Integración en espacios de Banach

José Rodríguez Ruiz

Universidad de Murcia

Miraflores de la Sierra

31 de marzo de 2006

El contexto básico

Consideramos funciones

$$f : \Omega \longrightarrow X$$

El contexto básico

Consideramos funciones

$$f : \Omega \longrightarrow X$$

donde

El contexto básico

Consideramos funciones

$$f : \Omega \longrightarrow X$$

donde

- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo,

El contexto básico

Consideramos funciones

$$f : \Omega \longrightarrow X$$

donde

- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo,
- X es un **espacio de Banach**.

El contexto básico

Consideramos funciones

$$f : \Omega \longrightarrow X$$

donde

- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo,
- X es un **espacio de Banach**.

Fremlin y Mendoza (1994)

El analista funcional ordinario es, por naturaleza, impaciente ante la multiplicidad de definiciones de ‘integral’ que se han propuesto para funciones vectoriales, y preferiría tener una única integral canónica para uso general.

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.

Las integrales de Bochner y Pettis

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Las integrales de Bochner y Pettis

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Pettis, 1938)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Pettis** si

Las integrales de Bochner y Pettis

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Pettis, 1938)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Pettis** si

- x^*f es integrable $\forall x^* \in X^*$.

Las integrales de Bochner y Pettis

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Pettis, 1938)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Pettis** si

- $x^* f$ es integrable $\forall x^* \in X^*$.
- Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X$ tal que

$$x^*(x_A) = \int_A x^* f \, d\mu \quad \forall x^* \in X^*.$$

Las integrales de Bochner y Pettis

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Pettis, 1938)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Pettis** si

- $x^* f$ es integrable $\forall x^* \in X^*$.
- Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X$ tal que

$$x^*(x_A) = \int_A x^* f \, d\mu \quad \forall x^* \in X^*.$$

Definición (Bochner, 1933)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Bochner** si

- f es fuertemente medible.
- $\int_\Omega \|f\| \, d\mu < \infty$.

Definición (Pettis, 1938)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Pettis** si

- $x^* f$ es integrable $\forall x^* \in X^*$.
- Para cada $A \in \Sigma$ existe $x_A \in X$ tal que

$$x^*(x_A) = \int_A x^* f \, d\mu \quad \forall x^* \in X^*.$$

Bochner $\Longrightarrow$ Pettis

La olvidada integral de Birkhoff (1935)

La olvidada integral de Birkhoff (1935)

- Involucra sumas **incondicionalmente** convergentes

$$\sum_i \mu(A_i) f(t_i)$$

La olvidada integral de Birkhoff (1935)

- Involucra sumas **incondicionalmente** convergentes

$$\sum_i \mu(A_i) f(t_i)$$

donde $A_1, A_2, \ldots$ es una partición contable de Ω en conjuntos medibles y $t_i \in A_i$ para cada i.

La olvidada integral de Birkhoff (1935)

- Involucra sumas **incondicionalmente** convergentes

$$\sum_i \mu(A_i) f(t_i)$$

  donde $A_1, A_2, \ldots$ es una partición contable de Ω en conjuntos medibles y $t_i \in A_i$ para cada i.

- En general,

$$\text{Bochner} \implies \text{Birkhoff} \implies \text{Pettis}$$

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de
  - la integración respecto de medidas vectoriales,

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de
  - la integración respecto de medidas vectoriales,
  - la integración de multi-funciones.

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de
  - la integración respecto de medidas vectoriales,
  - la integración de multi-funciones.
- Comparamos estos métodos de integración con otros que son bien conocidos (Bochner, Pettis, McShane, Debreu, etc.).

Nuestro plan

En la tesis doctoral ...

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de
  - la integración respecto de medidas vectoriales,
  - la integración de multi-funciones.
- Comparamos estos métodos de integración con otros que son bien conocidos (Bochner, Pettis, McShane, Debreu, etc.).
- Caracterizamos, en términos de integración vectorial, algunas propiedades de los espacios donde las (multi-) funciones toman valores.

Nuestro plan

En la tesis doctoral . . .

- Analizamos con detalle la integral de Birkhoff, así como sus correspondientes versiones dentro de los contextos de
  - la integración respecto de medidas vectoriales,
  - la integración de multi-funciones.
- Comparamos estos métodos de integración con otros que son bien conocidos (Bochner, Pettis, McShane, Debreu, etc.).
- Caracterizamos, en términos de integración vectorial, algunas propiedades de los espacios donde las (multi-) funciones toman valores.

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Contenidos

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$,

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

- En general, Bochner $\Longrightarrow$ Birkhoff $\Longrightarrow$ Pettis.

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

- En general, Bochner $\Longrightarrow$ Birkhoff $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

- En general, Bochner $\Longrightarrow$ Birkhoff $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.
- Si $\dim(X) < \infty$, entonces Bochner $\equiv$ Birkhoff $\equiv$ Pettis.

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

- En general, Bochner $\Longrightarrow$ Birkhoff $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.
- Si $\dim(X) < \infty$, entonces Bochner $\equiv$ Birkhoff $\equiv$ Pettis.
- Si X es *separable*, entonces Birkhoff $\equiv$ Pettis.

Definición de la integral de Birkhoff

Definición (Birkhoff, 1935)

$f:\Omega \longrightarrow X$ es integrable **Birkhoff**, con integral $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición contable Γ_ε de Ω en Σ tal que

$$\left\| \sum_n \mu(A_n) f(t_n) - x \right\| \leq \varepsilon$$

para cada partición contable (A_n) de Ω en Σ más fina que Γ_ε y cada elección de puntos $t_n \in A_n$, siendo las series involucradas incondicionalmente convergentes.

Relación con otras integrales

- En general, Bochner $\Longrightarrow$ Birkhoff $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.
- Si $\dim(X) < \infty$, entonces Bochner $\equiv$ Birkhoff $\equiv$ Pettis.
- Si X es *separable*, entonces Birkhoff $\equiv$ Pettis.

Integración vectorial a través de funciones reales

Dada $f : \Omega \longrightarrow X$, consideramos la familia *puntualmente compacta* de funciones reales

$$Z_f = \{x^* f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$$

Integración vectorial a través de funciones reales

Dada $f : \Omega \longrightarrow X$, consideramos la familia *puntualmente compacta* de funciones reales

$$Z_f = \{x^* f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$$

y la subfamilia

$$Z_{f,B} = \{x^* f : \ x^* \in B\} \subset Z_f$$

para cualquier conjunto *normante* $B \subset B_{X^*}$.

Integración vectorial a través de funciones reales

Dada $f : \Omega \longrightarrow X$, consideramos la familia *puntualmente compacta* de funciones reales

$$Z_f = \{x^* f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$$

y la subfamilia

$$Z_{f,B} = \{x^* f : \ x^* \in B\} \subset Z_f$$

para cualquier conjunto *normante* $B \subset B_{X^*}$.

Nuestro objetivo

Estudiar la integrabilidad Birkhoff de f en términos de Z_f y $Z_{f,B}$.

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon.$$

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon.$$

En tal caso:

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon.$$

En tal caso:

- $\mathscr{H}$ es **estable** en el sentido de Talagrand (en particular, está formada por funciones medibles).

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \leq \varepsilon.$$

En tal caso:

- $\mathscr{H}$ es **estable** en el sentido de Talagrand (en particular, está formada por funciones medibles).
- Para cada g en la adherencia puntual de $\mathscr{H}$ en $\mathbb{R}^\Omega$, existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge a g a.e. (Bourgain).

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \le i \le n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \le \varepsilon.$$

En tal caso:

- $\mathscr{H}$ es **estable** en el sentido de Talagrand (en particular, está formada por funciones medibles).
- Para cada g en la adherencia puntual de $\mathscr{H}$ en $\mathbb{R}^{\Omega}$, existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge a g a.e. (Bourgain).

La propiedad de oscilación controlada de Bourgain

Definición (Bourgain)

$\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la **propiedad de Bourgain** si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada conjunto medible $A \subset \Omega$ de medida positiva, existen conjuntos medibles $A_1, \ldots, A_n \subset A$ de medida positiva tales que

$$\sup_{h \in \mathscr{H}} \min_{1 \le i \le n} \operatorname{osc}(h|_{A_i}) \le \varepsilon.$$

En tal caso:

- $\mathscr{H}$ es **estable** en el sentido de Talagrand (en particular, está formada por funciones medibles).
- Para cada g en la adherencia puntual de $\mathscr{H}$ en $\mathbb{R}^{\Omega}$, existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge a g a.e. (Bourgain).

Teorema (Riddle y Saab, 1985)

Sea $f : \Omega \longrightarrow Y^*$ *acotada*. Si Z_{f,B_Y} tiene la propiedad de Bourgain, entonces f es integrable Pettis.

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain sii

Integrabilidad Birkhoff de funciones acotadas

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\right) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\right) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ *acotada*. Son equivalentes:

Integrabilidad Birkhoff de funciones acotadas

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\Big(\bigcup\{A \in \Gamma : \ \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\Big) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ *acotada*. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \ \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\right) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ *acotada*. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff de funciones acotadas

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\right) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ *acotada*. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ normante.

Integrabilidad Birkhoff de funciones acotadas

Lema (Talagrand, 1987)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ tiene la propiedad de Bourgain sii para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe una partición *finita* Γ de Ω en Σ tal que

$$\mu\left(\bigcup\{A \in \Gamma : \operatorname{osc}(h|_A) > \varepsilon\}\right) < \delta \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ *acotada*. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ normante.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

En tal caso, el rango de la integral indefinida de f es relativamente compacto **en norma**.

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

En tal caso, el rango de la integral indefinida de f es relativamente compacto **en norma**.

La hipótesis de convexidad ...

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

En tal caso, el rango de la integral indefinida de f es relativamente compacto **en norma**.

La hipótesis de convexidad . . .

- no se puede eliminar en general (Fremlin).

Integrabilidad Birkhoff de funciones no necesariamente acotadas

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$. Son equivalentes:

1. f es integrable Birkhoff.
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.
3. $Z_{f,B}$ es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain para algún $B \subset B_{X^*}$ convexo y normante.

En tal caso, el rango de la integral indefinida de f es relativamente compacto **en norma**.

La hipótesis de convexidad ...

- no se puede eliminar en general (Fremlin).
- puede eliminarse si (B_{X^*}, w^*) es separable.

La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales y la integral de Birkhoff

Teorema (Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon, Bourgain)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.

La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales y la integral de Birkhoff

Teorema (Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon, Bourgain)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.
2. Para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow Y^*$ con variación σ-finita,

La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales y la integral de Birkhoff

Teorema (Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon, Bourgain)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.
2. Para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow Y^*$ con variación σ-finita, existe una función integrable **Pettis** $f : \Omega \longrightarrow Y^*$ tal que

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \Sigma.$$

La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales y la integral de Birkhoff

Teorema (Musial, Ryll-Nardzewski, Janicka, Haydon, Bourgain)

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.
2. Para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow Y^*$ con variación σ-finita, existe una función integrable **Pettis** $f : \Omega \longrightarrow Y^*$ tal que

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \Sigma.$$

3. La función "identidad" $I : B_{Y^*} \longrightarrow Y^*$ es integrable **Pettis** respecto de cada probabilidad de Radon en (B_{Y^*}, w^*).

La propiedad débil de Radon-Nikodým en espacios de Banach duales y la integral de Birkhoff

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Y no contiene subespacios isomorfos a ℓ^1.
2. Para cada espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y cada medida μ-continua $\nu : \Sigma \longrightarrow Y^*$ con variación σ-finita, existe una función integrable **Birkhoff** $f : \Omega \longrightarrow Y^*$ tal que

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \Sigma.$$

3. La función "identidad" $I : B_{Y^*} \longrightarrow Y^*$ es integrable **Birkhoff** respecto de cada probabilidad de Radon en (B_{Y^*}, w^*).

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en. . .

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

1. Si X no es separable,

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

1. Si X no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

1. Si X no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.
2. Si el carácter de densidad de X es mayor o igual que el continuo,

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

1. Si X no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.
2. Si el carácter de densidad de X es mayor o igual que el continuo, entonces existe una función acotada integrable Pettis $f : [0, 1] \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.

Coincidencia de las integrales de Birkhoff y Pettis

Birkhoff $\equiv$ Pettis para funciones con valores en...

- un espacio de Banach separable (Pettis, 1938).
- el dual de un espacio de Banach separable sin copias de ℓ^1.

¿Qué ocurre con otras clases de espacios de Banach?

Teorema

Supongamos que X es débilmente Lindelöf determinado.

1. Si X no es separable, entonces existen un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ) y una función acotada integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.
2. Si el carácter de densidad de X es mayor o igual que el continuo, entonces existe una función acotada integrable Pettis $f : [0, 1] \longrightarrow X$ que no es integrable Birkhoff.

Consecuencia: el "teorema de la convergencia dominada" para la integral de Birkhoff no es válido en general.

Referencias

- B. Cascales y J. Rodríguez, *Birkhoff integral for multi-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004).
- B. Cascales y J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005).
- J. Rodríguez, *On the existence of Pettis integrable functions which are not Birkhoff integrable*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005).
- J. Rodríguez, *Universal Birkhoff integrability in dual Banach spaces*, Quaest. Math. **28** (2005).
- J. Rodríguez, *Absolutely summing operators and integration of vector-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006).
- J. Rodríguez, *On integration of vector functions with respect to vector measures*, aceptado en Czech. Math. J.
- J. Rodríguez, *Spaces of vector functions that are integrable with respect to vector measures*, aceptado en J. Aust. Math. Soc.
- J. Rodríguez, *The Bourgain property and convex hulls*, aceptado en Math. Nachr.