “diagonal dependiente” (DD), que es mucho más débil:

## Representación basada en firmas, caso DD-ID cópulas

- ▶ Las “cópulas” son una herramienta fundamental en estadística para modelizar la dependencia.
- ▶ El caso “componentes intercambiables” (EXC) es equivalente a que las componentes sean ID y que su cópula sea simétrica.
- ▶ El ejemplo prueba que la condición ID no se puede eliminar.
- ▶ En el artículo siguiente probamos que la condición de que la cópula sea simétrica sí se puede relajar mediante la condición de que sea “diagonal dependiente” (DD), que es mucho más débil:
- ▶ Jorge Navarro, Juan Fernández-Sánchez (2020). On the extension of signature-based representations for coherent systems with dependent non-exchangeable components. *Journal of Applied Probability* 57, 429–440.



Figura: Juan Fernández-Sánchez (Univ. Almería), La Manga 2019.

## Otras representaciones

- ▶ Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.

## Otras representaciones

- ▶ Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- ▶ Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).

## Otras representaciones

- ▶ Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- ▶ Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).
- ▶ Las más eficientes son las denominadas **representaciones basadas en distorsiones**. Su representación general se puede ver en el artículo siguiente:

## Otras representaciones

- ▶ Pensamos que la representación de Samaniego no se puede extender más ya que la condición ID no se puede eliminar.
- ▶ Sí que hay otras representaciones que permiten manejar los casos más generales (no ID).
- ▶ Las más eficientes son las denominadas **representaciones basadas en distorsiones**. Su representación general se puede ver en el artículo siguiente:
- ▶ Jorge Navarro, Yolanda del Águila, Miguel Ángel Sordo, Alfonso Suárez-Llorens (2016). Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. Applications to coherent systems. Methodology and Computing in Applied Probability 18, 529–545. Citas JCR: 53.

# Comparaciones de sistemas usando firmas

# Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .

## Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .
- ▶ Orden razón de riesgo (hazard rate):  $X \leq_{HR} Y$  si  $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$  crece.

## Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .
- ▶ Orden razón de riesgo (hazard rate):  $X \leq_{HR} Y$  si  $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$  crece.
- ▶  $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .

## Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .
- ▶ Orden razón de riesgo (hazard rate):  $X \leq_{HR} Y$  si  $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$  crece.
- ▶  $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .
- ▶ Orden vida media residual (mean residual life):  $X \leq_{MRL} Y$  si  $E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .

## Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .
- ▶ Orden razón de riesgo (hazard rate):  $X \leq_{HR} Y$  si  $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$  crece.
- ▶  $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .
- ▶ Orden vida media residual (mean residual life):  $X \leq_{MRL} Y$  si  $E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .
- ▶ Orden razón de verosimilitudes (likelihood ratio):  $X \leq_{LR} Y$  si  $\bar{F}'_Y/\bar{F}'_X$  crece.

# Principales órdenes estocásticos

- ▶ Orden estocástico (usual):  $X \leq_{ST} Y$  si  $\bar{F}_X \leq \bar{F}_Y$ .
- ▶ Orden razón de riesgo (hazard rate):  $X \leq_{HR} Y$  si  $\bar{F}_Y/\bar{F}_X$  crece.
- ▶  $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .
- ▶ Orden vida media residual (mean residual life):  $X \leq_{MRL} Y$  si  $E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$  para toda edad  $t$ .
- ▶ Orden razón de verosimilitudes (likelihood ratio):  $X \leq_{LR} Y$  si  $\bar{F}'_Y/\bar{F}'_X$  crece.
- ▶ Relaciones:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \leq_{LR} Y & \Rightarrow & X \leq_{HR} Y & \Rightarrow & X \leq_{MRL} Y \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & X \leq_{ST} Y & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y)
 \end{array}$$

## Comparaciones basadas en firmas

### Teorema (Navarro et al., 2008)

Si  $T_1$  y  $T_2$  son los tiempos de vida de dos sistemas semicoherentes con componentes  $X_1, \dots, X_n$  con distribución conjunta  $\mathbf{F}$  intercambiable y firmas de orden  $n$   $\mathbf{s}_1^{(n)}$  y  $\mathbf{s}_2^{(n)}$ , entonces:

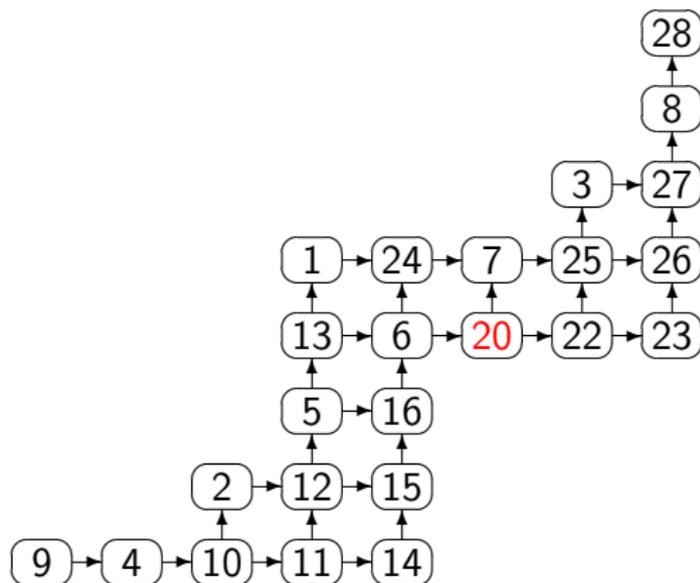
- (i) Si  $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{ST} \mathbf{s}_2^{(n)}$ , entonces  $T_1 \leq_{ST} T_2$  para toda  $\mathbf{F}$ ;
- (ii) Si  $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ , entonces  $T_1 \leq_{HR} T_2$  para toda  $\mathbf{F}$  tal que  $X_{1:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}$ ;
- (iii) Si  $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ , entonces  $T_1 \leq_{MRL} T_2$  para toda  $\mathbf{F}$  tal que  $X_{1:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}$ ;
- (iv) Si  $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{LR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ , entonces  $T_1 \leq_{LR} T_2$  para toda  $\mathbf{F}$  continua o discreta tal que  $X_{1:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}$ .

**Tabla:** Firmas de orden 4 para todos los sistemas coherentes con 1-4 componentes EXC (o IID).

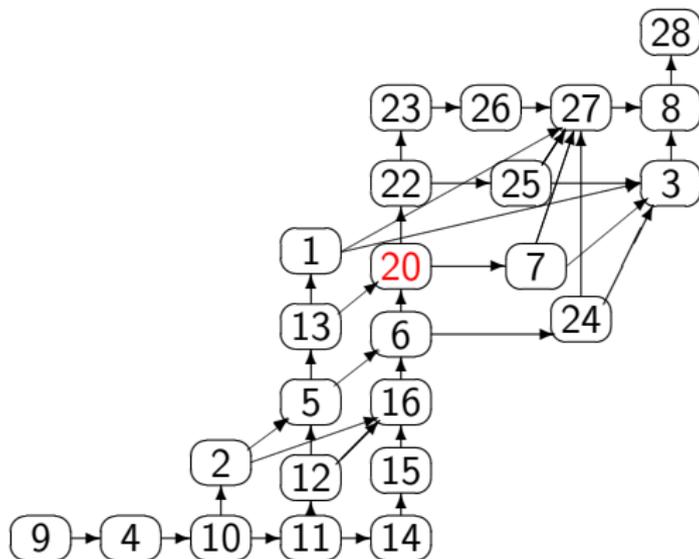
$i$	$T_i$	$s^{(4)}$
1	$X_{1:1} = X_1$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
2	$X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$ (2-serie)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$
3	$X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$ (2-paralelo)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
4	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$ (3-serie)	$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$
5	$\min(X_1, \max(X_2, X_3))$	$(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0)$
6	$X_{2:3}$ (2-out-of-3)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
7	$\max(X_1, \min(X_2, X_3))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4})$
8	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$ (3-paralelo)	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$i$	$T_i$	$s^{(4)}$
9	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-serie)	$(1, 0, 0, 0)$
10	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
11	$\min(X_{2:3}, X_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
12	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
13	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$X_{2:4}$ (3-out-of-4)	$(0, 1, 0, 0)$
15	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3, X_4), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
16	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
17	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
18	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

$i$	$T_i$	$s^{(4)}$
19	$\max(\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4)), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
20	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
21	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
22	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3, X_4), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
23	$X_{3:4}$ (2-out-of-4)	$(0, 0, 1, 0)$
24	$\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
25	$\max(X_1, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
26	$\max(X_{2:3}, X_4)$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
27	$\min(\max(X_1, X_2, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
28	$X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-paralelo)	$(0, 0, 0, 1)$



**Figura:** Órdenes ST para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC.



**Figura:** Ordenes HR (resp. MRL) para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC verificando  $X_{1:4} \leq_{HR} X_{2:4} \leq_{HR} X_{3:4} \leq_{HR} X_{4:4}$  (resp.  $X_{1:4} \leq_{MRL} X_{2:4} \leq_{MRL} X_{3:4} \leq_{MRL} X_{4:4}$ ).

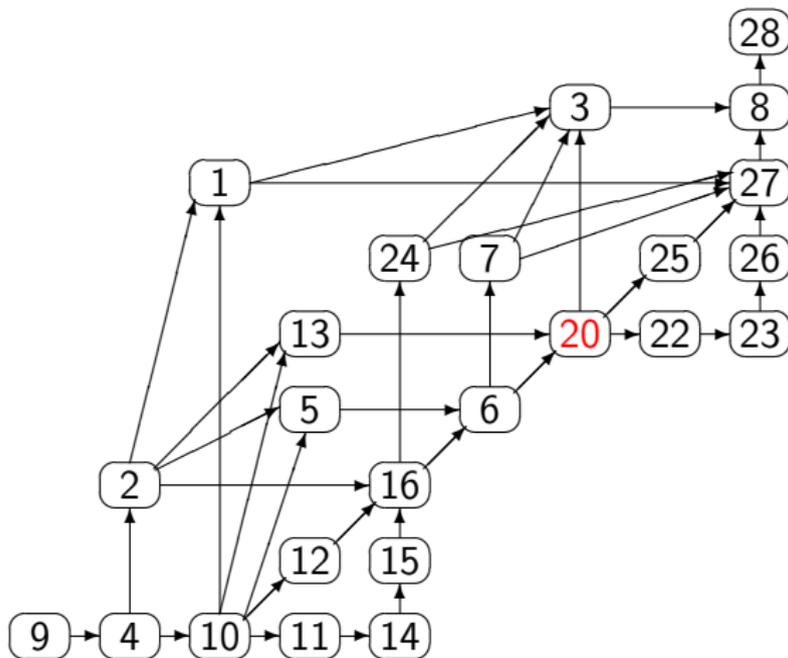


Figura: Órdenes LR para los sistemas de la tabla anterior y componentes IID o EXC verificando  $X_{1:4} \leq_{LR} X_{2:4} \leq_{LR} X_{3:4} \leq_{LR} X_{4:4}$ .

# Órdenes

- ▶ En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.

# Órdenes

- ▶ En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- ▶ Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.

# Órdenes

- ▶ En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- ▶ Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- ▶ Es más, descubrimos que si usábamos firmas de orden 5, aparecían más órdenes para el caso IID.

# Órdenes

- ▶ En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- ▶ Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- ▶ Es más, descubrimos que si usábamos firmas de orden 5, aparecían más órdenes para el caso IID.
- ▶ Posteriormente desarrollamos otra técnica (basada en distorsiones) que sí obtenía todos los órdenes para el caso IID y que también se podía usar en el caso no IID.

# Órdenes

- ▶ En el artículo Navarro y Rubio (2011) probamos que esas figuras no contienen todos los órdenes para el caso IID.
- ▶ Sin embargo, sí probamos que tienen todos los órdenes del caso EXC.
- ▶ Es más, descubrimos que si usábamos firmas de orden 5, aparecían más órdenes para el caso IID.
- ▶ Posteriormente desarrollamos otra técnica (basada en distorsiones) que sí obtenía todos los órdenes para el caso IID y que también se podía usar en el caso no IID.
- ▶ Los resultados se pueden ver en:

## Referencias adicionales

- ▶ J. Navarro, Y. del Aguila, M.A. Sordo, A. Suárez-Llorens (2016). Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. Applications to coherent systems. Methodology and Computing in Applied Probability 18, 529–545.
- ▶ J. Navarro (2018). Stochastic comparisons of coherent systems. Metrika 81, 465–482.
- ▶ J. Navarro (2022). Introduction to System Reliability Theory. Springer. ISBN: 978-3-030-86952-6 (Hardcover Book).

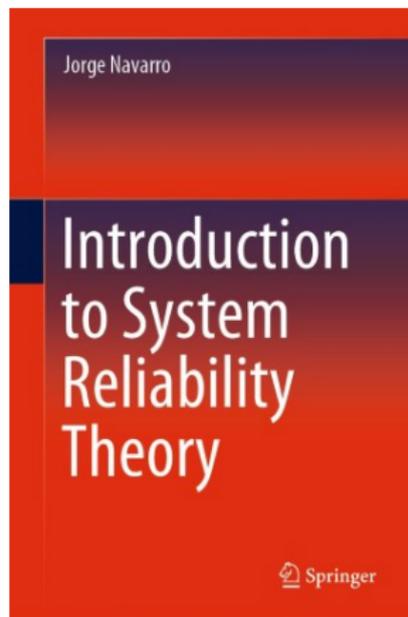


Figura: Libro publicado en octubre de 2021.

# Impacto de la investigación y agradecimientos

# Impacto de la investigación en firmas

- ▶ El artículo siguiente analiza el impacto de la investigación en firmas:

## Impacto de la investigación en firmas

- ▶ El artículo siguiente analiza el impacto de la investigación en firmas:
- ▶ S. Naqvi, P.S. Chan, D.B. Mishra (2021). System signatures: A review and bibliometric analysis. Communications in Statistics - Theory and Methods.  
DOI: 10.1080/03610926.2021.1937653.

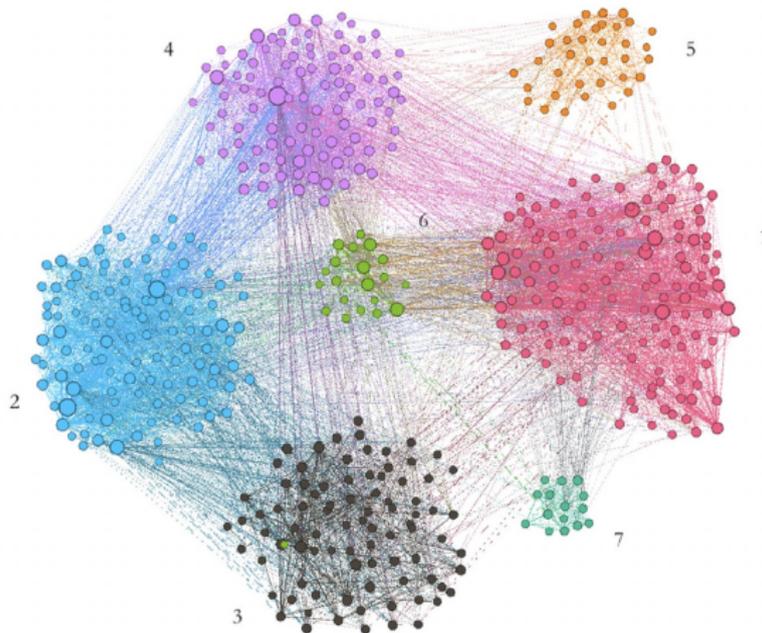


Figure 2. Structure of seven clusters.

Figura: Figura 2 en Naqvi et al. (2021). Grupos (clusters) de artículos similares sobre firmas.

Table 7. The lead papers of each cluster based on PageRank.

Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3
Navarro and Hernandez (2008a)	Samaniego (2007)	Barlow and Proschan (1975)
Navarro et al. (2008a)	Navarro and Rubio (2010)	Navarro, Ruiz, and Sandoval (2007)
Navarro and Hernandez (2008b)	Cramer and Kamps (2003)	Navarro, Ruiz, and Sandoval (2005)
Navarro and Rychlik (2007)	Shaked and Shanthikumar (2007)	Navarro (2016)
Samaniego (1985)	Boland (2001)	Navarro and Rychlik (2010)
Zhang (2010a)	Navarro, Balakrishnan, and Samaniego (2008b)	Shaked and Suarez-Llorens (2003)
Kochar, Mukerjee, and Samaniego (1999)	Samaniego, Balakrishnan, and Navarro (2009)	Navarro, Samaniego, and Balakrishnan (2011)
Triantafyllou and Koutras (2008)	Da, Zheng, and Hu (2012)	Zhang (2010b)
Li and Zhang (2008)	Asadi and Goliforushani (2008)	Navarro, Pellerey, and Di Crescenzo (2015)
Navarro and Shaked (2006)	Navarro, Samaniego, and Balakrishnan (2010)	Khaledi and Shaked (2007)
Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6
Reed (2017)	Nelsen (2006)	Dugas and Samaniego (2007)
Feng et al. (2016)	Eryilmaz (2010)	Karlin (1968)
Eryilmaz, Coolen, and Coolen-Maturi (2018)	Asadi and Bayramoglu (2006)	Makri and Philippou (1996)
Coolen and Coolen-Maturi (2015)	Li and Zhao (2006)	Poursaeed and Nematollahi (2008)
Patelli et al. (2017)	Mahmoudi and Asadi (2011)	Iyer (1992)
Walter and Flapper (2017)	Bairamov, Ahsanullah, and Akhundov (2002)	Navarro, Ruiz, and Sandoval (2007)
Aslett, Coolen, and Wilson (2015)	Goliforushani, Asadi, and Balakrishnan (2012)	Levitin, Gertsbakh, and Shpungin (2011)
Coolen and Coolen-Maturi (2013)	Muller and Stoyan (2002)	Eryilmaz (2011)
Cha, Finkelstein, and Levitin (2017)	Marichal and Mathonet (2013a)	Gertsbakh, Shpungin, and Spizzichino (2012)
Finkelstein and Gertsbakh (2015)	Eryilmaz (2009)	Li and Zuo (2008)
Cluster 7		
Samaniego and Navarro (2016)		
Navarro and Rychlik (2010)		
Eryilmaz (2012)		
Da, Zheng, and Hu (2012)		
Mahmoudi and Asadi (2011)		
Kumar and Singh (2017)		
Marichal and Mathonet (2013b)		
Navarro and Rubio (2009)		

**Table 6.** Top 20 documents based on PageRank.

Author (year)	PageRank	Author (year)	PageRank
Samaniego (2007)	0.00920	Kochar, Mukerjee, and Samaniego (1999)	0.00482
Navarro and Rubio (2010)	0.00880	Navarro, Balakrishnan, and Samaniego (2008b)	0.00478
Navarro and Hernandez (2008a)	0.00705	Cramer and Kamps (2003)	0.00474
Navarro et al. (2008a)	0.00670	Triantafyllou and Koutras (2008)	0.00473
Navarro and Hernandez (2008b)	0.00668	Li and Zhang (2008)	0.00468
Navarro and Rychlik (2007)	0.00662	Shaked and Shanthikumar (2007)	0.00456
Samaniego (1985)	0.00657	Boland (2001)	0.00449
Zhang (2010)	0.00646	Kamps and Cramer (2001)	0.00434
Barlow and Proschan (1975)	0.00578	Samaniego, Balakrishnan, and Navarro (2009)	0.00419
Navarro, Ruiz, and Sandoval (2007)	0.00559	Navarro, Ruiz, and Sandoval (2005)	0.00401

**Figura:** Tabla 6 en Naqvi et al. (2021) con los 20 artículos líderes sobre firmas usando PageRank.

**Table 5.** Top 20 articles based on citations.

Author (year)	Total citations	Author (year)	Total citations
Lai and Xie (2006)	430	Navarro, Ruiz, and Sandoval (2005)	94
Samaniego (1985)	271	Doostparast, Kolahan, and Doostparast (2014)	89
Kuo and Zhu (2012)	232	Eryilmaz (2010)	80
Kochar, Mukerjee, and Samaniego (1999)	207	Navarro et al. (2013)	79
Navarro et al. (2008a)	161	Coolen and Coolen-Maturi (2013)	78
Navarro and Rychlik (2007)	130	Navarro and Spizzichino (2010)	73
Navarro, Ruiz, and Sandoval (2007)	127	Zhang (2010)	70
Khaledi and Shaked (2007)	103	Nair, Sankaran, and Balakrishnan (2013)	66
Boland (2001)	97	Li and Zhang (2008)	66
Navarro, Balakrishnan, and Samaniego (2008b)	95	Navarro and Hernandez (2008a)	63

**Figura:** Tabla 5 en Naqvi et al. (2021) con los 20 artículos líderes sobre firmas usando citas.

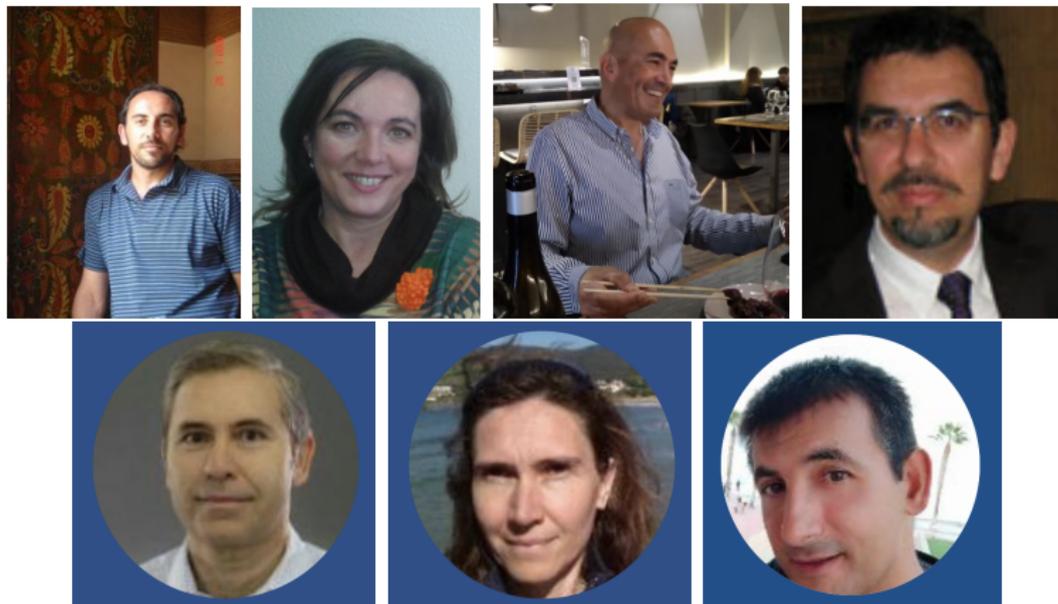
**Table 3.** Top 10 contributing organizations.

Organization	Location	No. of publications
University of Murcia	Spain	69
University of Isfahan	Iran	52
Atilim University	Turkey	47
McMaster University	Canada	45
University of Durham	UK	30
University of California, Davis	USA	29
Izmir Ekonomi University	Turkey	27
Polish Academy of Sciences	Poland	23
Institute for Research in Fundamental Sciences	Iran	19
University of Liverpool	UK	19

**Figura:** Tabla 3 en Naqvi et al. (2021) con las 10 organizaciones que más han contribuido en los artículos sobre firmas.

## Coautores en la Región de Murcia

- ▶ **Profesores Dpto. EIO:** José M. Ruiz, Noemí Zoroa, Félix Belzunce, Manuel Franco.
- ▶ **Profesores y alumnos UMU:** José S. Carrión, Cristina Navarro, Manuel Munuera, Pedro Fernández, Pedro J. Hernández, Rafael Rubio, M.C. Gómis.
- ▶ **Profesores UPCT:** Antonio Guillamón, M.C. Ruiz, Carlos J. Sandoval.



**Figura:** Algunos coautores en la Región de Murcia: (arriba) Félix, Noemí, Pedro y Pepe, (abajo) Antonio, María del Carmen y Carlos.

## Coautores en España

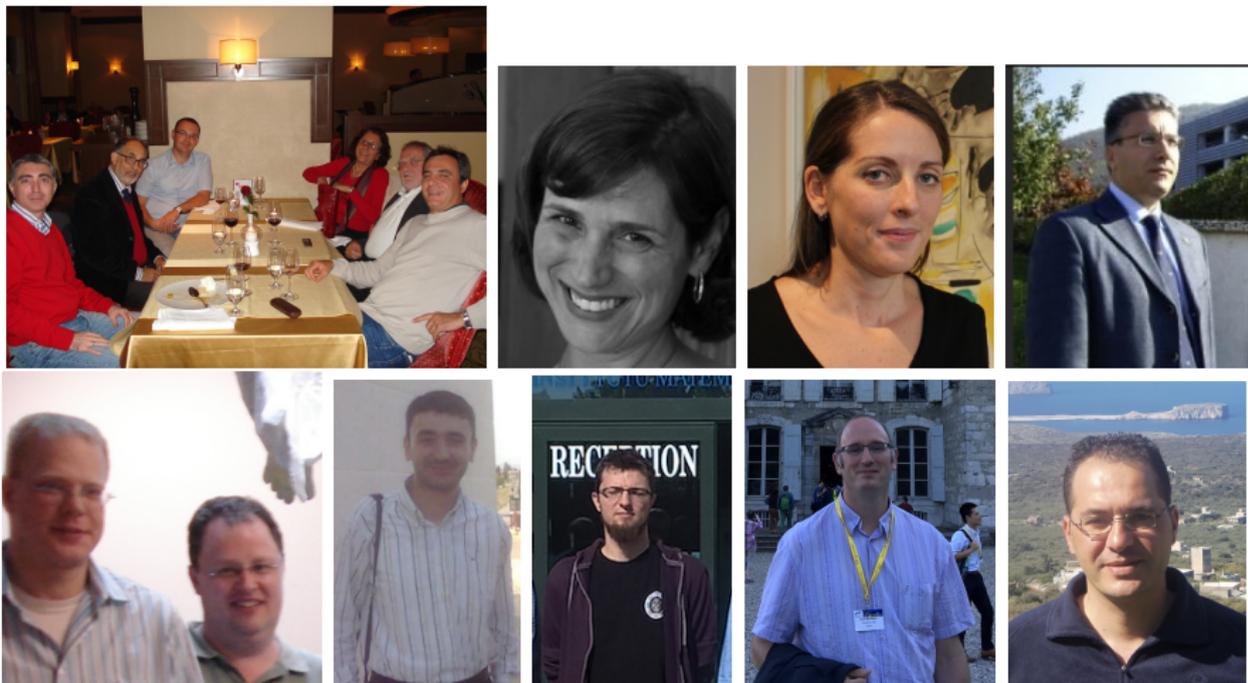
- ▶ **Univ. Almería:** Y. del Águila (13 SCOPUS), J. Fernández.
- ▶ **Univ. Cádiz:** M.A. Sordo (6 SCOPUS), A. Suarez-Llorens (5 SCOPUS), A. Arriaza.
- ▶ **Univ. Cantabria:** J.M. Sarabia (5 SCOPUS).
- ▶ **Univ. Autónoma de Madrid:** N. Torrado.
- ▶ **Univ. Alicante:** J. Mulero.



Figura: Algunos coautores españoles: (arriba) Miguel Ángel, Alfonso y Antonio, (abajo) Jose M., Nuria y Julio.

## Coautores Europa

- ▶ **Italia:** F. Spizzichino (6, Univ. La Sapienza, Roma), F. Pellerey (Pol. Turín), A. di Crescenzo (Univ. Salerno), F. Durante (Univ. Salento), N. Loperfido (Univ. Urbino), M. Longobardi y C. Calì (Univ. Napoles).
- ▶ **Alemania:** M. Burkschat (5) y E. Cramer (Univ. RWTH Aachen).
- ▶ **Turquía:** S. Eryilmaz (Univ. Atilim, Ankaran).
- ▶ **Polonia:** T. Rychlik (9, Academia Polaca de las Ciencias), P. Mizula, K. Jasinski (Univ. Nicolaus Copernicus, Torun).
- ▶ **Grecia:** G. Psarrakos (Univ. de El Pireo).
- ▶ **Bélgica:** P. Mathonet (Univ. Liège).
- ▶ **Luxemburgo:** J.L. Marichal (Univ. de Luxemburgo).
- ▶ **Francia:** C. Paroissin (Univ Pau et Pays Adour, Pau).



**Figura:** Coautores europeos: (arriba) Fabio, Fabrizio y Franco, Maria, Camilla y Antonio (abajo) Marco y Erhard, Serkan, Patryk, Pierre y Georgios.

## Colaboraciones fuera de Europa

- ▶ **Canada:** N. Balakrishnan (14, Univ. McMaster, Hamilton).
- ▶ **USA:** F.J. Samaniego (9, Univ. California, Davis), M. Shaked (Univ. Arizona), S. Kotz (Univ. George Washington), T. Ng (Southern Methodist University, Dallas, Texas).
- ▶ **Irán:** M. Asadi y S. Ashrafi (Univ. de Isfahan), M. Alimohammadi y M. Esna-Ashari (Univ. Alzahra, Teheran, Iran), A. Toomaj (Univ. Gonvad Kavous).
- ▶ **India:** D. Bhattacharya (Univ. Visva-Bharati, West Bengal), S.M. Sunoj (Cochin University of Science and Technology).
- ▶ **Australia:** A.G. Pakes (Univ. of Western Australia).
- ▶ **Nueva Zelanda:** C.D. Lai (Massey University, Palmerston North).
- ▶ **Etiopía:** E. Wondmagegnehu (Univ. Asmara).



**Figura:** Algunos coautores del resto del mundo: (arriba) Bala, Tony Ng, Moshe Shaked, Samuel Kotz (abajo) Majid, Sunoj, Tony Pakes, Eshetu.

## Agradecimientos. Familia científica.



**Figura:** D. José M. Ruiz Gómez (Director tesis), D. Procopio Zoroa Terol (miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales) y D.ª María de los Ángeles Molina Gómez (Académica).



**Figura:** Tesis dirigidas: D. Antonio Guillamón (ex director de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial y profesor UPCT), Yolanda del Águila (Univ. Almería), Carlos J. Sandoval (Prof. Ens. Secundaria y Asociado UPCT), Pedro J. Hernández (Catedrático de Ens. Secundaria y Asociado UPCT y UMU) y Rafael Rubio (Prof. Ens. Secundaria).

## Agradecimientos. Académicos.



**Figura:** Académicos D. José M. Ruiz (Decano Fac. Matemáticas 1992-2007 y ex-Vicerrector UMU), D. Ángel Ferrández (Presidente Academia, 2001-2010), D. Pascual Lucas (Decano Fac. Matemáticas 2018-2022 y actual vicerrector UMU) por proponerme y a todos los académicos que me han apoyado. Fuente fotos: Web de la Academia.

## Agradecimientos. Facultad y Proyectos.



Figura: Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia.



**Figura:** Dpto. Estadística e Investigación Operativa (UMU). Faltan las fotos de Manolo, Blas, Carolina, Pepi y Juana Mari.



Figura: Hermanos y demás familia.



**Figura:** Padres: D. Jorge Navarro Olivares (ex Gerente UMU) y D<sup>a</sup> Teresa Camacho Sánchez, y madre política: D<sup>a</sup> Matilde Valcarcel.



Figura: Matilde, Pablo y Julia.

► Y por último:

- ▶ Y por último:
- ▶ ¡Gracias a todos ustedes por su asistencia y por su atención!