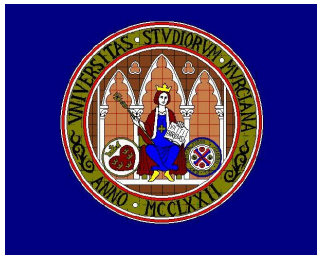


Representaciones de sistemas coherentes usando mixturas

Jorge L. Navarro Camacho
Universidad de Murcia



1 Introducción

- Notación
- Representaciones precedentes
- Ejemplo
- Ordenaciones

2 Representaciones en el caso EXC

- Resultado principal
- Representaciones de sistemas de diferente orden
- Signaturas de orden 4

3 Comparaciones estocásticas de sistemas EXC

- Resultado principal
- Comparaciones de sistemas con 1-4 componentes

4 Otras representaciones

- Representaciones basadas en copulas
- Representaciones basadas en grafos
- Representaciones bivariantes

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Sistemas coherentes y estadísticos ordenados

- X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias no negativas.
- X_1, X_2, \dots, X_n IID.
- X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables (EXC), i.e., para toda permutación σ

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

- $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ fiabilidad (supervivencia).
- $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ estadísticos ordenados.
- $X_{k:n}$ tiempo de vida del sistema k -out-of- n : F .
- $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiempo de vida del sistema coherente.
- $T = X_{i:n}$ con probabilidad $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y \bar{F} continua, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t). \quad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de T , $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \quad (2)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si \bar{F} no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y \bar{F} continua, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t). \quad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de T , $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \quad (2)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si \bar{F} no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y \bar{F} continua, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t). \quad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de T , $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \quad (2)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si \bar{F} no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y \bar{F} continua, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t). \quad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de T , $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \quad (2)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si \bar{F} no es continua.

Representaciones como mixturas

- Samaniego (1985), T con componentes IID y \bar{F} continua, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t). \quad (1)$$

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ signatura de T , $s_i = \Pr(T = X_{i:n})$.
- s_i no depende de F y

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i) \quad (2)$$

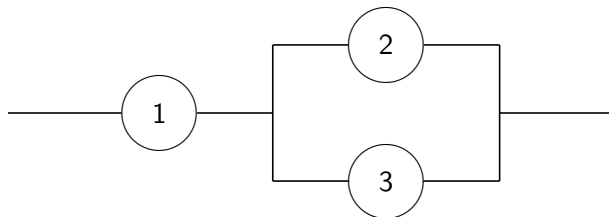
$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ cuando } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$.

- (1) vale para vectores EXC con distribución conjunta absolutamente continua (ver Navarro y Rychlik, JMVA 2007).
- (1) no se cumple si \bar{F} no es continua.

Ejemplo

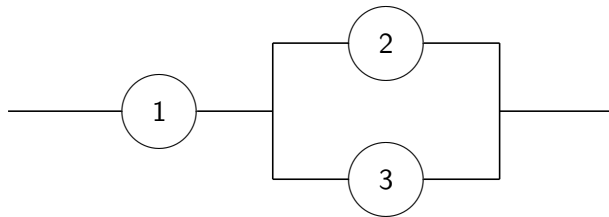


Ejemplo



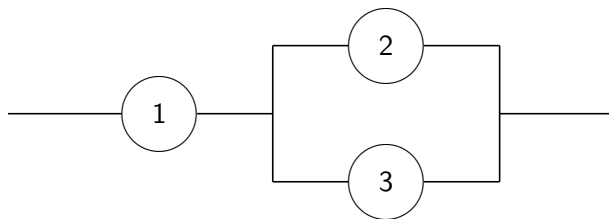
Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
 $3! = 6$ permutaciones.

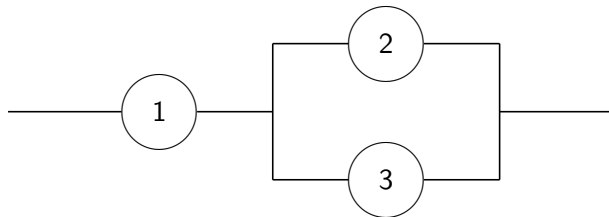
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

$X_1 < X_2 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

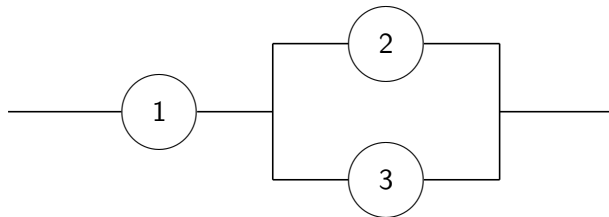
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

$X_1 < X_3 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{1:3}$

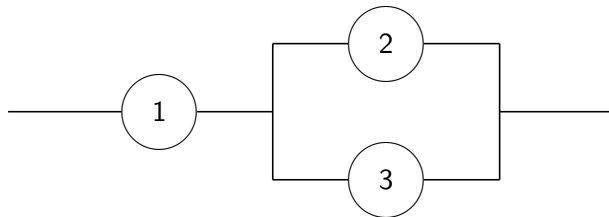
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

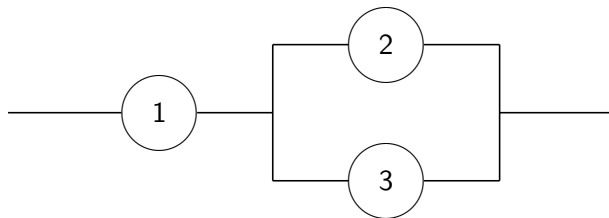
$X_2 < X_1 < X_3 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.
 $X_2 < X_3 < X_1 \Rightarrow T = X_3 = X_{2:3}$

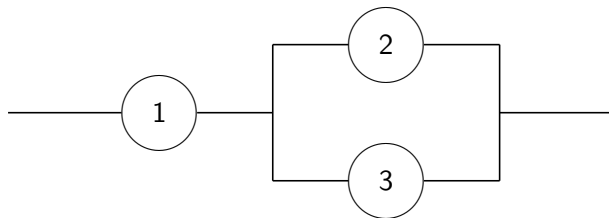
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

$X_3 < X_1 < X_2 \Rightarrow T = X_1 = X_{2:3}$

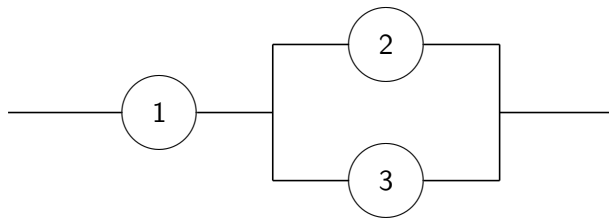
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

$X_3 < X_2 < X_1 \Rightarrow T = X_2 = X_{2:3}$

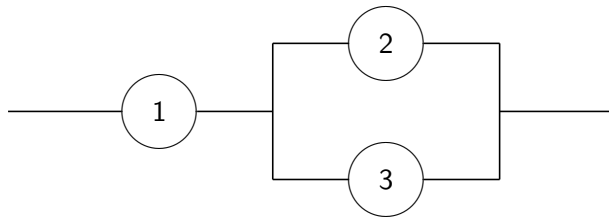
Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

IID \bar{F} cont.: $\mathbf{s} = (2/6, 4/6, 0) = (1/3, 2/3, 0)$.

Ejemplo



Sistema coherente con $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

IID \bar{F} cont.: $\bar{F}_T(t) = \frac{1}{3}\bar{F}_{1:3}(t) + \frac{2}{3}\bar{F}_{2:3}(t)$.

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si P_1, \dots, P_r son los caminos minimales de T , entonces

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\bar{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si P_1, \dots, P_r son los caminos minimales de T , entonces

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\bar{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si P_1, \dots, P_r son los caminos minimales de T , entonces

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\bar{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si P_1, \dots, P_r son los caminos minimales de T , entonces

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\bar{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso general

- $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ camino de T si T funciona cuando todos los componentes en P funcionan.
- P camino minimal de T si es un camino que no contiene a otros caminos.
- Si P_1, \dots, P_r son los caminos minimales de T , entonces

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} X_{P_j}, \text{ donde } X_P = \min_{i \in P} X_i.$$

- Luego: $\bar{F}_T(t) = P(T > t) = P(\cup_{j=1}^r \{X_{P_j} > t\})$
- Usando la fórmula para la probabilidad de una unión, tenemos

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t). \quad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T , donde a_i no depende de \bar{F} pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}_{1:j}(t). \quad (4)$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t). \quad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T , donde a_i no depende de \bar{F} pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}_{1:j}(t). \quad (4)$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t). \quad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T , donde a_i no depende de \bar{F} pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}_{1:j}(t). \quad (4)$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t). \quad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T , donde a_i no depende de \bar{F} pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}_{1:j}(t). \quad (4)$$

Representaciones como mixturas-caso intercambiable

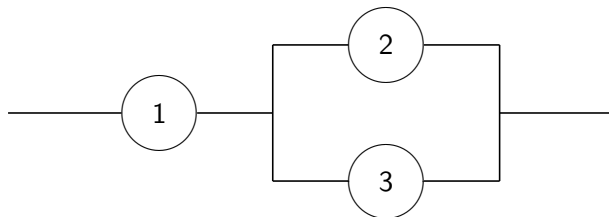
- Si T tiene componentes EXC, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t). \quad (3)$$

- $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es la signatura minimal de T , donde a_i no depende de \bar{F} pero puede ser negativo (Navarro, Ruiz y Sandoval, 2007).
- Representación similar basada en los sistemas en paralelo.
- IID: $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.
- Para los estadísticos ordenados tenemos:

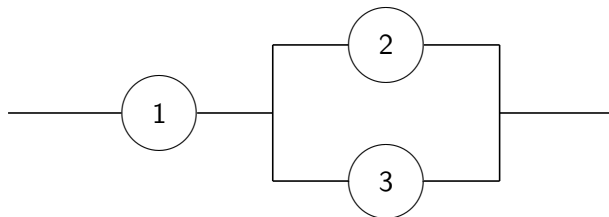
$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=n-i+1}^n (-1)^{j+i-n-1} \binom{j-1}{n-i} \binom{n}{j} \bar{F}_{1:j}(t). \quad (4)$$

Ejemplo



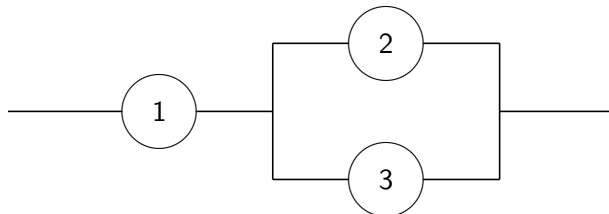
Sistema coherente con tiempo de vida $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$.

Ejemplo



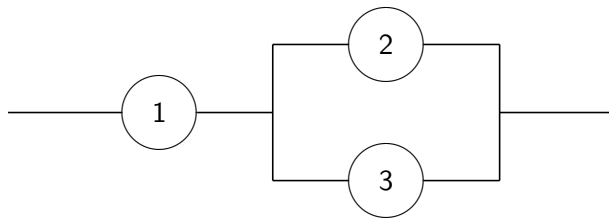
Caminos minimales $P_1 = \{1, 2\}$ and $P_1 = \{1, 3\}$.

Ejemplo



$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{\{1,2\}}(t) + \bar{F}_{\{1,3\}}(t) - \bar{F}_{\{1,2,3\}}(t).$$

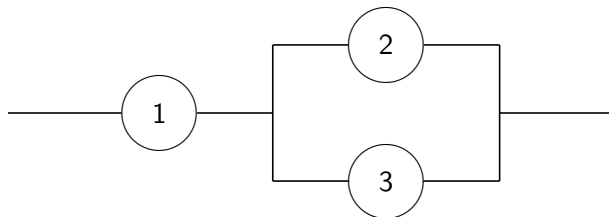
Ejemplo



$$\text{EXC: } \bar{F}_T(t) = 2\bar{F}_{1:2}(t) - \bar{F}_{1:3}(t).$$

$$\mathbf{a} = (0, 2, -1).$$

Ejemplo



$$\text{IID: } \bar{F}_T(t) = 2\bar{F}^2(t) - \bar{F}^3(t).$$

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Ordenes estocásticos

- $X \leq_{ST} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t)$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow h_X(t) \geq h_Y(t)$, razón de fallo $h = f/\bar{F}$.
- $X \leq_{HR} Y \Leftrightarrow (X - t | X > t) \leq_{ST} (Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{MRL} Y \Leftrightarrow E(X - t | X > t) \leq E(Y - t | Y > t)$ para todo t .
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow f_Y(t)/f_X(t)$ es no decreciente.
- $X \leq_{LR} Y \Leftrightarrow (X | s < X < t) \leq_{ST} (Y | s < Y < t)$ para $s < t$.

Relaciones entre órdenes

$$\begin{array}{ccccc}
 E(X_{s,t}) \leq E(Y_{s,t}) & \Rightarrow & E(X_t) \leq E(Y_t) & \Rightarrow & E(X) \leq E(Y) \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 X \leq_{DTM} Y & \Rightarrow & X \leq_{MRL} Y & \Rightarrow & X \leq_M Y \\
 \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 X \leq_{LR} Y & \Rightarrow & X \leq_{HR} Y & \Rightarrow & X \leq_{ST} Y \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 X_{s,t} \leq_{ST} Y_{s,t} & \Rightarrow & X_t \leq_{ST} Y_t & \Rightarrow & \bar{F}_X \leq \bar{F}_Y
 \end{array}$$

donde $Z_t = (Z - t | Z > t)$ y $Z_{s,t} = (Z | s < Z < t)$ (ver Navarro, Belzunce and Ruiz 1997, PEIS).

Comparaciones usando firmas

Teorema (Kocher, Mukerjee and Samaniego, 1999)

Sean \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 las firmas de dos sistemas coherentes de orden n , ambos basados en componentes IID con distribución continua común F . Sean T_1 y T_2 sus tiempos de vidas.

- (a) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{ST} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$.
- (b) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{HR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$.
- (c) Si $\mathbf{s}_1 \leq_{LR} \mathbf{s}_2$, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mezcla de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mezcla de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Sistemas mezclados

- Un **sistema mezclado** (*mixed system*) de orden n es una mezcla de sistemas coherentes de orden n sobre los mismos componentes (Boland and Samaniego, 2004).
- De (1), cualquier vector en el simplex $\{\mathbf{s} \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n s_i = 1\}$ determina un sistema mezclado y viceversa.
- El teorema preservación de órdenes se puede aplicar a los sistemas mezclados.

Resultado principal-EXC

Teorema

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) es EXC y $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t), \quad (5)$$

donde $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ es la signatura de T en el caso IID con distribución continua.

Nótese que $s_i \neq P(T = X_{i:n})$ pero que

$$s_i = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1(\sigma \in A_i)$$

$A_i = \{\sigma : \phi(x_1, \dots, x_n) = x_{i:n}, \text{ donde } x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(i)}\}$.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Resultado principal-EXC-Demostración

- De (4): $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como una combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F . Luego serán los mismos que en el caso IID con distribución continua.

Representaciones de orden n

Teorema

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) es EXC y $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_k)$ ($k < n$), entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n s_i^{(n)} \bar{F}_{i:n}(t) \quad (6)$$

donde el vector $\mathbf{s}^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_n^{(n)})$ no depende de F . El vector $\mathbf{s}^{(n)}$ se denomina *signatura de orden n de T* .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Representaciones de orden n -Demostración

- Recordemos que $(\bar{F}_{1:n}, \dots, \bar{F}_{n:n})' = A_n(\bar{F}_{1:1}, \dots, \bar{F}_{1:n})'$
- A_n es una matriz triangular sin ceros en la diagonal.
- Luego $|A_n| \neq 0$ y A_n^{-1} existe.
- De (3): \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{1:i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Luego: \bar{F}_T se puede escribir como combinación lineal de $\bar{F}_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- Los coeficientes no dependen de F .

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
1	$X_{1:1} = X_1$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
2	$X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$ (2-serie)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0)$
3	$X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$ (2-paralelo)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
4	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$ (3-serie)	$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$
5	$\min(X_2, \max(X_1, X_3))$	$(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0)$
6	$X_{2:3}$ (2-out-of-3)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
7	$\max(X_2, \min(X_1, X_3))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4})$
8	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$ (3-paralelo)	$(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
9	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (4-serie)	$(1, 0, 0, 0)$
10	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
11	$\min(X_{2:3}, X_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
12	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
13	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$X_{2:4}$ (2-out-of-4)	$(0, 1, 0, 0)$
15	$\max(\min(X_1, X_2), \min_{i=1,3,4}(X_i), \min_{i=2,3,4}(X_i))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
16	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
17	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
18	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Cuadro: Signaturas de orden 4 de los sistemas con 1-4 componentes

	$T = \Phi(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$\mathbf{s}^{(4)}$
19	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
20	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
21	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
22	$\min(\max(X_1, X_2), \max_{i=1,3,4}(X_i), \max_{i=2,3,4}(X_i))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
23	$X_{3:4}$ (3-out-of-4)	$(0, 0, 1, 0)$
24	$\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
25	$\max(X_1, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
26	$\max(X_{2:3}, X_4)$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
27	$\min(\max(X_1, X_2, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
28	$X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$ (paralelo)	$(0, 0, 0, 1)$

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \quad (7)$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \quad (8)$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \quad (9)$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \quad (10)$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \quad (7)$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \quad (8)$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \quad (9)$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \quad (10)$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \quad (7)$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \quad (8)$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \quad (9)$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \quad (10)$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Comparaciones de sistemas

- En el caso general se cumple:

$$X_{1:n} \leq_{ST} \dots \leq_{ST} X_{n:n} \quad (7)$$

- Sin embargo las relaciones similares para el orden HR:

$$X_{1:n} \leq_{HR} \dots \leq_{HR} X_{n:n}, \quad (8)$$

- el orden MRL:

$$X_{1:n} \leq_{MRL} \dots \leq_{MRL} X_{n:n}, \quad (9)$$

- y el orden LR:

$$X_{1:n} \leq_{LR} \dots \leq_{LR} X_{n:n}, \quad (10)$$

no son necesariamente ciertas incluso en el caso EXC; ver Navarro and Shaked (JAP 2006), Navarro and Hernandez (Metrika 2008) and Navarro (JSPI 2008).

Resultado principal

Teorema

Sean $\mathbf{s}_1^{(n)}$ y $\mathbf{s}_2^{(n)}$ las firmas de orden n de dos sistemas coherentes (o mezclados) de órdenes n_1 y n_2 , ambos basados en componentes con tiempos de vida EXC con la misma distribución conjunta. Sean T_1 y T_2 sus tiempos de vida.

- (a) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{ST} \mathbf{s}_2^{(n)}$, entonces $T_1 \leq_{ST} T_2$.
- (b) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ y (8) se cumple, entonces $T_1 \leq_{HR} T_2$.
- (c) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{HR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ y (9) se cumple, entonces $T_1 \leq_{MRL} T_2$.
- (d) Si $\mathbf{s}_1^{(n)} \leq_{LR} \mathbf{s}_2^{(n)}$ y (10) se cumple, entonces $T_1 \leq_{LR} T_2$.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n + 1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n + 1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n + 1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

Observaciones

- La principal aplicación de la signatura de orden n es la de comparar sistemas de distinto orden.
- Existen sistemas con signaturas de orden n no ordenadas LR pero signaturas de $n + 1$ ordenadas LR (ver Navarro y Rubio, Naval Research Logistics 58, 2011).
- Por lo tanto, también se pueden usar para comparar sistemas con signaturas de orden n no ordenados.
- Las condiciones suficientes anteriores para los ordenes ST, HR y LR son necesarias para que los sistemas estén ordenados para toda distribución multivariante de orden n intercambiable con estadísticos ordenados ST, HR y LR ordenados.

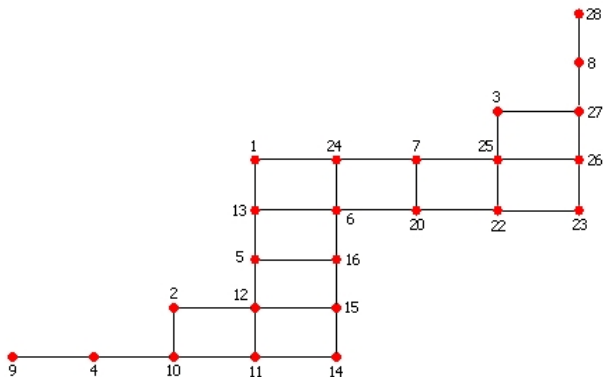


Figura: Comparaciones basadas en el orden ST.

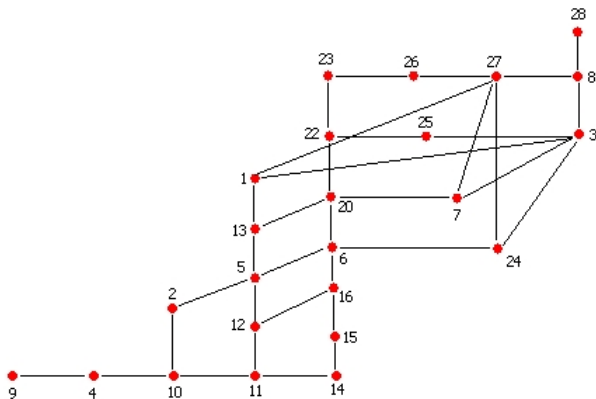


Figura: Comparaciones basadas en el orden HR (resp. MRL) cuando se cumple (8) (resp. (9)).

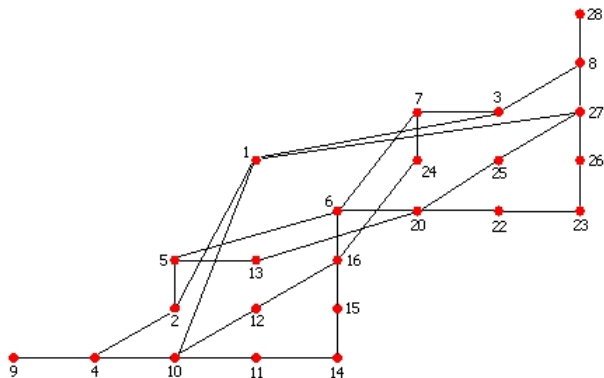


Figura: Comparaciones basadas en el orden LR cuando se cumple (10).

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_n) es

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).

- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ vale

$$\bar{F}_{1:n}(t) = \bar{F}(t, \dots, t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.

- Recordemos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_n) es

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).

- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ vale

$$\bar{F}_{1:n}(t) = \bar{F}(t, \dots, t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.

- Recordemos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_n) es

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).

- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ vale

$$\bar{F}_{1:n}(t) = \bar{F}(t, \dots, t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.

- Recordemos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_n) es

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).

- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ vale

$$\bar{F}_{1:n}(t) = \bar{F}(t, \dots, t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.

- Recordemos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- La función de fiabilidad conjunta de (X_1, \dots, X_n) es

$$\bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde K es la copula de supervivencia (Teorema de Sklar).

- K es una función de distribución con marginales uniformes.
- La fiabilidad de $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ vale

$$\bar{F}_{1:n}(t) = \bar{F}(t, \dots, t) = K(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

- La fiabilidad de $X_P = \min_{i \in P} X_i$ vale

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}(t_1, \dots, t_n) = K(\bar{F}_1(t_1), \dots, \bar{F}_n(t_n)),$$

donde $t_i = t$ si $i \in P$ y $t_i = 0$ si no.

- Recordemos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.

- W es creciente con $W(0, \dots, 0) = 0$ y $W(1, \dots, 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\bar{F}_1(t) = \dots = \bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = w(\bar{F}(t)),$$

donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, \bar{F}_T es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\bar{F}(t)$.

- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.

- W es creciente con $W(0, \dots, 0) = 0$ y $W(1, \dots, 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\bar{F}_1(t) = \dots = \bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = w(\bar{F}(t)),$$

donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, \bar{F}_T es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\bar{F}(t)$.

- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.

- W es creciente con $W(0, \dots, 0) = 0$ y $W(1, \dots, 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\bar{F}_1(t) = \dots = \bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = w(\bar{F}(t)),$$

donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, \bar{F}_T es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\bar{F}(t)$.

- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.

- W es creciente con $W(0, \dots, 0) = 0$ y $W(1, \dots, 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\bar{F}_1(t) = \dots = \bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = w(\bar{F}(t)),$$

donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, \bar{F}_T es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\bar{F}(t)$.

- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Representaciones basadas en copulas

- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

donde W sólo depende de K y los caminos minimales y se denomina función **dependencia-estructura**.

- W es creciente con $W(0, \dots, 0) = 0$ y $W(1, \dots, 1) = 1$ pero, en general, no es una cópula. Sí lo es para los sistema en serie.
- Si $\bar{F}_1(t) = \dots = \bar{F}_n(t) = \bar{F}(t)$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = w(\bar{F}(t)),$$

donde $w(x) = W(x, \dots, x)$, es decir, \bar{F}_T es la distribución distorsionada (*distorted*) asociada a w y $\bar{F}(t)$.

- Si los componentes son independientes, entonces W y w son polinomios (*dominación*) estrictamente crecientes en $(0, 1)$.
- Ver: Navarro and Rychlik (2010, European Journal of Operational Research 207, 309-317).

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_2(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_1(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_2(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_1(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_2(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_1(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$

Paradoja de Parrondo

- Juan Manuel Rodríguez Parrondo es un físico de la UCM.
- La Paradoja de Parrondo muestra como en algunos juegos una estrategia aleatoria que incluya estrategias perdedoras puede dar una estrategia ganadora.
- La misma situación se puede dar en Fiabilidad.
- Supongamos que disponemos de unidades con fiabilidades $\bar{F}_1 < \bar{F}_2$ (en igual número) para montar un sistema con dos componentes independientes en serie.
- Sea $T = \min(X_1, X_2)$ el sistema que se obtiene con $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$, $i = 1, 2$.
- Sea S el sistema que se obtiene eligiendo a las componentes al azar.
- Entonces $T \leq_{ST} S$ ya que

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) \leq (0,5\bar{F}_1(t) + 0,5\bar{F}_2(t))^2 = \bar{F}_S(t).$$



Figura: Juan Parrondo en 2003 (Wikipedia)

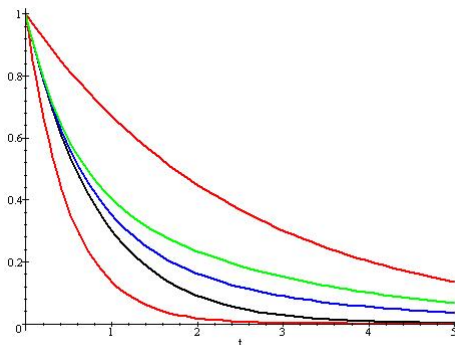


Figura: Fiabilidades de sistemas en serie obtenidos con componentes independientes exponenciales de medias 1 y 5 con una componente buena y otra mala (negro), dos buenas o dos malas (rojo), y dos al azar (azul).
¿Cómo se obtiene la verde?

Paradoja de Parrondo en otros sistemas

- En sistemas en paralelo (I) ocurre lo contrario.
- Usando que $\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$, esta propiedad dependerá de W .
- Una función g real es débilmente Schur-concava (convexa) si

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq g(\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}) \quad (\geq)$$

para todo (u_1, u_2, \dots, u_n) , donde $\bar{u} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$.

Theorem (Navarro and Spizzichino (ASMBI 2010))

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) tienen (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) la misma copula, W es débilmente Schur-concava (convexa), $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ y $\bar{G}(t) = (\bar{F}_1(t) + \dots + \bar{F}_n(t))/n = \Pr(Y_i > t)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces

$$T = \phi(X_1, \dots, X_n) \leq_{ST} S = \phi(Y_1, \dots, Y_n) \quad (\geq_{ST}).$$

Paradoja de Parrondo en otros sistemas

- En sistemas en paralelo (I) ocurre lo contrario.
- Usando que $\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$, esta propiedad dependerá de W .
- Una función g real es débilmente Schur-concava (convexa) si

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq g(\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}) \quad (\geq)$$

para todo (u_1, u_2, \dots, u_n) , donde $\bar{u} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$.

Theorem (Navarro and Spizzichino (ASMBI 2010))

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) tienen (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) la misma copula, W es débilmente Schur-concava (convexa), $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ y $\bar{G}(t) = (\bar{F}_1(t) + \dots + \bar{F}_n(t))/n = \Pr(Y_i > t)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces

$$T = \phi(X_1, \dots, X_n) \leq_{ST} S = \phi(Y_1, \dots, Y_n) \quad (\geq_{ST}).$$

Paradoja de Parrondo en otros sistemas

- En sistemas en paralelo (I) ocurre lo contrario.
- Usando que $\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$, esta propiedad dependerá de W .
- Una función g real es débilmente Schur-concava (convexa) si

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq g(\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}) \quad (\geq)$$

para todo (u_1, u_2, \dots, u_n) , donde $\bar{u} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$.

Theorem (Navarro and Spizzichino (ASMBI 2010))

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) tienen (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) la misma copula, W es débilmente Schur-concava (convexa), $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ y $\bar{G}(t) = (\bar{F}_1(t) + \dots + \bar{F}_n(t))/n = \Pr(Y_i > t)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces

$$T = \phi(X_1, \dots, X_n) \leq_{ST} S = \phi(Y_1, \dots, Y_n) \quad (\geq_{ST}).$$

Paradoja de Parrondo en otros sistemas

- En sistemas en paralelo (I) ocurre lo contrario.
- Usando que $\bar{F}_T(t) = W(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$, esta propiedad dependerá de W .
- Una función g real es débilmente Schur-concava (convexa) si

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq g(\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}) \quad (\geq)$$

para todo (u_1, u_2, \dots, u_n) , donde $\bar{u} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$.

Theorem (Navarro and Spizzichino (ASMBI 2010))

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) tienen (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) la misma copula, W es débilmente Schur-concava (convexa), $\bar{F}_i(t) = \Pr(X_i > t)$ y $\bar{G}(t) = (\bar{F}_1(t) + \dots + \bar{F}_n(t))/n = \Pr(Y_i > t)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces

$$T = \phi(X_1, \dots, X_n) \leq_{ST} S = \phi(Y_1, \dots, Y_n) \quad (\geq_{ST}).$$

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A) , donde $V = \{1, \dots, m\}$ y $(i, j) \in A \Leftrightarrow \bar{G}_i \leq_* \bar{G}_j$.
- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^m c_j \bar{G}_j,$$

donde (c_1, \dots, c_m) denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A) , donde $V = \{1, \dots, m\}$ y $(i, j) \in A \Leftrightarrow \bar{G}_i \leq_* \bar{G}_j$.
- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^m c_j \bar{G}_j,$$

donde (c_1, \dots, c_m) denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- De nuevo usamos que:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^r \bar{F}_{P_j}(t) - \sum_{i < j} \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots \pm \bar{F}_{1:n}(t).$$

- Si $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_m$ son las fiabilidades de todos los sistemas en serie con n o menos componentes, sus relaciones en el orden (*) se pueden representar por el grafo (V, A) , donde $V = \{1, \dots, m\}$ y $(i, j) \in A \Leftrightarrow \bar{G}_i \leq_* \bar{G}_j$.
- Entonces:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=1}^m c_j \bar{G}_j,$$

donde (c_1, \dots, c_m) denominada **signatura gráfica** del sistema. La signatura no depende del grafo.

Representaciones basadas en grafos

- Resultados de ordenación para el orden ST pueden verse en Rubio (2011, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia).
- Por ejemplo, si $n = 3$, los sistemas en serie son:

$$\bar{G}_1(t) = \bar{F}_{\{1,2,3\}}(t) = \bar{F}(t, t, t),$$

$$\bar{G}_2(t) = \bar{F}_{\{2,3\}}(t) = \bar{F}(0, t, t),$$

$$\bar{G}_3(t) = \bar{F}_{\{1,3\}}(t) = \bar{F}(t, 0, t)$$

$$\bar{G}_4(t) = \bar{F}_{\{1,2\}}(t) = \bar{F}(t, t, 0)$$

$$\bar{G}_5(t) = \bar{F}_{\{3\}}(t) = \bar{F}(0, 0, t)$$

$$\bar{G}_6(t) = \bar{F}_{\{2\}}(t) = \bar{F}(0, t, 0)$$

$$\bar{G}_7(t) = \bar{F}_{\{1\}}(t) = \bar{F}(t, 0, 0).$$

Representaciones basadas en grafos

- Resultados de ordenación para el orden ST pueden verse en Rubio (2011, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia).
- Por ejemplo, si $n = 3$, los sistemas en serie son:

$$\bar{G}_1(t) = \bar{F}_{\{1,2,3\}}(t) = \bar{F}(t, t, t),$$

$$\bar{G}_2(t) = \bar{F}_{\{2,3\}}(t) = \bar{F}(0, t, t),$$

$$\bar{G}_3(t) = \bar{F}_{\{1,3\}}(t) = \bar{F}(t, 0, t)$$

$$\bar{G}_4(t) = \bar{F}_{\{1,2\}}(t) = \bar{F}(t, t, 0)$$

$$\bar{G}_5(t) = \bar{F}_{\{3\}}(t) = \bar{F}(0, 0, t)$$

$$\bar{G}_6(t) = \bar{F}_{\{2\}}(t) = \bar{F}(0, t, 0)$$

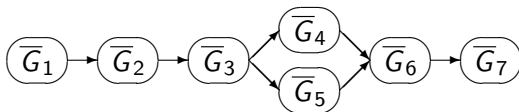
$$\bar{G}_7(t) = \bar{F}_{\{1\}}(t) = \bar{F}(t, 0, 0).$$

Representaciones basadas en grafos

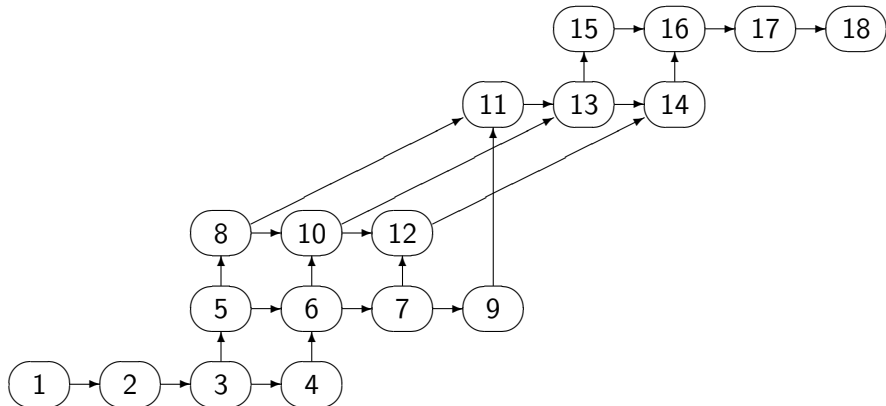
Si los componentes son INID y verifican

$$\bar{F}_1(t) \geq \bar{F}_2(t) \geq \bar{F}_3(t) \quad (11)$$

el grafo es



N	$T_N = \psi(X_1, X_2, X_3)$	Graph signatures
1	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$	(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
2	$\min(X_2, X_3)$	(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
3	$\min(X_1, X_3)$	(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
4	$\min(X_1, X_2)$	(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
5	$\min(X_3, \max(X_1, X_2))$	(-1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
6	$\min(X_2, \max(X_1, X_3))$	(-1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)
7	$\min(X_1, \max(X_2, X_3))$	(-1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)
8	X_3	(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
9	$X_{2:3} = \max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3))$	(-2, 1, 1, 1, 0, 0, 0)
10	X_2	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
11	$\max(X_3, \min(X_1, X_2))$	(-1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)
12	X_1	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)
13	$\max(X_2, \min(X_1, X_3))$	(-1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)
14	$\max(X_1, \min(X_2, X_3))$	(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)
15	$\max(X_2, X_3)$	(0, -1, 0, 0, 1, 1, 0)
16	$\max(X_1, X_3)$	(0, 0, -1, 0, 1, 0, 1)
17	$\max(X_1, X_2)$	(0, 0, 0, -1, 0, 1, 1)
18	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$	(1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)



Representaciones bivalentes

Teorema

Si X_1, X_2, \dots, X_n son $\text{IID} \sim F$, $T_1 = \phi_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1})$,
 $T_2 = \phi_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_2})$ y $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1}\}$ y $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_2}\}$
están contenidos en $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, entonces
 $G(t_1, t_2) = \Pr(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2)$ verifica

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n s_{i,j} F_{i:n}(t_1) F_{j:n}(t_2) \text{ para } t_1 \leq t_2 \quad (12)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j}^* F_{i:n}(t_1) F_{j:n}(t_2) \text{ para } t_1 > t_2, \quad (13)$$

donde $F_{0:n} \equiv 1$ y $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n s_{i,j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j}^* = 1$.

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde C_1, C_2, \dots, C_r son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j \in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde D_1, D_2, \dots, D_s son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\ &= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \leq t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \leq t_2\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \{X^{C_i} \leq t_1\}, \bigcup_{j=1}^s \{X^{D_j} \leq t_2\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s \left(\{X^{C_i} \leq t_1\} \cap \{X^{D_j} \leq t_2\}\right)\right). \end{aligned}$$

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde C_1, C_2, \dots, C_r son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j \in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde D_1, D_2, \dots, D_s son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\ &= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \leq t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \leq t_2\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \{X^{C_i} \leq t_1\}, \bigcup_{j=1}^s \{X^{D_j} \leq t_2\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s \left(\{X^{C_i} \leq t_1\} \cap \{X^{D_j} \leq t_2\}\right)\right). \end{aligned}$$

Resultado principal Biv-Demostración

- $T_1 = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$, donde C_1, C_2, \dots, C_r son sus cortes minimales y $X^C = \max_{j \in C} X_j$.
- $T_2 = \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j}$, donde D_1, D_2, \dots, D_s son sus cortes minimales.
- Entonces G verifica

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) \\ &= P\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \leq t_1, \min_{j=1,2,\dots,s} X^{D_j} \leq t_2\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \{X^{C_i} \leq t_1\}, \bigcup_{j=1}^s \{X^{D_j} \leq t_2\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s \left(\{X^{C_i} \leq t_1\} \cap \{X^{D_j} \leq t_2\}\right)\right). \end{aligned}$$

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\})$, donde C y D son uniones de C_1, C_2, \dots, C_r y D_1, D_2, \dots, D_s , respectivamente.
- Si $t_1 \leq t_2$, entonces $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\}) = P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\})$.
- Como las componentes son IID $\sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \leq t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (12).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\})$, donde C y D son uniones de C_1, C_2, \dots, C_r y D_1, D_2, \dots, D_s , respectivamente.
- Si $t_1 \leq t_2$, entonces $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\}) = P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\})$.
- Como las componentes son $\text{IID} \sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \leq t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (12).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\})$, donde C y D son uniones de C_1, C_2, \dots, C_r y D_1, D_2, \dots, D_s , respectivamente.
- Si $t_1 \leq t_2$, entonces $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\}) = P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\})$.
- Como las componentes son $\text{IID} \sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \leq t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (12).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\})$, donde C y D son uniones de C_1, C_2, \dots, C_r y D_1, D_2, \dots, D_s , respectivamente.
- Si $t_1 \leq t_2$, entonces $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\}) = P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\})$.
- Como las componentes son $\text{IID} \sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \leq t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (12).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Resultado principal Biv-Demostración

- Entonces $G(t_1, t_2)$ es una combinación lineal de $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\})$, donde C y D son uniones de C_1, C_2, \dots, C_r y D_1, D_2, \dots, D_s , respectivamente.
- Si $t_1 \leq t_2$, entonces $P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^D \leq t_2\}) = P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\})$.
- Como las componentes son $\text{IID} \sim F$, tenemos

$$P(\{X^C \leq t_1\} \cap \{X^{D-C} \leq t_2\}) = F^{|C|}(t_1)F^{|D-C|}(t_2)$$

$$G(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{i,j} F^i(t_1) F^j(t_2), \text{ para } t_1 \leq t_2.$$

- Usando que los sistemas en paralelo son mixturas de $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ se obtiene (12).
- El resultado para $t_1 > t_2$ se obtiene de forma análoga.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan **signaturas conjuntas** y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan **signaturas conjuntas** y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de signaturas conjuntas.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan *signaturas conjuntas* y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de *signaturas conjuntas*.

Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan firmas conjuntas y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de firmas conjuntas.





Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan *signaturas conjuntas* y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de *signaturas conjuntas*.





Consecuencias

- Las matrices con los coeficientes se denominan firmas conjuntas y no dependen de F .
- G puede tener una parte singular.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad (pero los coeficientes son distintos).
- Obtenemos un resultado similar para la función de distribución usando las distribuciones de los sistemas en paralelo.
- Obtenemos un resultado similar para la función de fiabilidad usando las distribuciones de los sistemas en serie.
- Obtenemos resultados de ordenación bivariantes basados en órdenes entre las matrices de firmas conjuntas.

Referencias principales

-  Navarro, J., Samaniego, F., Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, *Naval Research Logistics* 55, 313-327.
-  Navarro, J., Balakrishnan, N. and Samaniego, F.J. (2010). Mixture representations of residual lifetimes of used systems, *Journal of Applied Probability* 45 (4), 1097-1112.
-  Navarro and R. Rubio (2011). A note on Necessary and Sufficient Conditions for Ordering Properties of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics* 58, 478-489.
-  R. Rubio (2011). Generación y comparación de sistemas coherentes. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.




Referencias básicas

-  Barlow, R.E., and Proschan, F., (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart y Winston.
-  Boland, P. J. and Samaniego, F. J. “The signature of a coherent system and its applications in Reliability,” *Mathematical Reliability: An Expository Perspective*, International Series in Operational Research and Management Science vol. 67, Kluwer, 2004, pp 1–29.
-  Kochar, S., Mukerjee, H., and Samaniego, F.F., (1999). The ‘signature’ of a coherent system and its application to comparison among systems. *Naval Research Logistic* 46, 507-523
-  Samaniego, F., (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability* R-34, 69-72

Nuestras referencias básicas

-  Navarro, J. (2008). Likelihood ratio ordering of order statistics, mixtures and systems, *Journal of Statistical Planning and Inference* 138 (5), 1242-1257.
-  Navarro, J., Belzunce, F. and Ruiz, J.M. (1997). New stochastic orders based on double truncation. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 11, 395-402.
-  Navarro, J. and Hernandez, P.J (2008). Mean residual life functions of finite mixtures and systems, *Metrika* 67, 277-298.
-  Navarro, J. and Spizzichino, F. (2010). Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 26 (6), 775-791.

Nuestras referencias básicas

-  Navarro, J., Ruiz, J.M. and Sandoval, C.J. (2007). Properties of Coherent Systems with Dependent Components. Communications in Statistics-Theory & Methods 36, 1-17.
-  Navarro, J. and Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components. Journal of Multivariate Analysis 98, 102-113.
-  Navarro, J. and Shaked, M. (2006). Hazard Rate Ordering of Order Statistics and Systems. Journal of Applied Probability 43, 391-408.