Representaciones de sistemas coherentes usando signaturas

Jorge L. Navarro Camacho
Universidad de Murcia

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \dots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias no negativas.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ IID.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\overline{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k-out-of-n:F.
- $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y $\overline{F}$ continua, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t). \tag{1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de T, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \tag{2}$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si $\overline{F}$ no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y $\overline{F}$ continua, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t). \qquad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de T, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \qquad (2)$$

$$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}.$$

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si $\overline{F}$ no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y $\overline{F}$ continua, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t). \tag{1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de T, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \tag{2}$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si $\overline{F}$ no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y $\overline{F}$ continua, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t). \tag{1}$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de T, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \tag{2}$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.
- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si $\overline{F}$ no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y $\overline{F}$ continua, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t). \qquad (1)$$

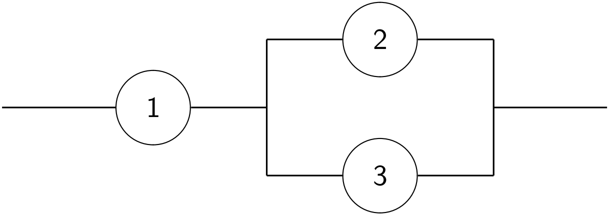
- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ signatura de T, $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \qquad (2)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ cuando $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$.
- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si $\overline{F}$ no es continua.

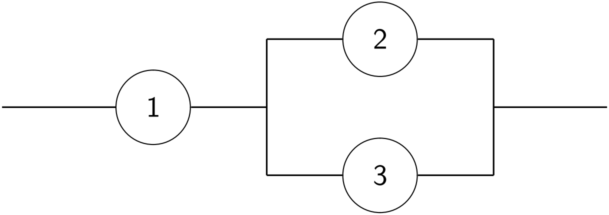
Ejemplo

Ejemplo



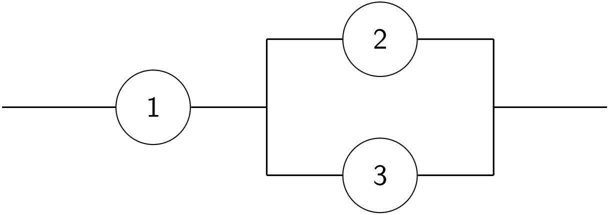
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

Ejemplo



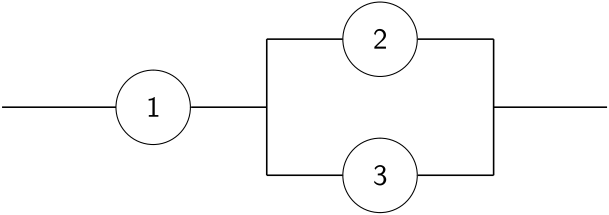
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$3! = 6$ permutaciones.

Ejemplo



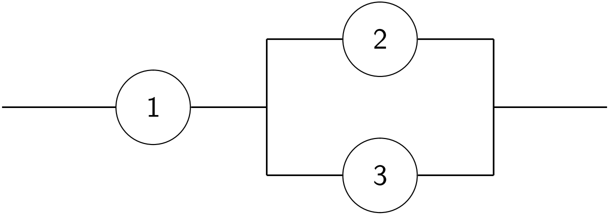
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_1 < X_2 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

Ejemplo



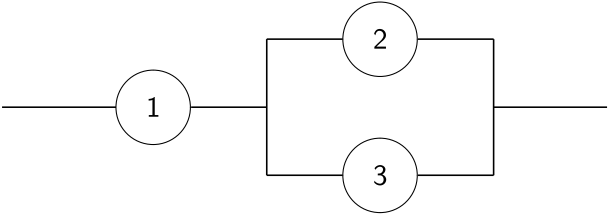
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_1 < X_3 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

Ejemplo



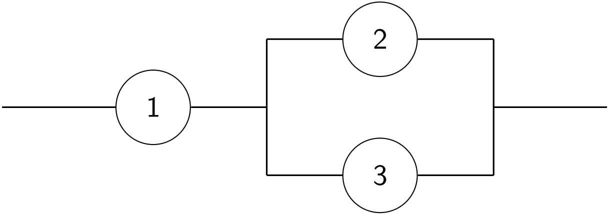
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_2 < X_1 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

Ejemplo



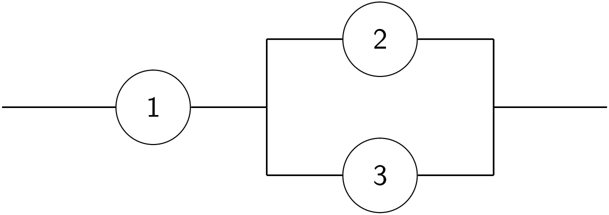
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_2 < X_3 < X_1 \Rightarrow T = X_3 = X_{2:3}$

Ejemplo



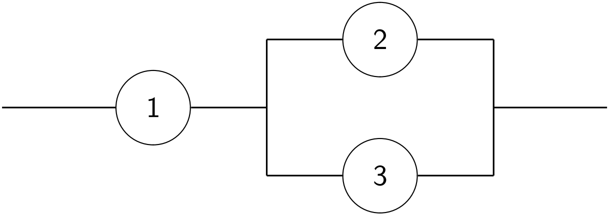
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_3 < X_1 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

Ejemplo



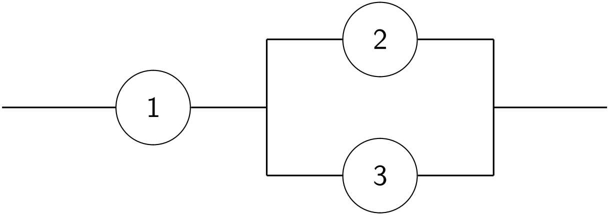
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
$X_3 < X_2 < X_1 \Rightarrow T = X_2 = X_{2:3}$

Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
IID $\overline{F}$ cont.: $\mathbf{s} = (2/6, 4/6, 0) = (1/3, 2/3, 0)$.

Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
IID $\overline{F}$ cont.: $\overline{F}_T(t) = \frac{1}{3}\overline{F}_{1:3}(t) + \frac{2}{3}\overline{F}_{2:3}(t)$.

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, ..., n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si $P_1, ..., P_r$ son los caminos minimales de T, entonces

$$T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\overline{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r}\{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si $P_1, \dots, P_r$ son los caminos minimales de T, entonces

$$T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\overline{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r} \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, ..., n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si $P_1, ..., P_r$ son los caminos minimales de T, entonces

$$T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\overline{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \ldots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si $P_1, \ldots, P_r$ son los caminos minimales de T, entonces

$$T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\overline{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r}\{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, ..., n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si $P_1, ..., P_r$ son los caminos minimales de T, entonces

$$T = \max_{1 \le j \le r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\overline{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^{r}\{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}(t). \tag{3}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T, donde a_i no depende de $\overline{F}$ pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\overline{F}_{1:i}(t) = \overline{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}(t). \tag{4}$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}(t). \tag{3}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la signatura minimal de T, donde a_i no depende de $\overline{F}$ pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\overline{F}_{1:i}(t) = \overline{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}(t). \tag{4}$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}(t). \tag{3}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la signatura minimal de T, donde a_i no depende de $\overline{F}$ pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\overline{F}_{1:i}(t) = \overline{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}(t). \tag{4}$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}(t). \tag{3}$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T, donde a_i no depende de $\overline{F}$ pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\overline{F}_{1:i}(t) = \overline{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}(t). \tag{4}$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

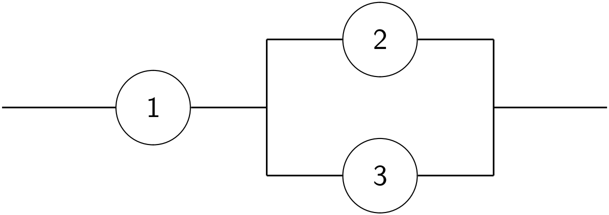
- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{F}_{1:i}(t). \qquad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la signatura minimal de T, donde a_i no depende de $\overline{F}$ pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\overline{F}_{1:i}(t) = \overline{F}^{i}(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

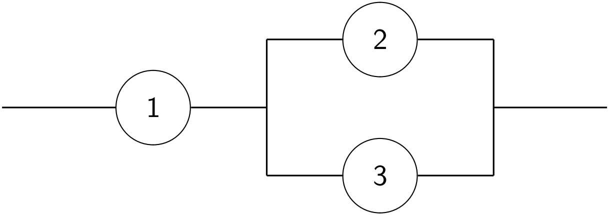
$$\overline{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^{n} (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \overline{F}_{1:j}(t). \qquad (4)$$

Ejemplo



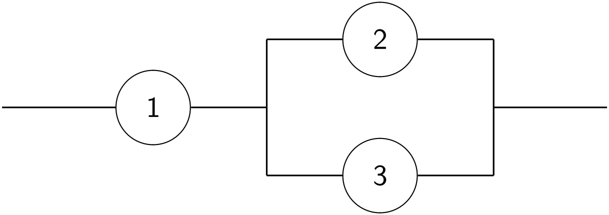
Sistema coherente con tiempo de vida $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

Ejemplo



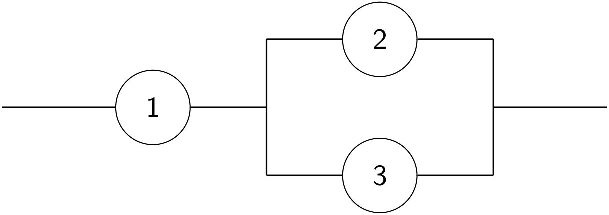
Caminos minimales $P_1 = \{1, 2\}$ and $P_1 = \{1, 3\}$.

Ejemplo



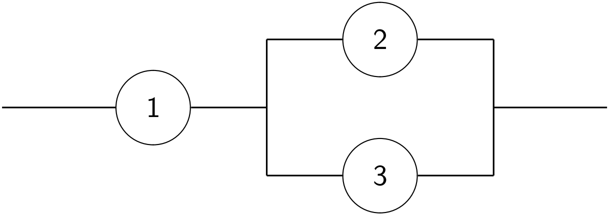
$$\overline{F}_T(t) = \overline{F}_{\{1,2\}}(t) + \overline{F}_{\{1,3\}}(t) - \overline{F}_{\{1,2,3\}}(t).$$

Ejemplo



EXC: $\overline{F}_T(t) = 2\overline{F}_{1:2}(t) - \overline{F}_{1:3}(t)$.
$\mathbf{a} = (0, 2, -1)$.

Ejemplo



IID: $\overline{F}_T(t) = 2\overline{F}^2(t) - \overline{F}^3(t).$

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\overline{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t|X > t) \leq_{ST} (Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t|X > t) \leq E(Y - t|Y > t)$ para todo t.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X|s < X < t) \leq_{ST} (Y|s < Y < t)$ para $s < t$.

Relaciones entre órdenes

$$\begin{array}{ccccc}
E(X_{s,t}) \leq E(Y_{s,t}) & \Rightarrow & E(X_t) \leq E(Y_t) & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y) \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \leq_{DTM} Y & \Rightarrow & X \leq_{MRL} Y & \Rightarrow & X \leq_{M} Y \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
X \leq_{LR} Y & \Rightarrow & X \leq_{HR} Y & \Rightarrow & X \leq_{ST} Y \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
X_{s,t} \leq_{ST} Y_{s,t} & \Rightarrow & X_t \leq_{ST} Y_t & \Rightarrow & \overline{F}_X \leq \overline{F}_Y
\end{array}$$

donde $Z_t = (Z - t|Z > t)$ y $Z_{s,t} = (Z|s < Z < t)$ (ver Navarro, Belzunce and Ruiz 1997, PEIS).

Comparaciones usando signaturas

Teorema (Kochar, Mukerjee and Samaniego, 1999)

Sean $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ las signaturas de dos sistemas coherentes de orden n, ambos basados en componentes IID con distribución continua común F. Sean T_1 y T_2 sus tiempos de vidas.

(a) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{ST} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$.
(b) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{HR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$.
(c) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{LR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mixtura de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mixtura de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mixtura de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Resultado principal-EXC

Teorema

Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *es EXC y* $T = \phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *entonces*

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \overline{F}_{i:n}(t), \tag{5}$$

donde $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *es la signatura de* T *en el caso IID con distribución continua.*

Nótese que $s_i \neq P(T = X_{i:n})$ pero que

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i:n},$ donde $x_{\sigma(1)} < \ldots < x_{\sigma(1)}\}.$

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i=1,2,\dots,n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i=1,2,\dots,n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n}, \ldots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \ldots, \overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\overline{F}_{1:n}, \dots, \overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1}, \dots, \overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como una combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F. Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Representaciones de orden n

Teorema

Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es EXC y $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ $(k < n)$, entonces

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{n} s_i^{(n)} \overline{F}_{i:n}(t) \tag{6}$$

donde el vector $\mathbf{s}^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$ no depende de F. El vector $\mathbf{s}^{(n)}$ se denomina signatura de orden n de T.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\ldots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\ldots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})'=A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n|\neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i=1,2,\dots,k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i=1,2,\dots,n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i=1,2,\dots,n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Representaciones de orden n-Demostración

- Recordemos que $(\overline{F}_{1:n},\dots,\overline{F}_{n:n})' = A_n(\overline{F}_{1:1},\dots,\overline{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1,2,\dots,k$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{1:i}$, $i = 1,2,\dots,n$.
- Luego: $\overline{F}_T$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{F}_{i:n}$, $i = 1,2,\dots,n$.
- Los coeficientes no dependen de F.

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
1	$X_{1:1} = X_1$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
2	$X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$ (2-serie)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$
3	$X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$ (2-paralelo)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
4	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$ (3-serie)	$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$
5	$\min(X_2, \max(X_1, X_3))$	$(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0)$
6	$X_{2:3}$ (2-out-of-3)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
7	$\max(X_2, \min(X_1, X_3))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4})$
8	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$ (3-paralelo)	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
9	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-serie)	$(1, 0, 0, 0)$
10	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
11	$\min(X_{2:3}, X_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
12	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
13	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$X_{2:4}$ (2-out-of-4)	$(0, 1, 0, 0)$
15	$\max(\min(X_1, X_2), \min_{i=1,3,4}(X_i), \min_{i=2,3,4}(X_i))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
16	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
17	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
18	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
19	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
20	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
21	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
22	$\min(\max(X_1, X_2), \max_{i=1,3,4}(X_i), \max_{i=2,3,4}(X_i))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
23	$X_{3:4}$ (3-out-of-4)	$(0, 0, 1, 0)$
24	$\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
25	$\max(X_1, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
26	$\max(X_{2:3}, X_4)$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
27	$\min(\max(X_1, X_2, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
28	$X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (paralelo)	$(0, 0, 0, 1)$

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{7}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{8}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{9}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{10}$$

  no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{7}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{8}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{9}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{10}$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{7}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{8}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{9}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{10}$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \cdots \leq_{ST} X_{n:n} \tag{7}$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \cdots \leq_{HR} X_{n:n}, \tag{8}$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \cdots \leq_{MRL} X_{n:n}, \tag{9}$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \cdots \leq_{LR} X_{n:n}, \tag{10}$$

  no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Resultado principal

Teorema

Sean $\mathbf{s}_1^{(n)}$ *y* $\mathbf{s}_2^{(n)}$ *las signaturas de orden n de dos sistemas coherentes (o mezclados) de órdenes* n_1 *y* n_2*, ambos basados en componentes con tiempos de vida EXC con la misma distribución conjunta. Sean* T_1 *y* T_2 *sus tiempos de vida.*

(a) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{ST} \mathbf{s}_2^{(n)}$*, entonces* $T_1 \leq_{ST} T_2$*.*

(b) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ *y (8) se cumple, entonces* $T_1 \leq_{HR} T_2$*.*

(c) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ *y (9) se cumple, entonces* $T_1 \leq_{MRL} T_2$*.*

(d) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{LR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ *y (10) se cumple, entonces* $T_1 \leq_{LR} T_2$*.*

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n+1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n+1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n+1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n+1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

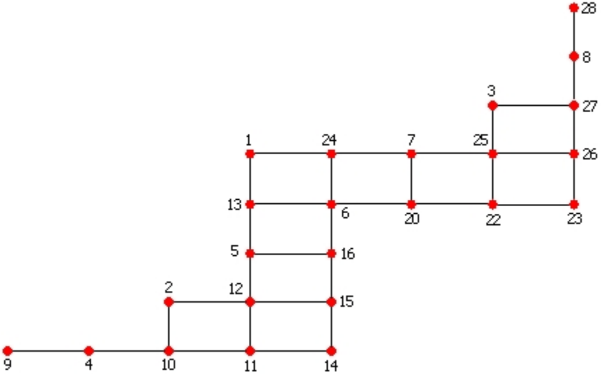


Figura: Comparaciones basadas en el orden ST.

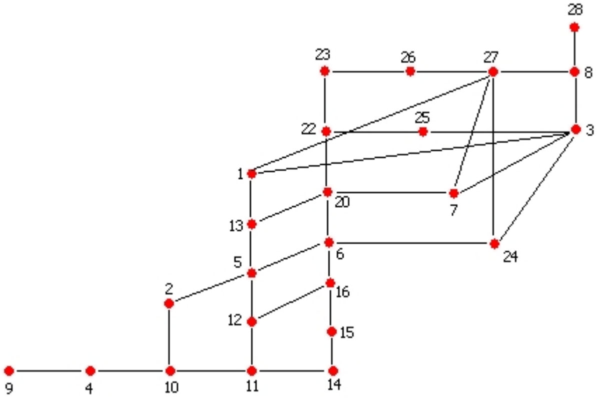


Figura: Comparaciones basadas en el orden HR (resp. MRL) cuando se cumple (8) (resp. (9)).

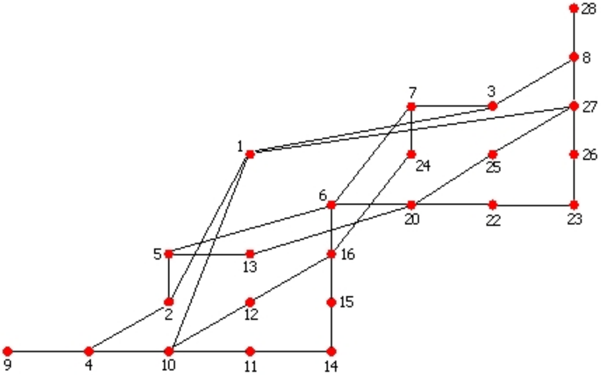


Figura: Comparaciones basadas en el orden LR cuando se cumple (10).

Representaciones bivariantes

Teorema

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *son IID*$\sim F$, $T_1 = \phi_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1})$, $T_2 = \phi_2(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n_2})$ *y* $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1}\}$ *y* $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n_2}\}$ *están contenidos en* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, *entonces* $G(t_1, t_2) = \Pr(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2\}$ *verifica*

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} s_{i,j} F_{i:n}(t_1) F_{j:n}(t_2) \text{ para } t_1 \le t_2 \tag{11}$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} s^*_{i,j} F_{i:n}(t_1) F_{j:n}(t_2) \text{ para } t_1 > t_2, \tag{12}$$

donde $F_{0:n} \equiv 1$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} s_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} s^*_{i,j} = 1$.

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde $C_1, C_2, \dots, C_r$ son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j\in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde $D_1, D_2, \dots, D_s$ son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$\begin{aligned} G(t_1,t_2) &= P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2) \\ &= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \le t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \le t_2\right) \\ &= P\left(\cup_{i=1}^r \{X^{C_i} \le t_1\}, \cup_{j=1}^s \{X^{D_i} \le t_2\}\right) \\ &= P\left(\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^s \left(\{X^{C_i} \le t_1\} \cap \{X^{D_i} \le t_2\}\right)\right). \end{aligned}$$

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde $C_1, C_2, \dots, C_r$ son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j \in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde $D_1, D_2, \dots, D_s$ son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$\begin{aligned} G(t_1,t_2) &= P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2) \\ &= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \le t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \le t_2\right) \\ &= P\left(\cup_{i=1}^r \{X^{C_i} \le t_1\}, \cup_{j=1}^s \{X^{D_i} \le t_2\}\right) \\ &= P\left(\cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^s \left(\{X^{C_i} \le t_1\} \cap \{X^{D_i} \le t_2\}\right)\right). \end{aligned}$$

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde $C_1, C_2, \dots, C_r$ son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j \in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde $D_1, D_2, \dots, D_s$ son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$
\begin{aligned}
G(t_1, t_2) &= P(T_1 \le t_1, T_2 \le t_2) \\
&= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \le t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \le t_2 \right) \\
&= P\left(\cup_{i=1}^{r} \{X^{C_i} \le t_1\}, \cup_{j=1}^{s} \{X^{D_i} \le t_2\} \right) \\
&= P\left(\cup_{i=1}^{r} \cup_{j=1}^{s} \left(\{X^{C_i} \le t_1\} \cap \{X^{D_i} \le t_2\} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\})$, donde C y D son uniones de $C_1, C_2, \dots, C_r$ y $D_1, D_2, \dots, D_s$, respectivamente.
- Si $t_1 \le t_2$, entonces $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\}) = P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\})$.
- Como las componentes son IID$\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \le t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (11).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\})$, donde C y D son uniones de $C_1, C_2, \ldots, C_r$ y $D_1, D_2, \ldots, D_s$, respectivamente.
- Si $t_1 \le t_2$, entonces $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\}) = P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\})$.
- Como las componentes son IID$\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \le t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ se obtiene (11).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\})$, donde C y D son uniones de $C_1, C_2, \dots, C_r$ y $D_1, D_2, \dots, D_s$, respectivamente.
- Si $t_1 \le t_2$, entonces $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\}) = P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\})$.
- Como las componentes son IID$\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1)F^j(t_2), \text{ para } t_1 \le t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (11).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\})$, donde C y D son uniones de $C_1, C_2, \dots, C_r$ y $D_1, D_2, \dots, D_s$, respectivamente.
- Si $t_1 \le t_2$, entonces $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\}) = P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\})$.
- Como las componentes son IID$\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \le t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (11).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\})$, donde C y D son uniones de $C_1, C_2, \dots, C_r$ y $D_1, D_2, \dots, D_s$, respectivamente.
- Si $t_1 \le t_2$, entonces $P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^D \le t_2\}) = P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\})$.
- Como las componentes son IID$\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \le t_1\} \cap \{X^{D-C} \le t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1)F^j(t_2), \text{ para } t_1 \le t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (11).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan signaturas conjuntas y no dependen de F.
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$ es
$$\overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).
- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, ..., X_n)$ vale
$$\overline{F}_{1:n}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t, \ldots, t) = K(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)).$$
- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale
$$\overline{F}_P(t) = \overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.
- Recordemos que:
$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{r} \overline{F}_{P_i}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$ es
$$\overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).
- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$ vale
$$\overline{F}_{1:n}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t, \ldots, t) = K(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)).$$
- La fiabilidad de $X_P = \text{mín}_{i \in P} X_i$ vale
$$\overline{F}_P(t) = \overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.
- Recordemos que:
$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$ es
$$\overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).
- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$ vale
$$\overline{F}_{1:n}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t, \ldots, t) = K(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)).$$
- La fiabilidad de $X_P = \text{mín}_{i \in P} X_i$ vale
$$\overline{F}_P(t) = \overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.
- Recordemos que:
$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{r} \overline{F}_{P_i}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$ es
$$\overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).
- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$ vale
$$\overline{F}_{1:n}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t, \ldots, t) = K(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)).$$
- La fiabilidad de $X_P = \text{mín}_{i \in P} X_i$ vale
$$\overline{F}_P(t) = \overline{\mathbf{F}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \ldots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.
- Recordemos que:
$$\overline{F}_T(t) = \sum_{i=1}^{r} \overline{F}_{P_i}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de $(X_1, \dots, X_n)$ es
$$\overline{\mathbf{F}}(t_1, \dots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \dots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).
- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \text{mín}(X_1, ..., X_n)$ vale
$$\overline{F}_{1:n}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t, \dots, t) = K(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t)).$$
- La fiabilidad de $X_P = \text{mín}_{i \in P} X_i$ vale
$$\overline{F}_P(t) = \overline{\mathbf{F}}(t_1, \dots, t_n) = K(\overline{F}_1(t_1), \dots, \overline{F}_n(t_n)),$$
donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.
- Recordemos que:
$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:
$$\overline{F}_T(t) = W(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t)),$$
donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.
- W es creciente con $W(0, ..., 0) = 0$ y $W(1, ..., 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\overline{F}_1(t) = \cdots = \overline{F}_n(t) = \overline{F}(t)$, entonces
$$\overline{F}_T(t) = w(\overline{F}(t)),$$
donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, $\overline{F}_T$ es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\overline{F}(t)$.
- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:
$$\overline{F}_T(t) = W(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t)),$$
donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.
- W es creciente con $W(0, ..., 0) = 0$ y $W(1, ..., 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\overline{F}_1(t) = \cdots = \overline{F}_n(t) = \overline{F}(t)$, entonces
$$\overline{F}_T(t) = w(\overline{F}(t)),$$
donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, $\overline{F}_T$ es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\overline{F}(t)$.
- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:
$$\overline{F}_T(t) = W(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t)),$$
donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.
- W es creciente con $W(0, ..., 0) = 0$ y $W(1, ..., 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\overline{F}_1(t) = \cdots = \overline{F}_n(t) = \overline{F}(t)$, entonces
$$\overline{F}_T(t) = w(\overline{F}(t)),$$
donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, $\overline{F}_T$ es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\overline{F}(t)$.
- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:
$$\overline{F}_T(t) = W(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)),$$
donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.
- W es creciente con $W(0, ..., 0) = 0$ y $W(1, ..., 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\overline{F}_1(t) = \cdots = \overline{F}_n(t) = \overline{F}(t)$, entonces
$$\overline{F}_T(t) = w(\overline{F}(t)),$$
donde $w(x) = W(x, \ldots, x)$, es decir, $\overline{F}_T$ es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\overline{F}(t)$.
- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:
$$\overline{F}_T(t) = W(\overline{F}_1(t), \dots, \overline{F}_n(t)),$$
donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.
- W es creciente con $W(0, ..., 0) = 0$ y $W(1, ..., 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\overline{F}_1(t) = \cdots = \overline{F}_n(t) = \overline{F}(t)$, entonces
$$\overline{F}_T(t) = w(\overline{F}(t)),$$
donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, $\overline{F}_T$ es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\overline{F}(t)$.
- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A), donde $V = \{1, \ldots, m\}$ y $(i,j) \in A \Leftrightarrow \overline{G}_i \leq_* \overline{G}_j$.
- Entonces:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{G}_i,$$

donde $(c_1, \ldots, c_m)$ denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A), donde $V = \{1, \ldots, m\}$ y $(i,j) \in A \Leftrightarrow \overline{G}_i \leq_* \overline{G}_j$.
- Entonces:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{G}_i,$$

donde $(c_1, \ldots, c_m)$ denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{r} \overline{F}_{P_j}(t) - \sum_{i<j} \overline{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \ldots \pm \overline{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A), donde $V = \{1, \ldots, m\}$ y $(i,j) \in A \Leftrightarrow \overline{G}_i \leq_* \overline{G}_j$.
- Entonces:

$$\overline{F}_T(t) = \sum_{j=1}^{m} c_i \overline{G}_i,$$

donde $(c_1, \ldots, c_m)$ denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- Resultados de ordenación para el orden ST pueden verse en Rubio (2011, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia).
- Por ejemplo, si $n = 3$, los sistemas en serie son:

$$\begin{aligned}
\overline{G}_1(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,2,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,t,t),\\
\overline{G}_2(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{2,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,t,t),\\
\overline{G}_3(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,0,t)\\
\overline{G}_4(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,2\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,t,0)\\
\overline{G}_5(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,0,t)\\
\overline{G}_6(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{2\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,t,0)\\
\overline{G}_7(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,0,0).
\end{aligned}$$

Representaciones basadas en grafos

- Resultados de ordenación para el orden ST pueden verse en Rubio (2011, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia).
- Por ejemplo, si $n = 3$, los sistemas en serie son:

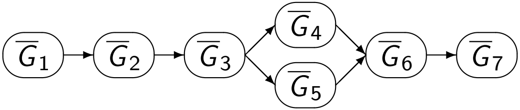
$$
\begin{aligned}
\overline{G}_1(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,2,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,t,t),\\
\overline{G}_2(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{2,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,t,t),\\
\overline{G}_3(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,0,t)\\
\overline{G}_4(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1,2\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,t,0)\\
\overline{G}_5(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{3\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,0,t)\\
\overline{G}_6(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{2\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(0,t,0)\\
\overline{G}_7(t) &= \overline{\mathbf{F}}_{\{1\}}(t) = \overline{\mathbf{F}}(t,0,0).
\end{aligned}
$$

Representaciones basadas en grafos

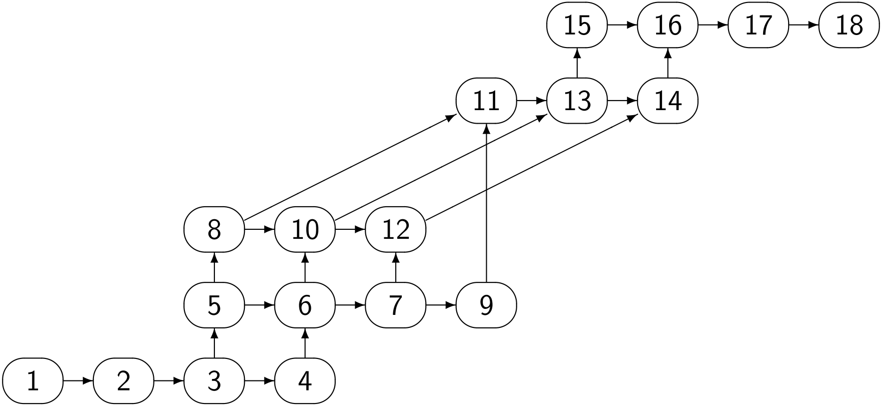
Si los componentes son INID y verifican

$$\overline{F}_1(t) \geq \overline{F}_2(t) \geq \overline{F}_3(t) \tag{13}$$

el grafo es



N	$T_N = \psi(X_1, X_2, X_3)$	Graph signatures
1	$X_{1:3} = \text{mín}(X_1, X_2, X_3)$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
2	$\text{mín}(X_2, X_3)$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
3	$\text{mín}(X_1, X_3)$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
4	$\text{mín}(X_1, X_2)$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
5	$\text{mín}(X_3, \text{máx}(X_1, X_2))$	$(-1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
6	$\text{mín}(X_2, \text{máx}(X_1, X_3))$	$(-1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$
7	$\text{mín}(X_1, \text{máx}(X_2, X_3))$	$(-1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$
8	X_3	$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
9	$X_{2:3} = \text{máx}(\text{mín}(X_1, X_2), \text{mín}(X_1, X_3), \text{mín}(X_2, X_3)$	$(-2, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$
10	X_2	$(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
11	$\text{máx}(X_3, \text{mín}(X_1, X_2))$	$(-1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$
12	X_1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
13	$\text{máx}(X_2, \text{mín}(X_1, X_3))$	$(-1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
14	$\text{máx}(X_1, \text{mín}(X_2, X_3))$	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$
15	$\text{máx}(X_2, X_3)$	$(0, -1, 0, 0, 1, 1, 0)$
16	$\text{máx}(X_1, X_3)$	$(0, 0, -1, 0, 1, 0, 1)$
17	$\text{máx}(X_1, X_2)$	$(0, 0, 0, -1, 0, 1, 1)$
18	$X_{3:3} = \text{máx}(X_1, X_2, X_3)$	$(1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)$


15
16
17
18
11
13
14
8
10
12
5
6
7
9
1
2
3
4

Referencias principales

- Navarro, J., Samaniego, F., Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, Naval Research Logistics 55, 313-327.
- Navarro, J., Balakrishnan, N. and Samaniego, F.J. (2010). Mixture representations of residual lifetimes of used systems, Journal of Applied Probability 45 (4), 1097–1112.
- Navarro and R. Rubio (2011). A note on Necessary and Sufficient Conditions for Ordering Properties of Coherent Systems with Exchangeable Components, Naval Research Logistics 58, 478–489.
- R. Rubio (2011). Generación y comparación de sistemas coherentes. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

Referencias básicas

- Barlow, R.E., and Proschan, F., (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart y Winston.
- Boland, P. J. and Samaniego, F. J. "The signature of a coherent system and its applications in Reliability," Mathematical Reliability: An Expository Perspective, International Series in Operational Research and Management Science vol. 67, Kluwer, 2004, pp 1–29.
- Kochar, S., Mukerjee, H., and Samaniego, F.F., (1999). The 'signature' of a coherent system and its application to camparison among systems. Naval Research Logistic 46, 507-523
- Samaniego, F., (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Transactions on Reliability R-34, 69-72

Nuestras referencias básicas

- Navarro, J. (2008). Likelihood ratio ordering of order statistics, mixtures and systems, Journal of Statistical Planning and Inference 138 (5), 1242-1257.
- Navarro, J., Belzunce, F. and Ruiz, J.M. (1997). New stochastic orders based on double truncation. Probability in the Engineering and Informational Sciences 11, 395-402.
- Navarro, J. and Hernandez, P.J (2008). Mean residual life functions of finite mixtures and systems, Metrika 67, 277-298.

Referencias básicas

- Navarro, J., Ruiz, J.M. and Sandoval, C.J. (2007). Properties of Coherent Systems with Dependent Components. Communications in Statistics-Theory & Methods 36, 1-17.
- Navarro, J. and Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. Journal of Multivariate Analysis 98, 102-113.
- Navarro, J. and Shaked, M. (2006). Hazard Rate Ordering of Order Statistics and Systems. Journal of Applied Probability 43, 391-408.