Medibilidad en espacios de Banach

José Rodríguez

Universidad de Murcia

2CJI RSME

Sevilla, 16 de septiembre de 2013

Research supported by MINECO and FEDER under project MTM2011-25377

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X)$: generada por los abiertos **en norma**

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X)$: generada por los abiertos **en norma**
- $\mathrm{Borel}(X_w)$: generada por los abiertos **de la topología débil**

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X)$: generada por los abiertos **en norma**
- $\mathrm{Borel}(X_w)$: generada por los abiertos **de la topología débil**
- $\mathrm{Baire}(X_w)$: generada por los **semiespacios** abiertos

σ-álgebras en espacios de Banach

X: espacio de Banach

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

X_w: X con la topología débil

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X)$: generada por los abiertos **en norma**
- $\mathrm{Borel}(X_w)$: generada por los abiertos **de la topología débil**
- $\mathrm{Baire}(X_w)$: generada por los **semiespacios** abiertos

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$$

Las inclusiones $\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Baire}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X).$$

Las inclusiones $\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Baire}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X).$$

Algunos resultados en el caso general...

1. $\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w) \iff X^*$ es w^*-separable.

Las inclusiones $\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Baire}(X_w) \ = \ \mathrm{Borel}(X_w) \ = \ \mathrm{Borel}(X).$$

Algunos resultados en el caso general...

1. $\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w) \iff X^*$ es w^*-separable.
2. Si X admite una norma Kadec (e.g. X es WCG), entonces

$$\mathrm{Borel}(X_w) = \mathrm{Borel}(X). \qquad \text{[Edgar, 1977]}$$

Las inclusiones $\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Baire}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X_w) \;=\; \mathrm{Borel}(X).$$

Algunos resultados en el caso general. . .

1. $\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w) \iff X^*$ es w^*-separable.
2. Si X admite una norma Kadec (e.g. X es WCG), entonces
$$\mathrm{Borel}(X_w) = \mathrm{Borel}(X). \qquad \text{[Edgar, 1977]}$$
3. Para $X = \ell^\infty$ se cumple:
$$\mathrm{Borel}(X_w) \neq \mathrm{Borel}(X). \qquad \text{[Talagrand, 1978]}$$

Las inclusiones $\mathrm{Baire}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X_w) \subseteq \mathrm{Borel}(X)$

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Baire}(X_w) \; = \; \mathrm{Borel}(X_w) \; = \; \mathrm{Borel}(X).$$

Algunos resultados en el caso general...

1. $\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w) \iff X^*$ es w^*-separable.
2. Si X admite una norma Kadec (e.g. X es WCG), entonces

   $$\mathrm{Borel}(X_w) = \mathrm{Borel}(X). \qquad \text{[Edgar, 1977]}$$

3. Para $X = \ell^\infty$ se cumple:

   $$\mathrm{Borel}(X_w) \neq \mathrm{Borel}(X). \qquad \text{[Talagrand, 1978]}$$

¿¿ Existen espacios **no separables** X tales que $\mathrm{Baire}(X_w) = \mathrm{Borel}(X)$??

Cardinales de Kunen y un teorema de Fremlin

Definición

Se dice que κ es un **cardinal de Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

Definición

Se dice que κ es un **cardinal de Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que el continuo.

Cardinales de Kunen y un teorema de Fremlin

Definición

Se dice que κ es un **cardinal de Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que el continuo.
- ω_1 es un cardinal de Kunen.

Definición

Se dice que κ es un **cardinal de Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que el continuo.
- ω_1 es un cardinal de Kunen.

Teorema (Fremlin, 1980)

Sean κ un cardinal y $X = \ell^1(\kappa)$. Son equivalentes:

1. κ es de Kunen.
2. $\mathrm{Baire}(X_w) = \mathrm{Borel}(X)$.

Cardinales de Kunen y un teorema de Fremlin

Definición

Se dice que κ es un **cardinal de Kunen** si $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa) = \mathscr{P}(\kappa) \otimes \mathscr{P}(\kappa)$.

- Cualquier cardinal de Kunen es menor o igual que el continuo.
- ω_1 es un cardinal de Kunen.

Teorema (Fremlin, 1980)

Sean κ un cardinal y $X = \ell^1(\kappa)$. Son equivalentes:

1. κ es de Kunen.
2. $\mathrm{Baire}(X_w) = \mathrm{Borel}(X)$.

Por tanto, $X = \ell^1(\omega_1)$ es un espacio **no separable** que cumple:

$$\mathrm{Baire}(X_w) = \mathrm{Borel}(X).$$

σ-álgebras en espacios de funciones continuas I

K: espacio topológico compacto

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

σ-álgebras en espacios de funciones continuas I

K: espacio topológico compacto

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.

σ-álgebras en espacios de funciones continuas I

K: espacio topológico compacto

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Baire}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos

σ-álgebras en espacios de funciones continuas I

K: espacio topológico compacto

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- Baire($C_w(K)$): generada por los semiespacios abiertos
- Baire($C_p(K)$): generada por los semiespacios abiertos del tipo

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \quad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

σ-álgebras en espacios de funciones continuas I

K: espacio topológico compacto

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Baire}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos
- $\mathrm{Baire}(C_p(K))$: generada por los semiespacios abiertos del tipo

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \qquad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Baire}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Baire}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C(K))
\end{array}$$

σ-álgebras en espacios de funciones continuas II

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Baire}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Baire}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C(K))
\end{array}
$$

- Todas estas σ-álgebras coinciden si K es **metrizable**.

σ-álgebras en espacios de funciones continuas II

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Baire}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Baire}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C(K))
\end{array}$$

- Todas estas σ-álgebras coinciden si K es **metrizable**.
- Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces

$$\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C(K)).$$

[Edgar, 1977] + [Valdivia, 1990]

σ-álgebras en espacios de funciones continuas II

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Baire}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Baire}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C(K))
\end{array}$$

- Todas estas σ-álgebras coinciden si K es **metrizable**.
- Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces

$$\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C(K)).$$

[Edgar, 1977] + [Valdivia, 1990]

¿¿ Existen compactos **no metrizables** K tales que

$$\mathrm{Baire}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C(K)) \;??$$

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^{\kappa} = \{0,1\}^{\kappa}$.

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.
- $Y \hookrightarrow C(2^{\omega_1})$ no separable $\implies$ $\ell^1(\omega_1) \hookrightarrow Y$. [Hagler, 1975]

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.
- $Y \hookrightarrow C(2^{\omega_1})$ no separable $\implies \ell^1(\omega_1) \hookrightarrow Y$. [Hagler, 1975]

En $C(2^\kappa)$ tenemos las siguientes σ**-álgebras**:

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.
- $Y \hookrightarrow C(2^{\omega_1})$ no separable $\implies$ $\ell^1(\omega_1) \hookrightarrow Y$. [Hagler, 1975]

En $C(2^\kappa)$ tenemos las siguientes σ-**álgebras**:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Baire}(C_w(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$$

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.
- $Y \hookrightarrow C(2^{\omega_1})$ no separable $\implies$ $\ell^1(\omega_1) \hookrightarrow Y$. [Hagler, 1975]

En $C(2^\kappa)$ tenemos las siguientes σ-**álgebras**:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Baire}(C_w(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$$

Además:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) = \mathrm{Baire}(C_w(2^\kappa)) \iff \kappa \leq \mathfrak{c}$$

Cubos de Cantor

Dado un cardinal κ, consideramos el cubo de Cantor $K = 2^\kappa = \{0,1\}^\kappa$.

- $\ell^1(\kappa) \hookrightarrow C(2^\kappa)$.
- $Y \hookrightarrow C(2^{\omega_1})$ no separable $\implies$ $\ell^1(\omega_1) \hookrightarrow Y$. [Hagler, 1975]

En $C(2^\kappa)$ tenemos las siguientes **σ-álgebras**:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Baire}(C_w(2^\kappa)) \subseteq \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$$

Además:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) = \mathrm{Baire}(C_w(2^\kappa)) \iff \kappa \leq \mathfrak{c}$$

$\Longleftarrow$: En $2^{\mathfrak{c}}$ existen sucesiones equidistribuidas. [Fremlin, 2002]

Cardinales de Kunen, otra vez

Teorema (Avilés-Plebanek-R., Israel J. Math. 2013)

Sea κ un cardinal. Son equivalentes:

1. κ es de Kunen.
2. $\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) = \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$.

Cardinales de Kunen, otra vez

Teorema (Avilés-Plebanek-R., Israel J. Math. 2013)

Sea κ un cardinal. Son equivalentes:

1. κ es de Kunen.
2. $\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) = \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$.

Por tanto, 2^{ω_1} es un compacto **no metrizable** que cumple:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^{\omega_1})) = \mathrm{Borel}(C(2^{\omega_1})).$$

Cardinales de Kunen, otra vez

Teorema (Avilés-Plebanek-R., Israel J. Math. 2013)

Sea κ un cardinal. Son equivalentes:

1. κ es de Kunen.
2. $\mathrm{Baire}(C_p(2^\kappa)) = \mathrm{Borel}(C(2^\kappa))$.

Por tanto, 2^{ω_1} es un compacto **no metrizable** que cumple:

$$\mathrm{Baire}(C_p(2^{\omega_1})) = \mathrm{Borel}(C(2^{\omega_1})).$$

Corolario (Fremlin, 1980)

Si κ es un cardinal de Kunen, entonces $X = \ell^1(\kappa)$ cumple:

$$\mathrm{Baire}(X_w) = \mathrm{Borel}(X).$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$$\Updownarrow$$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$$

$\Downarrow$

$$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$

$\Downarrow$

$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$

$\Updownarrow$

X^* es w^*-separable.

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$

$\Downarrow$

$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$

$\Updownarrow$

X^* es w^*-separable.

Los recíprocos son falsos en general.

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$

$\Downarrow$

$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$

$\Updownarrow$

X^* es w^*-separable.

Los recíprocos son falsos en general.

¿Y en $C(K)$ con la norma del supremo?

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$

$\Downarrow$

$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$

$\Updownarrow$

X^* es w^*-separable.

Los recíprocos son falsos en general.

¿Y en $C(K)$ con la norma del supremo?

Teorema (Talagrand, 1980)

(CH) Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$$\Updownarrow$$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$$

$$\Downarrow$$

$$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$$

$$\Updownarrow$$

X^* es w^*-separable.

Los recíprocos son falsos en general.

¿Y en $C(K)$ con la norma del supremo?

Teorema (Talagrand, 1980)

(CH) Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., TAMS 201?)

Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

B_{X^*} es w^*-separable.

$\Updownarrow$

Existe $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^*(x) \quad \forall x \in X.$$

$\Downarrow$

$\boxed{B_X \in \mathrm{Baire}(X_w)}$

$\Downarrow$

$\{0\} \in \mathrm{Baire}(X_w)$

$\Updownarrow$

X^* es w^*-separable.

Los recíprocos son falsos en general.

¿Y en $C(K)$ con la norma del supremo?

Teorema (Talagrand, 1980)

(CH) Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., TAMS 201?)

Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

No sabemos si en esos ejemplos se cumple: $B_{C(K)} \in \mathrm{Baire}(C_w(K))$.