UNIVERSIDAD DE MURCIA

Posgrado de Matemáticas

Máster Universitario en Matemática Avanzada y Profesional

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Operadores en espacios de Banach de funciones continuas

Gonzalo Martínez Cervantes

Curso 2013-14

Agradecimientos

Quiero dedicar estas líneas a todos aquellos que han participado en mi formación académica y personal, entre los que me gustaría destacar a las siguientes personas:

> *a Antonio Escudero Vergara, porque él es el culpable de que yo haya pisado una facultad de matemáticas;*
> *a todos los profesores a los que he tenido la suerte de conocer durante mis años de licenciatura, entre los que siento un especial afecto por Salvador Sánchez Pedreño, María Ángeles Hernández Cifre, Francisco Balibrea Gallego y Pedro José Herrero Piñeyro;*
> *a todos mis amigos y compañeros de pupitre y, en particular, a José Ginés Espín Buendía, a quien le debo el haber empezado con buen pie en este mundillo; a Juan Ramón Balaguer Tornel y a Luis Carlos García Lirola, con quienes he compartido muchos momentos y muchas discusiones de matemáticas; y a Ricardo García Zambudio, por todos esos ratos libres bien aprovechados en el campus;*
> *al grupo de Análisis Funcional y, en especial, a Bernardo Cascales Salinas, por permitirme descubrir las matemáticas fuera de la facultad;*
> *finalmente, a Antonio Avilés López y a José Rodríguez Ruiz, mis maestros y mentores estos últimos años, a quienes agradezco de corazón todo el trabajo y paciencia que han tenido conmigo para que las siguientes páginas tengan algo de coherencia.*

No puedo dejar pasar la oportunidad para agradecer a mi familia, y a mis padres en especial, todo el cariño y apoyo que me han dado siempre. Nunca podrán imaginarse lo agradecido que estoy.
Por supuesto, no me olvido de mis amigos Pepe, Juanan, Tomás, Priscila, Esmeralda, Javi, Juampe, Pedro, Ruben y Nayim, a quienes les agradezco todos los buenos momentos que he compartido con ellos.
Como siempre me ha gustado dejar lo mejor para el final, dedico estas últimas líneas a Patricia, la persona que más felicidad aporta a mi vida.

Trabajo Fin de Máster

Operadores en espacios de Banach de funciones continuas

Gonzalo Martínez Cervantes

dirigido por

Antonio Avilés López
y
José Rodríguez Ruiz

II

Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro del estudio de las propiedades que preservan ciertas clases de operadores entre espacios de Banach.

En general, dado un operador *"grande"* entre espacios de Banach, queremos encontrar objetos matemáticos que se preserven a través del operador. Sean X, Y, y Z espacios de Banach. Nos formulamos la siguiente pregunta:

Dado un operador $T : X \to Y$, ¿qué condiciones nos garantizan que el operador T fija una copia[1] de un espacio Z?

Es claro que X debe tener algún subespacio isomorfo a Z. Si X es de dimensión infinita, entonces es inmediato que para cualquier espacio de Banach Z de dimensión finita, T fija una copia de Z si, y sólo si, $T(X)$ tiene dimensión mayor o igual que la dimensión de Z. Sin embargo, si Z es infinito-dimensional, entonces el problema es bastante más complicado. Entre las respuestas a esta pregunta destacan los dos teoremas siguientes:

Teorema de Pełczyński. *Sea K un espacio compacto Hausdorff, X un espacio de Banach y $T : \mathcal{C}(K) \to X$ un operador. Si T no es débil-compacto, entonces T fija una copia de c_0.*

Teorema de Rosenthal. *Sea K un espacio métrico compacto no numerable, X un espacio de Banach y $T : \mathcal{C}(K) \to X$ un operador. Si $T^*(X^*)$ es no separable, entonces T fija una copia de $C([0,1])$.*

Estos serán los resultados más importantes que el lector encontrará en este trabajo.

En el primer capítulo nos equiparemos con las armas necesarias para demostrar estos teoremas. ¡Y vaya armas! Empezaremos viendo la técnica de descomposición de Pełczyński 1.1.3, que, para que el lector se haga una idea de su simpleza y su gran utilidad, basta decir que, aún siendo el primer teorema de este trabajo, es el resultado al que más recurriremos para cerrar las demostraciones. A este resultado le siguen el Criterio de Grunblum, el Principio de las Pequeñas Perturbaciones y el Principio de Selección de Bessaga-Pełczyński, que nos permitirán obtener sucesiones básicas cuando las necesitemos. Finalmente veremos el teorema de Bessaga-Pełczyński

[1] Decimos que T fija una copia de Z si existe un subespacio F de X isomorfo a Z y tal que $T|_F$ es un isomorfismo.

1.4.7 y el teorema de Sobczyk 1.4.9, herramientas que serán clave para demostrar el teorema de Pełczyński 2.4.3 y sus consecuencias.

En el segundo capítulo, con el teorema de Pełczyński 2.4.3 como objetivo, comenzaremos viendo el teorema de Dunford-Pettis 2.1.7 y el teorema de Grothendieck 2.2.3, que nos permitirán caracterizar los conjuntos débil-compactos de $L^1(\mu)$ y $\mathcal{M}(K)$. Tras ver que $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis, estaremos en condiciones de demostrar el teorema de Pełczyński 2.4.3.

Durante todo el tercer capítulo nos acompañará ese gran objeto matemático que es el conjunto de Cantor. Después de la correspondiente presentación, el teorema de extensión de Borsuk 3.2.1 y el teorema de Miljutin 3.2.2 nos proporcionarán los conocimientos necesarios sobre los espacios $\mathcal{C}(K)$ para poder demostrar el teorema de Rosenthal 3.0.1.

Si quisiéramos seguir estudiando el problema que hemos planteado al principio de este introducción, quizás sería natural continuar estudiando el artículo de Dodos [Dod11], donde se obtiene un resultado análogo al teorema de Rosenthal 3.0.1. Sin embargo, debido a la íntima relación que existe entre los teoremas de Pełczyński 2.4.3 y Rosenthal 3.0.1 con el problema de clasificar, salvo isomorfismos, los subespacios complementados de los espacios de funciones continuas, hemos decidido dedicar un último capítulo al siguiente problema:

Problema del Subespacio Complementado. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y X un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$. ¿Es X isomorfo a $\mathcal{C}(L)$ para algún compacto Hausdorff L?*

Veremos en el último capítulo cómo los teoremas de Rosenthal 3.0.1 y Pełczyński 2.4.3 dan respuestas afirmativas para ciertos casos particulares y cuáles son los casos que permanecen sin demostración.

Además, el lector puede encontrar en los apéndices aquellos conceptos y resultados fundamentales del Ánalisis Funcional, Topología y Teoría de la Medida, de los que se hace uso a lo largo del trabajo.

Contenidos

Capítulo 1

Algunas propiedades de las sucesiones básicas y el espacio c_0

Antes de estudiar los espacios $\mathcal{C}(K)$ y los teoremas de Pełczyński 2.4.3 y Rosenthal 3.0.1, que son los teoremas principales de este trabajo, debemos ver las propiedades principales de las sucesiones básicas.

En este capítulo trabajaremos las propiedades de los subespacios complementados y de las sucesiones básicas, para finalmente obtener una serie de resultados del espacio c_0. En esta primera sección aprenderemos una herramienta que será fundamental en la teoría de los espacios $\mathcal{C}(K)$, como quedará de manifiesto en los resultados más importantes del capítulo dos y del capítulo tres. Este herramienta es la técnica de descomposición de Pełczyński 1.1.3, que da condiciones suficientes y naturales para que dos subespacios sean isomorfos. En la segunda sección profundizaremos en el concepto de base y sucesión básica. En este contexto nos apareceran varios teoremas importantes con nombre propio, pero nuestro gran objetivo será obtener el Principio de Selección de Bessaga-Pełzcyński 1.2.15, que nos permitirá extraer una subsucesión básica de una sucesión bajo ciertas condiciones. Finalmente, en la última sección nos centraremos en el espacio c_0 y estableceremos un par de resultados sin los cuales no podríamos demostrar el teorema de Pełczyński 2.4.3; el teorema de Bessaga-Pełczyński1.4.7 y el teorema de Sobczyk 1.4.9.

Fijamos a continuación la terminología que vamos a usar en este trabajo. Reservaremos la palabra *operador* para denotar a una aplicación lineal y continua. Como sólo tendremos interés en los subespacios vectoriales cerrados, llamaremos *subespacio* a cualquier subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach y *subespacio lineal* a los subespacios vectoriales no necesariamente cerrados. Todos los espacios de Banach serán reales. Diremos que $T: X \to Y$ es un *isomorfismo* si T es un operador inyectivo con inversa sobre su rango $T^{-1}: T(X) \to X$ continua. Nótese que no exigimos que un isomorfismo sea suprayectivo. Diremos que dos espacios de Banach X e Y son *isomorfos* si existe un isomorfismo $T: X \to Y$ con $T(X) = Y$. Escribiremos $X \approx Y$ cuando X e Y sean espacios de Banach isomorfos. Si $A \subset X$ es un subconjunto de un espacio de Banach, escribiremos $\overline{\operatorname{span}} A$ para denotar a la clausura del espacio generado por los vectores de A. Si X es un espacio de Banach, X^* es el espacio dual de X, es decir, $X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es una función lineal y continua}\}$. Si E es un subespacio de un espacio de Banach X, llamaremos $E^\perp$ al subespacio de X^* formado por los funcionales $f \in X^*$ tales que $f|_E = 0$. Usaremos el símbolo c_0 para denotar al espacio de Banach formado por todas las sucesiones reales $(x_n)_{n=1}^\infty$ tales que $\lim\limits_n x_n = 0$ y el símbolo c_{00} para denotar al espacio de Banach formado por todas las sucesiones reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ finitamente soportadas, es decir, tales que $\{n : x_n \neq 0\}$ es finito. Ambos espacios se consideran equipados con la norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Finalmente, para un conjunto cualquiera A, denotaremos por $|A|$ al cardinal de A.

1.1. Subespacios complementados

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que un operador $P : X \to X$ es una proyección si se verifica $P^2 = P$. Diremos que un subespacio Y de X es un subespacio complementado de X si existe una proyección $P : X \to X$ con $P(X) = Y$.*

Si Y es un subespacio complementado de X y $P : X \to X$ es una proyección con $P(X) = Y$, entonces de la propiedad $P^2 = P$ se sigue la igualdad $P(y) = y$ para cada $y \in P(X) = Y$.

Una de las metas de este trabajo es obtener propiedades de los subespacios complementados de ciertos espacios de Banach. En concreto, nos gustaría saber, dado un espacio de Banach X y un subespacio complementado Y de X, a qué espacio puede ser isomorfo Y. En el capítulo 4 estudiaremos esta pregunta en el caso en que $X = \mathcal{C}(K)$ es un espacio de funciones continuas sobre un compacto Hausdorff K. A menudo nos encontraremos una situación en la que, además de ser Y un subespacio complementado de X, también Y tiene un subespacio complementado isomorfo a X. Bajo alguna condición adicional, la técnica de descomposición de Pełczyński nos dice que en esta situación X e Y son isomorfos. Las siguientes definiciones están inspiradas en el artículo de Pełczyński [Peł60]:

Definición 1.1.2. *Sea E un espacio de Banach de sucesiones reales con la norma $\|\cdot\|_E$, tal que si $(t_i)_{i=1}^{\infty} \in E$ y $(s_i)_{i=1}^{\infty}$ verifica $|s_i| \leq |t_i|$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $(s_i)_{i=1}^{\infty} \in E$ y $\|(t_i)_{i=1}^{\infty}\| \geq \|(s_i)_{i=1}^{\infty}\|$. Sea $X_1, X_2, X_3, \ldots$ una sucesión de espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \ldots$. respectivamente. Denotaremos por $(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \ldots.)_E$ al espacio de las sucesiones $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, con $x_i \in X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tales que $(\|x_i\|_i)_{i=1}^{\infty} \in E$ equipado con la norma $\|(x_i)_{i=1}^{\infty}\| := \|(\|x_i\|_i)_{i=1}^{\infty}\|_E$. Cuando E tiene dimensión finita n, se define análogamente el espacio $(X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n)_E$. Para abreviar, denotaremos por $X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ al espacio $(X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n)_{\mathbb{R}^n}$, donde $\mathbb{R}^n$ se considera equipado con la norma infinito. Además, si $X = X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, escribiremos $E(X)$ para denotar al espacio $(X \oplus X \oplus X \oplus \ldots)_E$.*

El espacio $(X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \ldots.)_E$ siempre es un espacio de Banach. Como todo espacio de Banach real E de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, es sencillo ver que se verifica

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n)_E \approx X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n.$$

Análogamente, también es sencillo ver que si X e Y son espacios de Banach isomorfos, entonces $E(X)$ y $E(Y)$ también son isomorfos.

Para cada p con $1 \leq p < \infty$, el caso en que $E = \ell_p$ lo denotaremos como $\ell_p(X) = (X \oplus X \oplus \ldots)_p$ y el caso en que $E = c_0$ lo denotaremos por $c_0(X) = (X \oplus X \oplus \ldots)_0$.

En el caso en que $E = \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$ o $E = c_0$, también se verifican las siguientes propiedades elementales para espacios de Banach X e Y cualesquiera:

- $E(X) \approx X \oplus E(X)$,
- $E(X \oplus Y) \approx E(X) \oplus E(Y)$.

Sea X un espacio de Banach y $P : X \to X$ una proyección. Si $I : X \to X$ es la identidad en X, entonces $I - P$ también es una proyección, ya que $(I-P)^2 = I + P^2 - 2P = I - P$. Si $Y = P(X)$ y $Z = (I-P)(X)$, entonces el operador $T : X \to Y \oplus Z$, definido mediante la fórmula $T(x) = (P(x), (I-P)(x))$ para cada $x \in X$, es un isomorfismo con $T(X) = Y \oplus Z$. En general, si Y es un subespacio complementado de X, entonces existe un espacio de Banach E tal que $X \approx Y \oplus E$.

Teorema 1.1.3 (Técnica de descomposición de Pełczyński)**.** *Sean X e Y espacios de Banach tales que X es isomorfo a un subespacio complementado de Y e Y es isomorfo a un subespacio complementado de X. Si se verifica*

(a) $X \approx X^2 = X \oplus X$ e $Y \approx Y^2$, o
(b) $X \approx c_0(X)$ o $X \approx \ell_p(X)$ para algún $1 \leq p < \infty$,

entonces X e Y son isomorfos.

Demostración. Sea $X \approx Y \oplus E$ e $Y \approx X \oplus F$. Si se verifica (a), entonces

$$X \approx Y \oplus Y \oplus E \approx Y \oplus X$$

y también

$$Y \approx X \oplus X \oplus F \approx X \oplus Y \approx Y \oplus X.$$

Por tanto,

$$Y \approx Y \oplus X \approx X.$$

Como $c_0(X) \oplus c_0(X) \approx c_0(X)$ y $\ell_p(X) \oplus \ell_p(X) \approx \ell_p(X)$, si se verifica (b) entonces $X \oplus X \approx X$. Por tanto, al igual que antes,

$$Y \approx X \oplus X \oplus F \approx X \oplus Y.$$

Pero, además,

$$c_0(Y) \approx Y \oplus c_0(Y)$$

y

$$\ell_p(Y) \approx Y \oplus \ell_p(Y).$$

Por tanto, si $X \approx c_0(X)$ entonces

$$X \approx c_0(X) \approx c_0(Y \oplus E) \approx c_0(Y) \oplus c_0(E) \approx Y \oplus c_0(Y) \oplus c_0(E) \approx Y \oplus c_0(X) \approx Y \oplus X \approx Y$$

y análogamente si $X \approx \ell_p(X)$.

□

1.2. Bases y sucesiones básicas

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en X* es una base de X *si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ verificando* $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n = x$

Escribiremos $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ si $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. Una condición necesaria para que X tenga una base es que X sea separable. Además, es relevante el orden de los vectores. Por ejemplo, si tomamos $f_n := e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ en c_0, donde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ son los vectores de la base canónica de c_0, entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de c_0 pero una reordenación adecuada nos da una sucesión que no es una base [AK06, p. 51, Ejemplo 3.1.2].

Definición 1.2.2. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Si existe una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* con*

(i) $e_k^*(e_j) = 1$ *si* $j = k$ *y* $e_k^*(e_j) = 0$ *si* $j \neq k$*, para cada* $k, j \in \mathbb{N}$,

(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n$ *para cada* $x \in X$,

entonces diremos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para *X y que los funcionales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son los* funcionales biortogonales *asociados a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Además, llamaremos soporte de *x, y lo denotaremos por $supp(x)$, al conjunto de enteros n con $e_n^*(x) \neq 0$. Si $|supp(x)| < \infty$ diremos que x* está finitamente soportado.

Dada una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X, podemos definir los funcionales lineales $e_n^{\#}(x) = a_n$ para cada $x \in X$, donde a_n es tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. A priori, no sabemos si $e_n^{\#}$ es un funcional lineal continuo. Sin embargo, se puede probar que en todo espacio de Banach los funcionales $e_n^{\#}$ son continuos y, por tanto, *una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base si, y sólo si, es una base de Schauder* [AK06, p. 3, Teorema 1.1.3].

Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder en un espacio de Banach X y $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sus funcionales biortogonales. Llamamos *sumas parciales* a los operadores $S_n : X \to X$, dados por $S_0 = 0$ y $S_n(x) = S_n(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x) e_k) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$ si $n \geq 1$.

Definición 1.2.3. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder en un espacio de Banach X. Llamamos* constante básica *al número $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\|$. Además, si $K = 1$, diremos que* la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona.

Los operadores S_n verifican $S_n(x) \to x$ para cada $x \in X$, luego $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\| < \infty \quad \forall x \in X$. El Principio de Acotación Uniforme A.4 afirma que $K := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| < \infty$, es decir, la constante básica es siempre finita.

Definición 1.2.4. *Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice que es una* sucesión básica *si es una base para el espacio* $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Las sucesiones básicas son de vital importancia en la teoría de Espacios de Banach. En esta sección vamos a caracterizarlas y a estudiar sus propiedades fundamentales. La siguiente proposición nos proporciona un criterio para ver si una sucesión es básica:

Proposición 1.2.5 (Criterio de Grunblum)**.** *Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos no nulos de un espacio de Banach X es una sucesión básica si, y sólo si, existe una constante positiva K tal que*

$$\|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\| \leq K \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$$

para cualquier sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ y enteros $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

Demostración. Suponemos primero que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica. Sea $S_N : \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $N = 1, 2, ...$ las sumas parciales asociadas a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para $m \leq n$ se verifica

$$\|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\| = \|S_m(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k)\| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|S_j\| \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| = K \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\|$$

donde K es la constante básica de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Vemos el recíproco. Sea $E := \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $s_n : E \to E$ definida como

$$s_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ todos nulos excepto una cantidad finita. Para ver que s_n está bien definida, tenemos que ver que todo elemento $x \in E$ se expresa de forma única como $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ con $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ excepto una cantidad finita. Si este no fuese el caso, existiría una sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ todos nulos excepto una cantidad finita y con al menos un escalar no nulo, tal que $0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Pero si a_m es el primer escalar no nulo, entonces $0 \neq \|a_m e_m\| = \|\sum_{k=1}^{m} a_k e_k\| \leq K \|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| = 0$, para n suficientemente grande, obteniendo así una contradicción. Por tanto, s_n está bien definida, es una función lineal y continua y, por hipótesis, $\|s_n(x)\| \leq K\|x\|$ para cada $x \in E$. Como E es denso en $\overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, existe un único operador $S_m : \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \to \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ con $S_m|_E = s_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por densidad, también será $\|S_m\| \leq K$. Para cada $x \in E$ se verifica $S_m(x) = s_m(x) \to x$. Vamos a ver que realmente se verifica $S_m(x) \to x$ si $x \in \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $y \in E$ verificando

$$K\|x - y\| + \|y - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $m_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|S_m y - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $m > m_0$. En ese caso, será

$$\begin{aligned}\|S_m x - x\| \leq\ & \|S_m x - S_m y\| + \|S_m y - y\| + \|y - x\| = \|S_m(x-y)\| + \|y - x\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ & \leq K\|x-y\| + \|x-y\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall m > m_0.\end{aligned}$$

Por tanto, como $\varepsilon > 0$ lo podemos tomar tan pequeño como queramos, debe ser $S_m x \to x$ para cada $x \in \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Definimos $S_0 : \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \to \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ como $S_0 = 0$, y $e_n^* : \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ verificando $e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Por definición, cada e_n^* es un funcional lineal y continuo y, además,

$$e_n^*(e_m)e_n = S_n(e_m) - S_{n-1}(e_m) = \delta_{nm}e_m = \delta_{nm}e_n,$$

donde δ_{nm} denota la función δ de Kronecker , que se define como

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = m, \\ 0 \text{ en el resto de casos.} \end{cases}$$

Por tanto, debe ser $e_n^*(e_m) = \delta_{nm}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y, como

$$\sum_{n=1}^{m} e_n^*(x)e_n = \sum_{n=1}^{m} [S_n(x) - S_{n-1}(x)] = S_m(x) \to x,$$

deducimos que efectivamente $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica.

□

Definición 1.2.6. *Diremos que dos bases o dos sucesiones básicas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son* equivalentes*, y escribiremos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$, si para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se verifica que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si, y sólo si, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.*

Teorema 1.2.7. *Dos bases o dos sucesiones básicas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo $T : \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\text{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $T(x_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$*

Demostración. Sea $X = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \overline{\text{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si existe un isomorfismo T que verifica $Tx_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces es claro que las sucesiones son equivalentes.

Suponemos ahora que las sucesiones son equivalentes y tomamos la función lineal $T : X \to Y$ definida como $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. T está bien definida por ser las sucesiones equivalentes y es biyectiva por ser las sucesiones bases. Probamos que T es continua. Por el teorema de la Gráfica Cerrada A.3, es suficiente probar que si $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión con $u_j \to u$ en X y $Tu_j \to v$ en Y, entonces $Tu = v$. Escribiendo $u_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j)x_n$ y $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(u)x_n$, de la continuidad de los funcionales biortogonales se deduce que $x_n^*(u_j) \to x_n^*(u)$ e $y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la unicidad del límite, $x_n^*(u) = y_n^*(v)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $Tu = v$ y T es continua. Por analogía, T^{-1} también es continua y podemos concluir que T es un isomorfismo.

□

Corolario 1.2.8. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones básicas en los espacios de Banach X e Y respectivamente. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ finitamente soportada se verifica*

$$C^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| \leq C\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\|$$

Si $C = 1$, entonces las sucesiones básicas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice que son *isométricamente equivalentes* .

La equivalencia de sucesiones básicas (y de las bases) será una herramienta muy potente para el estudio de isomorfismos entre espacios de Banach.

Definición 1.2.9. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X. Sea $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de enteros estrictamente creciente, con $p_0 = 0$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares. Una sucesión de vectores no nulos $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en X de la forma*

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se llama una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

El siguiente lema nos dice que, como era de esperar, las sucesiones base-bloque son sucesiones básicas.

Lema 1.2.10. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X con constante básica K. Sea $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que K.*

Demostración. Por definición, cada u_k se puede expresar de la forma $u_k = \sum\limits_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier sucesión de escalares $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ y enteros m, n con $m \leq n$, tenemos

$$\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\| = \|\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j\| = \|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} b_k a_j e_j\| = \|\sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j\|$$

donde $c_j := a_j b_k$ si $p_{k-1} + 1 \leq j \leq p_k$.

Por el criterio de Grunblum, será:

$$\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\| = \|\sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j\| \leq K\|\sum_{j=1}^{p_n} c_j e_j\| = K\|\sum_{k=1}^{n} b_k u_k\|.$$

Por tanto, de nuevo por el Criterio de Grunblum, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que K.

□

Definición 1.2.11. *Una sucesión básica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X se dice que es* complementada *si $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio complementado de X.*

Observación 1.2.12. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica complementada e $Y := \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $P : X \to Y$ es una proyección, entonces los funcionales biortogonales $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$ pueden extenderse a una sucesión $(u_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tal que $u_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$, definiendo $u_n^* = x_n^* \circ P \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x)x_n = P(x) \qquad \forall x \in X.$$

Recíprocamente, si tenemos una sucesión $(u_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ con $u_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^*(x)x_n$ converge para cada $x \in X$, entonces el subespacio $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es complementado y la funcion $P : X \to \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, definida como $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^*(x)x_n$ para cada $x \in X$, es una proyección.

Definición 1.2.13. *Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$* son congruentes respecto (X,Y) *si existe un isomorfismo $T : X \to Y$ con $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Cuando las sucesiones verifican la condición anterior en el caso particular en que $X = Y$ diremos simplemente que* las sucesiones son congruentes .

El siguiente teorema, demostrado por M. Krein, D. Milman y M. Rutman en 1940, nos dice que dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ suficientemente próximas entre sí son congruentes.

Teorema 1.2.14 (Principio de las Pequeñas Perturbaciones, 1940)**.** *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X con constante básica K. Si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X verificando*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1,$$

entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ son congruentes. En particular:

(i) $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.
(ii) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también es una base, con constante básica menor o igual que $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.
(iii) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es complementada entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también.

Demostración. Para cada $n \geq 2$ y cada $x \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se verifica

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^*(x)x_k$$

donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^*$ son los funcionales biortogonales de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Como el miembro de la derecha es una diferencia de sumas parciales de x, se verifica

$$\|x_n^*(x)x_n\| \leq 2K\|x\|$$

y, por tanto, $\|x_n^*\|\|x_n\| \le 2K$. Para $n=1$ es claro que $\|x_1^*\|\|x_1\| \le K$. Estas desigualdades se mantienen si reemplazamos cada x_n^* por cualquier extensión a X, u_n^*, dada por el teorema de Hahn-Banach.

Para cada $x \in X$ escribimos

$$A(x) := x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x)(y_n - x_n).$$

De la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n^*(x)\|\|y_n - x_n\| \le 2K\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} = \theta\|x\|$$

se sigue que la función A está bien definida. Por tanto, A es un operador de X en X con $A(x_n) = y_n$ y norma

$$\|A\| \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n^*\|\|y_n - x_n\| \le 1 + 2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} = 1 + \theta.$$

Además, $\|A - I\| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n^*\|\|y_n - x_n\| \le \theta < 1$, de donde se deduce que el operador A es invertible con $A^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (I-A)^n$ y $\|A^{-1}\| \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|I-A\|^n \le (1-\theta)^{-1}$.

Los apartados $(i), (ii), (iii)$ son consecuencia de que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son congruentes.

Como $A : X \to X$ es un isomorfismo suprayectivo con $A(x_n) = y_n$, deducimos que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también lo es y, además, como las sumas parciales respecto de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son $S_n' = A \circ S_n \circ A^{-1}$, la constante básica de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es

$$K' = \sup\{\|A \circ S_n \circ A^{-1}\| : n \in \mathbb{N}\} \le \sup\{\|A\|\|S_n\|\|A^{-1}\| : n \in \mathbb{N}\} \le K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}.$$

La propiedad (ii) es análoga a (i). Además, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es complementada y tenemos una proyección $P : X \to \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $A \circ P \circ A^{-1} : X \to \overline{\text{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una proyección y, por tanto, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es complementada.

□

Como aplicación del Principio de las Pequeñas Perturbaciones obtenemos el Principio de Selección de Bessaga-Pełczyński, que será necesario para demostrar uno de los teoremas principales de este trabajo, el teorema de Pełczyński 2.4.3.

Teorema 1.2.15 (Principio de Selección de Bessaga-Pełczyński)**.** *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X con constante baśica K y funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X verificando*

(i) $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} e_k^*(x_n) = 0$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es congruente con alguna sucesión base-bloque $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Además, para cada $\varepsilon > 0$, es posible elegir $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de forma que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tenga constante básica a lo sumo $K + \varepsilon$.

Demostración. Sea $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ y sea $0 < \nu < \frac{1}{4}$. Tomamos $n_1 = 1$, $r_0 = 0$. Existe $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_{n_1} - S_{r_1}x_{n_1}\| < \frac{\nu\alpha}{2K},$$

donde S_m denota la suma parcial m-ésima con respecto a la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Por (ii), sabemos que $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_1}x_n\| = 0$, luego existe $n_2 > n_1$ verificando

$$\|S_{r_1}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}.$$

Podemos tomar ahora $r_2 > r_1$ de forma que

$$\|x_{n_2} - S_{r_2}x_{n_2}\| < \frac{\nu^2\alpha}{2K}.$$

Por el mismo razonamiento de antes, como $\lim_{n\to\infty} \|S_{r_2}x_n\| = 0$, existe $n_3 > n_2$ verificando

$$\|S_{r_2}x_{n_3}\| < \frac{\nu^3\alpha}{2K}.$$

Repitiendo este proceso obtenemos una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ y una sucesión de enteros estrictamente creciente $(r_k)_{k=0}^{\infty}$, con

$$\|S_{r_{k-1}}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K}, \qquad \|x_{n_k} - S_{r_k}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{2K} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $y_k := S_{r_k}x_{n_k} - S_{r_{k-1}}x_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De la desigualdad

$$\|y_k - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_k} - S_{r_k}x_{n_k}\| + \|S_{r_{k-1}}x_{n_k}\| < \frac{\nu^k\alpha}{K}$$

se deduce

$$\|y_k\| \geq \|x_{n_k}\| - \|y_k - x_{n_k}\| > \alpha - \frac{\nu^k\alpha}{K} \geq (1-\nu^k)\alpha \geq (1-\nu)\alpha,$$

donde en la penúltima desigualdad hemos usado que la constante básica siempre es mayor o igual que uno por definición.

Por tanto, cada vector y_k es no nulo y la sucesión $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Por el lema 1.2.10, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual que K.

Además,

$$2K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|y_k - x_{n_k}\|}{\|y_k\|} < 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu^k}{1-\nu} = 2\nu(1-\nu)^{-2} < \frac{8}{9}.$$

Por el Principio de las Pequeñas Perturbaciones 1.2.14, $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ son congruentes y, como son sucesiones básicas, son equivalentes. Como $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ tiene constante básica menor o igual que K, el Principio de las Pequeñas Perturbaciones nos garantiza que la constante básica de $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es menor o igual que

$$K(1+2\nu(1-\nu)^{-2})(1-2\nu(1-\nu)^{-2})^{-1}.$$

Como ν podemos tomarla tan pequeña como queramos, para cada $\varepsilon > 0$, es posible elegir $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de forma que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tenga constante básica a lo sumo $K+\varepsilon$.

□

Corolario 1.2.16. *Si una sucesión débilmente nula no es convergente a cero en norma, entonces tiene una subsucesión que es una sucesión básica.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débilmente nula que no converge hacia cero. Consideramos $X = \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces X es separable. Para poder aplicar el teorema anterior, necesitamos un espacio de Banach E con base tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$. Consideramos la aplicación $T : X \to \mathcal{C}(B_{X^*})$ dada por $(Tx)(x^*) = x^*(x)$ para cada $x \in X$ y cada $x^* \in B_{X^*}$, donde B_{X^*} se considera equipado con la topología débil*. La aplicación T es un isomorfismo entre X y un subespacio de $\mathcal{C}(B_{X^*})$. Como X es separable, B_{X^*} es un compacto métrico no numerable y, por el teorema de Miljutin 3.2.2 que veremos en el capítulo 3, $\mathcal{C}(B_{X^*})$ es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$. Pero $\mathcal{C}([0,1])$ es un espacio con base [1]. Por tanto, $\mathcal{C}(B_{X^*})$ es un espacio con base y X es isomorfo a un subespacio de un espacio con base. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no tiende hacia cero, podemos tomar una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ con $\inf_{k\in\mathbb{N}} \|x_{n_k}\| > 0$. Además, como la sucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es débil-nula, podemos aplicar el teorema anterior, obteniendo así una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que es una sucesión básica.

□

1.3. Convergencia de series

Definición 1.3.1. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Una serie (formal) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X se dice* incondicionalmente convergente *si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para cada permutación π de $\mathbb{N}$.*

Además, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente y ambos conceptos coinciden si, y sólo si, el espacio es finito-dimensional (teorema de Dvoretsky-Rogers, [Die84, Capítulo 6]).

Lema 1.3.2. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

[1] Sea $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en $[0,1]$, con $q_1 = 0$ y $q_2 = 1$. Definimos la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}([0,1])$ como $e_1 \equiv 1$, $e_n(q_n) = 1$, $e_n(q_j) = 0$ si $j < n$ y e_n extendida de forma lineal sobre $[0,1] \setminus \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ para cada $n > 1$. Entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para $\mathcal{C}([0,1])$. El lector puede encontrar los detalles en [AK06, Capítulo 1].

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es incondicionalmente convergente;*

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *converge para cualquier sucesión estrictamente creciente de enteros* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$*;*

(c) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *converge para cualquier elección de signos* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$*;*

(d) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que si* F *es un subconjunto finito de* $\{n+1, n+2, \ldots\}$ *entonces*

$$\|\sum_{j\in F} x_j\| < \varepsilon$$

Demostración. Empezamos probando $(a) \Longrightarrow (d)$. Vamos a demostrar el contrarrecíproco. Suponemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada n podemos encontrar un subconjunto finito F_n de $\{n+1, n+2, \ldots\}$ verificando

$$\|\sum_{j\in F_n} x_j\| > \varepsilon.$$

Vamos a construir una permutación π de forma que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converja. Tomamos $n_1 = 1$ y $A_1 = F_{n_1}$. Definimos $n_2 := \text{máx} A_1$ y $B_1 := \{n_1+1, n_1+2, \ldots, n_2\} \setminus A_1$. Repetimos el proceso: tomamos $A_2 := F_{n_2}$, $n_3 := \text{máx} A_2$ y $B_2 := \{n_2+1, n_2+2, \ldots, n_3\} \setminus A_2$. Iterando este proceso obtenemos una sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ y una partición de $\{n_k+1, n_k+2, \ldots, n_{k+1}\} = A_k \bigcup B_k$.

Sea π de forma que permute los elementos de $\{n_k+1, n_k+2, \ldots, n_{k+1}\}$ colocando los elementos de A_k antes que los de B_k. Afirmamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converge. En efecto, no es convergente porque no se cumple la condición de Cauchy para ε, ya que para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos tomar $n_k > m$ y

$$\|\sum_{j=n_k+1}^{n_k+|A_k|} x_{\pi(j)}\| = \|\sum_{j\in F_{n_k}} x_j\| > \varepsilon$$

Demostramos ahora $(d) \Longrightarrow (c)$. Sea $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de signos. Tomamos $A, B \subset \mathbb{N}$ disjuntos tal que $\mathbb{N} = A \bigcup B$ y $A = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n = +1\}$. Vamos a ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ converge viendo que se verifica la condición de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Por (d), existe n_0 tal que si F es un subconjunto finito de $\{n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ entonces $\|\sum_{j\in F} x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, para cada $n, m > n_0$ con $m \geq n$ se verifica

$$\|\sum_{j=n}^{m} \varepsilon_j x_j\| = \|\sum_{j\in A\bigcap\{n,\ldots,m\}} x_j + \sum_{j\in B\bigcap\{n,\ldots,m\}} (-x_j)\| \leq \|\sum_{j\in A\bigcap\{n,\ldots,m\}} x_j\| + \|\sum_{j\in B\bigcap\{n,\ldots,m\}} x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por ser $A\bigcap\{n, \ldots, m\}$, $B\bigcap\{n, \ldots, m\}$ subconjuntos finitos de $\{n_0+1, n_0+2, \ldots\}$.

Demostramos ahora $(c) \Longrightarrow (b)$. Sea $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros. Definimos $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de signos de forma que $\varepsilon_j := +1$ si $j = n_k$ para algún k y $\varepsilon_j := -1$ en el resto de casos. Vamos a ver que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge comprobando que verifica la condición de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando (c) a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y a $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ obtenemos $N \in \mathbb{N}$ de forma que para cada $k,m \geq N$ con $m > k$ se verifica

$$\|\sum_{j=k}^{m} x_j\| < \varepsilon, \qquad \|\sum_{j=k}^{m} \varepsilon_j x_j\| < \varepsilon.$$

Por tanto, gracias a la elección que hemos hecho de los signos ε_j, para cada $k,m \geq N$ con $m > k$ también se verifica

$$\|\sum_{j=k}^{m} x_{n_j}\| = \|\frac{1}{2}(\sum_{j=n_k}^{n_m} x_j + \sum_{j=n_k}^{n_m} \varepsilon_j x_j)\| \leq \frac{1}{2}(\|\sum_{j=n_k}^{n_m} x_j\| + \|\sum_{j=n_k}^{n_m} \varepsilon_j x_j\|) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon.$$

Concluímos así que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ es convergente.

Para demostrar $(b) \Longrightarrow (a)$ vemos que se verifica el contrarrecíproco. Sea π una permutación de forma que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no converge. Como no se verifica la condición de Cauchy, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que para cada $M \in \mathbb{N}$ existe $m > n > M$ con $\|\sum_{j=n}^{m} x_{\pi(j)}\| > \varepsilon$.

Podemos tomar entonces sucesiones de enteros $(N_j)_{j=1}^{\infty}, (M_j)_{j=1}^{\infty}$ con $N_1 < M_1 < N_2 < M_2 < \ldots$ verificando $\|\sum_{j=N_i}^{M_i} x_{\pi(j)}\| > \varepsilon$. Definimos $A_1 = \pi(\{N_1, N_1+1, ..., M_1\})$. Sea $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(k) > \text{máx} A_1$ para cada $k > K_1$. Tomamos $h_1 \in \mathbb{N}$ con $N_{h_1} > K_1$. Definimos $A_2 = \pi(\{N_{h_1}, N_{h_1}+1, ..., M_{h_1}\})$. Se verifica $\text{mín} A_2 > \text{máx} A_1$. Repitiendo el proceso, en cada paso obtenemos un conjunto A_j con $\text{mín} A_j > \text{máx} A_{j-1}$ y verificando

$$\|\sum_{i \in A_j} x_i\| > \varepsilon.$$

Tomamos $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ estricamente creciente con $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Obtenemos así una serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ que no converge porque no verifica la condición de Cauchy, ya que para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos tomar $j \in \mathbb{N}$ con $n_{k_j} := \text{mín} A_j > m$ y

$$\|\sum_{i=k_j}^{k_j+|A_j|-1} x_{n_i}\| = \|\sum_{i \in A_j} x_i\| > \varepsilon.$$

$\square$

Además, a las equivalencias del lema anterior se le puede añadir la condición análoga a (b) pero con convergencia débil:

(b') $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge débilmente para cualquier sucesión estrictamente creciente de enteros $(n_k)_{k=1}^{\infty}$.

Este resultado se conoce como el teorema de Orlicz-Pettis [AK06, Teorema 2.4.14].

Definición 1.3.3. *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X. *Una serie (formal)* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *en* X *se dice* débilmente incondicionalmente Cauchy (WUC) *si para cada* $x^* \in X^*$ *se verifica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty.$$

Proposición 1.3.4. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es una serie incondicionalmente convergente en un espacio de Banach* X, *entonces también es WUC.*

Demostración. Dada $x^* \in X^*$, la serie escalar $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_{\pi(n)})$ converge para cada permutación π por la continuidad de x^* y por ser $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente.

Un teorema clásico de Riemann afirma que la convergencia incondional de una serie de números reales o complejos es equivalente a la convergencia absoluta de la serie. Por tanto, podemos afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es WUC. $\square$

Un ejemplo de serie WUC que no es incondicionalmente convergente nos lo da la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$, donde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ denota la base canónica de c_0. Es obvio que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ no es incondicionalmente convergente, ya que no es convergente. El hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es WUC en c_0 se sigue de que si $s = (s_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 = c_0^*$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| = \|s\|_1 < \infty.$$

1.4. Propiedades de c_0

A lo largo de toda esta sección, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ denotará la base canónica del espacio c_0 y $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sus funcionales biortogonales asociados.

Proposición 1.4.1. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie en un espacio de Banach* X. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es WUC si, y sólo si, existe un operador* $T : c_0 \to X$ *con* $Te_n = x_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea

$$S := \{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \in X : \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}, \|\xi\|_\infty \leq 1\}$$

Suponemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es WUC. Vemos cada elemento $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ de S como un elemento del bidual, es decir, como la aplicación

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)^{**} : X^* \to \mathbb{R},$$

dada por $(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)^{**}(x^*) = x^*(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)$ para cada $x^* \in X^*$. Por tanto, tenemos una familia de operadores y la condición WUC nos garantiza que

$$|x^*(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(\xi_n x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty \text{ para cada } x^* \in X^*$$

o, equivalentemente,

$$\sup_{\xi \in c_{00}, \|\xi\| \leq 1} |(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)^{**}(x^*)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty \text{ para cada } x^* \in X^*.$$

Por tanto, el Principio de Acotación Uniforme nos garantiza

$$\sup_{\xi \in c_{00}, \|\xi\| \leq 1} \|(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)^{**}\| < \infty,$$

de donde se deduce que el conjunto S está acotado en norma.

Entonces el operador $T : c_{00} \to X$ definido como $T\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ también es acotado para la norma de c_0. Por densidad, T se extiende de forma única a un operador $T : c_0 \to X$.

Para ver el recíproco, tomamos un operador $T : c_0 \to X$ con $Te_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x^* \in X^*$ se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(Te_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |T^*(x^*)(e_n)|$$

que es finita por ser $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ WUC en c_0 y ser $T^*(x^*)$ un elemento de c_0^*.

□

Nótese que en la demostración de la última implicación no hemos usado ninguna propiedad característica del espacio c_0. El mismo razonamiento realizado anteriormente demostraría que los operadores entre espacios de Banach preservan series WUC. También sucede lo mismo con las series absolutamente e incondicionalmente convergentes. Hay toda una teoría de operadores que mejora las propiedades de sumabilidad de series: una buena referencia es [DJT95].

Proposición 1.4.2. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie WUC en un espacio de Banach X. Son equivalentes:*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente,*

(ii) el operador $T : c_0 \to X$ *que verifica* $Te_n = x_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *es compacto.*

Demostración. Suponemos primero que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente. Vamos a demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - TS_n\| = 0$, donde $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ son las sumas parciales asociadas a la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de c_0. Dado $\varepsilon > 0$, por el lema 1.3.2 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si F es un subconjunto finito de $\{n+1, n+2, ...\}$ entonces $\|\sum\limits_{j\in F} x_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En particular, para cada $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq 1$ tenemos

$$\sum_{\{j\in F: x^*(x_j)\geq 0\}} x^*(x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{\{j\in F: x^*(x_j)<0\}} -x^*(x_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por tanto,

$$\sum_{j\in F} |x^*(x_j)| \leq \varepsilon.$$

Deducimos así que para cada $\xi \in c_{00}$ con $\|\xi\| \leq 1$ se verifica

$$|x^*(T - TS_m)(\xi)| \leq \varepsilon \quad \text{si } m \geq n \text{ y } \|x^*\| \leq 1.$$

Por densidad, debe ser $\|T - TS_m\| \leq \varepsilon$. De esta forma, hemos demostrado que T es límite de operadores de rango finito y, por tanto, T es compacto.

Para demostrar el recíproco, suponemos que T es un operador compacto. El teorema de Schauder B.8, aplicado dos veces, garantiza que

$$T^{**} : c_0^{**} = \ell_\infty \longrightarrow X^{**}$$

es un operador compacto. Vemos X y c_0 como subespacios de X^{**} y ℓ_∞ respectivamente. Entonces, $T^{**}e_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_{\pi(n)}$ converge en la topología débil* de ℓ_∞ para cada permutación π, de la compacidad de T^{**} se deduce que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T^{**}e_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente en X^{**}, luego también lo es en X por ser X cerrado en X^{**}.

□

Definición 1.4.3. *Sean X e Y espacios de Banach. Se dice que un operador $T : X \to Y$ es* estrictamente singular *si no existe ningún subespacio infinito dimensional $E \subseteq X$ tal que $T|_E$ es un isomorfismo sobre su rango.*

Antes de demostrar el teorema de Bessaga-Pełczyński 1.4.7, que pone de manifiesto la utilidad de las sucesiones básicas y las convergencias estudiadas, vamos a ver que c_0 no puede tener subespacios reflexivos de dimensión infinita.

Lema 1.4.4. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de c_0. Entonces cualquier sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ normalizada es isométricamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. En general, cualquier sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ genera un subespacio isomorfo a c_0.*

Demostración. Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión base-bloque normalizada de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces, existe $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots.$ y una sucesión de escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ tales que

$$z_n = \sum_{j=r_{n-1}+1}^{r_n} a_j e_j.$$

Como $\|z_n\| = 1$, será

$$\sup\{|a_j| : r_{n-1}+1 \leq j \leq r_n\} = 1$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\|\sum_{n=1}^{m} b_n z_n\| = \|\sum_{n=1}^{m} b_n \sum_{j=r_{n-1}+1}^{r_n} a_j e_j\| = \sup\{|b_n a_j| : r_{n-1}+1 \leq j \leq r_n, 1 \leq n \leq m\} = \sup\{|b_n| : 1 \leq n \leq m\}.$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y escalares $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Concluimos así que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es isométricamente equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ por el corolario 1.2.8 y, además, $\overline{\text{span}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a c_0.

En general, si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión base-bloque normalizada de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\overline{\text{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \overline{\text{span}}\{\frac{u_n}{\|u_n\|} : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a c_0.

□

Lema 1.4.5. *Sea Y un subespacio de dimensión infinita de c_0. Entonces Y contiene un subespacio isomorfo a c_0.*

Demostración. Como Y es infinito-dimensional, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in Y$ con $\|y_n\| = 1$ y tal que $e_k^*(y_n) = 0$ si $1 \leq k \leq n$. En caso contrario, existiría $N \in \mathbb{N}$ de forma que la proyección $S_N(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$ restringida a Y sería inyectiva y, por tanto, $S_N|_Y$ sería un isomorfismo entre Y y un espacio de dimensión finita, lo cual es absurdo. Usando ahora el Principio de Selección de Bessaga-Pełczyński 1.2.15, obtenemos una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ congruente con $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. En particular, los espacios $\overline{\text{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\overline{\text{span}}\{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ son isomorfos. Pero, por el lema anterior, $\overline{\text{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a c_0. Por tanto, $\overline{\text{span}}\{y_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio de Y isomorfo a c_0.

□

Corolario 1.4.6. *Sea Y un subespacio de dimensión infinita de c_0. Entonces Y no es reflexivo*

Demostración. Por el lema anterior, existe un subespacio de Y isomorfo a c_0. Teniendo en cuenta que todo subespacio de un espacio reflexivo es reflexivo y que c_0 no es reflexivo, concluímos que Y no puede ser reflexivo.

□

Teorema 1.4.7 (Bessaga-Pełczyński, 1958)**.** *Sea $T : c_0 \to X$ un operador. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) T es compacto,
(ii) T es débil-compacto,
(iii) T es estrictamente singular

Demostración. La implicación $(i) \Longrightarrow (ii)$ es obvia. Para ver $(ii) \Longrightarrow (iii)$, suponemos que T no es estrictamente singular. Entonces existe un subespacio infinito dimensional $Y \subseteq c_0$ de forma que $T|_Y$ es un isomorfismo sobre su rango. Que T sea débil-compacto quiere decir que $T(B_{c_0})$ es relativamente débil-compacto en X. Esto implica que $T(B_Y)$ es relativamente débil-compacto en $T(Y)$. Pero $T|_Y : Y \to T(Y)$ es un homeomorfismo para los topologías débiles, luego B_Y es relativamente débil-compacto en Y y, como es cerrado, es débil-compacto. Deducimos entonces que Y es reflexivo. Por tanto, hemos encontrado un subespacio cerrado de dimensión infinita de c_0 que es reflexivo, lo que nos da una contradicción con el corolario anterior.

Procedemos a demostrar $\neg(i) \Longrightarrow \neg(iii)$. Suponemos que T no es compacto. Por la Proposición 1.4.2, $\sum_{n=1}^{\infty} T(e_n)$ no converge incondicionalmente. El lema 1.3.2 nos garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$ y una sucesión de conjuntos finitos y disjuntos de enteros $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, con $\max F_n < \min F_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\| \sum_{k\in F_n} T(e_k)\| \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n := \sum_{k\in F_n} T(e_k)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula por serlo la sucesión $(\sum_{k\in F_n} e_k)_{n=1}^{\infty}$. Por el corolario 1.2.16, podemos suponer que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica K. Para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$, se verifica

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \| = \|T(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \sum_{k\in F_n} e_k)\| \leq \|T\| \max_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|. \tag{1.1}$$

Además, si S_n son las sumas parciales respecto de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$|\xi_m| \|x_m\| = \|\xi_m x_m\| = \|S_m(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n) - S_{m-1}(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n)\| \leq \|S_m - S_{m-1}\| \| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\| \leq 2K \| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\|$$

y, como $\|x_m\| \geq \varepsilon$, obtenemos la desigualdad

$$|\xi_m| \leq \frac{2K}{\varepsilon} \| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\|$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, luego

$$\max_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| \leq \frac{2K}{\varepsilon} \| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\| \tag{1.2}$$

para cada $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$.

De las desigualdades (1.1) y (1.2) se deduce que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a la base canónica de c_0. Como $\max F_n < \min F_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\sum_{k\in F_n} e_k)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión base-bloque de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y, por el lema 1.4.4, es isométricamente equivalente a la base canónica de c_0 Además, de nuevo por las desigualdades (1.1) y (1.2), el operador T es un isomorfismo entre $\overline{\text{span}}\{\sum_{k\in F_n} e_k : n \in \mathbb{N}\}$ y $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, T no es estrictamente singular.

□

Como corolario del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.4.8 (Bessaga-Pełczyński). *Un espacio de Banach X no contiene subespacios isomorfos a c_0 si, y sólo si, toda serie WUC es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Por un lado, si X contiene una copia de c_0 entonces tiene una serie WUC que no es incondicionalmente convergente, ya que si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de c_0 entonces $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ no es incondicionalmente convergente pero es WUC. Por el otro lado, si existe una serie WUC que no es incondicionalmente convergente, entonces el operador dado por la proposición 1.4.2 no es compacto. Por el teorema de Bessaga-Pełczyński 1.4.7, T no es estrictamente singular y, por tanto, existe $Y \subset c_0$ un subespacio infinito-dimensional tal que $T|_Y$ es un isomorfismo. Concluímos por el lema 1.4.5 que existe un subespacio $Z \subset Y$ isomorfo a c_0 tal que $T|_Z$ es un isomorfismo y, por tanto, X contiene un subespacio isomorfo a c_0.

□

Teorema 1.4.9 (Sobczyk, 1941). *Sea X un espacio de Banach separable. Si E es una subespacio de X y $T : E \to c_0$ es un operador entonces existe un operador $\tilde{T} : X \to c_0$ tal que $\tilde{T}|_E = T$ y $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $\|T\| = 1$. El operador T debe ser de la forma

$$T(x) = (f_n^*(x))_{n=1}^{\infty} \quad \text{para cada } x \in E,$$

con $(f_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset E^*$. De la igualdad $\|T\| = 1$ se sigue $\|f_n^*\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, además, como $Tx = (f_n^*(x))_{n=1}^{\infty} \in c_0$ para cada $x \in E$, la sucesión $(f_n^*)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la topología débil* de E^*.

El teorema de Hahn-Banach nos garantiza la existencia de funcionales $(\phi_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, con $\|\phi_n^*\| \leq 1$ y verificando $\phi_n^*|_E = f_n^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La separabilidad de X implica que (B_{X^*}, ω^*) es metrizable. Sea ρ una métrica que metriza la topología débil* en B_{X^*}. Vamos a demostrar primero que se verifica $\lim_n \rho(\phi_n^*, B_{X^*} \bigcap E^{\perp}) = 0$. Suponemos que el límite anterior no es cierto y llegamos a una contradicción. Si el límite no es cero, existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\left(\phi_{n_k}^*\right)_{k=1}^{\infty}$ de $(\phi_n^*)_{n=1}^{\infty}$ verificando

$$\rho(\phi_{n_k}^*, B_{X^*} \bigcap E^{\perp}) > \varepsilon \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de Banach-Alaoglu y la metrizabilidad de (B_{X^*}, ω^*), existe $\phi \in B_{X^*}$ y una subsucesión $\left(\phi_{n_{k_j}}^*\right)_{j=1}^{\infty}$ de $\left(\phi_{n_k}^*\right)_{k=1}^{\infty}$ tal que $\phi_{n_{k_j}} \xrightarrow{\omega^*} \phi^*$.

Como

$$\phi^*(e) = \lim_j \phi_{n_{k_j}}^*(e) = \lim_j f_{n_{k_j}}^*(e) = 0 \text{ para cada } e \in E,$$

tenemos que $\phi^* \in E^\perp \bigcap B_{X^*}$. Pero de la desigualdad $\rho(\phi^*_{n_k}, B_{X^*} \bigcap E^\perp) > \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$ se sigue la desigualdad $\rho(\phi^*_{n_{k_j}}, \phi^*) > \varepsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, en contradicción con $\phi_{n_{k_j}} \xrightarrow{\omega^*} \phi^*$.

Por tanto, $\lim\limits_n \rho(\phi^*_n, B_{X^*} \bigcap E^\perp) = 0$. Además, como $E^\perp$ es débil*-cerrado, el conjunto $B_{X^*} \bigcap E^\perp$ es débil*-compacto. Existe entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ un funcional $\nu^*_n \in B_{X^*} \bigcap E^\perp$ de forma que $\rho(\phi^*_n, \nu^*_n) = \rho(\phi^*_n, B_{X^*} \bigcap E^\perp)$.

Tomando $x^*_n := \phi^*_n - \nu^*_n$ podemos definir el operador $\tilde{T}$ en X como $\tilde{T}(x) = (x^*_n(x))_{n=1}^\infty$ para cada $x \in X$. El operador $\tilde{T}$ verifica $\tilde{T}(x) \in c_0$ para cada $x \in X$ porque $x^*_n = \phi^*_n - \nu^*_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ y también verifica

$$\tilde{T}(e) = (\phi^*_n(e) - \nu^*_n(e))_{n=1}^\infty = (\phi^*_n(e))_{n=1}^\infty = T(e) \text{ para cada } e \in E.$$

Además, para cada $x \in X$,

$$\|\tilde{T}(x)\| = \sup |x^*_n(x)| = \sup |\phi^*_n(x) - \nu^*_n(x)| \leq \sup(\|\phi^*_n\| + \|\nu^*_n\|)\|x\| \leq 2\|x\|,$$

luego $\|\tilde{T}\| \leq 2$.

□

El siguiente corolario afirma que si E es un subespacio de un espacio de Banach separable X y E es isomorfo a c_0, entonces E es un subespacio complementado de X. Este resultado nos permitirá deducir en la proposición 2.4.5 que todo subespacio complementado X infinito-dimensional en un espacio $\mathcal{C}(K)$ separable, es decir, con K un espacio métrico compacto, contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.

Corolario 1.4.10. *Si E es un subespacio de un espacio de Banach separable X y E es isomorfo a c_0 entonces existe una proyección P de X en E.*

Demostración. Suponemos que $T : E \to c_0$ es un isomorfismo y sea $\tilde{T} : X \to c_0$ la extensión dada por el teorema anterior. Entonces $P = T^{-1}\tilde{T}$ es una proyección de X en E.

□

Capítulo 2

El teorema de Pełczyński

A lo largo de todo el capítulo, K será un espacio compacto Hausdorff. Denotaremos por $\mathcal{C}(K)$ al espacio de las funciones continuas en K que toman valores reales, dotado de la norma $\|f\|_\infty = \max_{x\in K}|f(x)|$. En las dos primeras secciones trabajaremos con los espacios $L^1(\mu)$ y $\mathcal{M}(K)$ para acabar dando una caracterización de sus subconjuntos débil-compactos.

Estos espacios están íntimamente relacionados con los espacios $\mathcal{C}(K)$, como demuestra el teorema de representación de Riesz. En la sección 3 veremos que $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Finalmente, en la última sección obtendremos uno de los resultados principales que perseguimos en este trabajo, el teorema de Pełczyński 2.4.3, del que obtendremos como consecuencia que todo subespacio complementado de un espacio $\mathcal{C}(K)$ contiene una copia de c_0.

2.1. El espacio $L^1(\mu)$

A lo largo de esta sección (Ω,Σ,μ) denotará un espacio de probabilidad. El objetivo de esta sección es introducir el concepto de familia equi-integrable en $L^1(\mu)$ para finalmente caracterizar los conjuntos débil-compactos de $L^1(\mu)$ mediante la equi-integrabilidad.

Lema 2.1.1. *Sea $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(\mu)$ una sucesión de funciones con norma uno y con soportes disjuntos. Entonces $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica complementada, isométricamente equivalente a la base canónica de ℓ_1.*

Demostración. Para cualquier sucesión de escalares $(\alpha_i)_{i=1}^n$ y cualquier $n\in\mathbb{N}$, se verifica

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\|_1 = \int_\Omega |\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i| d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |\alpha_i f_i| d\mu = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \int_\Omega |f_i| d\mu = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Por tanto, por el Criterio de Grunblum y el corolario 1.2.8, $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica isométricamente equivalente a la base canónica de ℓ_1 y sólo tenemos que comprobar que es complementada.

Definimos

$$h_n(\omega) = signo(f_n(\omega)) = \begin{cases} \frac{f_n(\omega)}{|f_n(\omega)|} & \text{si } |f_n(\omega)|>0 \\ 0 & \text{si } f_n(\omega)=0. \end{cases}$$

Entonces $u_n^* := h_n \in L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$ verifica $u_n^*(f_m) = \int_\Omega f_m h_n d\mu = \delta_{nm}$ para cada $n,m \in \mathbb{N}$. Además, como

$$\sum_{n=1}^\infty \|u_n^*(f)f_n\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |\int_\Omega f h_n d\mu| \leq \sum_{n=1}^\infty \int_{\{|f_n|>0\}} |f| d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty \{|f_n|>0\}} |f| d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1$$

para cada $f \in L^1(\mu)$, la serie $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n^*(f) f_n$ es convergente para cada $f \in L^1(\mu)$ y, por la observación 1.2.12, $\overline{\text{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio complementado de $L^1(\mu)$.

□

Definición 2.1.2. *Un subconjunto acotado $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$ se dice equi-integrable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| d\mu < \varepsilon$ para cada subconjunto $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$.*

Si $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$ es un subconjunto acotado, entonces la condición de equi-integrabilidad es equivalente a que el siguiente límite sea nulo

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f| d\mu = 0.$$

Veremos más adelante, con el teorema de Dunford-Pettis 2.1.7, que el concepto de conjunto equi-integrable caracteriza a los subconjuntos débil-compactos de $L^1(\mu)$. En términos de conjuntos equi-integrables también se puede obtener una mejora del teorema de la convergencia dominada:

Teorema 2.1.3 (Teorema de convergencia de Vitali)**.** *Si $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^1(\mu)$ es una sucesión equi-integrable que converge en μ-ctp a f, entonces f es integrable y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.*

Otra caracterización elemental de los conjuntos equi-integrables es la siguiente.

Lema 2.1.4. *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^1(\mu)$. Son equivalentes:*

(1) $\mathcal{F}$ es equi-integrable

(2) $\lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f| d\mu = 0$

Lema 2.1.5. *Sea $(h_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión acotada en $L^1(\mu)$ que converge en μ-ctp a 0. Entonces existe una subsucesión $(h_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(h_n)_{n=1}^\infty$ y una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(A_k)_{k=1}^\infty$ tal que*

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \to 0$$

Demostración. Sea $h_{n_1} := h_1$ y $F_1 = \{\omega \in \Omega : |h_{n_1}(\omega)| > \frac{1}{2}\}$. Como h_{n_1} es integrable, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada conjunto medible E, $\mu(E) < \delta_1$ implica $\int_E |h_{n_1}| < \frac{1}{2}$. Gracias a la convergencia a cero en μ-ctp podemos tomar $n_2 > n_1$ tal que $\mu(|h_{n_2}| > \frac{1}{2^2}) < \delta_1$. Definimos el conjunto $F_2 = \{\omega \in \Omega : |h_{n_2}(\omega)| > \frac{1}{2^2}\}$. Existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada conjunto medible E, $\mu(E) < \delta_2$ implica $\int_E |h_{n_i}| < \frac{1}{2^2}$ para $i = 1, 2$. Repitiendo el proceso indefinidamente obtenemos una subsucesión $(h_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(h_n)_{n=1}^\infty$ y una sucesión de conjuntos medibles $(F_k)_{k=1}^\infty$ verificando :

(1) $\mu(|h_{n_k}| > \frac{1}{2^k}) < \delta_{k-1}$,
(2) $F_k = \{\omega \in \Omega : |h_{n_k}(\omega)| > \frac{1}{2^k}\}$,
(3) $\mu(E) < \delta_k$ implica $\int_E |h_{n_i}| < \frac{1}{2^k}$ para $i = 1, 2, ..., k$.

En particular,

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{F_k}\|_1 = \int_\Omega |h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{F_k}| d\mu = \int_{F_k^c} |h_{n_k}| d\mu \leq \frac{1}{2^k}\mu(F_k^c) \leq \frac{1}{2^k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Definimos la sucesión de conjuntos disjuntos medibles $(A_j)_{j=1}^\infty$ como

$$A_j := F_j \setminus \bigcup_{k>j} F_k \text{ para cada } j \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\int_{F_k} |h_{n_k}| d\mu - \int_{A_k} |h_{n_k}| d\mu \leq \sum_{j>k} \int_{F_j} |h_{n_k}| d\mu \leq \sum_{j>k} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que, como $\mu(F_j) < \delta_{j-1}$ debido a (1) y (2), si $j > k$ entonces

$$\int_{F_j} |h_{n_k}| d\mu \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

por (3).

Por tanto,

$$\|h_{n_k}\chi_{F_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Concluímos así que

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \leq \|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{F_k}\|_1 + \|h_{n_k}\chi_{F_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}$$

y, por tanto, $\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \to 0$.

□

El siguiente lema es más fuerte que el lema 2.1.5 por el teorema de convergencia de Vitali.

Lema 2.1.6 (Lema de la subsucesión descompuesta)**.** *Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión acotada en $L^1(\mu)$. Existe una subsucesión $(g_n)_{n=1}^\infty$ de $(f_n)_{n=1}^\infty$ y una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(A_n)_{n=1}^\infty$ tal que si $B_n = \Omega \setminus A_n$ entonces $(g_n\chi_{B_n})_{n=1}^\infty$ es equi-integrable. Así, cada g_n se puede escribir como $g_n = g_n\chi_{A_n} + g_n\chi_{B_n}$, donde $(g_n\chi_{A_n})_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones con soporte disjunto y $(g_n\chi_{B_n})_{n=1}^\infty$ es una sucesión equi-integrable.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $\|f_n\|_1 \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dividimos la demostración en dos pasos. En el paso 1 vamos a encontrar una subsucesión $(f_{n_s})_{s=1}^{\infty}$ y una sucesión de conjuntos medibles $(F_s)_{s=1}^{\infty}$ tal que si $E_s = \Omega \setminus F_s$ entonces $(f_{n_s}\chi_{E_s})_{s=1}^{\infty}$ es equi-integrable y $\lim_{s\to\infty} f_{n_s}\chi_{F_s} = 0$ $\mu - ctp$. En el paso 2 tendremos que *disociar* los conjuntos F_s para obtener la sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ definitiva.

Para cada elección de $k \in \mathbb{N}$, la desigualdad de Chebyshev nos garantiza que se verifica

$$0 \leq \mu(|f_n| > k) \leq \frac{1}{k} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, como $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada para cada k, tenemos que existe una subsucesión $\left(f_n^1\right)_{n=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\left(\mu(|f_n^1| > 1)\right)_{n=1}^{\infty}$ converge. De nuevo, podemos tomar una subsucesión $\left(f_n^2\right)_{n=1}^{\infty}$ de $\left(f_n^1\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\left(\mu(|f_n^2| > 2)\right)_{n=1}^{\infty}$ converge. Iterando el proceso obtenemos en cada paso una subsucesión $\left(f_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$ de $\left(f_n^{k-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\left(\mu(|f_n^k| > k)\right)_{n=1}^{\infty}$ converge. Imitando el proceso diagonal de Cantor, tomamos ahora la sucesión $(f_n^n)_{n=1}^{\infty}$, que es una subsucesión de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y verifica que la sucesión $(\mu(|f_n^n| > k))_{n=1}^{\infty}$ converge para cada $k \in \mathbb{N}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la propia sucesión $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$ converge para cada $k \in \mathbb{N}$.

Sea α_k el límite de $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos,

$$1 \geq \int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_0^{\infty} \mu(|f_n| > t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mu(|f_n| > t)dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(|f_n| > k).$$

Por tanto, las sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ están uniformemente acotadas:

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu(|f_n| > k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(|f_n| > k) \leq 1.$$

Para alcanzar nuestro objetivo vamos a necesitar controlar la velocidad de convergencia de la sucesión $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$. Para ello, tomamos n_1 tal que $\mu(|f_{n_1}| > k) < \alpha_k + 2^{-2}$ para $k = 1,2$. A continuación tomamos $n_2 > n_1$ verificando $\mu(|f_{n_2}| > k) < \alpha_k + 2^{-4}$ para $k = 1,2,...,2^2$. Repitiendo el proceso, en cada paso tomamos $n_s > n_{s-1}$ verficando

$$\mu(|f_{n_s}| > k) < \alpha_k + 2^{-2s} \text{ para cada } k = 1,2,...,2^s. \tag{2.1}$$

Pasa cada $s \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_s = \{\omega \in \Omega : |f_{n_s}(\omega)| \leq 2^s\}$$

y

$$F_s = \{\omega \in \Omega : |f_{n_s}(\omega)| > 2^s\}.$$

Se verifica

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(F_s) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|f_{n_s}\|_1}{2^s} \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 1,$$

donde en la primera desigualdad hemos usado la desigualdad de Chebyshev. En particular, por el lema de Borel-Cantelli, para casi todo $\omega \in \Omega$, hay a lo sumo una cantidad finita de conjuntos F_s con $\omega \in F_s$. Por tanto, $(f_{n_s}\chi_{F_s})_{n=1}^{\infty}$ converge hacia cero en $\mu-$ctp.

A continuación vamos a probar que $(f_{n_s}\chi_{E_s})_{s=1}^{\infty}$ es equi-integrable. Para simplificar, denotamos $h_s = f_{n_s}\chi_{E_s}$ para cada $s \in \mathbb{N}$.

Es suficiente probar que

$$\sup_s \int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu \xrightarrow{r\to\infty} 0.$$

En el caso $s < r$, se sigue de la definición de E_s que $|h_s| \leq 2^s$ en μ-ctp, luego

$$\int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu = 0.$$

Por otro lado, si $s \geq r$, entonces

$$\int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu \leq \int_{\{|h_s|>2^r\}} (|h_s| - r) d\mu + r\mu(|h_s| > 2^r).$$

De (2.1) obtenemos

$$r\mu(|h_s| > 2^r) \leq r\alpha_{2^r} + r2^{-2s} \leq r\alpha_{2^r} + 2^{-r}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|h_s|>2^r\}} (|h_s| - r) d\mu = \int_0^\infty \mu(|h_s| - r > t) dt = \\
\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mu(|h_s| - r > t) dt \leq \\
\sum_{k=1}^{\infty} \mu(|h_s| - r > k-1) = \\
\sum_{k=0}^{\infty} \mu(|h_s| > r+k) = \sum_{k=r}^{\infty} \mu(|h_s| > k) \leq \\
\sum_{k=r}^{2^s} (\alpha_k + 2^{-2s}) \leq \\
\sum_{k=r}^{\infty} \alpha_k + 2^{-r},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad hemos usado (2.1).

Concluímos así que para cualquier s se verifica

$$\int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu \leq 2 \cdot 2^{-r} + r\alpha_{2^r} + \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_k \xrightarrow{r\to\infty} 0,$$

ya que como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq 1$ y $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, debe ser $r\alpha_{2^r} \to 0$ [1]. Del lema 2.1.4 se deduce la equi-integrabilidad de $(h_s)_{s=1}^{\infty}$ y concluimos así el paso 1. Procedemos a demostrar el paso 2. De la definición de h_s, se sigue que $\lim_{s\to\infty}(f_{n_s} - h_s) = 0$ $\mu-$ctp. Aplicando el lema 2.1.5 a la sucesión $h'_s = f_{n_s} - h_s$ obtenemos una subsucesión $\left(h'_{s_r}\right)_{r=1}^{\infty}$ y una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(A_r)_{r=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{r\to\infty} \|h'_{s_r}\chi_{B_r}\| = 0$, donde $B_r = \Omega \setminus A_r$. Claramente podemos asumir que $A_r \subset F_{s_r}$. Entonces el conjunto $\{h'_{s_r}\chi_{B_r}\}_{r=1}^{\infty}$ es equi-integrable y, por tanto, $\{h_{s_r} + h'_{s_r}\chi_{B_r}\}_{r=1}^{\infty}$ es también equi-integrable. Si escribimos $g_r = f_{n_{s_r}}$, entonces la subsucesión $(g_r)_{r=1}^{\infty}$ cumple las condiciones del enunciado, ya que $g_r\chi_{B_r} = h_{s_r} + h'_{s_r}\chi_{B_r}$. $\square$

La equivalencia principal $(i) \iff (ii)$ del siguiente teorema se debe a Dunford y a Pettis. Las equivalencias con (iii) y (iv) se deben a Kadec y Pełczyński.

Teorema 2.1.7 (Dunford-Pettis)**.** *Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^1(\mu)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ es relativamente débil-compacto

(ii) $\mathcal{F}$ es equi-integrable

(iii) $\mathcal{F}$ no contiene una sucesión básica equivalente a la base canónica de ℓ_1

(iv) $\mathcal{F}$ no contiene una sucesión básica complementada equivalente a la base canónica de ℓ_1

(v) Para cada sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles y disjuntos, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{A_n} |f| d\mu = 0$$

Demostración. Vamos a hacer la prueba demostrando que se verifican las siguientes implicaciones:

$$(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \iff (v)$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Vamos a ver que $\overline{\mathcal{F}}^{\omega^*}$, la clausura débil* de $\mathcal{F}$ en el bidual de $L^1(\mu)$, está contenida en $L^1(\mu)$.

Para cada $M \in (0,\infty)$, consideramos los conjuntos

$$\mathcal{F}_M := \{f\chi_{\{|f|\leq M\}} : f \in \mathcal{F}\}$$

y

$$\mathcal{F}^M := \{f\chi_{\{|f|>M\}} : f \in \mathcal{F}\}.$$

Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^M + \mathcal{F}_M$ y $\mathcal{F}^M$, $\mathcal{F}_M$ son relativamente débil*-compactos por ser acotados, deducimos que $\overline{\mathcal{F}}^{\omega^*} \subset \overline{\mathcal{F}^M}^{\omega^*} + \overline{\mathcal{F}_M}^{\omega^*}$.

[1] En caso contrario, existiría $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(\alpha_{2^{r_j}})_{j=1}^{\infty}$ de $(\alpha_{2^r})_{r=1}^{\infty}$ tal que $\alpha_{2^{r_j}} > \frac{\varepsilon}{r_j}$. Pero como $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, entonces $1 \geq \sum_{k=1}^{2^{r_j}} \alpha_k \geq 2^{r_j}\alpha_{2^{r_j}} > \frac{2^{r_j}}{r_j}\varepsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, lo cual es absurdo.

Además, si $f \in \mathcal{F}_M$ entonces $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq M$. Por tanto,

$$\mathcal{F}_M \subset MB_{L^2(\mu)}.$$

Como $L^2(\mu)$ es reflexivo, su bola unidad cerrada es débil-compacta. Así, $MB_{L^2(\mu)}$ es débil-compacto y, por tanto, $\mathcal{F}_M$ es relativamente débil-compacto en $L^2(\mu)$ para cada $M > 0$. Como la inclusión $i : L^2(\mu) \to L^1(\mu)$ es norma-norma continua, también es débil-débil continua y, consecuentemente, $\mathcal{F}_M = i(\mathcal{F}_M)$ es un conjunto relativamente débil-compacto en $L^1(\mu)$ para cada $M > 0$. Por tanto,

$$\overline{\mathcal{F}_M}^{\omega^*} \subset L^1(\mu) \text{ para cada } M > 0.$$

Por otro lado, si $f \in \mathcal{F}^M$, entonces $\|f\|_1 \leq \varepsilon(M)$, donde $\varepsilon(M) := \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f| d\mu$. Obtenemos así $\mathcal{F}^M \subset \varepsilon(M)B_{L^1(\mu)}$ y, como $B_{L^1(\mu)} \subset B_{L^1(\mu)^{**}}$ con $B_{L^1(\mu)^{**}}$ débil*-cerrado,

$$\overline{\mathcal{F}^M}^{\omega^*} \subset \varepsilon(M)B_{L^1(\mu)^{**}}.$$

En resumen, podemos expresar cada función $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\omega^*}$ como $f = \phi + \psi$, donde $\phi \in L^1(\mu)$ y $\psi \in \varepsilon(M)B_{L^1(\mu)^{**}}$. Se deduce de la expresión anterior que para cada $M > 0$ se verifica $d(f, L^1(\mu)) \leq \varepsilon(M)$. La equi-integrabilidad de $\mathcal{F}$ implica que $\lim\limits_{M\to\infty} \varepsilon(M) = 0$, luego $d(f, L^1(\mu)) = 0$ y $f \in L^1(\mu)$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Es inmediato ya que la base canónica de ℓ_1 no tiene subsucesiones débil-convergentes.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Es inmediato, ya que claramente $\neg(iv)$ implica $\neg(iii)$.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (ii)}$ Suponemos que falla (ii). Entonces existirá una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{F}$ y algún $\delta > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu \geq \delta.$$

Podemos suponer, por el lema de la subsucesión descompuesta 2.1.6, que podemos expresar cada función f_n como

$$f_n = f_n\chi_{A_n} + f_n\chi_{B_n},$$

donde $(A_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de Σ, $B_n = \Omega \setminus A_n$ y $(f_n\chi_{B_n})_{n=1}^\infty$ es equi-integrable. Como $\mathcal{F}$ es acotada, de la desigualdad de Chebyshev se deduce que $\mu(|f_n| > n) \to 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_n \bigcap \{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu = 0.$$

Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para cada $n > n_0$ se verifica

$$\int\limits_{B_n \bigcap \{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu < \frac{1}{2}\delta.$$

De la positividad de μ se siguen las desigualdades

$$a_n := \int_{A_n} |f_n| d\mu \geq \int_{A_n \bigcap \{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu = \int_{\{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu - \int_{B_n \bigcap \{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta \tag{2.2}$$

para cada $n > n_0$.
Suprimiendo los n_0 primeros términos de la sucesión, podemos suponer que se verifica $a_n \geq \frac{1}{2}\delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por el lema 2.1.1, la sucesión $(a_n^{-1} f_n \chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica complementada en $L^1(\mu)$ isométricamente equivalente a la base canónica de ℓ_1. Como $\mu(A_n) \to 0$ y la sucesión $\{f_k \chi_{B_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es equi-integrable, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \int_{A_n \bigcap B_m} |f_m| d\mu = 0.$$

Por tanto, existe una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ verificando

$$\int_{A_{n_k} \bigcap B_m} |f_m| d\mu < \frac{1}{4} 2^{-k} \delta$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que se verifica

$$\int_{A_n \bigcap B_m} |f_m| d\mu < \frac{1}{4} 2^{-n} \delta$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$.
Vamos a demostrar que$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica complementada equivalente a la base canónica de ℓ_1.Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ en $L^{\infty}(\mu)$ definida como

$$h_n(\omega) := signo(f_n(\omega)) \chi_{A_n}(\omega) = \begin{cases} \frac{f_n(\omega)}{|f_n(\omega)|} \chi_{A_n}(\omega) & \text{si } |f_n(\omega)| > 0, \\ 0 & \text{si } f_n(\omega) = 0, \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se verifica

$$\int_{\Omega} a_k^{-1} f_k h_n d\mu = \int_{A_n \bigcap A_k} a_k^{-1} f_k h_n d\mu + \int_{A_n \bigcap B_k} a_k^{-1} f_k h_n d\mu = \begin{cases} \int_{A_n \bigcap B_k} a_k^{-1} f_k h_n d\mu & \text{si } n \neq k, \\ a_k^{-1} \int_{A_k} |f_k| d\mu = 1 & \text{si } n = k. \end{cases} \tag{2.3}$$

Definimos los operadores $T : L^1(\mu) \to \ell_1$ y $R : \ell_1 \to L^1(\mu)$ como

$$Tf = \left(\int_{\Omega} f h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty} \quad \text{para cada } f \in L^1(\mu)$$

y

$$R(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n a_n^{-1} f_n \quad \text{para cada } \xi\in\ell_1.$$

Se verifica

$$TRe_k-e_k=T(a_k^{-1}f_k)-e_k=\left(a_k^{-1}\int_{\Omega} f_k h_n d\mu\right)_{n=1}^{\infty}-e_k=\left(a_k^{-1}\int_{A_n\bigcap B_k} f_k h_n d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$$

donde en la última igualdad hemos usado (2.3), teniendo en cuenta la igualdad $a_k^{-1}\int_{A_k\bigcap B_k} f_k h_k d\mu=0$ por ser $A_k\bigcap B_k=\emptyset$.
Por tanto,

$$\|TRe_k-e_k\|\le a_k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{A_n\bigcap B_k} f_k h_n d\mu\right|\le a_k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n\bigcap B_k}|f_k|d\mu\le a_k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}2^{-n}\delta\le\frac{1}{2}$$

para cada $k\in\mathbb{N}$. Esta última desigualdad demuestra[2] que $\|TR-I\|\le\frac{1}{2}$ y, por tanto, TR es invertible. En particular, T es suprayectiva y R es inyectiva. Sea $U:\ell_1\to\ell_1$ la inversa de TR. RUT es una proyección en el rango de R, ya que es continua, $(RUT)(RUT)=R(UTR)UT=RUT$ y T,U son suprayectivas. Por tanto, R es un isomorfismo de ℓ_1 en un subespacio complementado de $L^1(\mu)$. Por definición de R, concluímos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$ es una sucesión básica complementada equivalente a la base canónica de ℓ_1 . Hemos demostrado así que si no se verifica la condición (ii) entonces (iv) tampoco.

$\boxed{(v)\Rightarrow(ii)}$ En la implicación anterior, hemos obtenido (2.2) a partir de $\neg(ii)$. Como (2.2) contradice (v), la implicación $(v)\Rightarrow(ii)$ ya está demostrada.

$\boxed{(ii)\Rightarrow(v)}$ Es consecuencia de que si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos, entonces $\mu(A_n)\to 0$ y, por la equi-integrabilidad, será

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{A_n}|f|d\mu=0.$$

□

2.2. El espacio $\mathcal{M}(K)$

Llamamos $\mathcal{M}(K)$ al espacio vectorial formado por todas las medidas de Borel signadas, regulares y finitas en K, dotado de la norma $\|\mu\|=|\mu|(K)$.

---

[2]Para un operador $S:\ell_1\to\ell_1$ se verifica que $\|S\|=\text{máx}\{\|S(e_n)\|:n\in\mathbb{N}\}$ ya que $\|S(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n)\|=\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nS(e_n)\|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\|S(e_n)\|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,\text{máx}\{\|S(e_n)\|:n\in\mathbb{N}\}\le\text{máx}\{\|S(e_n)\|:n\in\mathbb{N}\}$ para cada $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n\in B_{\ell_1}$.

El teorema de Riesz afirma que $\mathcal{C}(K)^*$ es isométricamente isomorfo al espacio $\mathcal{M}(K)$. La dualidad está dada por

$$< f,\mu >= \int_K f d\mu.$$

En esta sección vamos a caracterizar los conjuntos relativamente débil-compactos de $\mathcal{M}(K)$ mediante el concepto de conjunto uniformemente regular. Esta caracterización vendrá dada por el teorema de Grothendieck 2.2.3.

Definición 2.2.1. *Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}(K)$ se dice que es uniformemente regular si para cada abierto $U \subseteq K$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto $H \subseteq U$ tal que $|\mu|(U \setminus H) < \varepsilon$ para cada $\mu \in \mathcal{A}$.*

Observación 2.2.2. *Por tanto, $\mathcal{A}$ es uniformemente regular si, y sólo si, para cada abierto U en K y cada $\varepsilon > 0$ existe $H \subseteq U$ compacto con $\sup_{\mu\in\mathcal{A}} |\mu|(U \setminus H) < \varepsilon$.*

Además, si $H \subset K$ es compacto, entonces $V = K \setminus H$ es abierto. Por tanto,si $\mathcal{A}$ es uniformemente regular, para cada $\varepsilon > 0$ existe C compacto contenido en V con $\sup_{\mu\in\mathcal{A}} |\mu|(V \setminus C) < \varepsilon$. Si $U = K \setminus C$, entonces U es abierto y verifica $\sup_{\mu\in\mathcal{A}} |\mu|(V \setminus C) = \sup_{\mu\in\mathcal{A}} |\mu|(U \setminus H) < \varepsilon$.

Por tanto, podemos afirmar que $\mathcal{A}$ es uniformemente regular si, y sólo si, para cada compacto H de K y cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto U en K con $H \subseteq U$ y tal que $\sup_{\mu\in\mathcal{A}} |\mu|(U \setminus H) < \varepsilon$.

Teorema 2.2.3 (Grothendieck, 1953)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto acotado de $\mathcal{M}(K)$. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A}$ es relativamente débil-compacto,
(ii) $\mathcal{A}$ es uniformemente regular,
(iii) para cada sucesión $(B_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos de Borel disjuntos en K y cada sucesión de medidas $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(B_n) = 0$,
(iv) para cada sucesión $(U_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos disjuntos de K y cada sucesión de medidas $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n(U_n) = 0$,
(iv)' para cada sucesión $(U_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos abiertos disjuntos de K y cada sucesión de medidas $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{A}$, $\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(U_n) = 0$.

Demostración. Vamos a demostrar

$$(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iv)' \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii).$$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Es inmediato teniendo en cuenta que cualquier conjunto abierto es un conjunto de Borel y que se verifican las desigualdades

$$0 \leq |\mu_n(U_n)| \leq |\mu_n|(U_n) \to 0.$$

$\boxed{(iv) \Rightarrow (iv)'}$ Suponemos que falla (iv)'. Existirá entonces una sucesión de abiertos disjuntos $(U_n)_{n=1}^\infty$ en K y una sucesión de medidas regulares signadas $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{A}$ de forma que $(|\mu_n|(U_n))_{n=1}^\infty$ no converge hacia cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escribimos $\mu_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ como la diferencia de su parte positiva y negativa. La variación total de la medida μ_n es $|\mu_n| = \mu_n^+ + \mu_n^-$ y podemos

suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(\mu_n^+(U_n))_{n=1}^\infty$ no tiende hacia cero. Además, tomando una subsucesión, podemos suponer que existe $\delta > 0$ tal que $\mu_n^+(U_n) \geq \delta > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
El teorema de descomposición de Hahn nos permite tomar conjuntos de Borel $B_n \subset U_n$ verficando

$$\mu_n(B_n) = \mu_n^+(U_n) \geq \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la regularidad de las medidas, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un abierto O_n con $B_n \subset O_n \subset U_n$ y $\mu_n(O_n) \geq \frac{\delta}{2}$. Por tanto, la sucesión de abiertos $(O_n)_{n=1}^\infty$ es disjunta pero $(\mu_n(O_n))_{n=1}^\infty$ no tiende hacia cero, contradiciendo (iv).

$\boxed{(iv)' \Rightarrow (ii)}$ Suponemos que $\mathcal{A}$ no es uniformemente regular. Sea $U \subset K$ abierto y $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{A}} |\mu|(U \setminus H) > \delta$$

para cada conjunto compacto $H \subset U$.
Sea $H_0 = \emptyset$. Tomamos $\mu_1 \in \mathcal{A}$ verificando $|\mu_1|(U \setminus H_0) > \delta$. Por la regularidad de la medida μ_1, existe un compacto $F_1 \subset U \setminus H_0$ con $|\mu_1|(F_1) > \delta$. Usando la propiedad de separación T_4 obtenemos la existencia de un conjunto abierto V_1 con

$$F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset U \setminus H_0.$$

Sea $H_1 := \overline{V_1}$. Como H_1 es compacto, existe $\mu_2 \in \mathcal{A}$ verificando $|\mu_2|(U \setminus H_1) > \delta$. Por la regularidad de la medida μ_2, existe un compacto $F_2 \subset U \setminus H_1$ con $|\mu_2|(F_2) > \delta$. Usando la propiedad de separación T_4 obtenemos la existencia de un conjunto abierto V_2 con

$$F_2 \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset U \setminus H_1.$$

Para el siguiente paso tomamos $H_2 := \overline{V_1} \bigcup \overline{V_2}$. Repitiendo el proceso indefinidamente obtenemos una sucesión de subconjuntos abiertos disjuntos $(V_n)_{n=1}^\infty$ de K y una sucesión de medidas $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ verificando $|\mu_n|(V_n) > \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado así $\neg(ii) \Longrightarrow \neg(iv)'$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Para ver que $\mathcal{A}$ es relativamente débil-compacto en $\mathcal{M}(K)$ es suficiente probar, por el teorema de Eberlein-Smulian, que para cada sucesión $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, el conjunto $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto.
Definimos

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\mu_n|.$$

Como $\mathcal{A}$ está acotado, la medida μ está bien definida, es positiva y finita. Además, cada medida μ_n es absolutamente continua respecto de μ. Por el teorema de Radon-Nykodym, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única función $f_n \in L^1(\mu)$ verificando $d\mu_n = f_n d\mu$, es decir, tal que $\mu_n(A) = \int_A f d\mu$ para cada conjunto de Borel $A \subset K$. Además, $\|\mu_n\| = \int_K |f_n| d\mu$.
Esta identificación nos da una isometría de $L^1(\mu)$ en el subespacio de $\mathcal{M}(K)$ formado por las medidas que son absolutamente continuas respecto de μ.

Como la isometría lleva cada f_n a μ_n, para ver que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto es suficiente comprobar que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente débil-compacto en $L^1(\mu)$.
Por el teorema de Dunford-Pettis 2.1.7, es suficiente demostrar que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equi-integrable. Suponemos que no lo es. Existirá entonces una sucesión de abiertos $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ en K y $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(U_n) < 2^{-n}$ y $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \int_{U_n} |f_k| d\mu > \varepsilon$.
Sea $V_n := \bigcup_{k>n} U_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de abiertos verificando

$$\mu(V_n) \leq \sum_{k>n} \mu(U_k) \leq \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

y

$$\sup_k \int_{V_n} |f_k| d\mu > \varepsilon.$$

Por la regularidad uniforme de $\mathcal{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto compacto $E_n \subset V_n$, para el cual

$$\sup_k |\mu_k|(V_n \setminus E_n) = \sup_k \int_{V_n \setminus E_n} |f_k| d\mu < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

De la desigualdad $\mu(E_n) \leq \mu(V_n) < \frac{1}{2^n}$ se deduce que

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 1} E_n\Big) = 0.$$

Por tanto, $|\mu_k|(\bigcap_{n\geq 1} E_n) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente regular y $\bigcap_{n\geq 1} E_n$ es compacto, por la observación 2.2.2 existe un abierto W con $\bigcap_{n\geq 1} E_n \subset W$ y

$$\sup_k |\mu_k|(W) = \sup_k \int_W |f_k| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por compacidad, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{1\leq n\leq N} E_n \subset W$ y

$$\sup_k \int_{\bigcap_{1\leq n\leq N} E_n} |f_k| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\int_{V_{N+1}} |f_k| d\mu \leq \int_{\bigcap_{1\leq n\leq N} E_n} |f_k| d\mu + \sum_{n=1}^{N} \int_{V_n \setminus E_n} |f_k| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < \varepsilon,$$

en contradicción con $\sup\limits_k \int_{V_{N+1}} |f_k| d\mu > \varepsilon$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de conjuntos de Borel disjuntos en K y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de medidas en $\mathcal{A}$. Sea

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\mu_n|.$$

El mismo razonamiento que hemos hecho al principio de la implicación anterior nos da en este caso una sucesión de funciones $g_n \in L^1(\mu)$ de forma que $d\mu_n = g_n d\mu$. Al igual que antes, si $\mathcal{A}$ es relativamente débil-compacto en $\mathcal{M}(K)$ entonces la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es relativamente débil-compacta en $L^1(\mu)$ y, en consecuencia, equi-integrable por el teorema de Dunford-Pettis 2.1.7. Por tanto, como $\mu(B_n) \to 0$ entonces

$$|\mu_n|(B_n) = \int_{B_n} |g_n| d\mu \to 0.$$

□

2.3. La propiedad de Dunford-Pettis

Definición 2.3.1. *Sean X e Y espacios de Banach. Un operador $T : X \to Y$ se dice que es* completamente continuo *o que es* un operador Dunford-Pettis *si $T(W)$ es un subconjunto de Y compacto en norma para cada conjunto $W \subset X$ débilmente compacto.*

Es obvio que un operador compacto siempre es Dunford-Pettis. Además, si X es reflexivo entonces un operador $T : X \to Y$ es compacto si, y sólo si, es Dunford-Pettis, por ser la bola unidad de X débil-compacta.

Proposición 2.3.2. *Sean X e Y espacios de Banach. Un operador $T : X \to Y$ es Dunford-Pettis si y sólo si T es débil-norma sucesionalmente continuo, es decir, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ débil-convergente a x, la sucesión $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a Tx en norma.*

Demostración. Por la linealidad de las topologías, T es débil-norma sucesionalmente continuo si, y sólo si, $Tx_n \to 0$ en norma para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ débil-nula.

Suponemos que T es Dunford-Pettis y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ débil-nula. Como $W := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\}$ es débil-compacto y T es Dunford-Pettis, $T(W)$ es compacto en norma. Si $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ no tuviese límite cero en norma, como es una sucesión contenida en un compacto, existiría una subsucesión $(Tx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente en norma a algún $y \in Y$ con $y \neq 0$. Pero como T es débil-débil continua y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es débil-nula, obtenemos una contradicción ya que debería ser $y = 0$. Por tanto, si T es Dunford-Pettis entonces es sucesionalmente débil-norma continuo.

Demostramos el recíproco. Sea T débil-norma sucesionalmente continuo. Sea W un conjunto débil-compacto de X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(W)$. Podemos tomar una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en W de forma que $Tx_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Eberlein-Smulian, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ débil-convergente a algún $x \in W$. Deducimos así que $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge en norma a Tx. Por tanto, hemos demostrado que $T(W)$ es sucesionalmente compacto en norma y, en consecuencia, $T(W)$ es compacto. Concluímos así que T es Dunford-Pettis.

□

Definición 2.3.3. *Un espacio de Banach X se dice que tiene* la propiedad de Dunford-Pettis (o, más brevemente, X tiene la propiedad (DP)) *si todo operador T débil-compacto de X en un espacio de Banach Y es Dunford-Pettis.*

El espacio c_0 tiene la propiedad (DP) porque para cada espacio de Banach Y, si $T : c_0 \to Y$ es débil-compacto, entonces T es compacto por el teorema de Bessaga-Pełczyński 1.4.7 y, por tanto, es Dunford-Pettis. Por otro lado, ningún espacio de Banach X infinito-dimensional y reflexivo puede tener la propiedad (DP) porque el operador identidad $I : X \to X$ es débil-compacto pero no es un operador de Dunford-Pettis, ya que la bola unidad cerrada de X no es compacta.

El objetivo de esta sección es demostrar que $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad (DP) para cualquier compacto Hausdorff K. Para ello, vamos a demostrar que $\mathcal{C}(K)$ está en las condiciones del siguiente teorema, que nos da una caracterización de la propiedad (DP).

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X tiene la propiedad (DP) si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X convergiendo débilmente a cero y para cada sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ en X^* convergiendo débilmente a cero se verifica $x_n^*(x_n) \to 0$.*

Demostración. Suponemos primero que X no tiene la propiedad (DP). Sea Y un espacio de Banach y $T : X \to Y$ un operador débil-compacto tal que T no es Dunford-Pettis. Entonces, por la proposición 2.3.2, existe $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X débil-nula verificando $\|Tx_n\| \geq \delta > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para algún $\delta > 0$.

El teorema de Hahn-Banach nos permite tomar una sucesión $(y_n^*)_{n=1}^\infty \subset Y^*$ tal que $y_n^*(Tx_n) = \|Tx_n\|$ y $\|y_n^*\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Gantmacher, T^* es débil-compacto, luego $T^*(B_{Y^*})$ es relativamente débil-compacto en X^*. Por el teorema de Eberlein-Smulian, podemos suponer que la sucesión $(T^*y_n^*)_{n=1}^\infty$ converge débilmente a algún $x^* \in X^*$. Entonces $(T^*y_n^* - x^*)_{n=1}^\infty$ converge débilmente a cero. Si fuese $(T^*y_n^* - x^*)(x_n) \to 0$, entonces, como $x^*(x_n) \to 0$, sería $(T^*y_n^*)(x_n) = \|Tx_n\| \to 0$, en contradicción con $\|Tx_n\| \geq \delta > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, hemos encontrado una sucesión $(T^*y_n^* - x^*)_{n=1}^\infty$ convergiendo débilmente a cero en X^* y una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ en X débil-nula tales que $(T^*y_n^* - x^*)(x_n)$ no converge a cero.

Vemos el recíproco. Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en X débil-convergente a cero y $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ débil-convergente a cero. Consideramos el operador

$$T : X \to c_0, \qquad Tx = (x_n^*(x))_{n=1}^\infty.$$

El operador adjunto T^* de T satisface $T^*e_k = x_k^*$ para cada $k \in \mathbb{N}$, donde $(e_k)_{k=1}^\infty$ denota la base canónica de ℓ_1. De las igualdades anteriores deducimos que $T^*(B_{\ell_1})$ está contenida en la envoltura convexa cerrada de $\{\pm x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ y como $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es débil-nula, el teorema de Krein-Smulian B.10 nos garantiza que T^* es débil-compacto. El teorema de Gantmacher nos garantiza que T también es débil-compacto. Por hipótesis, se sigue que T es Dunford-Pettis y, de nuevo por la proposición 2.3.2, debe ser $\|Tx_n\| \to 0$. Concluimos así que efectivamente la sucesión $(x_n^*(x_n))_{n=1}^\infty$ converge a cero, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$|x_n^*(x_n)| \leq \max_k |x_k^*(x_n)| = \|Tx_n\|.$$

□

Teorema 2.3.5 (Dunford-Pettis)**.** *Si K es un espacio compacto Hausdorff entonces $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad (DP).*

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débil-nula en $\mathcal{C}(K)$ y $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débil-nula en $\mathcal{M}(K)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ambas sucesiones están en la bola unidad de sus correspondientes espacios. Definimos la medida

$$\nu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\mu_n|.$$

Cada μ_n es absolutamente continua con respecto a ν. Por el teorema de Radon-Nikodym, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función $g_n \in L^1(\nu)$ tal que $d\mu_n = g_n d\nu$ y $\|\mu_n\| = \int_K |g_n| d\nu$. Esta identificación nos da una isometría de $L^1(\nu)$ en el subespacio de $\mathcal{M}(K)$ formado por las medidas regulares signadas en K que son absolutamente continuas con respecto a ν. Esta isometría lleva cada g_n a μ_n. Por tanto, la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es débil-nula por serlo la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$. El conjunto $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ será entonces relativamente débil-compacto en $L^1(\nu)$ y, en consecuencia, equi-integrable por el teorema 2.1.7.

Sea $M > 0$. Por el teorema de la convergencia dominada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|g_n|\leq M} f_n g_n d\nu = 0.$$

Por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n g_n d\nu \leq \sup_n \int_{|g_n|>M} |g_n| d\nu.$$

El término de la derecha tiende a cero cuando M tiende a infinito por ser la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ equi-integrable. Concluimos así que se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n g_n d\nu = 0.$$

□

Corolario 2.3.6. *Si $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ es un operador débil-compacto entonces T^2 es un operador compacto.*

Demostración. Como $\mathcal{C}(K)$ tiene la propiedad (DP), T lleva conjuntos relativamente débil-compactos a conjuntos relativamente compactos y, por tanto, como $T(B_{\mathcal{C}(K)})$ es relativamente débil-compacto, $T^2(B_{\mathcal{C}(K)})$ es relativamente compacto. □

2.4. El teorema de Pełczyński

Definición 2.4.1. *Sean X, Y, Z espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Decimos que T fija una copia de Z si existe un subespacio F de X isomorfo a Z y tal que $T|_F$ es un isomorfismo.*

Recordamos la primera pregunta que planteamos en la introducción de este trabajo:

Cuestión 2.4.2. *¿Bajo qué condiciones podemos garantizar que un operador $T : X \to Y$ fija una copia de un espacio Z?*

Si $X = \mathcal{C}(K)$ con K un espacio compacto Hausdorff, el teorema de Pełczyński 2.4.3 nos dice que es suficiente exigir que T no sea débil-compacto para que T fije un copia de c_0. En el siguiente capítulo veremos el teorema de Rosenthal 3.0.1, que afirma que si K es además metrizable y $T^*(Y^*)$ es no separable, entonces T fija una copia de $\mathcal{C}([0,1])$.

Teorema 2.4.3 (Teorema de Pełczyński)**.** *Sea K un espacio compacto Hausdorff, X un espacio de Banach y $T : \mathcal{C}(K) \to X$ un operador. Si T no es débil-compacto, entonces T fija una copia de c_0.*

Demostración. Suponemos que $T : \mathcal{C}(K) \to X$ no es débil-compacto. Por el teorema de Gantmacher B.9, el operador adjunto $T^* : X^* \to \mathcal{M}(K)$ tampoco es débil-compacto y, por tanto, el conjunto $T^*(B_{X^*})$ no es débil-compacto. El teorema de Grothendieck 2.2.3 nos garantiza la existencia de un $\delta > 0$, una sucesión de abiertos disjuntos $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ en K y una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en B_{X^*} tal que $\nu_n := T^* x_n^*$ verifica $\nu_n(U_n) > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos un subconjunto compacto F_n en U_n tal que $|\nu_n|(U_n \setminus F_n) < \frac{\delta}{2}$. Por el lema de Urysohn, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger $f_n \in \mathcal{C}(K)$ con $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n = 0$ en $K \setminus U_n$ y $f_n = 1$ en F_n.

Sea $S : c_0 \to \mathcal{C}(K)$ el embebimiento isométrico dado por la fórmula $Se_n = f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ denota la base canónica de c_0.

Vemos a continuación que el operador $TS : c_0 \to X$ no es compacto.

Como $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente nula, si TS fuese compacto, entonces sería Dunford-Pettis y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \| TSe_n \| = 0$. Sin embargo,

$$x_n^*(TSe_n) = x_n^*(Tf_n) = (T^*x_n^*)(f_n) = \int_K f_n d\nu_n = \int_{U_n} d\nu_n + \int_{U_n} (f_n - 1) d\nu_n \geq \delta - |\nu_n|(U_n \setminus F_n) \geq \frac{\delta}{2},$$

luego

$$\|TSe_n\| \geq \|x_n^*\| \|TSe_n\| \geq x_n^*(TSe_n) \geq \frac{\delta}{2} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

y $\|TSe_n\|$ no tiende hacia cero. Por tanto, TS no es compacto y, por el teorema de Bessaga-Pełczyński, TS tampoco es estrictamente singular. Sea Y un subespacio de dimensión infinita de c_0 tal que $TS|_Y$ es un isomorfismo. Por el lema 1.4.5, existe Z subespacio de Y isomorfo a c_0. Además, $TS|_Z$ debe ser un isomorfismo. Como S es un embebimiento isométrico, $E = S(Z)$ es un subespacio de $\mathcal{C}(K)$ isomorfo a c_0 tal que $T|_E$ es un isomorfismo.

$\square$

Para obtener el corolario que nos interesa del teorema de Pełczyński, necesitamos primero el siguiente resultado.

Teorema 2.4.4. *Si K es un espacio compacto Hausdorff entonces $\mathcal{C}(K)$ es separable si, y sólo si, K es metrizable.*

Demostración. Si $\mathcal{C}(K)$ es separable, entonces $(B_{\mathcal{C}(K)^*}, \omega^*)$ es un compacto metrizable. Pero la función $f : K \to B_{\mathcal{C}(K)^*}$ dada por $f(k)(x^*) = x^*(k)$ es un homeomorfismo sobre su imagen por ser una función continua e inyectiva entre dos compactos. Por tanto, K es homeomorfo a un subconjunto de un espacio metrizable, luego K es metrizable.

Suponemos ahora que K es un espacio compacto metrizable y d es una distancia en K. Entonces K es separable y podemos tomar una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ densa en K. Las funciones $d_n : K \to \mathbb{R}$ definidas como $d_n(k) = d(s_n, k)$ para cada $k \in K$ y cada $n \in \mathbb{N}$ son continuas. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por $\{1, d_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el teorema de Stone-Weierstrass, $\mathcal{A}$ es un álgebra densa en $\mathcal{C}(K)$. Pero el conjunto formado por los elementos de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_j d_1^{c_{1,j}} d_2^{c_{2,j}} d_3^{c_{3,j}} \ldots d_n^{c_{n,j}}$ con $a_j \in \mathbb{Q}$, $c_{i,j} \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ es un conjunto numerable y denso en $\mathcal{A}$, luego $\mathcal{C}(K)$ es separable.

$\square$

Teorema 2.4.5. *Sea K un espacio compacto (métrico). Si X es un subespacio infinito-dimensional complementado en $\mathcal{C}(K)$ entonces X contiene un subespacio (complementado) isomorfo a c_0.*

Demostración. Vemos primero que cualquier proyección $P : Z \to Z$ con Z un espacio de Banach es débil-compacta (resp. compacta) si, y sólo si, $P(Z)$ es reflexivo (resp. de dimensión finita). En efecto, si P es débil-compacta (resp. compacta), entonces $B_{P(Z)} = P(B_{P(Z)})$ es débil-compacta (resp. compacta). Pero $P(Z)$ es reflexivo (resp. de dimensión finita) si, y sólo si, $B_{P(Z)}$ es débil-compacta (resp. compacta).

Suponemos ahora que $P(Z)$ es reflexivo (resp. de dimensión finita). Entonces $B_{P(Z)}$ es débil-compacta (resp. compacta). Como $P(B_Z) \subset \|P\| B_{P(Z)}$, P es débil-compacta (resp. compacta).

Por el corolario 2.3.6, en el caso $Z = \mathcal{C}(K)$, una proyección es débil-compacta si, y sólo si, es compacta. Por tanto, si X es un subespacio infinito-dimensional complementado en $\mathcal{C}(K)$, entonces cualquier proyección $P : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ con $P(\mathcal{C}(K)) = X$ no es débil-compacta. El teorema de Pełczyński 2.4.3 nos garantiza que X tiene un subespacio isomorfo a c_0. Además, si el compacto K es metrizable, entonces el teorema 2.4.4 nos garantiza que $\mathcal{C}(K)$ es separable, luego podemos aplicar el corolario 1.4.10, obteniendo así que cualquier subespacio de X isomorfo a c_0 es complementado en X.

$\square$

Capítulo 3

El teorema de Rosenthal

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema de Rosenthal:

Teorema 3.0.1 (Rosenthal, 1972)**.** *Sea X un espacio de Banach, K un espacio métrico compacto no numerable y $T : \mathcal{C}(K) \to X$ un operador con $T^*(X^*)$ no separable. Entonces T fija una copia de $C([0,1])$.*

Como consecuencia de este teorema obtendremos el siguiente resultado, que resuelve parcialmente y de forma afirmativa el Problema del Subespacio Complementado que estudiaremos en el siguiente capítulo:

Teorema 3.0.2. *Si K es un espacio métrico compacto y X es un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$ con dual X^* no separable, entonces X es isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. En particular, K es no numerable y $X \approx \mathcal{C}(K) \approx \mathcal{C}(\Delta)$.*

Para demostrar estos resultados necesitaremos dos resultados fundamentales de los espacios $\mathcal{C}(K)$: el teorema de Miljutin 3.2.2 y el teorema de extensión de Borsuk 3.2.1.

Tanto en estos teoremas como en el teorema de Rosenthal, el conjunto de Cantor juega un papel importantísimo. Es por ello que dedicamos una primera sección a este conjunto y sus propiedades.

3.1. El conjunto de Cantor

Llamaremos *conjunto de Cantor*, y lo denotaremos con la letra Δ, al espacio topológico $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, donde $\{0,1\}$ se considera equipado con la topología discreta.

Destacamos las propiedades más inmediatas del conjunto de Cantor:

1. Como $\{0,1\}$ es un espacio compacto Hausdorff, el conjunto de Cantor Δ también es Hausdorff y compacto por el teorema de Tychonoff.
2. La función $h : \Delta \to [0,1]$ que asocia a cada elemento $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta$ el número $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t_n}{3^n}$ es un homeomorfismo entre Δ y un subconjunto cerrado del intervalo $[0,1]$. Por tanto,

$$\Delta \text{ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del intervalo } [0,1].$$

3. Además, el intervalo $[0,1]$ también es imagen continua de Δ. La aplicación de Δ en $[0,1]$ que asocia a cada elemento $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta$ el número $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{2^n}$ es continua y suprayectiva, pero no es inyectiva.
4. La función $\overline{d} : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}$ dada por

$$\overline{d}((t_n)_{n=1}^{\infty}, (t'_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - t'_n|}{2^n}$$

es una distancia en Δ que genera la topología producto.

En los siguientes apartados veremos al conjunto de Cantor Δ como un espacio métrico con la distancia $\overline{d}$ definida en el punto anterior.

Teorema 3.1.1. *Δ es homeomorfo al espacio producto de los conjuntos de Cantor $\Delta^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Consideramos $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una aplicación biyectiva. Las funciones $f : \Delta^{\mathbb{N}} \to \Delta$ y $g : \Delta \to \Delta^{\mathbb{N}}$ definidas como

$$f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, ...), ...) = (a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, ...)$$

y

$$g(a_1, a_2, a_3, ...) = ((a_{\alpha^{-1}(1,1)}, a_{\alpha^{-1}(1,2)}, ...), (a_{\alpha^{-1}(2,1)}, a_{\alpha^{-1}(2,2)}, ...), ...)$$

verifican $f \circ g = 1_{\Delta}$ y $g \circ f = 1_{\Delta^{\mathbb{N}}}$. Además, como Δ está equipada con la topología producto, f es continua si, y sólo si, $\pi_n \circ f$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\pi_n : \Delta \to \{0,1\}$ denota la proyección n-ésima. Sea $\alpha(n) = (m,r)$ y $\rho_m : \Delta^{\mathbb{N}} \to \Delta$ la proyección m-ésima de $\Delta^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\begin{aligned}\pi_n \circ f((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, ...), ...) = \pi_n(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, ...) = a_{\alpha(n)} = a_{(m,r)} = \\ \pi_r(a_{(m,1)}, a_{(m,2)}, ...) = \pi_r \circ \rho_m((a_{(1,1)}, a_{(1,2)}, ...), (a_{(2,1)}, a_{(2,2)}, ...), ...).\end{aligned}$$

Por tanto, $\pi_n \circ f = \pi_r \circ \rho_m$ y, como π_r, ρ_m son funciones continuas para cualquier $r,m \in \mathbb{N}$, concluimos que f es una función continua y biyectiva. Como Δ y $\Delta^{\mathbb{N}}$ son compactos, f es un homeomorfismo.

□

Nótese que, en la demostración anterior, podemos sustitur Δ por cualquier compacto $K^{\mathbb{N}}$ con K un compacto Hausdorff. Es inmediato comprobar con un razonamiento análogo que se verifica el siguiente teorema más general:

Teorema 3.1.2. *Un compacto Hausdorff K es homeomorfo a la potencia numerable de un compacto si, y sólo si, es homeomorfo a $K^{\mathbb{N}}$.*

Corolario 3.1.3. *$[0,1]^{\mathbb{N}}$ es imagen continua de Δ.*

Demostración. Sea $h:\Delta \to [0,1]$ la aplicación continua sobreyectiva de la propiedad 2, $g:\Delta \to \Delta^{\mathbb{N}}$ el homeomorfismo del teorema anterior y $\rho_m:\Delta^{\mathbb{N}} \to \Delta$ la proyección m-ésima. Entonces la función $k:\Delta \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ dada por

$$k((a_1,a_2,...)) = (h\rho_1 g(a_1,a_2,...), h\rho_2 g(a_1,a_2,...),...)$$

es claramente continua y además es suprayectiva, por serlo h, g y las proyeccions ρ_m.

□

El siguiente teorema nos da dos propiedades topólogicas muy importantes del conjunto $[0,1]^{\mathbb{N}}$, también llamado *cubo de Hilbert*, y del conjunto de Cantor Δ.

Teorema 3.1.4. *(i) Si K es un espacio métrico compacto entonces K es homeomorfo a un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$,*

(ii) Si K es un espacio métrico compacto no numerable entonces el conjunto de Cantor Δ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de K.

Demostración. Demostramos primero (i). Como K es un espacio métrico compacto, podemos tomar una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, de forma que $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en K. Además, podemos elegir una métrica ρ en K de forma que induzca la topología de K y tome valores entre 0 y 1. Sea $\theta : K \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ la función dada por la fórmula $\theta(x) = (\rho(x,s_n))_{n=1}^{\infty}$ para cada $x \in K$. La función θ es continua por serlo cada proyección $x \to \rho(x,s_n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Por la densidad de $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ en K, si $x \neq y$ son elementos distintos de K entonces existe s_n con $2\rho(x,s_n) < \rho(x,y)$. Deducimos que $\rho(x,s_n) < \rho(x,y) - \rho(x,s_n) \leq \rho(y,s_n)$, luego $\theta(x) \neq \theta(y)$ y θ es inyectiva. Como K es compacto, θ lleva cerrados a compactos y, como $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff, los compactos de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ son cerrados. Por tanto, θ es un homeomorfismo entre K y $\theta(K)$, que es un conjunto cerrado del cubo de Hilbert.

Demostramos ahora (ii). Sea E el conjunto de los puntos de K con entornos numerables. Vamos a ver que $K \setminus E$ tiene al menos un punto. Si fuese $E = K$, entonces considerando U_x un entorno abierto numerable de x para cada $x \in K$, $\{U_x : x \in E = K\}$ sería un cubrimiento por abiertos de K del que no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito, ya que cualquier unión finita de abiertos de la forma U_x es numerable. Por tanto, $E \neq K$. Sea $y \in E \setminus K$ y d una distancia que induce la topología de K y que sólo toma valores entre 0 y 1. Como K es no numerable, existe $\delta > 0$ de forma que $\{x : d(x,y) > \delta\}$ es no numerable. Por tanto, $K' = K \setminus B(y,\delta)$ es un compacto (por ser cerrado dentro de un compacto) no numerable, donde $B(y,\delta)$ denota la bola abierta de centro y y radio δ. Como también es metrizable, el mismo razonamiento de antes nos dice que existe un punto $x \in K'$ sin entornos numerables en K', luego tampoco tendrá entornos numerables en K.

Por tanto, hemos demostrado que dado un compacto no numerable y metrizable, podemos tomar dos puntos distintos $x,y \in K$ de forma que todo entorno de x y todo entorno de y es no numerable. Dado $\varepsilon > 0$, deducimos que podemos tomar dos compactos K_0, K_1 en K, no numerables, disjuntos y con diámetro a lo sumo ε (basta tomar $K_0 = B[x,\varepsilon']$ y $K_1 = B[y,\varepsilon']$ con $\varepsilon' > 0$ suficientemente pequeño, donde $B[z,r]$ denota la bola cerrada de centro z y radio r para cada $z \in K$ y cada $r > 0$).

Fijados los compactos K_0 y K_1 no numerables, disjuntos y con diámetro a lo sumo $\frac{1}{2}$, podemos obtener compactos $K_{0,0}, K_{0,1} \subset K_0$ y $K_{1,0}, K_{1,1} \subset K_1$ no numerables, disjuntos y con diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^2}$. Repitiendo este proceso, para cada $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \{0,1\}^n$ tenemos un compacto $K_{t_1,t_2,...,t_n}$ no numerable de diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^n}$ para el cual obtenemos dos compactos disjuntos no numerables $K_{t_1,t_2,...,t_n,0}$ y $K_{t_1,t_2,...,t_n,1}$ contenidos en él y de diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^{n+1}}$. Si definimos la aplicación $\sigma : \Delta \to K$ que a cada punto $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ le asocia el único punto de $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_1,...,t_n}$ [1], entonces, por construcción, σ es inyectiva. Además, σ es una función continua: si $t, t' \in \Delta$ y n es el menor natural tal que $t_{n+1} \neq t'_{n+1}$, entonces $\sigma(t), \sigma(t') \in K_{t_1,...,t_n}$ y, por tanto,

$$d(\sigma(t), \sigma(t')) \leq \frac{1}{2^n} \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} |t_k - t'_k| \frac{1}{2^k} = 2\overline{d}(t,t').$$

□

Es importante resaltar la idea de la demostración de (ii). Realmente lo que hemos demostrado es lo siguiente:

Observación 3.1.5. *Si K es un espacio métrico compacto y tenemos una familia de compactos no vacíos K_i^n en K con $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ verificando:*

(i) $K_{2i-1}^{n+1} \subset K_i^n$, $K_{2i}^{n+1} \subset K_i^n$,

(ii) $K_1^n, K_2^n, ..., K_{2^n}^n$ *son disjuntos dos a dos,*

(ii) $\operatorname{diam}(K_i^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

Entonces el conjunto

$$\Omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} K_i^n$$

es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Además, como los conjuntos $K_j^n \bigcap \Omega$ son subconjuntos cerrados y abiertos en Ω, las funciones $\chi_{K_j^n \bigcap \Omega}$ son continuas en Ω. El conjunto $\operatorname{span}\{\phi = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \chi_{K_j^n \bigcap \Omega} : c_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ *es una subálgebra de $\mathcal{C}(\Omega)$ que contiene las constantes y separa puntos de Ω. El teorema de Stone-Weierstrass nos garantiza que se verifica* $\mathcal{C}(\Omega) = \overline{\operatorname{span}}\{\phi = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \chi_{K_j^n \bigcap \Omega} : c_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$.

Esta construcción y el teorema de Miljutin 3.2.2 consituyen los primeros pasos para demostrar el teorema de Rosenthal. En efecto, para ver que el operador T del teorema de Rosenthal fija una copia de $\mathcal{C}([0,1])$, lo que tendremos que hacer es construir un subespacio de $\mathcal{C}(K)$ isomorfo a $\mathcal{C}(\Delta)$ de forma que T sea un isomorfismo sobre él. La herramienta para obtener un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}(\Delta)$ nos la da la observación anterior, ya que basta con construir una familia de compactos K_i^n en K en las condiciones anteriores y usar la isometría del teorema de extensión de Borsuk 3.2.1.

El siguiente resultado, junto con la técnica de descomposición de Pełzcyński, nos permitirá obtener el teorema 3.0.2.

[1] $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_1,...,t_n}$ es no vacío por ser intersección de una sucesión decreciente de compactos y sólo consta de un punto porque $diam(K_{t_1,...,t_n}) \to 0$.

Teorema 3.1.6. *$\mathcal{C}(\Delta)$ es isomorfo a $c_0(\mathcal{C}(\Delta))$.*

Demostración. Tomamos $\Delta_n = \{(s_k)_{k=1}^{\infty} \in \Delta : s_k = 0 \text{ si } k < n, s_n = 1\} \subset \Delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Los conjuntos Δ_n son abiertos, cerrados, disjuntos y homeomorfos a Δ. Por tanto, $\chi_{\Delta_n} \in \mathcal{C}(\Delta)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por ser los conjuntos Δ_n disjuntos, tenemos que $\overline{\text{span}}\{\chi_{\Delta_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es isométrico a c_0. El corolario del teorema de Sobczyk 1.4.10 nos garantiza que este subespacio es complementado en $\mathcal{C}(\Delta)$. Esto nos permite expresar $\mathcal{C}(\Delta)$ como $\mathcal{C}(\Delta) \approx E \oplus c_0 \approx E \oplus c_0 \oplus \mathbb{R} \approx \mathcal{C}(\Delta) \oplus \mathbb{R}$, donde hemos usado que $c_0 \approx c_0 \oplus \mathbb{R}$. Además, $\mathcal{C}(\Delta_n) \approx \mathcal{C}(\Delta)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ por ser Δ_n y Δ homeomorfos.

Consideramos ahora el espacio de Banach $(\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0}$. Del hecho de que $\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \approx \mathcal{C}(\Delta_1) \approx \mathcal{C}(\Delta)$ y que $\mathcal{C}(\Delta_n) \approx \mathcal{C}(\Delta)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que el espacio $(\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0}$ es isomorfo a $c_0(\mathcal{C}(\Delta))$.

Sea $F : \mathcal{C}(\Delta) \to (\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0}$ el operador dado por

$$F(f) = (f(0), f|_{\Delta_1} - f(0), f|_{\Delta_2} - f(0), ...)$$

para cada $f \in \mathcal{C}(\Delta)$, donde $0 = (0,0,0,...) \in \Delta$. Vamos a ver que F está bien definido. Sea $f \in \mathcal{C}(\Delta)$. De la continuidad de f en 0 y del hecho de que $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos cuyo diámetro tiende hacia cero y tales que $\overline{d}(\Delta_n, 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, se sigue que $\sup_{x\in\Delta_n} |f(x) - f(0)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f|_{\Delta_n} - f(0)\|_\infty = 0$ y F está bien definido. El operador F es continuo, ya que $\|F(f)\|_0 = \sup\{|f(0)|, \|f|_{\Delta_n} - f(0)\|_\infty\} \leq \sup\{\|f\|_\infty, 2\|f\|_\infty\} = 2\|f\|_\infty$ para cada $f \in \mathcal{C}(\Delta)$. Además, F es invertible con inversa $F^{-1} : (\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0} \to \mathcal{C}(\Delta)$ dada por

$$F^{-1}(r, f_1, f_2, ...)(x) = \begin{cases} f_n(x) + r & \text{si } x \in \Delta_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ r & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

ya que $\Delta = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) \bigcup \{0\}$. Como $\|F^{-1}(r, f_1, f_2, ...)\| = \text{máx}\{|r|, |f_n(x) + r| : n \in \mathbb{N}, x \in \Delta_n\} \leq \|f_n\|_\infty + |r| \leq 2\|(r, f_1, f_2, ...)\|_{c_0}$, deducimos que $\|F^{-1}\| \leq 2$ y F es un isomorfismo entre $\mathcal{C}(\Delta)$ y $(\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0}$. Concluímos así que

$$\mathcal{C}(\Delta) \approx (\mathbb{R} \oplus \mathcal{C}(\Delta_1) \oplus \mathcal{C}(\Delta_2) \oplus \mathcal{C}(\Delta_3) \oplus ...)_{c_0} \approx c_0(\mathcal{C}(\Delta)),$$

como queríamos demostrar.

□

3.2. Propiedades fundamentales de los espacios $\mathcal{C}(K)$

Comenzamos enunciando el teorema de extensión de Borsuk, que nos será de gran utilidad para demostrar el teorema de Rosenthal.

Teorema 3.2.1 (Borsuk, 1933)**.** *Sea K un espacio métrico compacto y sea E un subconjunto cerrado de K. Entonces existe un operador $T : \mathcal{C}(E) \to \mathcal{C}(K)$ tal que $(Tf)|_E = f$ para cada $f \in \mathcal{C}(E)$, $\|T\| = 1$ y $T1 = 1$. En particular, el operador T es una isometría y $\mathcal{C}(E)$ es isométrico a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración. Sea $U = K \setminus E$. Para definir el operador T tenemos que construir una extensión de f a K para cada $f \in \mathcal{C}(E)$. Esta extensión vendrá dada por una partición de la unidad adecuada. Consideramos el cubrimiento de U formado por los conjuntos $V_u = \{s \in U : d(s,u) < \frac{1}{2}d(u,E)\}$ para cada $u \in U$. Como U es paracompacto por ser metrizable, existe una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $(V_u)_{u\in U}$, es decir, una familia de funciones continuas $(\phi_j)_{j\in J}$ en U tal que

- $0 \leq \phi_j \leq 1$,
- $\{s \in U : \phi_j(s) > 0\}_{j\in J}$ es un cubrimiento localmente finito de U,
- $\sum_{j\in J} \phi_j(s) = 1$ para cada $s \in U$,
- Para cada $j \in J$ existe $u_j \in U$ tal que $\{s : \phi_j(s) > 0\} \subset V_{u_j}$.

Gracias a la compacidad de E, podemos tomar $v_j \in E$ con $d(u_j,E) = d(u_j,v_j)$ para cada $j \in J$. Podemos definir el operador T del enunciado como sigue:

$$Tf(s) = \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in E, \\ \sum_{j\in J} \phi_j(s) f(v_j) & \text{si } s \in U, \end{cases}$$

para cada $f \in \mathcal{C}(K)$. Vemos que Tf es una función continua en K. Como U es abierto, es claro que Tf es continua en U. Sea $t \in E$ y $\varepsilon > 0$. Podemos tomar $\delta > 0$ de modo que para cada $s \in E$ se verifica $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ si $d(s,t) < 4\delta$. Sea $s \in K$ con $d(s,t) < \delta$. Si $s \in E$, entonces $|Tf(s) - Tf(t)| = |f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Para cada $s \in U$ se verifica

$$|Tf(s) - Tf(t)| = |\sum_{\phi_j(s)>0} \phi_j(s) f(v_j) - f(t)| = |\sum_{\phi_j(s)>0} \phi_j(s)(f(v_j) - f(t))| \leq$$

$$\sum_{\phi_j(s)>0} \phi_j(s)|f(v_j) - f(t)| \leq \max_{\phi_j(s)>0} |f(v_j) - f(t)|.$$

Si $\phi_j(s) > 0$ entonces $s \in V_{u_j}$ y

$$d(s,u_j) < \frac{1}{2} d(u_j,E) \leq \frac{1}{2} d(u_j,t) \leq \frac{1}{2}(d(u_j,s) + d(s,t)),$$

luego $d(s,u_j) < d(s,t) < \delta$ y $d(u_j,E) = d(u_j,v_j) < 2\delta$. De las desigualdades anteriores se sigue

$$d(t,v_j) \leq d(t,s) + d(s,u_j) + d(u_j,v_j) < 4\delta.$$

Por tanto, $|Tf(s) - Tf(t)| < \varepsilon$ y Tf es una función continua. Además, por la definición de T, se verifica $T1 = 1$ y $\|T\| = 1$.

El operador T es una isometría porque

$$\|f\|_\infty = \|(Tf)|_E\|_\infty \leq \|Tf\|_\infty \leq \|T\|\|f\|_\infty = \|f\|_\infty \text{ para cada } f \in \mathcal{C}(E).$$

Además, si consideramos el operador $P : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ dado por $Pf = T(f|_E)$ para cada $f \in \mathcal{C}(K)$, entonces

$$P^2 f = P(T(f|_E)) = T(T(f|_E)|_E) = T(f|_E) = Pf$$

y $P(\mathcal{C}(K)) = T(\mathcal{C}(E))$. Por tanto, $\mathcal{C}(E)$ es isométrico a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$. □

El siguiente teorema caracteriza, salvo isomorfismos, los espacios $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto no numerable.

Teorema 3.2.2 (Miljutin, 1952)**.** *Sea K un espacio métrico compacto no numerable. Entonces $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$.*

Este teorema fue obtenido por Miljutin en su tesis en 1952, pero no fue publicado hasta 1966. Miljutin no consideró el resultado lo suficientemente importante como para publicarlo en una revista y después de su tesis comenzó a trabajar en otros campos. Fue Pełczyński quien, en una visita a Moscú, descubrió el resultado en la tesis de Miljutin e incitó a Miljutin a escribirlo en un artículo que finalmente se publicó en 1966.

Esbozo de la demostración. El teorema 3.1.4 y el teorema de extensión de Borsuk nos garantizan que si K es un espacio métrico compacto no numerable entonces $\mathcal{C}(\Delta)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}})$. La parte técnica de la demostración y que no incluimos en este trabajo es el hecho de que $\mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}})$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(\Delta)$. Una vez demostrado esto, por el teorema de descomposición de Pełczyński y el teorema 3.1.6, obtenemos que $\mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}})$ y $\mathcal{C}(\Delta)$ son isomorfos y, por tanto, $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(\Delta)$ también son isomorfos por el mismo motivo. Finalmente, en el caso particular en que $K = [0,1]$, también obtenemos que $\mathcal{C}([0,1])$ y $\mathcal{C}(\Delta)$ son isomorfos y, por tanto, se verifica el teorema de Miljutin; $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}([0,1])$ son isomorfos si K es un espacio métrico compacto no numerable. El lector que quiera ver una demostración detallada del teorema de Miljutin puede encontrarla en [AK06, Teorema 4.4.8]. □

3.3. Teorema de Rosenthal

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Rosenthal 3.0.1. Para ello necesitaremos varios lemas auxiliares. Por el teorema de Miljutin 3.2.2, $\mathcal{C}([0,1])$ y $\mathcal{C}(\Delta)$ son isomorfos. Por tanto, para demostrar el teorema de Rosenthal, es suficiente ver que el operador T del enunciado fija una copia de $\mathcal{C}(\Delta)$. Tenemos la ventaja de que sabemos cómo construir subconjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor dentro de cualquier espacio métrico compacto no numerable (Observación 3.1.5). La idea de esta construcción es la que usamos en el primer lema auxiliar.

Lema 3.3.1. *Sea Ω un espacio compacto Hausdorff, μ una medida de probabilidad regular y de Borel en Ω, θ una función medible Borel en Ω con valores reales y con $|\theta| \equiv 1$, $\mathcal{S}$ una σ-subálgebra de los conjuntos de Borel de Ω tal que $\mu|_{\mathcal{S}}$ es puramente no-atómica y $\varepsilon > 0$. Entonces existen conjuntos $F_i^n \in \mathcal{S}$ y subconjuntos compactos K_i^n de Ω, verificando las siguientes propiedades para cada $i \in \{1,2,3,\ldots,2^n\}$ y $n = 0,1,2,\ldots$:*

(i) $K_i^n \bigcap K_{i'}^n = F_i^n \bigcap F_{i'}^n = \emptyset$ *si* $i \neq i'$,

(ii) $K_i^n = K_{2i-1}^{n+1} \bigcup K_{2i}^{n+1}$ *y* $F_i^n = F_{2i-1}^{n+1} \bigcup F_{2i}^{n+1}$*,*
(iii) $K_i^n \subset F_i^n$*,*
(iv) $\frac{1-\varepsilon}{2^n} \leq \mu(K_i^n) \leq \mu(F_i^n) \leq \frac{1}{2^n}$*,*
(v) $\theta|_{K_1^0}$ *es continua.*

Antes de probar el lema, demostramos el siguiente sublema que nos va permitir construir los conjuntos F_i^n, K_i^n. En el sublema y en la demostración del lema anterior escribiremos $|E|$ para denotar a $\mu(E)$.

Sublema 3.3.2. *Sea* $E \in \mathcal{S}$*,* $0 < \tau < 1$ *y* $0 < \delta < 1$*. Existen subconjuntos* F, K *de* E *con* $F \in \mathcal{S}$ *y* K *compacto tal que:*
(a) $|E \setminus F| \leq \tau |E|$ *,*
(b) $|H \setminus K| \leq \delta |H|$ *para cada* $H \in \mathcal{S}$ *con* $H \subset F$ *,*
(c) $\theta|_K$ *es continua.*

Demostración. Por el teorema de Lusin, podemos tomar K un subconjunto compacto contenido en E con
$$(1-\tau\delta)|E| \leq |K|$$
y tal que $\theta|_K$ es continua. Ahora, por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función $\mathcal{S}$-medible k soportada en E, con valores en $[0,1]$ y tal que
$$\int_S k d\mu = |S \bigcap K| \text{ para cada } S \in \mathcal{S}.$$

A la función k se le llama la esperanza condicionada de χ_K respecto a la σ-álgebra $\mathcal{S}$. Sea $F = \{t : k(t) \geq 1-\delta\}$. Vamos a ver que F verifica (b). Sea $H \in \mathcal{S}$ con $H \subset F$. Entonces
$$|H \bigcap K| = \int_H k d\mu \geq (1-\delta)|H|,$$
luego
$$\delta |H| \geq |H| - |H \bigcap K| = |H \setminus K|.$$
Sólo falta comprobar que se verifica (a):
$$(1-\tau\delta)|E| \leq |K| = \int_{E\setminus F} k d\mu + \int_F k d\mu \leq (1-\delta)(|E|-|F|) + |F| = |E| + \delta(|F|-|E|),$$
luego
$$|E \setminus F| = |E| - |F| \leq \tau |E|.$$
□

Demostración lema 3.3.1. Sea $\varepsilon' > 0$ de forma que[2] $1-\varepsilon < (1-\varepsilon')\prod_{j=0}^{\infty}(1-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}})$.

[2] El producto $\prod_{j=0}^{\infty}(1-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}})$ converge y tiene límite no nulo porque la serie $\sum_{j=0}^{\infty}|-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}}|$ es convergente y $1-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}} \neq 0$ para cada $j \geq 0$ si $\varepsilon' < 1$. Por tanto, tomando $\varepsilon' < 1$ suficientemente próximo a cero, se verifica $1-\varepsilon < (1-\varepsilon')\prod_{j=0}^{\infty}(1-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}})$.

Dividimos la demostración en dos pasos. En el primer paso vamos a ver que el sublema nos permite construir una familia de conjuntos $\hat{F}_i^n \in \mathcal{S}$ y compactos $\hat{K}_i^n \in \Omega$ para cada $1 \leq i \leq 2^n$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$ de forma que:

(i') $\hat{K}_i^n \bigcap \hat{K}_{i'}^n = \hat{F}_i^n \bigcap \hat{F}_{i'}^n = \emptyset$ si $i \neq i'$,
(ii') $\hat{K}_{2i-1}^{n+1} \bigcup \hat{K}_{2i}^{n+1} \subset \hat{K}_i^n$ y $\hat{F}_{2i-1}^{n+1} \bigcup \hat{F}_{2i}^{n+1} \subset \hat{F}_i^n$,
(iii') $\hat{K}_{2i-1}^{n+1} \bigcup \hat{K}_{2i}^{n+1} \subset \hat{F}_i^n$,
(iv') $|H \setminus \hat{K}_i^n| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{\varepsilon'}{2^{j+1}} |H|$ para cada $H \in \mathcal{S}$ con $H \subset \hat{F}_i^n$,
(v') $\frac{1}{2^n} \prod_{j=0}^{n} (1 - \frac{\varepsilon'}{2^{j+1}}) < |\hat{F}_i^n| \leq \frac{1}{2^n}$,
(vi') $\theta|_{\hat{K}_1^1 \bigcup \hat{K}_2^1}$ es continua.

Sea τ_n y δ_n definidos como $\frac{\tau_n}{1-\tau_n} = \frac{\varepsilon'}{2^{n+1}} = \delta_n$ y $\hat{K}_1^0 = \Omega = \hat{F}_1^0$. Suponemos $\hat{K}_i^n$ y $\hat{F}_i^n$ definidos verificando (i'), (iv') y (v') para cada $1 \leq i \leq 2^n$. Fijamos i. Como $\mu|_{\mathcal{S}}$ es puramente no-atómica, existen E_1, E_2 subconjuntos disjuntos de $\hat{F}_i^n$ en $\mathcal{S}$ con $|E_1| = |E_2| = \frac{|\hat{F}_i^n|}{2}$. Por el sublema, podemos tomar para cada $j = 1, 2$ subconjuntos F_j y K_j de E_j tal que $F_j \in \mathcal{S}$, K_j es compacto, $\theta|_{K_j}$ es continua,

$$|E_j \setminus F_j| \leq \tau_{n+1} |E_j|$$

y

$$|H \setminus K_j| \leq \delta_{n+1} |H| \text{ para cada } H \in \mathcal{S} \text{ con } H \subset F_j.$$

Definimos $\hat{F}_{2i-1}^{n+1} = F_1$, $\hat{F}_{2i}^{n+1} = F_2$ y $\hat{K}_{2i-1}^{n+1} = \hat{K}_i^n \bigcap K_1$, $\hat{K}_{2i}^{n+1} = \hat{K}_i^n \bigcap K_2$.

De esta forma quedan definidos todos los conjuntos $\hat{F}_i^n$ y $\hat{K}_i^n$. Por construcción, se verifica (i'), (ii'), (iii') y (vi') trivialmente. Vemos que se verifica (iv') y (v'). Por un lado tenemos

$$|F_j| \geq (1 - \tau_{n+1}) |E_j| = (1 - \tau_{n+1}) \frac{|\hat{F}_i^n|}{2} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}}\right),$$

donde hemos usado que $\hat{F}_i^n$ verifica (v') y que $1 - \tau_{n+1} \geq 1 - \frac{\tau_{n+1}}{1-\tau_{n+1}} = 1 - \frac{\varepsilon'}{2^{n+2}}$.

Por el otro lado,

$$|F_j| \leq |E_j| = \frac{|\hat{F}_i^n|}{2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Por tanto, se verifica (v').

Finalmente, sea $H \in \mathcal{S}$ un subconjunto de F_j. Entonces, de la igualdad

$$H \setminus (K_j \bigcap \hat{K}_i^n) = (H \setminus K_j) \bigcup (H \setminus \hat{K}_i^n)$$

se sigue que

$$|H \setminus (K_j \bigcap \hat{K}_i^n)| \leq |H \setminus K_j| + |H \setminus \hat{K}_i^n| \leq \delta_{n+1} |H| + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}} |H| = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}} |H|,$$

y, por tanto, también se verifica (iv').

Pasamos al segundo paso, que es definir los conjuntos F_i^n y K_i^n cumpliendo las propiedades del enunciado. Definimos

$$K = K_1^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} \hat{K}_i^n \text{ y } F = F_1^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} \hat{F}_i^n.$$

Sea $K_i^n = K \bigcap \hat{K}_i^n$ y $F_i^n = F \bigcap \hat{F}_i^n$ para cada $i = 1,2,...,2^n$ y $n \in \{0,1,2,...\}$. K es compacto por ser intersección de compactos y, por tanto, los conjuntos K_i^n también son compactos. Por construcción, se verifica (i) y (ii). Vemos que se verifica (iii). Para cada $m \geq 0$, sea

$$\breve{K}_i^{n+m} := \bigcup_{(i-1)2^m+1 \leq j \leq i2^m} \hat{K}_j^{n+m}$$

y

$$\breve{F}_i^{n+m} := \bigcup_{(i-1)2^m+1 \leq j \leq i2^m} \hat{F}_j^{n+m}.$$

De (iii') se sigue que $\breve{K}_i^{n+m+1} \subset \breve{F}_i^{n+m}$ para cada $m \geq 0$. Por la propiedad (ii'), tenemos que

$$K_i^n = \bigcap_{m=0}^{\infty} \breve{K}_i^{n+m+1} \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} \breve{F}_i^{n+m} = F_i^n$$

y, por tanto, se verifica (iii).

Como $F_i^n \subset \hat{F}_i^n$, tenemos $|F_i^n| \leq \frac{1}{2^n}$. Por tanto, sólo nos queda demostrar que se verifica $\frac{1-\varepsilon}{2^n} \leq |K_i^n|$. Vamos a calcular primero una cota inferior para $|F_i^n|$. Como $|F_i^n| = \lim_{m\to\infty} \sum_{\hat{F}_j^{n+m} \subset \hat{F}_i^n} |\hat{F}_j^{n+m}|$ y hay 2^m conjuntos $\hat{F}_j^{n+m}$ en estas condiciones, de (v') se sigue que

$$|F_i^n| \geq \lim_{m\to\infty} 2^m \frac{1}{2^{n+m}} \prod_{j=0}^{n+m} (1 - \frac{\varepsilon'}{2^{j+1}}) = \frac{1}{2^n} \prod_{j=0}^{\infty} (1 - \frac{\varepsilon'}{2^{j+1}}).$$

Sea $G \in \mathcal{S}$ con $G \subset F_i^n$. Entonces

$$|G \setminus K_i^n| = \lim_{m\to\infty} \sum_{\hat{F}_j^{n+m} \subset \hat{F}_i^n} |(\hat{F}_j^{n+m} \bigcap G) \setminus \hat{K}_j^{n+m}|.$$

Pero, por (iv'), cada sumando está acotado superiormente por

$$\sum_{k=0}^{n+m} \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}} |G \bigcap \hat{F}_j^{n+m}|.$$

Como G es precisamente la unión disjunta de los conjuntos $G \bigcap \hat{F}_j^{n+m}$, obtenemos la desigualdad

$$|G \setminus K_i^n| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n+m} \frac{\varepsilon'}{2^{k+1}} |G| = \varepsilon' |G|.$$

En particular, para $G = F_i^n$ obtenemos $|F_i^n \setminus K_i^n| \leq \varepsilon' |F_i^n|$, luego

$$|K_i^n| \geq (1-\varepsilon')|F_i^n| \geq (1-\varepsilon')\frac{1}{2^n}\prod_{j=0}^{\infty}(1-\frac{\varepsilon'}{2^{j+1}}) \geq \frac{1-\varepsilon}{2^n},$$

donde en la primera desigualdad hemos usado que $K_i^n \subset F_i^n$ y en la última hemos usado la elección que hicimos para ε'. Por tanto, se verifica (iv) y la prueba está completa.

□

Para aplicar el lema 3.3.1 en la demostración del teorema de Rosenthal, necesitaremos una σ-álgebra $\mathcal{S}$ y una medida μ de forma que $\mu|_{\mathcal{S}}$ sea un espacio de medida puramente no-atómico. El siguiente lema nos garantiza la existencia de la σ-álgebra y medida anteriores a partir de la existencia de un subespacio Z de $\mathcal{C}(\Omega)^*$ isométrico a L^1 , donde por L^1 denotamos al espacio $L^1(m)$ con m la medida de Lebesgue en el intervalo unidad $[0,1]$.

Recordamos al lector que, para cada medida $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ positiva, el espacio $L^1(\nu)$ se identifica con el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las medidas de la forma $\mu_f(A) = \int_A f d\nu$ para cada conjunto medible A, con $f \in L^1(\nu)$. Análogamente, si $\theta \in L^1(\mu)$ con $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ positiva, entonces $\theta L^1(\mu)$ denota al espacio de las medidas $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ de la forma $\nu(A) = \int_A \theta f d\mu$ para cada conjunto medible A, con $f \in L^1(\mu)$.

Por tanto, a veces veremos a los elementos de $L^1(\nu)$ como elementos de $\mathcal{M}(K)$. Así, el lector puede encontrar en algún momento del texto una expresión del tipo $f(g)$, donde $f : K \to \mathbb{R}$ y $g : K \to \mathbb{R}$ son funciones en K. A priori, esta expresión no tiene ningún sentido. Sin embargo, ante una situación de este tipo, la función f estará denotando a un elemento de un espacio $L^1(\nu)$ y, por tanto, denotará a su vez a una medida de $\mathcal{M}(K)$, que identificamos con $\mathcal{C}(K)^*$. En resumen, la expresión $f(g)$ estará denotando al valor $f(g) = \int_K g f d\nu$, donde $g \in \mathcal{C}(K)$. El lector puede que se encuentre con esta situación a lo largo de la demostración del teorema de Rosenthal y de los lemas previos.

Lema 3.3.3. *Sea Ω un espacio compacto Hausdorff. Identificamos $\mathcal{C}(\Omega)^*$ con $\mathcal{M}(\Omega)$. Sea Z un subespacio de $\mathcal{C}(\Omega)^*$ isométrico a L^1. Entonces existe una medida de probabilidad, regular y de Borel μ en Ω, una función medible Borel θ con $|\theta| \equiv 1$ y una σ-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Borel de Ω, tal que $(\Omega, \mathcal{S}, \mu|_{\mathcal{S}})$ es un espacio de medida puramente no-atómico y $Z = \theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}})$.*

Demostración. Sea $T : L^1 \to \mathcal{C}(\Omega)^*$ una isometría en su imagen, con $Z = T(L^1)$. Afirmamos que existe una medida positiva finita de Borel ν tal que $Z \subset L^1(\nu)$. En efecto, como L^1 es separable, podemos tomar una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ densa en la bola unidad de L^1. Como T es una isometría, $(Tf_n)_{n=1}^{\infty}$ también es densa en la bola unidad de Z. Definiendo $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Tf_n|}{2^n}$ obtenemos una medida positiva finita de Borel regular en Ω de forma que $Tf_n \in L^1(\nu)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $Tf_n \ll \nu$. Teniendo en cuenta ahora la completitud de $L^1(\nu)$, concluimos que $Z = \overline{\operatorname{span}}\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L^1(\nu)$.

Sea $E_i^n = [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})$ para cada $i \in \{1,2,...,2^n\}$, $n = 0,1,2,...$ y sea $S_1^0 = \Omega$. Podemos tomar inductivamente conjuntos de Borel S_i^n y funciones ν-integrables y medibles Borel f_i^n verificando las siguientes condiciones para cada $i \in \{1,2,...,2^n\}$, $n = 0,1,2,...$:

(i) $S_i^n \bigcap S_{i'}^n = \emptyset$ si $i \neq i'$,
(ii) $S_i^n = S_{2i-1}^{n+1} \bigcup S_{2i}^{n+1}$,
(iii) $f_i^n = f_{2i-1}^{n+1} + f_{2i}^{n+1}$,
(iv) f_i^n está soportada en S_i^n,
(v) f_i^n es un representante de $T\chi_{E_i^n}$ en $L^1(\nu)$.

Como T es una isometría, se verifica

$$\|aT\chi_{E_i^n} + bT\chi_{E_{i'}^n}\|_{L^1(\nu)} = |a|\frac{1}{2^n} + |b|\frac{1}{2^n} = |a|\|T\chi_{E_i^n}\|_{L^1(\nu)} + |b|\|T\chi_{E_{i'}^n}\|_{L^1(\nu)}$$

para cada $a,b \in \mathbb{R}$ si $i \neq i'$. De aquí se deduce que

$$|aT\chi_{E_i^n} + bT\chi_{E_{i'}^n}| = |a||T\chi_{E_i^n}| + |b||T\chi_{E_{i'}^n}|$$

en ν-ctp. Deducimos de esta última igualdad que $T\chi_{E_i^n}$ y $T\chi_{E_{i'}^n}$ tienen representantes con soporte disjunto. En general, si f,g son dos funciones en $L^1(\nu)$ verificando $|f+g| = |f-g| = |f|+|g|$, entonces f y g tiene representantes con soporte disjunto. En efecto, en caso contrario existiría $\varepsilon > 0$, un conjunto de Borel A con $\nu(A) > 0$ y $a,b \in \{1,-1\}$ tal que $af > \varepsilon$ y $bg > \varepsilon$ en A. Tendríamos entonces

$$\begin{aligned} af + bg = |af| + |bg| = |af - bg| &= |(af-\varepsilon) - (bg-\varepsilon)| \\ &\leq |af-\varepsilon| + |bg-\varepsilon| = af + bg - 2\varepsilon \end{aligned}$$

en ν-ctp de A y, como $\nu(A) > 0$, llegamos a una contradicción.

Por tanto, $T\chi_{E_i^n}$ y $T\chi_{E_{i'}^n}$ tienen representantes con soportes disjuntos si $i \neq i'$. Esta afirmación nos permite construir las funciones f_i^n y los conjuntos S_i^n en las condiciones anteriores.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{A}_n$ la familia de todas las uniones finitas posibles de conjuntos S_i^n con $i = 1,2,...,2^n$ y $\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Sea $\mathcal{S}$ la σ-álgebra de conjuntos de Borel generada por $\mathcal{A}$ y sea μ la medida en Ω dada por $d\mu = |f_1^0|d\nu$. Definimos $\overline{\mu}$ como la medida signada que verifica $d\overline{\mu} = f_1^0 d\nu$. Por tanto, $\mu = |\overline{\mu}|$. Sea θ la función dada por la fórmula

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_1^0(t) = 0, \\ \frac{f_1^0(t)}{|f_1^0(t)|} & \text{si } f_1^0(t) \neq 0. \end{cases}$$

Por construcción, como

$$f_1^0 = \sum_{j=1}^{2^n} f_j^n = \sum_{j=1}^{2^n} f_j^n \chi_{S_j^n},$$

para cada conjunto de Borel S se verifica

$$\int_S f_i^n d\nu = \int_{S\bigcap S_i^n} f_i^n d\nu = \int_{S\bigcap S_i^n} f_1^0 d\nu = \overline{\mu}(S \bigcap S_i^n).$$

Vemos a continuación que la medida $\mu|_{\mathcal{S}}$ es puramente no-atómica. Sea $\mu|_{\mathcal{S}}(U) > 0$. Entonces

$$0 < \mu|_{\mathcal{S}}(U) = \int_U |f_1^0| d\nu = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{U \bigcap S_i^n} |f_i^n| d\nu \tag{3.1}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por ser T una isometría y por (v), debe ser

$$\int_{U \bigcap S_i^n} |f_i^n| d\nu \leq \int_{S_i^n} |f_i^n| d\nu = \|f_i^n\|_{L^1(\nu)} = \|\chi_{E_i^n}\| = \frac{1}{2^n} \tag{3.2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i = 1, 2, ..., 2^n$.

Por tanto, de (3.1) y (3.2) se deduce que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande deben existir $i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ distintos tales que $\int_{U \bigcap S_{i_1}^n} |f_i^n| d\nu$ y $\int_{U \bigcap S_{i_2}^n} |f_i^n| d\nu$ son positivos. Por tanto,

$$0 < \mu|_{\mathcal{S}}(U \bigcap S_{i_1}^n) = \int_{U \bigcap S_{i_1}^n} |f_i^n| d\nu < \int_{U \bigcap S_{i_1}^n} |f_i^n| d\nu + \int_{U \bigcap S_{i_2}^n} |f_i^n| d\nu \leq \sum_{i=1}^{2^n} \int_{U \bigcap S_i^n} |f_i^n| d\nu = \mu|_{\mathcal{S}}(U),$$

de donde se deduce que $\mu|_{\mathcal{S}}$ es puramente no-atómica.

Definimos $\overline{\mu}_i^n$ la medida dada por $\overline{\mu}_i^n(S) = \overline{\mu}(S_i^n \bigcap S)$ para cada $S \in \mathcal{S}$. Sea

$$B = \text{span}\{\chi_{E_i^n} : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\}.$$

Se verifica

$$TB = \text{span}\{f_i^n : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\} = \text{span}\{f_1^0 \chi_{S_i^n} : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\} =$$
$$\text{span}\{\theta \chi_{S_i^n} |f_1^0| : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\} \subset \theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}}).$$

Por tanto, como B es denso en L^1, tenemos $Z = TL^1 \subset \theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}})$. Vemos ahora el recíproco, es decir, $\theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}}) \subset Z = TL^1$.

Ya hemos visto que se verifica

$$Z = \overline{\text{span}}\{T\chi_{E_i^n} : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\} = \overline{\text{span}}\{\overline{\mu}_i^n : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\}.$$

Por tanto, queremos demostrar que $\theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}}) \subset \overline{\text{span}}\{\overline{\mu}_i^n : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\}$. Al ser $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos que genera $\mathcal{S}$, para cada $S \in \mathcal{S}$ y cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar $A \in \mathcal{A}$ de forma que $\mu(A \setminus S) + \mu(S \setminus A) < \varepsilon$. Por tanto,

$$\theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}}) = \overline{\text{span}}\{\theta \chi_S : S \in \mathcal{S}\} = \overline{\text{span}}\{\theta \chi_A : A \in \mathcal{A}\}.$$

De la igualdad $d\overline{\mu}_i^n = \chi_{S_i^n} d\overline{\mu} = \theta \chi_{S_i^n} d\mu$, se sigue que

$$\text{span}\{\theta \chi_A : A \in \mathcal{A}\} \subset \overline{\text{span}}\{\overline{\mu}_i^n : i \in \{1, 2, ...2^n\}, n = 0, 1, 2, ...\}.$$

Por tanto, podemos concluir que $\theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}}) \subset Z = TL^1$.

□

Decimos que un conjunto A es *denso en sí mismo* si no tiene puntos aislados.

Para seguir avanzando en nuestro camino hacia el teorema de Rosenthal, necesitamos ver un lema clásico de la teoría de espacio de Banach; el lema de Helly. La demostración que hacemos aquí está basada en el lema 2.21 de [BS00].

Lema 3.3.4 (Lema de Helly)**.** *Sea X un espacio de Banach y $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in X^*$. Fijamos $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$. Son equivalentes:*

(i) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $x_i^*(x_\varepsilon) = b_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y, además, $\|x_\varepsilon\| \leq \alpha + \varepsilon$,

(ii) Para cada $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ se verifica $|\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i| \leq \alpha \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*\|$.

Demostración. Si se verifica (i), entonces para cada $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$, existe x_ε con $\|x_\varepsilon\| \leq \alpha + \varepsilon$ tal que

$$|\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i| = |\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(x_\varepsilon)| \leq \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*\| \|x_\varepsilon\| \leq (\alpha + \varepsilon) \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*\|.$$

Como la desigualdad anterior es cierta para cada $\varepsilon > 0$, debe ser $|\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i| \leq \alpha \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*\|$.

Demostramos ahora la implicación contraria. Definimos el operador $M : X \to \mathbb{R}^n$ dado por $M(x) = (x_1^*(x), ..., x_n^*(x))$ para cada $x \in X$. Suponemos que no se verifica (i). Entonces existe $\varepsilon > 0$ de forma que $b \notin M(B(0, \alpha + \varepsilon))$. Como $M(B(0, \alpha + \varepsilon))$ es un conjunto convexo no vacío, la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach A.2 nos garantiza la existencia de un elemento $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ verificando

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(x)$$

para cada $x \in B(0, \alpha + \varepsilon)$. Deducimos que

$$|\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i| \geq \sup_{x \in B(0,\alpha+\varepsilon)} |\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*(x)| = (\alpha + \varepsilon) \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^*\|$$

y, por tanto, no se verifica (ii). □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por ℓ_n^∞ al espacio de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, ..., n\}$.

Lema 3.3.5. *Sea X un espacio de Banach separable y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en X^* isométricamente equivalente a la base usual de ℓ^1, de modo que $\{f_n : n = 1, 2, ...\}$ es denso en sí mismo en la topología débil*. Entonces existe un subespacio U de X^* , isométrico y débil*-isomorfo a $\mathcal{C}(\Delta)^*$, tal que*

$$\sup_{u \in B_U} |u(x)| \leq \sup_n |f_n(x)| \text{ para cada } x \in X.$$

Demostración. Sea $D = \{f_1, f_2, ...\}$, $K = \overline{D}^{\omega^*}$ y d una métrica para B_{X^*} que induce la topología débil*. Tomamos $K_1^0 = K$. Sea $n \geq 0$. Suponemos que hemos fijado $K_1^n, ..., K_{2^n}^n \subset K$, disjuntos y de forma que cada K_i^n sea compacto, con interior no vacío en K y con diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^n}$. Vamos a construir a partir de ellos los conjuntos $K_1^{n+1}, K_2^{n+1}, ..., K_{2^{n+1}}^{n+1}$ con las mismas propiedades. Tomamos F_{n+1} un subconjunto finito $\frac{1}{2^{n+1}}$-denso en la esfera de $\ell_{2^{n+1}}^\infty$, es decir, de forma que para cada $x \in \ell_{2^{n+1}}^\infty$ con $\|x\|_\infty = 1$ existe $f \in F_{n+1}$ con $\|f - x\|_\infty < \frac{1}{2^{n+1}}$. Además, tomamos F_{n+1} conteniendo a los vectores de la base canónica de $\ell_{2^{n+1}}^\infty$.

Como D es denso en sí mismo, para cada $i = 1, 2, ..., 2^n$ podemos tomar $d_{2i-1}^n, d_{2i}^n \in D$ elementos distintos en el interior de K_i^n. Como los elementos d_i^n con $i = 1, 2, ..., 2^{n+1}$ son isométricamente equivalentes a la base canónica de $\ell_{2^{n+1}}^1 = (\ell_{2^{n+1}}^\infty)^*$, para cada $f \in F_{n+1} \subset S_{\ell_{2^{n+1}}^\infty}$, tenemos

$$\left|\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k f(k)\right| \leq \sum_{k=1}^{2^{n+1}} |a_k| = \left\|\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a_k d_k^n\right\|$$

para cualesquiera $a_1, a_2, ..., a_{2^{n+1}} \in \mathbb{R}$. El lema de Helly nos garantiza que existe $x_f^n \in X$ con $\|x_f^n\| \leq 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$ y $d_j^n(x_f^n) = f(j)$ para cada $j = 1, 2, ..., 2^{n+1}$.

Ahora, para cada i y cada $j = 2i-1, 2i$, tomamos K_j^{n+1} un entorno compacto en K_i^n de d_j^n, de diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^{n+1}}$, y contenido en

$$\bigcap_{f \in F_{n+1}} \left\{k \in K_i^n : |k(x_f^n) - d_j^n(x_f^n)| < \frac{1}{2^{n+1}}\right\},$$

que es un conjunto abierto relativo en K_i^n (es una intersección finita de abiertos) y no vacío, ya que $d_j^n \in F_{n+1}$.

Vamos a ver que los conjuntos K_{2i-1}^{n+1} y K_{2i}^{n+1} son disjuntos. Suponemos que existe un elemento k en ambos conjuntos. De las desigualdades $|k(x_f^n) - d_{2i-1}^n(x_f^n)| < \frac{1}{2^{n+1}}$ y $|k(x_f^n) - d_{2i}^n(x_f^n)| < \frac{1}{2^{n+1}}$, se sigue $|f(2i) - f(2i-1)| = |d_{2i}^n(x_f^n) - d_{2i-1}^n(x_f^n)| < \frac{1}{2^n}$ para cada $f \in F_{n+1}$. Pero, en particular, para $f \in F_{n+1}$ el vector 2i-ésimo de la base canónica de $\ell_{2^{n+1}}^\infty$, tendríamos $1 = |f(2i) - f(2i-1)| < \frac{1}{2^n}$, lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto, los conjuntos K_{2i-1}^{n+1} y K_{2i}^{n+1} son disjuntos. Finalizamos así la definición de los conjuntos K_i^n con $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ y $n = 0, 1, 2, ...$, de manera que K_i^n , $K_{i'}^n$ son disjuntos si $i \neq i'$ y cada K_i^n es un conjunto compacto con interior no vacío y con diámetro a lo sumo $\frac{1}{2^n}$. Definimos

$$\Omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} K_i^n.$$

Por construcción de los conjuntos K_i^n y la observación 3.1.5, el conjunto Ω es homeomorfo al conjunto de Cantor. Sea $n \geq 0$ y $c_1, ..., c_{2^n}$ escalares tales que

$$\phi = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \chi_{K_j^n \bigcap \Omega}$$

tiene norma 1 en $\mathcal{C}(\Omega)$. Podemos elegir $f \in F_n$ con $|f(j) - c_j| < \frac{1}{2^n}$ para cada $j = 1, 2, ..., 2^n$. Fijado j, si $k \in K_j^n \bigcap \Omega$ entonces

$$|k(x_f^n) - f(j)| < \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto, si definimos $T : X \to \mathcal{C}(\Omega)$ como $(Tx)(\omega) = \omega(x)$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $x \in X$, tenemos que T es un operador bien definido y, además, se verifica

$$\|Tx_f^n - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La misma función ϕ la podemos expresar también como

$$\phi = \sum_{j=1}^{2^m} c'_j \chi_{K_j^m \cap \Omega}$$

con $m > n$ tan grande como queramos, tomando los c'_j de forma adecuada. Deducimos entonces que, fijada ϕ, podemos tomar $f \in F_m$ de forma que

$$\|Tx_f^m - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

para cada m suficientemente grande. Como las funciones de la forma $\phi = \sum_{j=1}^{2^n} c_j \chi_{K_j^n \cap \Omega}$ son densas en $\mathcal{C}(\Omega)$, concluimos que T tiene rango denso en $\mathcal{C}(\Omega)$ y, además, como cada x_f^m verifica $\|x_f^m\|_\infty \leq 1 + \frac{1}{2^{m+1}}$, podemos garantizar que $\overline{T(B_X)} = B_{\mathcal{C}(\Omega)}$.

Vamos a ver a partir de esta última igualdad que T^* es una isometría. Sea $\mu \in \mathcal{C}(\Omega)^*$. Tenemos:

$$\|T^*(\mu)\| = \sup_{x \in B_X} |T^*(\mu)(x)| = \sup_{x \in B_X} |\mu(Tx)| = \sup_{\bar{x} \in B_{\mathcal{C}(\Omega)}} |\mu(\bar{x})| = \|\mu\|,$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que $\overline{T(B_X)} = B_{\mathcal{C}(\Omega)}$. Sea $U = T^*(\mathcal{C}(\Omega)^*)$. Hemos demostrado que U es isométrico y débil*-isomorfo a $\mathcal{C}(\Omega)^*$. Como Ω es homeomorfo a Δ, podemos concluir que U es isométrico y débil*-isomorfo a $\mathcal{C}(\Delta)^*$. Además, para cada $x \in X$, tenemos

$$\sup_{u \in B_U} |u(x)| = \sup_{u \in B_{T^*(\mathcal{C}(\Omega)^*)}} |u(x)| = \sup_{\mu \in B_{\mathcal{C}(\Omega)^*}} |T^*(\mu)(x)| = \sup_{\mu \in B_{\mathcal{C}(\Omega)^*}} |\mu(Tx)| = \|Tx\|_\infty =$$
$$= \sup_{\omega \in \Omega} |Tx(\omega)| = \sup_{\omega \in \Omega} |\omega(x)| \leq \sup_{f \in K} |f(x)| = \sup_n |f_n(x)|,$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\Omega \subset K$ y la última igualdad es consecuencia de $K = \overline{D}^{\omega^*} = \overline{\{f_1, f_2, ...\}}^{\omega^*}$. Por tanto, U verifica las condiciones del enunciado.

$\square$

Antes de ver el siguiente lema, hacemos una pequeña observación. Sea K un espacio métrico compacto y $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{M}(K)$. Denotamos por $\vee\{\mu_n : n = 1, 2, ...\}$ a la medida $\mu = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_n|}{1+\|\mu_n\|}$. La medida μ depende del orden de la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^\infty$. Sin embargo, para cada $\nu \in \mathcal{M}(K)$, la medida $\frac{d\nu}{d\mu}$ no depende del orden, ya que si σ es una permutación en $\mathbb{N}$ y $\mu' = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_{\sigma(n)}|}{1+\|\mu_{\sigma(n)}\|}$, entonces, por ser $\mu' \ll \mu$ y $\mu \ll \mu'$, se verifica $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\mu'}$ (vista como una igualdad entre medidas). Esta observación nos va a permitir trabajar con las medidas de la forma $\frac{d\nu}{d\mu}$ con $\mu = \vee\{\mu_\alpha : \alpha < \beta\}$ y β un ordinal numerable.

Lema 3.3.6. *Sea K un espacio métrico compacto y L un subconjunto convexo, simétrico, no separable de $\mathcal{C}(K)^*$. Entonces existe $\delta > 0$ verificando la siguiente afirmación:*

Para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia no numerable $\{l_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ contenida en L y una familia de medidas de Borel $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ mutuamente singulares tales que para cada $\alpha \in \Gamma$ se verifica

$$\|\mu_\alpha - l_\alpha\| \leq \varepsilon \text{ y } \|\mu_\alpha\| \geq \delta.$$

Demostración. Denotamos por $\Gamma = \omega_1$ el conjunto de todos los ordinales numerables con el orden usual. Para cada $\mu \in \mathcal{C}(K)^*$ existe $\lambda \in L$ de forma que $\lambda - \frac{d\lambda}{d\mu} \neq 0$. En caso contrario existiría $\mu \in \mathcal{C}(K)^*$ de forma que $\lambda = \frac{d\lambda}{d\mu}$ para cada $\lambda \in L$, luego por el teorema de Radon-Nikodym sería $L \subset L^1(|\mu|)$ y, por tanto, L sería separable[3]. Sea $\lambda_0 \in L$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $\nu_0 = 0$. Suponemos definidos λ_α y ν_α para todo $\alpha < \beta$ con β un ordinal numerable no nulo. Definimos $\nu_\beta = \bigvee\{\lambda_\alpha : \alpha < \beta\}$. Por la observación inicial, podemos tomar $\lambda_\beta \in L$ de forma que

$$\left\|\lambda_\beta - \frac{d\lambda_\beta}{d\nu_\beta}\right\| > 0.$$

De esta forma podemos definir λ_α y ν_α para todo $\alpha \in \Gamma$. Por construcción se verifica

$$\lambda_\alpha \ll \nu_\beta \text{ y } \nu_\alpha \ll \nu_\beta \text{ si } \alpha < \beta. \tag{3.3}$$

Debe existir así un subconjunto $\Gamma_1 \subset \Gamma$ no numerable y $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\lambda_\beta - \frac{d\lambda_\beta}{d\nu_\beta}\right\| > 2\delta \text{ y } \|\lambda_\beta\| > \delta \text{ para cada } \beta \in \Gamma_1.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $\nu \in \mathcal{C}(K)^*$ y cada $\alpha \in \Gamma$, la familia $\left\{\frac{d\lambda_\beta}{d\nu} : \beta > \alpha, \beta \in \Gamma_1\right\}$ es un conjunto no numerable de medidas en el espacio separable $L^1(|\nu|)$, luego tiene un punto de acumulación. Deducimos por tanto que existen $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1$ con $\alpha < \beta_1 < \beta_2$ tal que

$$\left\|\frac{d\lambda_{\beta_1}}{d\nu} - \frac{d\lambda_{\beta_2}}{d\nu}\right\| < 2\varepsilon,$$

ya que si fuese $\left\|\frac{d\lambda_{\beta_1}}{d\nu} - \frac{d\lambda_{\beta_2}}{d\nu}\right\| \geq 2\varepsilon$ para cada $\alpha < \beta_1 < \beta_2 < \omega_1$, entonces obtendríamos una colección no numerable de bolas disjuntas en $L^1(|\nu|)$.

Esta afirmación nos va a permitir construir por inducción una familia de medidas $l_\gamma \in L$ y medidas $\mu_\gamma \in \mathcal{C}(K)^*$ verificando las siguientes condiciones para cada $\gamma \in \Gamma$:

(i) $\|\mu_\gamma\| \geq \delta$,
(ii) $\|\mu_\gamma - l_\gamma\| \leq \varepsilon$,
(iii) $\mu_\gamma \perp \mu_\beta$ si $\beta \neq \gamma$,

[3] Si μ es medida de Borel regular y positiva sobre un espacio métrico compacto entonces $L^1(\mu)$ separable.

(iv) Existe $\tau(\gamma) \in \Gamma$ con $\mu_\gamma \ll l_\gamma \ll \nu_{\tau(\gamma)}$.

Sea β_0 el primer elemento de Γ_1 y $l_0 = \lambda_{\beta_0} = \mu_0$. Sea $\tau(0)$ el ordinal sucesor de β_0. Fijamos $\eta > 0$ un ordinal numerable y suponemos l_γ, μ_γ definidas para cada $\gamma < \eta$ verificando (i),(ii),(iii) y (iv). Sea α un ordinal numerable con $\tau(\gamma) < \alpha$ para cada $\gamma < \eta$. Por la observación hecha anteriormente, podemos tomar $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1$ verificando $\alpha < \beta_1 < \beta_2$ y

$$\left\| \frac{d\lambda_{\beta_1}}{d\nu_\alpha} - \frac{d\lambda_{\beta_2}}{d\nu_\alpha} \right\| < 2\varepsilon.$$

Definimos $l_\eta = \frac{\lambda_{\beta_1} - \lambda_{\beta_2}}{2}$ y $\mu_\eta = l_\eta - \frac{dl_\eta}{d\nu_\alpha}$. La medida l_η está en L por ser L un conjunto convexo y simétrico. μ_η es la parte singular de l_η respecto de ν_α. Sea $\tau(\eta)$ el sucesor de β_2. Por (3.3) y la definición de l_η y μ_η, se verifica $\mu_\eta \ll l_\eta \ll \nu_{\tau(\eta)}$ y [4]

$$\|\mu_\eta\| \geq \left\| l_\eta - \frac{dl_\eta}{d\nu_{\beta_2}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \lambda_{\beta_2} - \frac{d\lambda_{\beta_2}}{d\nu_{\beta_2}} \right\| > \delta.$$

Por definición, $\mu_\eta \perp \nu_\alpha$ y, además, por definición de α también se verifica $\mu_\gamma \ll \nu_\alpha$ para cada $\gamma < \eta$. Deducimos que se verifica $\mu_\gamma \perp \mu_\eta$. Así, μ_α y l_α también verifican (i),(ii),(iii),(iv) y, por tanto, las familias $\{l_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ y $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ están bien definidas y verifican la condición del enunciado. □

Finalmente, vamos a ver un último resultado topológico antes de demostrar el teorema de Rosenthal.

Lema 3.3.7. *Cualquier subconjunto no numerable de un espacio métrico separable tiene un subconjunto numerable denso en sí mismo*

Demostración. Inspiramos nuestra prueba en la demostración del teorema de Cantor-Bendixson [Kec95, Teorema 6.4]. Como cualquier subconjunto no numerable de un espacio métrico separable es también un espacio métrico separable, basta demostrar que todo espacio métrico separable no numerable tiene un subconjunto numerable denso en sí mismo. Sea X un espacio métrico separable no numerable. Definimos

$$P = \{x \in X : \text{ todo entorno de } x \text{ es no numerable}\}.$$

Vamos a demostrar que $X \setminus P$ es numerable. Como X es un espacio métrico separable, podemos tomar una base numerable de abiertos de X $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, $X \setminus P$ es la unión de los abiertos U_n que son numerables. Por tanto, $X \setminus P$ es un abierto numerable por ser unión numerable de abiertos numerables. De la no numerabilidad de X se deduce que P es un cerrado no numerable. Como todo subconjunto de un espacio métrico separable es separable, podemos tomar $A \subset P$ un

[4] si $\mu_1 \ll \mu_2$ son medidas no negativas y ν_i denota la parte singular de una medida ν respecto de μ_i para $i = 1,2$, entonces $\|\nu_1\| \geq \|\nu_2\|$.

subconjunto numerable denso en P. Vamos a demostrar que A es denso en sí mismo, es decir, A no tiene puntos aislados. Sea $x \in A$ y U un entorno abierto de x en X. Como $x \in P$, de la definición de P se sigue que U es no numerable y $U \bigcap P$ es un entorno no numerabe de x en P. En particular, existe $v \in (U \bigcap P) \setminus \{x\}$ y V un entorno abierto de v en P con $V \subset (U \bigcap P) \setminus \{x\}$. De la densidad de A en P se deduce que $A \bigcap V \neq \emptyset$ y, como $x \notin V$, podemos concluir que $A \bigcap U \neq \{x\}$ y x no es un punto aislado de A. Por tanto, A es un conjunto numerable denso en sí mismo, como queríamos demostrar.

□

Demostración del teorema de Rosenthal. Sea $L = T^*(B_{X^*})$. L es un conjunto convexo, simétrico, acotado y no separable de $\mathcal{C}(K)^*$. Por el lema 3.3.6, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia no numerable de medidas $\{l_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ contenida en L y una familia de medidas de Borel $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ singulares dos a dos tales que

$$\|\mu_\alpha - l_\alpha\| \leq \varepsilon \text{ y } \|\mu_\alpha\| \geq \delta \text{ para cada } \alpha \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Vamos a fijar $\varepsilon > 0$ cumpliendo

$$0 < \varepsilon(1-2\varepsilon)^{-1} < \delta. \tag{3.5}$$

Bajo estas condiciones, la familia $\{\frac{\mu_\alpha}{\|\mu_\alpha\|} : \alpha \in \Gamma\}$ es isométricamente equivalente a la base usual de $\ell^1(\Gamma)$ (por ser singulares dos a dos). Además, como $\{\frac{\mu_\alpha}{\|\mu_\alpha\|} : \alpha \in \Gamma\}$ es un subconjunto no numerable de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$, siendo $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ metrizable y separable en la topología débil*, el lema anterior nos garantiza la existencia de una sucesión $f_n = \frac{\mu_{\alpha_n}}{\|\mu_{\alpha_n}\|}$ con $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \Gamma$, de forma que $(f_n)_{n=1}^\infty$ es débil*-densa en sí misma.

La sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es isométricamente equivalente a la base usual de ℓ^1. Por el lema 3.3.5, existe un subespacio U de $\mathcal{C}(K)^*$, isométrico y débil*-isomorfo a $\mathcal{C}(\Delta)^*$, tal que

$$\sup_{u \in B_U} |u(x)| \leq \sup_n |f_n(x)| \text{ para cada } x \in \mathcal{C}(K). \tag{3.6}$$

Sea Z un subespacio de U isométrico a L^1. Por el lema 3.3.3, existe una medida de probabilidad, regular y de Borel μ en K, una función medible Borel θ con $|\theta| \equiv 1$ y una σ-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Borel de K, tal que $(K, \mathcal{S}, \mu|_\mathcal{S})$ es un espacio de medida puramente no-atómico y $Z = \theta L^1(\mu|_\mathcal{S})$.

Por el lema 3.3.1, podemos tomar conjuntos F_i^n en $\mathcal{S}$ y subconjuntos compactos K_i^n de K para cada $i \in \{1,2,3,...,2^n\}$ y $n = 0,1,2,...$ verificando:

(i) $K_i^n \bigcap K_{i'}^n = F_i^n \bigcap F_{i'}^n = \emptyset$ si $i \neq i'$,
(ii) $K_i^n = K_{2i-1}^{n+1} \bigcup K_{2i}^{n+1}$ y $F_i^n = F_{2i-1}^{n+1} \bigcup F_{2i}^{n+1}$,
(iii) $K_i^n \subset F_i^n$,
(iv) $\frac{1-\varepsilon}{2^n} \leq \mu(K_i^n) \leq \mu(F_i^n) \leq \frac{1}{2^n}$,
(v) $\theta|_{K_1^0}$ es continua.

Sea $\Omega = K_1^0$ y $A = \overline{\text{span}}\{\chi_{K_i^n} : i \in \{1,2,3,...,2^n\}, n = 0,1,2,...\}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$. El teorema de extensión de Borsuk 3.2.1 nos garantiza la existencia de un operador $E : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(K)$ con $(Ef)|_\Omega = f$

para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Tomamos $Y = E(\theta A)$. Como θA es isométrico a $\mathcal{C}(\Delta)$ y E es una isometría, tenemos que Y es isométrico a $\mathcal{C}(\Delta)$ y, en particular, por el teorema de Miljutin, Y es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$. Como Y es un subespacio de $\mathcal{C}(K)$, sólo nos falta probar que $T|_Y$ es un isomorfismo. Nuestro objetivo ahora es ver que se verifica $\|\phi\|_\infty \leq (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\|T\phi\|$ para cada $\phi \in Y$, de donde se sigue que efectivamente $T|_Y$ es inyectiva y tiene inversa continua, luego $T|_Y$ es un isomorfismo.

Sea $\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{K_i^n}\theta$, con $\|\phi\|_\infty = 1$. Tomamos $\varphi = E\phi$. Sea i tal que $|c_i| = 1$ y $f = \frac{\chi_{F_i^n}}{\mu(F_i^n)} \in B_{L^1(\mu|_{\mathcal{S}})}$. Entonces

$$\left|\int_K \theta f \varphi d\mu\right| \geq \left|\int_{K_i^n} \theta f \varphi d\mu\right| - \int_{F_i^n \setminus K_i^n} |\theta f \varphi| d\mu = \frac{\mu(K_i^n)}{\mu(F_i^n)} - \int_{F_i^n \setminus K_i^n} |f\varphi| d\mu$$

$$\geq \frac{\mu(K_i^n)}{\mu(F_i^n)} - \frac{\mu(F_i^n) - \mu(K_i^n)}{\mu(F_i^n)} = \frac{2\mu(K_i^n) - \mu(F_i^n)}{\mu(F_i^n)} \geq \frac{2\frac{1-\varepsilon}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1 - 2\varepsilon.$$

Por tanto, como $\|f\|_{L^1(\mu|_{\mathcal{S}})} = 1$, tenemos que en general se verifica

$$\|\varphi\|_\infty = 1 \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{f \in B_{\theta L^1(\mu|_{\mathcal{S}})}} \left|\int_K f \varphi d\mu\right| = (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{f \in B_Z} |f(\varphi)|.$$

Luego, como E es una isometría y las funciones de la forma $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{K_i^n}\theta$ son densas en θA, tenemos

$$\|\phi\|_\infty \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{f \in B_Z} |f(\phi)| \text{ para cada } \phi \in Y.$$

Como $B_Z \subset B_U$, de la definición de las funciones f_n y de (3.6) se deduce que

$$\|\phi\|_\infty \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{u \in B_U} |u(\phi)| \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_n |f_n(\phi)| \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{\alpha \in \Gamma} \left|\int_K \phi \frac{d\mu_\alpha}{\|\mu_\alpha\|}\right| \tag{3.7}$$

para cada $\phi \in Y$.

Para cada $\phi \in Y$ con $\|\phi\|_\infty = 1$ y $\alpha \in \Gamma$, de (3.4) se deduce que

$$\left|\int_K \phi d\mu_\alpha\right| \leq \left|\int_K \phi dl_\alpha\right| + \varepsilon.$$

Por tanto, despejando $\|\mu_\alpha\|$ en (3.7) y usando (3.4) obtenemos

$$\delta \leq \|\mu_\alpha\| \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{\alpha \in \Gamma} \left|\int_K \phi d\mu_\alpha\right| \leq (1-2\varepsilon)^{-1} (\sup_{\alpha \in \Gamma} \left|\int_K \phi dl_\alpha\right| + \varepsilon).$$

Por tanto,

$$\delta - \varepsilon(1-2\varepsilon)^{-1} \leq (1-2\varepsilon)^{-1} \sup_{\alpha \in \Gamma} \left|\int_K \phi dl_\alpha\right|$$

y de (3.5) se sigue

$$\|\phi\|_\infty = 1 \leq \frac{(1-2\varepsilon)^{-1}}{\delta - \varepsilon(1-2\varepsilon)^{-1}} \sup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_K \phi dl_\alpha\right| = (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\sup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_K \phi dl_\alpha\right|.$$

Deducimos, por la definición de las medidas $l_\alpha \in L = T^*(B_{X^*})$, que para cualquier $\phi \in Y$ se verifica

$$\begin{aligned}\|\phi\|_\infty &\leq (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\sup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_K \phi dl_\alpha\right| = (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\sup_{\alpha\in\Gamma}|l_\alpha(\phi)| \\ &\leq (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\sup_{l\in L=T^*(B_{X^*})}|l(\phi)| = (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\sup_{x^*\in B_{X^*}}|x^*(T\phi)| \\ &= (\delta(1-2\varepsilon)-\varepsilon)^{-1}\|T\phi\|,\end{aligned}$$

como queríamos demostrar

□

Para obtener el corolario principal del teorema de Rosenthal, necesitamos ver primero el teorema de inyectividad débil de Pełczyński. Vemos a continuación una generalización del teorema 3.1.4(ii), debido a Kuratowski en el caso no numerable y a Pełczyński en el caso numerable

Lema 3.3.8. *Sean M y L espacios métricos compactos y $\tau : M \to L$ una aplicación continua sobreyectiva. Si L es no numerable, entonces existe $\Omega \subset M$ homeomorfo a Δ tal que $\tau|_\Omega$ es un homeomorfismo de Ω en $\tau(\Omega)$. Si L es numerable, entonces existe $\Omega \subset M$ homeomorfo a L tal que $\tau|_\Omega$ es un homeomorfismo de Ω en $\tau(\Omega)$.*

Demostración. Demostramos sólo el caso en que L es no numerable, que es el caso que necesitamos para obtener el teorema 3.0.2. Como L es un compacto métrico, L es separable. Razonando igual que en la demostración del lema 3.3.7, obtenemos que el conjunto

$$P = \{x \in L : \text{ todo entorno de } x \text{ es no numerable}\}$$

es un subconjunto cerrado de L no numerable. En particular, P también es un espacio métrico compacto no numerable. Como $\tau^{-1}(P)$ es un subconjunto compacto de M, no es restrictivo suponer que $P = L$ o, equivalentemente, todo abierto de L es no numerable.

Consideramos ahora el conjunto

$$\mathcal{F} = \{C \subset M : C \text{ es un subconjunto cerrado en } M \text{ con } \tau(C) = L\}$$

con el orden $C_1 \leq C_2$ si, y sólo si, $C_2 \subset C_1$. $\mathcal{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado no vacío, ya que $M \in \mathcal{F}$.

Vamos a ver que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota superior. Sea T una cadena en $\mathcal{F}$. Definimos

$$K = \bigcap_{C\in T} C.$$

K es un compacto no vacío por ser intersección de compactos no vacíos decrecientes. Además, si $l \in L$, entonces $\tau^{-1}(\{l\})$ es un compacto en M que interseca a todo conjunto C de T. Deducimos entonces que $K \bigcap \tau^{-1}(\{l\}) = \bigcap_{C \in T}(C \bigcap \tau^{-1}(\{l\}))$ es no vacío, luego existe $x \in K$ tal que $\tau(x) = l$. Por tanto, $\tau(K) = L$ y efectivamente K es una cota superior de la cadena $\mathcal{F}$.

El lema de Zorn nos garantiza que existe un elemento maximal en $\mathcal{F}$. Sea K un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Por definición, $\tau(K) = L$ y para cada subconjunto cerrado $C \subsetneq K$, se verifica $\tau(C) \neq L$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $M = K$. La condición $\tau(C) \neq L$ para cada cerrado $C \subsetneq M$ es equivalente a que $\tau(U)$ contenga un abierto no vacío de L para cada abierto no vacío U en M.

Ya estamos en condición de construir el subconjunto $\Omega \subset M$ homeomorfo a Δ. Sea A_0 y A_1 abiertos disjuntos no vacíos de L, de modo que $\overline{A_0} \bigcap \overline{A_1} = \emptyset$. Los conjuntos $\tau^{-1}(A_0)$ y $\tau^{-1}(A_1)$ son abiertos disjuntos. Sea $V_0 \subset \tau^{-1}(A_0)$ y $V_1 \subset \tau^{-1}(A_1)$ abiertos no vacíos con diámetro menor o igual que 1. Tomamos $U_0 \subset \tau(V_0)$ y $U_1 \subset \tau(V_1)$ abiertos no vacíos. Nótese que existen los abiertos U_0 y U_1 porque la imagen de todo abierto no vacío contiene un abierto no vacío. Repetimos el proceso. Tomamos abiertos disjuntos no vacíos $A_{0,0}, A_{0,1} \subset U_0$ y $A_{1,0}, A_{1,1} \subset U_1$ tales que $\overline{A_{i,0}} \bigcap \overline{A_{i,1}} = \emptyset$ para $i \in \{0,1\}$. Para cada $i, j \in \{0,1\}$ tomamos $V_{i,j} \subset \tau^{-1}(A_{i,j})$ un abierto no vacío con diámetro menor o igual que $\frac{1}{2}$. Finalmente, tomamos $U_{i,j} \subset \tau(V_{i,j})$ abiertos no vacíos para cada $i, j \in \{0,1\}$. Repitiendo este proceso, en cada paso encontramos abiertos disjuntos no vacíos $A_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}, A_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1} \subset U_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ tales que $\overline{A_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}} \bigcap \overline{A_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1}} = \emptyset$, abiertos no vacíos $V_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j} \subset \tau^{-1}(A_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j})$ con diámetro menor o igual que $\frac{1}{n+1}$ y $U_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j} \subset \tau(V_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j})$ abiertos no vacíos para cada $i_1, i_2, \ldots, i_n, j \in \{0,1\}$.

Como $V_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j} \subset V_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ para cada $i_1, i_2, \ldots, i_n, j \in \{0,1\}$, de la observación 3.1.5 se deduce que el conjunto

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} \overline{V_s}$$

es homeomorfo al conjunto de Cantor Δ.

Vamos a ver que $\tau|_{\Omega}$ es inyectiva. Sea $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$. Existe $n \in N$ y $s_1, s_2 \in \{0,1\}^n$ tal que $x \in \overline{V_{s_1}}$, $y \in \overline{V_{s_2}}$ y $\overline{V_{s_1}} \bigcap \overline{V_{s_2}} = \emptyset$. Pero, por construcción, $\tau(\overline{V_{s_1}}) \bigcap \tau(\overline{V_{s_2}}) = \emptyset$, luego $\tau(x) \neq \tau(y)$ y $\tau|_{\Omega}$ es inyectiva. Por tanto, como Ω y $\tau(\Omega)$ son compactos y $\tau|_{\Omega}$ es continua e inyectiva, $\tau|_{\Omega}$ es un homeomorfismo de Ω en $\tau(\Omega)$.

$\square$

Teorema 3.3.9 (Teorema de inyectividad débil de Pełczyński). *Sea K un espacio métrico compacto infinito y X un espacio de Banach separable con $Y \subset X$ un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. Entonces existe un subespacio $Z \subset Y$ isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ y complementado en X.*

Demostración. Sea $T : \mathcal{C}(K) \to Y$ un isomorfismo suprayectivo y consideramos $i : Y \to X$ la inclusión canónica. Vemos al espacio métrico compacto K como un subconjunto de $\mathcal{C}(K)^*$, identificando cada elemento $k \in K$ con la función $k : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ que lleva cada función $f \in \mathcal{C}(K)$ a $f(k)$. Esta identificación nos da un embebimiento de K en $\mathcal{C}(K)^*$ con la topología débil*, ya que es una biyección continua entre dos compactos. Sea $M = [((iT)^*)^{-1}(K)] \bigcap \rho B_{X^*}$ y $\tau : M \to K$ la función $\tau = (iT)^*|_M$, donde ρ es suficientemente grande para garantizar la suprayectividad de τ. Como

M es un espacio compacto metrizable (por serlo ρB_{X^*}) y τ es sobreyectiva, podemos aplicar el lema 3.3.8, obteniendo así un conjunto $\Omega \subset M$ homeomorfo a Δ si K es no numerable y homeomorfo a K si K es numerable tal que $\tau|_\Omega$ es un homeomorfismo. En cualquier caso, se verifica $\mathcal{C}(\Omega) \approx \mathcal{C}(K)$. Sea $\Omega' = \tau(\Omega)$ y $\beta : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega')$ el operador definido como $\beta f = f \circ \tau^{-1}$ para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Como $\tau|_\Omega$ es un homeomorfismo entre Ω y $\tau(\Omega)$, el operador β es una isometría suprayectiva. Además, el teorema de extensión de Borsuk 3.2.1 nos garantiza que existe una isometría $E : \mathcal{C}(\Omega') \to \mathcal{C}(K)$ de modo que $E(f)|_{\Omega'} = f$ para cada $f \in \mathcal{C}(\Omega')$. Sea $R_\Omega : X \to \mathcal{C}(\Omega)$ el operador dado por $R_\Omega(x)(\omega) = \omega(x)$ para cada $x \in X$ y cada $\omega \in \Omega$.

El subespacio $Z = TE(\mathcal{C}(\Omega'))$ está contenido en Y. Además, Z es isomorfo a $\mathcal{C}(\Omega')$ por ser T y E isomorfismos. Por tanto, $Z \approx \mathcal{C}(\Omega') \approx \mathcal{C}(\Omega) \approx \mathcal{C}(K)$. Vamos a ver que Z es complementado en X. Para ello, consideramos la siguiente composición:

$$I : \mathcal{C}(\Omega') \xrightarrow{E} \mathcal{C}(K) \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{R_\Omega} \mathcal{C}(\Omega) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(\Omega').$$

Afirmamos que esta composición es la identidad, de donde podremos deducir que Z es un subespacio complementado de X. Sea $\omega' \in \Omega'$, $\tau^{-1}(\omega') = \omega$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega')$. Entonces

$$\begin{aligned}(\beta R_\Omega iTE)(f)(\omega') = R_\Omega((iTE)(f))(\omega) = \omega(iTE(f)) = (((iT)^*)^{-1}(\omega'))(iTE(f)) = \\ (((iT)^*)^{-1}(\omega'))(iT)(E(f)) = (Ef)(\omega') = f(\omega').\end{aligned}$$

Por tanto, $(\beta R_\Omega iTE)$ es la identidad. En particular, βR_Ω es suprayectiva. Sea $P : X \to X$, $P = iTE\beta R_\Omega$. La imagen de P es $P(X) = iTE\beta R_\Omega(X) = iTE(\mathcal{C}(\Omega')) = TE(\mathcal{C}(\Omega')) = Z$ y, además,

$$P^2 = iTE\beta R_\Omega iTE\beta R_\Omega = iTE(\beta R_\Omega iTE)\beta R_\Omega = iTE\beta R_\Omega = P.$$

Por tanto, P es una proyección y Z es efectivamente un subespacio complementado de X.

□

El teorema anterior sigue siendo válido si K es un espacio compacto Hausdorff finito, ya que todo subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach es complementado.

Demostramos a continuación uno de los resultados más importantes que vamos a ver en este trabajo y que supone una motivación para el problema que vamos a estudiar en el siguiente capítulo:

Demostración del teorema 3.0.2. Sea $P : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ una proyección con $P(\mathcal{C}(K)) = X$. El espacio $P^*(\mathcal{C}(K)^*)$ es no separable por ser isomorfo a X^*. El teorema de Rosenthal afirma que existe un subespacio Y de $\mathcal{C}(K)$, isomorfo a $\mathcal{C}(K)$, de forma que $P|_Y$ es un isomorfismo. En particular, X es un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$ que contiene un subespacio $U = P(Y)$ isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. El teorema de inyectividad débil de Pełczyński nos garantiza que, como X es separable, existe un subespacio de U complementado en X e isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. Como $c_0(\mathcal{C}(K)) \approx c_0(\mathcal{C}(\Delta)) \approx \mathcal{C}(\Delta) \approx \mathcal{C}(K)$, de la técnica de descomposición de Pełczyński se sigue que X y $\mathcal{C}(K)$ son isomorfos.

□

Para un espacio de Banach X, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de Banach formado por todos los operadores $T : X \to X$. Como aplicación del teorema de Rosenthal obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.3.10. *El único ideal bilatero máximal del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$ es el conjunto de todos los operadores $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ tales que T^* tiene rango separable.*

Demostración. Denotamos por $\mathcal{X}^*(\mathcal{C}([0,1]))$ el conjunto de los operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$ tales que su adjunto tiene rango separable. Es inmediato ver que $\mathcal{X}^*(\mathcal{C}([0,1]))$ es un ideal bilatero en $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$, ya que si $A, B \in \mathcal{X}^*(\mathcal{C}([0,1]))$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces es claro que $A^* + B^*$, $(AT)^*$, $(TA)^*$ y cA^* tienen rango separable. Vemos a continuación que es un ideal maximal. Sea I un ideal tal que $\mathcal{X}^*(\mathcal{C}([0,1])) \subsetneq I \subset \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$. Entonces existe $T \in I$ tal que T^* tiene rango no separable. Por el teorema de Rosenthal 3.0.1, existe un subespacio $E \subset \mathcal{C}([0,1])$ isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$ tal que $T|_E$ es un isomorfismo. Por el teorema de inyectividad débil de Pełczyński 3.3.9, existe $Z \subset T(E)$ isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$ y complementado en $\mathcal{C}([0,1])$. Sea $Y = (T|_E)^{-1}(Z)$. Como $T|_E$ es un isomorfismo, Y es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$. Sea $P : \mathcal{C}([0,1]) \to Z$ una proyección sobre Z y $S : \mathcal{C}([0,1]) \to Y$ un isomorfismo en Y. El operador $T|_Y : Y \to Z$ es un isomorfismo suprayectivo. Entonces, la composición $T|_Y S$ tiene rango $T|_Y S(\mathcal{C}([0,1])) = T|_Y(Y) = Z$ y es invertible. Consideramos $V = (T|_Y S)^{-1}P$. Entonces $V \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1]))$. Además, $VTS = (T|_Y S)^{-1}PTS = 1_{\mathcal{C}([0,1])} \in I$, luego $I = \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,1])$ y podemos concluir que $\mathcal{X}^*(\mathcal{C}([0,1]))$ es el único ideal maximal.

$\square$

El lector puede encontrar más resultados sobre ideales de álgebras de operadores en [Bro12].

Capítulo

4 El Problema del Subespacio Complementado

A lo largo de este capítulo estudiaremos el siguiente problema:

Problema 4.0.1 (Problema del Subespacio Complementado)**.** *Sea K un espacio compacto Hausdorff y X un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$. ¿Es X isomorfo a $\mathcal{C}(L)$ para algún compacto Hausdorff L?*

Llamaremos a este problema el Problema del Subespacio Complementado, al igual que hace Rosenthal en [Ros03]. Sin embargo, es conveniente resaltar que, según la fuente, se llama Problema del Subespacio Complementado al siguiente problema:

Sea X un espacio de Banach tal que todo subespacio es complementado. ¿Es X isomorfo a un espacio de Hilbert?

Este problema fue resuelto de forma afirmativa por Lindenstrauss y Tzafriri en 1971. El lector puede encontrar la demostración en [AK06].

El estudio que vamos a hacer del Problema del Subespacio Complementado lo vamos a dividir en tres casos. El primero de ellos será el caso en que K es un espacio métrico compacto numerable. En términos del espacio $\mathcal{C}(K)$, este caso equivale a que el espacio $\mathcal{C}(K)$ sea separable con dual separable. El caso en que $\mathcal{C}(K)$ es separable pero su dual es no separable es equivalente a que el compacto K sea metrizable no numerable. Este será el segundo caso que estudiaremos. Finalmente, acabaremos con el caso en que $\mathcal{C}(K)$ es no separable.

El Problema del Subespacio Complementado sólo está resuelto para ciertos casos particulares. El objetivo de este capítulo es recopilar ideas y herramientas existentes que permiten demostrar resultados relacionados con este problema.

4.1. Caso 1: K compacto métrico numerable

Uno de los hechos más importantes de este caso es que tenemos los espacio $\mathcal{C}(K)$ clasificados salvo isomorfismos. Denotamos por ω al menor ordinal numerable y por ω_1 al menor ordinal no numerable, donde cada ordinal α se considera equipado con la topología del orden. Vamos a definir el índice de Cantor-Bendixson de un compacto K y el índice de Szlenk de un espacio de Banach separable.

Definición 4.1.1. *Sea K un compacto metrizable. Para cada $W \subset K$, denotamos por W' al conjunto de los puntos de acumulación de W en K. Definimos $K^{(0)} = K$, $K^{(\alpha+1)} = (K^{(\alpha)})'$ y $K^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha<\beta} K^{(\alpha)}$ para cada ordinal α y cada ordinal límite β. Si $K \neq \emptyset$, llamamos* índice de Cantor-Bendixson *al ordinal*

$$Ca(K) = \sup\{0 \leq \alpha \leq \omega_1 : K^{(\alpha)} \neq \emptyset\}.$$

El índice de Cantor-Bendixson tiene las siguientes propiedades:

- K es numerable si, y sólo si, $Ca(K) < \omega_1$
- Si α es el menor ordinal γ verificando $K^{(\gamma)} = K^{(\gamma+1)}$, entonces $K^{(\alpha)} = \emptyset$ y $\alpha = Ca(K) + 1$ o $K^{(\alpha)}$ es perfecto.

Debe saber el lector que la definición de índice de Cantor-Bendixson dada anteriormente, aunque coincide con la definición que da Rosenthal en [Ros03], no es la tradicional, ya que usualmente se define como $Ca(K) + 1$.

Definición 4.1.2. *Sea $\varepsilon > 0$ y X un espacio de Banach separable. Para cada $K \subset X^*$ débil*-compacto, definimos:*

- *$\delta_\varepsilon(K)$ como el conjunto de los funcionales $x^* \in K$ tales que existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ en K con $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y $\|x_n^* - x^*\| \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$,*
- *$d_\varepsilon(K) = \overline{\delta_\varepsilon(K)}^{\omega^*}$,*
- *$K_{\alpha,\varepsilon}$, para cada $0 \leq \alpha < \omega_1$, como $K_{0,\varepsilon} = K$, $K_{\alpha+1,\varepsilon} = d_\varepsilon(K_{\alpha,\varepsilon})$ y $K_{\beta,\varepsilon} = \bigcap_{\alpha<\beta} K_{\alpha,\varepsilon}$ si β es un ordinal límite,*
- *$\beta_\varepsilon(K) = \sup\{\alpha \leq \omega_1 : K_{\alpha,\varepsilon} \neq \emptyset\}$,*
- *$\beta(K) = \sup_{\varepsilon>0} \beta_\varepsilon(K)$,*
- *$Sz(X) = \beta(B_{X^*})$, que llamaremos* índice de Szlenk de X.

El índice de Szlenk tiene la siguiente propiedad:

- Si X es un espacio de Banach separable, entonces $Sz(X) < \omega_1$ si, y sólo si, X^* es separable en norma.

La siguiente proposición fue demostrada por Miljutin en [Mil66] .

Proposición 4.1.3. *Sea K un espacio métrico compacto numerable. Entonces K es homeomorfo a exactamente uno de los ordinales $(\omega^\alpha + 1)n$, para algún $1 \leq \alpha < \omega_1$ y algún entero $n \in \mathbb{N}$. Además, $\alpha = Ca(K)$ y $n = |K^{(\alpha)}|$.*

Por tanto, todo espacio $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto numerable es isométrico a $\mathcal{C}((\omega^\alpha + 1)n)$ para algún $\alpha < \omega_1$ y $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, la clasificación por isomorfismos se reduce considerablemente gracias al siguiente resultado de Bessaga y Pełczyński que demuestran en [BP60b]:

Teorema 4.1.4. *Sea K un espacio métrico compacto numerable infinito. Entonces $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^\alpha} + 1)$ para algún ordinal α numerable. Además, si $0 \leq \alpha < \beta < \omega_1$, entonces $\mathcal{C}(\omega^{\omega^\alpha} + 1)$ no es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^\beta} + 1)$.*

La última propiedad del enunciado se puede demostrar usando las siguientes propiedades del índice de Szlenk:

Proposición 4.1.5. *Sean X e Y espacios de Banach separables. Para cada pareja K, L de subconjuntos de X^* débil*-compactos separables en norma, se verifica:*

- *Si $L \subset K$ entonces $\beta(L) \leq \beta(K)$.*
- *Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo suprayectivo, entonces $\beta(T^*K) = \beta(K)$.*

En particular, si X e Y son espacios de Banach separables isomorfos, entonces $Sz(X) = Sz(Y)$. Por tanto, para probar que si $0 \leq \alpha < \beta < \omega_1$ entonces $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1)$ no es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\beta}}+1)$, es suficiente ver que $Sz(\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1)) \neq Sz(\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\beta}}+1))$. Realmente lo que se demuestra es el siguiente resultado:

Teorema 4.1.6. *Sea $0 \leq \alpha < \omega_1$. Entonces $Sz(\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1)) = \omega^{\alpha+1}$.*

El lector puede encontrar una demostración de la parte del teorema 4.1.4 que afirma que $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1)$ en [Ros03]. La demostración se obtiene combinando el teorema de extensión de Borsuk 3.2.1 y la técnica de descomposición de Pełczyński, teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $c_0(\mathcal{C}(K))$,
(ii) Si $K = \omega^{\alpha}+1$ con α un ordinal límite o $\alpha = 1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(K^n)$.

Por tanto, el Problema del Subespacio Complementado en el caso en que K es un compacto métrico numerable se reduce al siguiente problema:

Problema 4.1.7. *Sea α un ordinal numerable. ¿Todo subespacio complementado de $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\beta}}+1)$ para algún ordinal β numerable?*

De los resultados desarrollados en el segundo capítulo se sigue que el caso $\alpha = 0$ tiene una respuesta afirmativa. En efecto, en ese caso $\mathcal{C}(\omega^{\omega^{\alpha}}+1) = \mathcal{C}(\omega+1)$ es isomorfo a c_0. Por tanto, es suficiente ver que todo subespacio complementado de c_0 es isomorfo a c_0 o tiene dimensión finita. Sea X un subespacio complementado de dimensión infinita de c_0. De la proposición 2.4.5 se sigue que X tiene un subespacio complementado isomorfo a c_0. Pero, como $c_0(c_0)$ es isomorfo a c_0, la técnica de descomposición de Pełczyński nos garantiza que X es isomorfo a c_0.

El caso $\mathcal{C}(\omega^{\omega}+1)$ también tiene una respuesta afirmativa y es una consecuencia del siguiente teorema de Benyamini demostrado en [Ben78]:

Teorema 4.1.8. *Sea K un espacio métrico compacto y X un subespacio complementado de dimensión infinita de $\mathcal{C}(K)$. Entonces X es isomorfo a c_0 o X tiene un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega}+1)$.*

Como consecuencia, un razonamiento análogo al de la demostración del corolario 3.0.2 nos proporciona el siguiente resultado:

Corolario 4.1.9. *Si X es un subespacio complementado de dimensión infinita en $\mathcal{C}(\omega^{\omega}+1)$ entonces X es isomorfo a c_0 o a $\mathcal{C}(\omega^{\omega}+1)$.*

Además, para $\mathcal{C}(\omega^\omega + 1)$ tambíen tenemos un teorema de Alspach, análogo al teorema de Pełczyński 2.4.3 y al teorema de Rosenthal 3.0.1, dando condiciones suficientes y necesarias para que un operador $T : \mathcal{C}(K) \to X$ fije una copia de $\mathcal{C}(\omega^\omega + 1)$. Para un operador $T : X \to Y$ con X e Y espacios de Banach separables, se define $\beta_\varepsilon(T) = \beta_\varepsilon(T^*(B_{Y^*}))$ para cada $\varepsilon > 0$. Llamamos índice de Szlenk del operador T a

$$Sz(T) = \sup_{\varepsilon>0} \beta_\varepsilon(T) = \beta(T^*(B_{Y^*})).$$

Teorema 4.1.10 (Alspach). *Sea K un espacio métrico compacto, X un espacio de Banach y $T : \mathcal{C}(K) \to X$ un operador. Son equivalentes:*

- *$Sz(T) \geq \omega^2$,*
- *$\beta_\varepsilon(T) \geq \omega$ para cada $\varepsilon > 0$,*
- *T fija una copia de $\mathcal{C}(\omega^\omega + 1)$.*

El Problema del Subespacio Complementado está abierto para cada compacto $K = \omega^{\omega^\alpha} + 1$ con $\alpha \geq 2$. En particular, no se conoce la respuesta a la siguiente pregunta:

Problema 4.1.11. *Sea X un subespacio complementado de $\mathcal{C}(\omega^{\omega^2} + 1)$. Si $Sz(X) = \omega^2$, ¿X es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^\omega + 1)$? Si $Sz(X) = \omega^3$, ¿X es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^2} + 1)$?*

4.2. Caso 2: K compacto métrico no numerable

En este caso, el teorema de Miljutin nos garantiza que $\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$. Además, por el corolario 3.0.2, sabemos que todo subespacio complementado con dual no separable es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$.

Por tanto, para completar el estudio del Problema del Subespacio Complementado, falta dar respuesta a la siguiente pregunta:

Cuestión 4.2.1. *Sea X un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1])$ con X^* separable. ¿X es isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ para algún compacto Hausdorff K?*

Como X^* es separable, si la pregunta anterior tuviese una respuesta afirmativa entonces X sería isomorfo a $\mathcal{C}(\omega^{\omega^\alpha} + 1)$ para algún ordinal $\alpha < \omega_1$.

Parece lógico pensar que, si no hemos conseguido dar respuesta al caso 1, tampoco lo vamos a conseguir en este caso. Por tanto, vamos a plantearnos demostrar la equivalencia entre la cuestión 4.2.1 y el Problema del Subespacio Complementado en el caso 1.

Suponemos primero que X es un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto numerable. El teorema 3.1.4 nos garantiza que K es homeomorfo a un subconjunto cerrado del cubo de Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Del teorema de extensión de Borsuk 3.2.1 se deduce que $\mathcal{C}(K)$ es isométrico a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}})$. Por tanto, X es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1]) \approx \mathcal{C}([0,1]^{\mathbb{N}})$. Concluímos así que, si la cuestión 4.2.1 tiene una respuesta afirmativa, entonces el Problema del Subespacio Complementado en el caso en que K es un espacio métrico compacto numerable también se resuelve de forma afirmativa.

El recíproco es un problema abierto, es decir, dado un espacio de Banach X complementado en $\mathcal{C}(K)$, con K un espacio métrico compacto no numerable y X^* separable, no se conoce si X es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio $\mathcal{C}(L)$ con L un espacio métrico compacto numerable. Nos vamos a centrar en el problema de encontrar un espacio métrico compacto numerable L de modo que X es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}(L)$ (no necesariamente complementado).

Si encontrasemos un conjunto débil*-compacto numerable $L \subset B_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$ verificando:

$$\sup_{x^* \in L} |x^*(x)| > \varepsilon \|x\|_\infty \text{ para cada } x \in B_X$$

entonces habríamos terminado. Si L verifica la propiedad anterior, se dice que L *norma* X. En la demostración del teorema de Rosenthal 3.0.1 se demuestra implícitamente que todo subconjunto convexo simétrico acotado no separable de $\mathcal{C}([0,1])^*$ norma un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$. Si encontramos un conjunto débil*-compacto numerable $L \subset B_{X^*}$ que norma X, entonces el operador $T : X \to \mathcal{C}(L)$, dado por $T(x)(x^*) = x^*(x)$ para cada $x^* \in L$ y cada $x \in X$, es un isomorfismo de X en un subespacio de $\mathcal{C}(L)$, ya que

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{x^* \in L} |x^*(x)| > \varepsilon \|x\|_\infty \text{ para cada } x \in X.$$

Sin embargo, no se conoce ninguna forma de construir tal conjunto L. Nótese que, si la respuesta al problema 4.2.1 fuese afirmativa, entonces X sería isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio métrico compacto numerable K. Además, K es homeomorfo a un subconjunto de B_{X^*} que norma X. Por tanto, si la respuesta al problema 4.2.1 fuese afirmativa, existiría un espacio métrico compacto numerable L en B_{X^*} que norma X.

Por otro lado, si L norma X, entonces podemos definir una norma equivalente en X mediante la fórmula

$$|x| := \sup_{x^* \in L} |x^*(x)|.$$

Claramente, $L \subset B_{(X^*,|\cdot|)}$. Si L fuese débil*-compacto, entonces para cada $x \in X$ existe $x^* \in L \bigcup (-L)$ tal que $x^*(x) = |x|$. Es decir, el conjunto $L \bigcup (-L)$ es una frontera[1] de $(X, |\cdot|)$.

Por tanto, la existencia de un conjunto débil*-compacto numerable que norma el espacio implica, después de un renormamiento, la existencia de una frontera numerable débil*-compacta.

En general, un espacio de Banach separable es isomorfo a un espacio con frontera numerable si, y sólo si, es isomórficamente poliedral[2]. Además, si X es un espacio de Banach con X^* isomorfo a ℓ^1, entonces X es isomórficamente poliedral y, por tanto, tras un renormamiento, tiene una frontera numerable.

Un resultado obtenido por Lewis y Stegall nos da una clasificación de los espacios duales de los subespacios complementados de un espacio de $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto:

[1] Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, se dice que un conjunto $L \subset B_{X^*}$ es una frontera de X si para cada $x \in X$ existe $x^* \in L$ con $x^*(x) = \|x\|$.

[2] Un espacio de Banach X es poliedral si para cada subespacio de dimensión finita $Y \subset X$, la bola B_Y tiene una cantidad finita de puntos extremos. X es isomórficamente poliedral si es isomorfo a un espacio poliedral.

Teorema 4.2.2. *Si $\mathcal{C}(K)$ es separable y X es un subespacio complementado infinito-dimensional de $\mathcal{C}(K)$, entonces X^* es isomorfo a ℓ_1 o $\mathcal{C}([0,1])^*$.*

Por tanto, si X es un subespacio complementado infinito-dimensional de $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto y X^* es separable, entonces $X^* \approx \ell_1$ y X es isomórficamente poliedral. Deducimos entonces que el problema de encontrar un conjunto numerable débil*-compacto que norme X es equivalente a encontrar una norma equivalente en X de modo que, con la nueva norma, X tiene una frontera numerable *débil*-compacta*.

Concluímos así la sección planteando el siguiente problema abierto:

Problema 4.2.3. *Sea X isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio métrico compacto. Si X^* es separable, ¿existe un conjunto $L \subset B_{X^*}$ débil*-compacto y numerable que norme X?¿X es isomorfo a un espacio con frontera numerable débil*-compacta?*

4.3. Caso 3: K compacto Hausdorff no metrizable

Si nos fijamos en los dos casos que hemos resuelto del Problema del Subespacio Complementado, en ambos hemos hecho un razonamiento parecido:

1. Primero encontramos condiciones para que un operador $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ fije una copia de $\mathcal{C}(L)$; el teorema de Pełczyński 2.4.3 nos garantiza que T fija una copia de c_0 si T no es débil-compacto y el teorema de Rosenthal 3.0.1 nos garantiza que T fija una copia de $\mathcal{C}([0,1])$ si T^* tiene rango no separable.
2. A continuación aplicamos el punto 1 al caso en que $T = P$ es una proyección. De esta forma obtenemos que todo espacio complementado X de $\mathcal{C}(K)$ que cumpla ciertas propiedades contiene un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}(L)$.
3. Finalmente, el teorema de inyectividad débil de Pełczyński 3.3.9 nos garantiza que, además, X contiene un subespacio complementado isomorfo a $\mathcal{C}(L)$.
4. Como en los dos casos resueltos es $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(L)$ y se verifica $c_0(\mathcal{C}(K)) \approx \mathcal{C}(K)$, la técnica de descomposición de Pełczyński nos permite concluir que el subespacio complementado X es isomorfo a $\mathcal{C}(K)$.

Siendo realistas, los únicos casos que hemos resuelto han sido los casos c_0, que es el caso infinito-dimensional más sencillo, y el caso $\mathcal{C}([0,1])$ cuando el subespacio complementado X es *"suficientemente grande"*.

Supongamos que, en el caso general $\mathcal{C}(K)$ con K compacto no metrizable, también tenemos un resultado para el punto 1 que nos garantice que un subespacio complementado X de $\mathcal{C}(K)$ con cierta propiedad contiene un subespacio isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. Para poder aplicar el paso 3, necesitamos saber si podemos encontrar un subespacio complementado de X que sea isomorfo a $\mathcal{C}(K)$. En general, no podemos extender el teorema de inyectividad débil de Pełczyński 3.3.9 al caso en que K no es metrizable. Un ejemplo lo da el espacio ℓ_∞, que es isométrico al espacio $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, donde $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ (el lector puede encontrar la definición y propiedades de $\beta\mathbb{N}$ en [Her13]). El espacio ℓ_∞ no tiene subespacios complementados isomorfos a c_0. Sin embargo, el subespacio $\{f \in \mathcal{C}(\beta\mathbb{N}) : f|_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}} = 0\}$ es isomorfo a c_0.

Pero, aún suponiendo que pudiesemos encontrar un subespacio complementado de X isomorfo a $\mathcal{C}(K)$, todavía no habríamos acabado. En efecto, para poder aplicar el paso 4 primero necesitamos ver que $c_0(\mathcal{C}(K)) \approx \mathcal{C}(K)$. Para cualquier espacio de Banach X, se verifica $c_0(X) \approx c_0(X) \oplus c_0(X)$. Por tanto, si $c_0(\mathcal{C}(K))$ y $\mathcal{C}(K)$ son isomorfos, entonces $\mathcal{C}(K) \approx \mathcal{C}(K) \oplus \mathcal{C}(K)$. Pero, ¿es cierto que para cualquier compacto Hausdorff infinito K se verifica $\mathcal{C}(K) \approx \mathcal{C}(K) \oplus \mathcal{C}(K)$?

En general, Banach planteó en [Hah33] el siguiente problema:

Problema 4.3.1 (Banach, 1932)**.** *¿Todo espacio de Banach infinito-dimensional X verifica $X \approx X \oplus X$?*

No apareció una respuesta a esta pregunta hasta 1960 en [BP60a] y [Sem60]. Nosotros estamos interesados en el siguiente resultado que se encuentra en el artículo de Semadeni:

Teorema 4.3.2. *El espacio $\mathcal{C}(\omega_1 + 1)$ no es isomorfo a $\mathcal{C}(\omega_1 + 1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1 + 1)$.*

Demostración. Para un espacio de Banach X, definimos

$$\begin{aligned} S_1(X) &= \{F \in X^{**} : F \text{ es débil*-sucesionalmente continuo}\} \\ &= \{F \in X^{**} : F^{-1}(\{0\}) \text{ es débil*-sucesionalmente cerrado}\}. \end{aligned}$$

$S_1(X)$ es un subespacio de X^{**} que contiene a X. Además, es sencillo ver que si X e Y son espacios de Banach isomorfos, entonces $S_1(X)$ y $S_1(Y)$ también son isomorfos (basta ver que si $T : X \to Y$ es un isomorfismo suprayectivo, entonces $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ también es un isomorfismo suprayectivo que además verifica $T(S_1(X)) = S_1(Y)$). Por tanto, si X e Y son isomorfos, entonces los espacios cociente $S_1(X)/X$ y $S_1(Y)/Y$ también son isomorfos[3].

Vamos a probar primero que $S_1(\mathcal{C}(\omega_1 + 1))/\mathcal{C}(\omega_1 + 1)$ es un espacio de dimensión uno. Vemos que el espacio $S_1(\mathcal{C}(\omega_1 + 1))/\mathcal{C}(\omega_1 + 1)$ tiene al menos dimensión uno comprobando que el elemento $1_{\omega_1} \in \mathcal{C}(\omega_1 + 1)^{**} = \ell_\infty(\omega_1 + 1)$ [4], definido como $1_{\omega_1}(f) = f(\omega_1)$ para cada $f \in \mathcal{C}(\omega_1 + 1)^* = \ell_1(\omega_1 + 1)$, está en $S_1(\mathcal{C}(\omega_1 + 1))$, pero no pertenece a $\mathcal{C}(\omega_1 + 1)$.

Sea $(f_n)_{n=1}^\infty \subset 1_{\omega_1}^{-1}(\{0\}) \subset \ell_1(\omega_1 + 1)$. Como $f_n(\omega_1) = 0$ y $\{\alpha : f_n(\alpha) \neq 0\} \subset \omega_1$ es numerable, existe un ordinal $\beta_n < \omega_1$ tal que $\{\alpha : f_n(\alpha) \neq 0\} \subset \beta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $(f_n)_{n=1}^\infty$ es débil*-convergente a $f \in \ell_1(\omega_1 + 1)$, entonces $f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f_n(\gamma) = 0$ para cada $\gamma > \sup \beta_n$. Como $\sup \beta_n$ es numerable, $f \in 1_{\omega_1}^{-1}(\{0\})$ y $1_{\omega_1} \in S_1(\mathcal{C}(\omega_1 + 1))$.

Vemos ahora que cada función de $S_1(\mathcal{C}(\omega_1 + 1))$ es continua en $[0, \omega_1)$. Sea $F \in \ell_\infty(\omega_1 + 1)$ tal que $F|_{[0,\omega_1)}$ no es continua. Entonces existe una sucesión creciente $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset [0, \omega_1)$, con $\lim_n \alpha_n =: \alpha$, tal que $\lim_n F(\alpha_n) = L \neq F(\alpha)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $f_n \in \ell_1(\omega_1 + 1)$ la función dada por $f_n(\alpha_n) = 1$ y $f_n(\beta) = 0$ si $\beta \neq \alpha_n$. La sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ es débil*-convergente a la función

[3] Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo suprayectivo, entonces el operador T^{**} induce un isomorfismo suprayectivo $Q : S_1(X)/X \to S_1(Y)/Y$ mediante la fórmula $Q(x^{**} + X) = T^{**}(x^{**}) + Y$.

[4] Si K es un compacto Hausdorff disperso, es decir, tal que todo cerrado no vacío de K tiene un punto aislado, entonces $\mathcal{C}(K)^*$ es isométrico a $\ell_1(K)$ [FHH+11, Teorema 14.24].

f definida como $f(\alpha) = 1$ y $f(\beta) = 0$ si $\beta \neq \alpha$. Sin embargo,

$$\lim_n F(f_n) = \lim_n F(\alpha_n) = L \neq F(\alpha) = F(f).$$

Por tanto, F no es débil*-sucesionalmente continua y $F \notin S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1))$. Hemos probado así que toda función de $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1))$ es continua en $[0,\omega_1)$.

Vemos ahora que si $F \in \ell_\infty(\omega_1+1)$ es continua en $[0,\omega_1)$, entonces existe $\lim_{\alpha<\omega_1,\ \alpha\to\omega_1} F(\alpha)$. En caso contrario sería

$$\liminf_{\alpha<\omega_1,\ \alpha\to\omega_1} F(\alpha) =: L < \limsup_{\alpha<\omega_1,\ \alpha\to\omega_1} F(\alpha) =: J.$$

Por tanto, podemos tomar una sucesión estricamente creciente $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset [0,\omega_1)$ de modo que $|F(\alpha_{2n}) - L| < \frac{1}{n}$ y $|F(\alpha_{2n+1}) - J| < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En ese caso, $\alpha = \sup \alpha_n \in [0,\omega_1)$ por ser α numerable y, sin embargo, F no es continua en α, ya que $\lim_n F(\alpha_{2n}) \neq \lim_n F(\alpha_{2n+1})$.

Sea ahora $F \in S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1))$. Como $F|_{[0,\omega_1)}$ es continua, existe $\lim_{\alpha<\omega_1,\alpha\to\omega_1} F(\alpha)$. Definimos $G \in \ell_\infty(\omega_1+1)$ como $G(\omega_1) = \lim_{\alpha<\omega_1,\alpha\to\omega_1} F(\alpha)$ y $G(\alpha) = F(\alpha)$ si $\alpha \neq \omega_1$. De la definición de G se sigue que $G \in \mathcal{C}(\omega_1+1)$ y

$$F = G + (F(\omega_1) - G(\omega_1))1_{\omega_1}.$$

Queda así demostrado que $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1))/\mathcal{C}(\omega_1+1)$ tiene dimensión uno. Por las observaciones hechas al principio de la demostración, si $\mathcal{C}(\omega_1+1)$ y $\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1)$ son isomorfos, entonces $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))/(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))$ tiene dimensión uno también. Sin embargo, un razonamiento análogo al anterior demuestra que las funciones

$$1_{(\omega_1,0)}, 1_{(0,\omega_1)} \in (\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))^{**} \approx \ell_\infty(\omega_1+1) \oplus \ell_\infty(\omega_1+1)$$

dadas por $1_{(\omega_1,0)}(\omega_1,0) = 1$, $1_{(\omega_1,0)}(\alpha,\beta) = 0$ si $(\alpha,\beta) \neq (\omega_1,0)$, $1_{(0,\omega_1)}(0,\omega_1) = 1$ y $1_{(0,\omega_1)}(\alpha,\beta) = 0$ si $(\alpha,\beta) \neq (0,\omega_1)$ verifican $1_{(\omega_1,0)}, 1_{(0,\omega_1)} \in S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))$. Además, como se verifica $a1_{(\omega_1,0)} + b1_{(0,\omega_1)} \notin \mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1)$ para cada $a,b \in \mathbb{R}$ no nulos, deducimos que los vectores $1_{(\omega_1,0)} + \mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1)$ y $1_{(0,\omega_1)} + \mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1)$ son linealmente independientes en $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))/(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))$, lo que demuestra que $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))/(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))$ tiene como mínimo dimensión 2. Podemos concluir que $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1))/\mathcal{C}(\omega_1+1)$ y $S_1(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))/(\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1))$ no son isomorfos y, por tanto, los espacios $\mathcal{C}(\omega_1+1)$ y $\mathcal{C}(\omega_1+1) \oplus \mathcal{C}(\omega_1+1)$ no son isomorfos.

$\square$

En relación con el problema 4.3.1, Szarek demostró en [Sza86] la existencia de un espacio de Banach no isomorfo a $X \oplus X$ para ningún espacio de Banach X. Además, Gowers y Maurey construyeron en [GM97] un espacio de Banach X no isomorfo a $X \oplus X$ pero que sí es isomorfo a $X \oplus X \oplus X$.

Volviendo al Problema del Subespacio Complementado, si se espera encontrar una respuesta afirmativa, hace falta generalizar la técnica de descomposición de Pełczyński a casos en los X no sea isomorfo a $X \oplus X$ o, en su defecto, buscar un razonamiento distinto a los que hemos hecho hasta ahora.

Entre los resultados que hemos desarrollado en este trabajo, sólo el teorema de Pełczyński 2.4.3 nos aporta algún tipo de información sobre los subespacios de $\mathcal{C}(K)$ cuando el compacto K es no metrizable. Sin embargo, de este teorema sólo deducimos que todo subespacio complementado de dimensión infinita de $\mathcal{C}(K)$ contiene un subespacio isomorfo a c_0, pero ni siquiera podemos garantizar que contenga un subespacio complementado isomorfo a c_0, ya que la complementabilidad la deducíamos en el corolario 2.4.5 usando la metrizabilidad de K. Además, ya hemos visto que este resultado no se extiende a los compactos no metrizables, ya que ℓ_∞ es isométrico a $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, contiene subespacios complementados de dimensión infinita ($\ell_\infty \approx \ell_\infty \oplus \ell_\infty$), pero no contiene subespacios complementados isomorfos a c_0.

En el caso en que K es un compacto metrizable hemos conseguido hacer una clasificación salvo isomorfismos de los espacios $\mathcal{C}(K)$ y reducir el problema a los espacios $\mathcal{C}(\omega^{\omega^\alpha}+1)$ y $\mathcal{C}(\Delta)$ con $\alpha < \omega_1$.

Tanto el conjunto de Cantor Δ como los ordinales $\omega^{\omega^\alpha}+1$ tienen la propiedad de ser compactos totalmente desconectados, es decir, los únicos subconjuntos conexos son el vacío y los conjuntos unipuntuales. Por tanto, es natural formular la siguiente pregunta:

Cuestión 4.3.3. *Sea K un compacto Hausdorff no metrizable. ¿$\mathcal{C}(K)$ es isomorfo a $\mathcal{C}(L)$ para algún compacto L totalmente desconectado?*

Aunque la respuesta a la pregunta anterior es negativa, Ditor demuestra en [Dit70] el siguiente resultado:

Proposición 4.3.4. *Todo subespacio complementado de un espacio $\mathcal{C}(K)$ con K un compacto Hausdorff es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio $\mathcal{C}(L)$ con L un compacto Hausdorff totalmente desconectado.*

Gracias a este resultado podemos restringir el Problema del Subespacio Complementado al estudio de los espacios $\mathcal{C}(K)$ con K un compacto Hausdorff totalmente desconectado.

Además, un compacto Hausdorff K es totalmente desconectado si, y sólo si, todo punto de K tiene una base de entornos formada por conjuntos abiertos y cerrados en K. Si K es un compacto Hausdorff totalmente desconectado, del teorema de Stone-Weierstrass se sigue que la familia de las funciones simples $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{U_j}$, con $U_1,\ldots,U_n$ abiertos y cerrados disjuntos de K es densa en $\mathcal{C}(K)$. Cualquier compacto infinito totalmente desconectado K verifica $\mathcal{C}(K) \approx \mathcal{C}(K) \oplus \mathbb{R}$.

Koszmider dió una respuesta negativa a la pregunta 4.3.3. En concreto, Koszmider construye en [Kos04] un compacto Hausdorff infinito K tal que $\mathcal{C}(K)$ es indescomponible, es decir, si $\mathcal{C}(K) = A \oplus B$ con A y B espacios de Banach, entonces A o B tiene dimensión finita. Además, $\mathcal{C}(K)$ no es isomorfo a $\mathcal{C}(K) \oplus \mathbb{R}$. Por tanto, $\mathcal{C}(K)$ no es isomorfo a $\mathcal{C}(L)$ si L es un compacto totalmente desconectado. Además, como $c_0 \approx c_0 \oplus c_0$, tenemos que $\mathcal{C}(K)$ no tiene ningún subespacio complementado isomorfo a c_0. Por tanto, el espacio $\mathcal{C}(K)$ responde de forma negativa a la pregunta 4.3.3 y nos da otro ejemplo de espacio que contiene subespacios isomorfos a c_0 pero no contiene subespacios complementados isomorfos a c_0.

Por tanto, la familia de todos los compactos no metrizables es demasiado grande para poder aplicarle las herramientas desarrolladas en este trabajo. En [AK10], el lector puede encontrar problemas abiertos, análogos a los aquí mencionados, para ciertas subfamilias de compactos.

Finalmente, vamos a ver que, a diferencia de lo que nos sucedía cuando intentabamos reducir el caso 2 al caso 1, en este caso tenemos el siguiente resultado que nos permite reducir el caso en que el subespacio complementado es separable al caso 2:

Teorema 4.3.5. *Si X es un subespacio complementado separable de un espacio $\mathcal{C}(K)$ con K un compacto Hausdorff, entonces X es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1])$.*

La prueba que vamos a dar se basa en el siguiente resultado de Albiac y Kalton, cuya demostración se puede consultar en [AK06, Teorema 4.2.5]:

Teorema 4.3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un algebra de Banach conmutativa con un elemento neutro e, de modo que $\|e\| = 1$. Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a un álgebra $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio compacto Hausdorff si, y sólo si,*

$$\|a^2 - b^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \quad \textit{para cada } a,\ b \in \mathcal{A}.$$

De este resultado se deduce que, si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito, entonces $L^\infty(\mu)$ es isométrico a un espacio $\mathcal{C}(K)$. Análogamente, ℓ_∞ o cualquier subálgebra con la función idénticamente uno de un espacio $\mathcal{C}(K)$ es isométrica a un espacio $\mathcal{C}(L)$.

Demostración del teorema 4.3.5. Sea X un subespacio complementado separable de $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio compacto Hausdorff. Consideramos $\mathcal{A}$ la menor subálgebra de Banach de $\mathcal{C}(K)$ que contiene a X. Si P es un polinomio real en n variables, entonces, gracias al producto en $\mathcal{C}(K)$, podemos considerar la evaluación $P(x_1,...,x_n) \in \mathcal{C}(K)$ con $x_1,...,x_n \in X$. Claramente debe ser

$$A := \{P(x_1,...,x_n) : n \in \mathbb{N},\ P \text{ es un polinomio en } n \text{ variables}, x_1,...,x_n \in X\} \subset \mathcal{A}.$$

Además, como A es un álgebra, es inmediato comprobar que $\overline{A}$ también es un álgebra.

Por tanto,

$$\mathcal{A} = \overline{\{P(x_1,...,x_n) : n \in \mathbb{N},\ P \text{ es un polinomio en } n \text{ variables}, x_1,...,x_n \in X\}}.$$

Vamos a ver que, como X es separable, $\mathcal{A}$ también lo es. Sea $D \subset X$ un subconjunto numerable y denso en X. El conjunto

$$\hat{D} = \{P(x_1,...,x_n) : n \in \mathbb{N},\ P \text{ es un polinomio en } n \text{ variables con coeficientes racionales}, x_1,...,x_n \in D\}$$

es un subconjunto de $\mathcal{A}$ numerable y denso en $\mathcal{A}$. La densidad de $\hat{D}$ en $\mathcal{A}$ se sigue de la densidad de $\hat{D}$ en A y de la densidad de A en $\mathcal{A}$.

Por tanto, $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa separable. Además, la función 1 está en $\mathcal{A}$. Al ser $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$, se verifica $\|a^2 - b^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$ para cada $a,\ b \in \mathcal{A}$.

El teorema 4.3.6 nos garantiza que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a un espacio $\mathcal{C}(L)$ con L un compacto Hausdorff. De la separabilidad de $\mathcal{A}$ deducimos que L es un espacio métrico compacto.

Por tanto, basta comprobar que X es un subespacio complementado en $\mathcal{A}$, pero como $X \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$, de la complementabilidad de X en $\mathcal{C}(K)$ se deduce la complementabilidad de X en $\mathcal{A}$, ya que si $P : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ es una proyección con $P(\mathcal{C}(K)) = X$, entonces $P|_{\mathcal{A}}$ también es una proyección en X.

Así, X es un subespacio complementado de $\mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}$ isométrico a $\mathcal{C}(L)$. Deducimos que X es isométrico a un subespacio complementado de $\mathcal{C}(L)$ y, como todo espacio $\mathcal{C}(L)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1])$, concluímos que X es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}([0,1])$.

□

El teorema 4.3.5 nos permite obtener la siguiente generalización del teorema de Rosenthal 3.0.2:

Teorema 4.3.7. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y X un subespacio complementado separable de $\mathcal{C}(K)$. Si X^* es no separable, entonces X es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$.*

En particular, si X es un subespacio complementado separable de ℓ_∞ o $L^\infty(\mu)$, donde (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida σ-finito, con X^* no separable, entonces X es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$.

Por tanto, el Problema del Subespacio Complementado en su versión general se reduce al problema 4.2.1 y al siguiente problema:

Problema 4.3.8. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y X un subespacio complementado de $\mathcal{C}(K)$. Si X es no separable, ¿X es isomorfo a $\mathcal{C}(L)$ para algún compacto Hausdorff L?*

Apéndices

Apéndice A

Análisis Funcional y Topología

En este capítulo recopilamos, sin demostración, los resultados fundamentales del Análisis Funcional que usamos en este trabajo:

- El teorema de Hahn-Banach,
- El teorema de la gráfica cerrada,
- El teorema de la acotación uniforme.

El teorema de Hahn-Banach tiene distintas versiones. La forma que usaremos principalmente en este trabajo es la siguiente versión análitica:

Teorema A.1 (Teorema de Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea y^* un funcional lineal y continuo en un subespacio Y de un espacio normado X. Entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \|y^*\|$ y $x^*|_Y = y^*$.*

Como corolario inmediato se deduce que para cada $x \in X$ se verifica $\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} x^*(x)$.

Para demostrar el teorema de Helly 3.3.4, también haremos uso de la siguiente versión geométrica del teorema de Hahn-Banach:

Teorema A.2 (Teorema de Hahn-Banach, versión geométrica en dimensión finita)**.** *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo no vacío y $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, entonces K y $x = (x_1, \dots, x_n)$ pueden separarse, es decir, existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ para cada $y = (y_1, \dots, y_n) \in K$.*

Teorema A.3 (Teorema de la gráfica cerrada, Banach, 1932)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y T una aplicación lineal de X en Y. Son equivalentes:*

(i) T es continua,
(ii) T tiene gráfica cerrada.

Sean X e Y espacios de Banach. El teorema de la gráfica cerrada nos permitirá ver la continuidad de una aplicación lineal $T : X \to Y$ únicamente comprobando que, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X con $x = \lim x_n$ e $y = \lim T x_n$, se verifica $T x = y$.

El teorema de la acotación uniforme es otro de los resultados clásicos del Análisis Funcional y se puede obtener como una aplicación del Teorema de Categoría de Baire:

Teorema A.4 (Teorema de la acotación uniforme)**.** *Sea* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *una familia de operadores de un espacio de Banach* X *en un espacio normado* Y*. Si* $\{\|A_\alpha x\|\}_{\alpha\in I}$ *está acotada para cada* $x\in X$ *entonces* $\sup\{\|A_\alpha\|\}_{\alpha\in I}$ *es finito.*

A continuación, enunciamos el lema de Urysohn, de carácter topológico:

Lema A.5 (Lema de Urysohn)**.** *Un espacio topológico* X *es normal si, y sólo si, para cada par de subconjuntos disjuntos y cerrados A, B de* X *existe una función continua* $f : X \to [0,1]$ *tal que* $f|_A = 0$ *y* $f|_B = 1$.

Recordamos que un espacio normal es un espacio en el que cada pareja de cerrados disjuntos tienen entornos abiertos disjuntos. Todo espacio compacto Hausdorff es normal.

Definición A.6. *Un* refinamiento *de un recubrimiento de un espacio topológico es un nuevo recubrimiento del mismo espacio de modo que cada conjunto del nuevo recubrimiento es un subconjunto de algún conjunto del recubrimiento original.*

Un recubrimiento se dice localmente finito *si todo punto del espacio tiene un entorno que interseca sólo un número finito de abiertos del recubrimiento.*

Un espacio paracompacto *es un espacio topológico en que todo recubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito.*

Una partición de la unidad *de un espacio topológico* X *es un conjunto* $\mathcal{F}$ *de funciones continuas de* X *en* $[0,1]$ *de modo que para cada* $x\in X$ *existe un entorno* V *de* x *tal que todas salvo un conjunto finito de funciones de* $\mathcal{F}$ *son idénticamente nulas en* V *y la suma de las funciones no nulas es idénticamente 1 en* V.

Los espacios métricos y los espacios compactos son paracompactos. Los espacios Hausdorff y paracompactos admiten particiones de la unidad subordinadas a cualquier recubrimiento por abiertos, es decir, para cada recubrimiento $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ por abiertos de X, existe una partición de la unidad $\mathcal{F}$ de X tal que para cada $f\in\mathcal{F}$, el soporte de f está en algún abierto U_α.

Las particiones de la unidad se usan para extender propiedades locales a todo el espacio. En particular, nos permitirán demostrar el teorema de Borsuk 3.2.1.

Apéndice B

Topología débil y débil*

Damos primero una definición breve, en términos de convergencia de redes, de las topologías débil y débil*.

Definición B.1. *Sea X un espacio normado. Llamamos* topología débil *de X a la topología más gruesa sobre X que hace que cada función $x^* \in X^*$ sea continua. En términos de convergencia, decimos que una red $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ en X* converge débilmente *a $x \in X$, y escribimos $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$, si para cada $x^* \in X^*$ se verifica $x^*(x_\alpha) \to x^*(x)$.*

Sea $j : X \to X^{**}$ el embebimiento dado por $j(x)(x^*) = x^*(x)$ para cada $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Llamamos topología débil* *de X^* a la topología mas gruesa sobre X^* que hace que todos los funcionales de $j(X) \subset X^{**}$ sean continuos. En términos de convergencia, decimos que una red $(x^*_\alpha)_{\alpha \in D}$ en X^* es* débil*-convergente *a $x^* \in X^*$, y lo de notamos por $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$, si para cada $x \in X$ se verifica $x^*_\alpha(x) \to x^*(x)$.*

Las topología débil y débil* tienen las siguientes propiedades:

- Si la topología débil de un espacio normado X es metrizable entonces X es de dimensión finita.
- Una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{R}$ es continua para la topología de la norma de X si, y sólo si, es continua para la topología débil de X.
- Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es débil-débil continua si, y sólo si, $y^* \circ T \in X^*$ para cada $y^* \in Y^*$.
- Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es débil-débil continua si, y sólo si, es norma-norma continua.
- Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal norma-norma continua entonces su operador adjunto $T^* : Y^* \to X^*$ es débil*-débil* continuo.
- Si $R : Y^* \to X^*$ es una aplicación lineal débil*-débil* continuo entonces existe una aplicación lineal $T : X \to Y$ norma-norma continua tal que $T^* = R$.
- Todo operador débil*-débil* continuo es también norma-norma continuo.

Teorema B.2 (Teorema de Eberlein-Šmulian)**.** *Sea X un espacio de Banach. Un conjunto $A \subset X$ es débil-compacto si, y sólo si, es sucesionalmente débil-compacto, es decir, si toda sucesión en A tiene una subsucesión débil-convergente a algún punto de A.*

Teorema B.3 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Si X es un espacio lineal normado entonces $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es débil*-compacto.*

Teorema B.4 (Teorema de Goldstine)**.** *Sea X un espacio normado. Entonces B_X es débil*-denso en $B_{X^{**}}$.*

Proposición B.5. *Sea X un espacio de Banach. Entonces la bola unidad B_X es débil-compacta si, y sólo si, X es reflexivo.*

Proposición B.6. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $A \subset X$ es relativamente débil-compacto si, y sólo si, es acotado y, considerando $X \subset X^{**}$, la clausura débil* de A en X^{**} está en X.*

Proposición B.7. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces B_{X^*} es metrizable en la topología débil*.*

Sea $T : X \to Y$ un operador entre espacios de Banach. Decimos que T es compacto si T lleva conjuntos acotados en norma a conjuntos relativamente compactos. Análogamente, decimos que T es débil-compacto si lleva conjuntos acotados en norma a conjuntos relativamente débil-compactos. Equivalentemente, T es compacto (resp. débil-compacto) si, y sólo si, $T(B_X)$ es relativamente compacto (resp. relativamente débil-compacto).

Teorema B.8 (Teorema de Schauder)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Entonces T es un operador compacto si, y sólo si, T^* es un operador compacto.*

Teorema B.9 (Teorema de Gantmacher)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador. Entonces:*

1. *T es débil-compacto si, y sólo si, el rango de $T^{**}(X^{**}) \subset Y$.*
2. *T es débil-compacto si, y sólo si, su adjunto $T^* : Y^* \to X^*$ es débil*-débil continuo.*
3. *T es débil-compacto si, y sólo si, el operador adjunto T^* es débil-compacto.*

Teorema B.10 (Teorema de Krein-Smulian)**.** *La envoltura convexa cerrada de un conjunto relativamente débil-compacto en un espacio de Banach es un conjunto débil-compacto.*

Apéndice C

Teoría de la Medida

Recogemos en este apéndice los conceptos y resultados fundamentales de la Teoría de la Medida de los que haremos uso a lo largo del trabajo. Este apéndice está basado en [Rud88] y en [Coh80].

Definición C.1. *Se llama* medida signada *a una función* $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$*, definida en una* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*, que verifica:*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ *es* σ*-aditiva, es decir, para cualquier colección* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *numerable de elementos disjuntos de* $\mathcal{M}$ *se verifica*
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$
- μ *sólo toma uno de los valores* $+\infty$ *o* $-\infty$*.*

Para evitar casos triviales, siempre supondremos que existe $A \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(A) < \infty$*.*

Llamamos espacio de medida *a una terna* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$*, donde* $\mathcal{M}$ *es una* σ*-álgebra sobre* Ω *y* μ *es una medida signada sobre la* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*.*

Diremos que μ *es una* medida positiva *si* μ *es una medida signada con valores en* $[0, +\infty]$*.*

Además, decimos que una medida signada μ *en* Ω *es finita si* $\mu(\Omega) < \infty$*. Si* μ *es una medida finita en* Ω *y* $A \in \mathcal{M}$*, decimos que* A *es un* átomo *si* $\mu(A) \neq 0$ *y, si* $B \in \mathcal{M}$ *verifica* $B \subset A$*, entonces* $\mu(B) = 0$ *o* $\mu(B) = \mu(A)$*. Decimos que* μ *es* puramente no-atómica *si no existen átomos en* Ω *para* μ*.*

Si μ *es una medida positiva finita en un espacio* Ω*, definimos* $L^1(\mu)$ *como el espacio formado por todas las funciones reales* f *en* Ω *para las que se verifica*

$$\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Consideraremos el espacio $L^1(\mu)$ *equipado con la norma* $\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu$ *para cada* $f \in L^1(\mu)$*. Con esta norma,* $L^1(\mu)$ *es un espacio de Banach. A los elementos de* $L^1(\mu)$ *los llamaremos funciones integrables Lebesgue respecto de* μ *o simplemente funciones integrables respecto de* μ*.*

Se denomina medida de Borel en Ω *a toda medida signada* μ *definida sobre la* σ*-álgebra de todos los conjuntos de Borel de un espacio compacto Hausdorff* Ω*. Un conjunto de Borel E es regular exteriormente si* $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ abierto}\}$ *y se dice regular interiormente si* $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$*. Si todo conjunto medible de* Ω *es a la vez regular exterior e interiormente, se dice que* μ es regular .

Se dice que un conjunto E de un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *tiene medida* σ*-finita si es una unión numerable de conjuntos* E_i *con* $\mu(E_i) < \infty$*.*

Sea μ *una medida signada, finita, definida en la* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*. Definimos la* variacón total *de* μ *como la función* $|\mu| : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ *dada por la fórmula*

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \text{ para cada } E \in \mathcal{M},$$

donde el supremo anterior se toma sobre todas las particiones $\{E_i\} \subset \mathcal{M}$ *de E. La variación total es una medida positiva y finita en* $\mathcal{M}$*.*

Teorema C.2 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Si K es un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces* $\mathcal{C}(K)^*$ *es isométricamente isomorfo al espacio* $\mathcal{M}(K)$ *de las medidas de Borel signadas, regulares y finitas en K con la norma* $\|\mu\| = |\mu|(K)$*. La dualidad está dada por*

$$< f, \mu >= \int_K f d\mu.$$

Si K es metrizable entonces toda medida de Borel es regular y, por tanto, $\mathcal{M}(K)$ *coincide con el espacio de las medidas de Borel signadas finitas.*

Teorema C.3 (Teorema de Lusin)**.** *Sea* μ *una medida positiva regular en una* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$ *de un espacio de Hausdorff compacto K, de forma que* $\mathcal{M}$ *contiene a los conjuntos de Borel de K. Sea f una función real medible en K y* $A \subset K$ *tal que* $\mu(A) < \infty$*. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un compacto* $C \subset A$ *de modo que*

$$\mu(A \setminus C) < \varepsilon$$

y $f|_C$ *es continua.*

Definición C.4. *Sea* μ *y* ν *dos medidas signadas en una* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$*. Si* μ *es positiva, decimos que* μ *está concentrada en* $E \in \mathcal{M}$ *si* $\mu(E^c) = 0$*. En general, decimos que* μ *está concentrada en* $E \in \mathcal{M}$ *si* $|\mu|(E^c) = 0$*.*

Decimos que μ *y* ν *son singulares si existe* $E \in \mathcal{M}$ *tal que* μ *está concentrada en E y* ν *está concentrada en* E^c*. En ese caso, escribiremos* $\mu \perp \nu$ *para denotar que* μ *y* ν *son singulares.*

Si μ *es positiva, decimos que* ν *es absolutamente continua respecto de* μ *, y lo denotaremos por* $\nu \ll \mu$*, si para cada* $A \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(A) = 0$ *se verifica* $\nu(A) = 0$*.*

Definimos la variación positiva de μ *y la variación negativa de* μ *respectivamente como*

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{M}, B \subset A\}$$

y

$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) : B \in \mathcal{M}, B \subset A\} \text{ para cada } A \in \mathcal{M}.$$

Se verifica $\mu = \mu^+ - \mu^-$ *y* $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$*.*

Teorema C.5 (Teorema de Radon-Nikodym). *Sea μ una medida positiva σ-finita sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X, y sea λ una medida signada finita en $\mathcal{M}$. Si λ es absolutamente continua respecto de μ, entonces existe una única función $h \in L^1(\mu)$ verificando*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu$$

para cada conjunto $E \in \mathcal{M}$.

Definición C.6. *En la situación del teorema de Radon-Nikodym, a la función h la llamamos* derivada de Radon-Nikodym *de λ con respecto de μ, y la denotamos como $\frac{d\lambda}{d\mu}$.*

En general, si ν es una medida positiva σ-finita y $f \in L^1(\nu)$, escribiremos $d\mu = f d\nu$ para representar a la medida

$$\mu(A) = \int_A f d\nu \text{ para cada } A \in \mathcal{M}.$$

Teorema C.7 (Teorema de descomposición de Lebesgue). *Sea μ una medida positiva σ-finita sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ en un conjunto X, y sea λ una medida signada finita en $\mathcal{M}$. Entonces existe un único par de medidas λ_a y λ_s en $\mathcal{M}$ tales que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \ \ \lambda_a \ll \mu, \ \ \lambda_s \perp \mu.$$

Esta descomposición nos permite definir la derivada de Radon-Nikodym en el caso general en que λ no es necesariamente absolutamente continua respecto de μ, simplemente tomando $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$. Además, también llamaremos $\frac{d\lambda}{d\mu}$ a la médida ν dada por la fórmula

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\lambda_a}{d\mu} d\mu \text{ para cada } A \in \mathcal{M}.$$

Teorema C.8 (Teorema de descomposición de Hahn). *Sea μ una medida signada finita sobre una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de un conjunto X. Entonces existen conjuntos A y B en $\mathcal{M}$ de modo que $A \bigcup B = X$, $A \bigcap B = \emptyset$, y tales que las variaciones positiva y negativa μ^+ y μ^- de μ verifican*

$$\mu^+(E) = \mu(A \bigcap E) \text{ y } \mu^-(E) = -\mu(B \bigcap E) \text{ para cada } E \in \mathcal{M}.$$

Bibliografía

[AK06] Fernando Albiac and Nigel J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, New York, 2006. MR 2192298 (2006h:46005)

[AK10] Antonio Avilés and Ondřej F. K. Kalenda, *Compactness in Banach space theory—selected problems*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **104** (2010), no. 2, 337–352. MR 2757245 (2012e:46036)

[Ben78] Y. Benyamini, *An extension theorem for separable Banach spaces*, Israel J. Math. **29** (1978), no. 1, 24–30. MR 0482075 (58 #2163)

[BP60a] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **8** (1960), 77–80. MR 0115073 (22 #5876)

[BP60b] ______, *Spaces of continuous functions. IV. On isomorphical classification of spaces of continuous functions*, Studia Math. **19** (1960), 53–62. MR 0113132 (22 #3971)

[Bro12] Philip A. H. Brooker, *Asplund operators and the Szlenk index*, J. Operator Theory **68** (2012), no. 2, 405–442. MR 2995728

[BS00] J. Frédéric Bonnans and Alexander Shapiro, *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2000. MR 1756264 (2001g:90003)

[Coh80] Donald L. Cohn, *Measure theory / Donald L. Cohn*, Birkhauser Boston, 1980.

[Die84] Joseph Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR 737004 (85i:46020)

[Dit70] Seymour Z. Ditor, *On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 443–452. MR 0435921 (55 #8872)

[DJT95] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 1342297 (96i:46001)

[Dod11] Pandelis Dodos, *Operators whose dual has non-separable range.*, J. Funct. Anal. **260** (2011), no. 5, 1285–1303.

[FHH$^+$11] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, and Václav Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis.*, Berlin: Springer, 2011.

[GM97] W. T. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. **307** (1997), no. 4, 543–568. MR 1464131 (98g:46018)

[Hah33] Hans Hahn, *Literaturberichte: Théorie des opérations linéaires*, Monatsh. Math. Phys. **40** (1933), no. 1, A22–A23, St. Banach. (Monografje Matematyczne, Tom I.) Seminar. Matem. Univ. Warszawa 1932. VIII+254S. Preis 3 Dollar. MR 1550257

[Her13] Antonio Pérez Hernández, *Filtros y sus aplicaciones*, `http://webs.um.es/beca/Investigacion/TFM_PEREZ%20HERNANDEZ.pdf`, Tesis de Máster, 2013.

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995. MR 1321597 (96e:03057)

[Kos04] Piotr Koszmider, *Banach spaces of continuous functions with few operators*, Math. Ann. **330** (2004), no. 1, 151–183. MR 2091683 (2005h:46027)

[Mil66] A. A. Miljutin, *Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum*, Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. **2** (1966), 150–156. MR 0206695 (34 #6513)

[Peł60] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. **19** (1960), 209–228. MR 0126145 (23 #A3441)

[Ros73] Haskell P. Rosenthal, *On factors of C(*$[0,1]$*) with non-separable dual. Proc. internat. Sympos. partial diff. Equ. Geometry normed lin. Spaces II.*, Isr. J. Math. **13** (1973).

[Ros75] ______, *Correction to 'On factors of* $C([0,1])$ *with nonseparable dual'.*, Isr. J. Math. **21** (1975), 93–94.

[Ros03] Haskell P. Rosenthal, *The Banach spaces* $C(K)$, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1547–1602. MR 1999603 (2004g:46028)

[Rud88] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, 1988.

[Sem60] Z. Semadeni, *Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares. II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **8** (1960), 81–84. MR 0115074 (22 #5877)

[Sza86] Stanisław J. Szarek, *A superreflexive Banach space which does not admit complex structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 3, 437–444. MR 840625 (87f:46026)

Índice alfabético