Aplicación del teorema de Parovičenko a un problema de medibilidad en espacios de funciones continuas

Seminario de Análisis Funcional
Murcia – 2 de febrero de 2012

1. TEOREMA DE PAROVIČENKO

Teorema de Parovičenko

Teorema 1 (Parovičenko)

Sea Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1.

Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $\mathbb{N}^* \longrightarrow Z$.

Teorema de Parovičenko

Teorema 1 (Parovičenko)

Sea Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1.

Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $\mathbb{N}^* \longrightarrow Z$.

- $\beta\mathbb{N}$ = espacio de todos los ultrafiltros en $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ = espacio de todos los ultrafiltros *libres* en $\mathbb{N}$.

Espacios de Parovičenko

Definición

Un **espacio de Parovičenko** es un espacio compacto X tal que:

1. es 0-dimensional;
2. no tiene puntos aislados;
3. cada subconjunto $\mathscr{G}_\delta$ no vacío de X tiene interior no vacío;
4. para cualesquiera $U, V \subseteq X$ abiertos $\mathscr{F}_\sigma$ se cumple

$$U \cap V = \emptyset \implies \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Espacios de Parovičenko

Definición

Un **espacio de Parovičenko** es un espacio compacto X tal que:

1. es 0-dimensional;
2. no tiene puntos aislados;
3. cada subconjunto $\mathscr{G}_\delta$ no vacío de X tiene interior no vacío;
4. para cualesquiera $U, V \subseteq X$ abiertos $\mathscr{F}_\sigma$ se cumple

$$U \cap V = \emptyset \implies \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Proposición 2

$\mathbb{N}^*$ es un espacio de Parovičenko.

Espacios de Parovičenko

Definición

Un **espacio de Parovičenko** es un espacio compacto X tal que:

1. es 0-dimensional;
2. no tiene puntos aislados;
3. cada subconjunto $\mathscr{G}_\delta$ no vacío de X tiene interior no vacío;
4. para cualesquiera $U, V \subseteq X$ abiertos $\mathscr{F}_\sigma$ se cumple

$$U \cap V = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Proposición 2

$\mathbb{N}^*$ es un espacio de Parovičenko.

Teorema (Parovičenko; van Douwen-van Mill)

$$\text{CH} \iff \mathbb{N}^* \text{ es el único espacio de Parovičenko de peso } \mathfrak{c}.$$

Teorema de Parovičenko: versión general

Teorema 3 (Parovičenko)

Sea X un espacio de Parovičenko.

Sea Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1.

Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Demostración - Paso 1

Lema 4

Sean X un espacio de Parovičenko, Y un espacio compacto metrizable y

$$X \xrightarrow{f} Y$$

una aplicación continua suprayectiva.

Sean $F_1, F_2 \subseteq Y$ cerrados tales que $F_1 \cup F_2 = Y$.

Entonces existe un *cerrado-abierto* $W \subseteq X$ tal que

$$f(W) = F_1 \quad \text{y} \quad f(X \setminus W) = F_2.$$

Demostración - Paso 2

Lema 5

Sea X un espacio de Parovičenko.

Sean Y_1 e Y_2 dos espacios compactos metrizables y

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ & & \uparrow g \\ & & Y_2 \end{array}$$

dos aplicaciones continuas suprayectivas.

Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \xrightarrow{h} Y_2$ tal que

$$\boxed{h \circ g = f}$$

Demostración - Paso 3

Teorema 3 (Parovičenko)

Sean X un espacio de Parovičenko y Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1. Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Ideas finales de la prueba

Demostración - Paso 3

Teorema 3 (Parovičenko)

Sean X un espacio de Parovičenko y Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1. Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Ideas finales de la prueba

- $Z \subseteq J^{\omega_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow J^{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha,\beta}} J^{\beta} \longrightarrow \ldots$ (escribimos $J = [0,1]$)

Demostración - Paso 3

Teorema 3 (Parovičenko)

Sean X un espacio de Parovičenko y Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1. Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Ideas finales de la prueba

- $Z \subseteq J^{\omega_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow J^{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha,\beta}} J^{\beta} \longrightarrow \ldots$ (escribimos $J = [0,1]$)
- $Z_\alpha = p_{\omega_1,\alpha}(Z)$ es metrizable $\forall\, \alpha < \omega_1$.

Demostración - Paso 3

Teorema 3 (Parovičenko)

Sean X un espacio de Parovičenko y Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1. Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Ideas finales de la prueba

- $Z \subseteq J^{\omega_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow J^{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha,\beta}} J^{\beta} \longrightarrow \ldots$ (escribimos $J = [0,1]$)
- $Z_\alpha = p_{\omega_1,\alpha}(Z)$ es metrizable $\forall \alpha < \omega_1$.
- Existen $X \xrightarrow{f_\alpha} Z_\alpha$ continuas suprayectivas tales que

$$\boxed{p_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha = f_\beta} \qquad \forall \beta < \alpha < \omega_1.$$

Demostración - Paso 3

Teorema 3 (Parovičenko)

Sean X un espacio de Parovičenko y Z un espacio compacto de peso menor o igual que ω_1. Entonces existe una aplicación continua suprayectiva $X \longrightarrow Z$.

Ideas finales de la prueba

- $Z \subseteq J^{\omega_1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow J^{\alpha} \xrightarrow{p_{\alpha,\beta}} J^{\beta} \longrightarrow \ldots$ (escribimos $J = [0,1]$)
- $Z_\alpha = p_{\omega_1,\alpha}(Z)$ es metrizable $\forall\, \alpha < \omega_1$.
- Existen $X \xrightarrow{f_\alpha} Z_\alpha$ continuas suprayectivas tales que

$$\boxed{p_{\alpha,\beta} \circ f_\alpha = f_\beta} \qquad \forall\, \beta < \alpha < \omega_1.$$

- Existe $X \xrightarrow{f} Z$ continua suprayectiva tal que

$$p_{\omega_1,\alpha} \circ f = f_\alpha \qquad \forall\, \alpha < \omega_1.$$

II. MEDIBILIDAD EN $C(K)$

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

$$\mathrm{Ba}(C_p(K)) \quad \subset \quad \mathrm{Bo}(C_p(K))$$

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ba}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_p(K)) \\ \cap & & \cap \\ \mathrm{Ba}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_w(K)) \end{array}$$

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ba}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_p(K)) \\
\cap & & \cap \\
\mathrm{Ba}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_w(K)) \\
 & & \cap \\
 & & \mathrm{Bo}(C(K))
\end{array}
$$

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ba}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_p(K)) \\
\cap & & \cap \\
\mathrm{Ba}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_w(K)) \\
 & & \cap \\
 & & \mathrm{Bo}(C(K))
\end{array}$$

- $\mathrm{Ba}(C_p(K))$ está generada por $\{\delta_t : t \in K\}$.
- $\mathrm{Ba}(C_w(K))$ está generada por $C(K)^*$.

σ-álgebras en $C(K)$

Dado un espacio compacto K, tenemos distintas σ-álgebras en $C(K)$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ba}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_p(K)) \\
\cap & & \cap \\
\mathrm{Ba}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Bo}(C_w(K)) \\
 & & \cap \\
 & & \mathrm{Bo}(C(K))
\end{array}
$$

- $\mathrm{Ba}(C_p(K))$ está generada por $\{\delta_t : t \in K\}$.
- $\mathrm{Ba}(C_w(K))$ está generada por $C(K)^*$.

- Todas estas σ-álgebras coinciden si K es metrizable.
- $\mathrm{Bo}(C_p(K)) = \mathrm{Bo}(C(K))$ si K es de Valdivia.

Condición suficiente para $\mathrm{Ba}(C_p(K)) = \mathrm{Bo}(C_p(K))$

Proposición 6

Sea K un espacio compacto con la siguiente propiedad:

($\star$) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada cerrado $F \subseteq K^n$ existe una sucesión decreciente (F_m) de cerrados separables de K^n tal que*

$$F = \bigcap F_m.$$

Entonces $\mathrm{Ba}(C_p(K)) = \mathrm{Bo}(C_p(K))$.

$\{0,1\}^{\omega_1}$ tiene la propiedad $(\star)$

Proposición 7

Para cada cerrado $F \subseteq \{0,1\}^{\omega_1}$ existe una sucesión decreciente (F_m) de cerrados separables de $\{0,1\}^{\omega_1}$ tal que $F = \bigcap F_m$.

$\{0,1\}^{\omega_1}$ tiene la propiedad $(\star)$

Proposición 7

Para cada cerrado $F \subseteq \{0,1\}^{\omega_1}$ existe una sucesión decreciente (F_m) de cerrados separables de $\{0,1\}^{\omega_1}$ tal que $F = \bigcap F_m$.

Idea de la prueba

1. Existe $\mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \{0,1\}^{\omega_1}$ continua tal que $g(\mathbb{N}^*) = F$ (Parovičenko).

$\{0,1\}^{\omega_1}$ tiene la propiedad $(\star)$

Proposición 7

Para cada cerrado $F \subseteq \{0,1\}^{\omega_1}$ existe una sucesión decreciente (F_m) de cerrados separables de $\{0,1\}^{\omega_1}$ tal que $F = \bigcap F_m$.

Idea de la prueba

1. Existe $\mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \{0,1\}^{\omega_1}$ continua tal que $g(\mathbb{N}^*) = F$ (Parovičenko).
2. Fijamos una extensión continua $\beta\mathbb{N} \xrightarrow{\tilde{g}} \{0,1\}^{\omega_1}$ de g.

$\{0,1\}^{\omega_1}$ tiene la propiedad $(\star)$

Proposición 7

Para cada cerrado $F \subseteq \{0,1\}^{\omega_1}$ existe una sucesión decreciente (F_m) de cerrados separables de $\{0,1\}^{\omega_1}$ tal que $F = \bigcap F_m$.

Idea de la prueba

1. Existe $\mathbb{N}^* \xrightarrow{g} \{0,1\}^{\omega_1}$ continua tal que $g(\mathbb{N}^*) = F$ (Parovičenko).
2. Fijamos una extensión continua $\beta\mathbb{N} \xrightarrow{\tilde{g}} \{0,1\}^{\omega_1}$ de g.
3. Los conjuntos

$$\boxed{F_m = \tilde{g}(\beta\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, m\})}$$

cumplen las propiedades requeridas.

Aplicación

Teorema 8 (Avilés-Plebanek-R.)

$$\mathrm{Ba}\big(C_p(\{0,1\}^{\omega_1})\big) = \mathrm{Bo}\big(C(\{0,1\}^{\omega_1})\big)$$

Aplicación

Teorema 8 (Avilés-Plebanek-R.)

$$\mathrm{Ba}\big(C_p(\{0,1\}^{\omega_1})\big) = \mathrm{Bo}\big(C(\{0,1\}^{\omega_1})\big)$$

Corolario (Fremlin)

$$\mathrm{Ba}\big(\ell^1(\omega_1), w\big) = \mathrm{Bo}\big(\ell^1(\omega_1)\big)$$

Generalización

Definición

Un cardinal κ se dice de **Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

Generalización

Definición

Un cardinal κ se dice de **Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa\times\kappa)=\mathscr{P}(\kappa)\otimes\mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que $\mathfrak{c}$.
- ω_1 es un cardinal de Kunen.

Generalización

Definición

Un cardinal κ se dice de **Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa\times\kappa)=\mathscr{P}(\kappa)\otimes\mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que $\mathfrak{c}$.
- ω_1 es un cardinal de Kunen.

Teorema 9 (Avilés-Plebanek-R.)

Un cardinal κ es de Kunen si y sólo si

$$\mathrm{Ba}\big(C_p(\{0,1\}^\kappa)\big)=\mathrm{Bo}\big(C(\{0,1\}^\kappa)\big).$$

Corolario (Fremlin)

Un cardinal κ es de Kunen si y sólo si

$$\mathrm{Ba}\big(\ell^1(\kappa),w\big)=\mathrm{Bo}\big(\ell^1(\kappa)\big).$$

Lecturas recomendadas