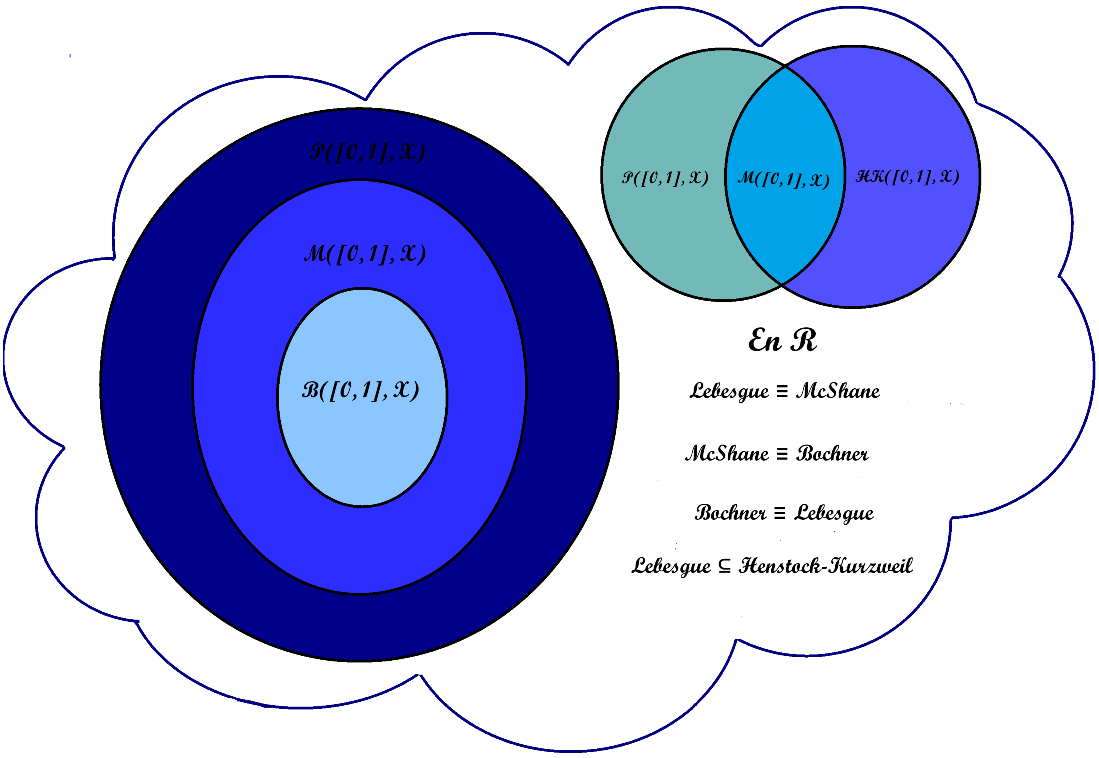
UNIVERSIDAD DE MURCIA
Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Métodos de Integración Escalar y Vectorial

Souleymane Ndiaye Fall



Máster en Matemática Avanzada

2020-21

Foto de portada: **Elaboración propia de mi hermana pequeña, Adama Ndiaye.**
Fuente de inspiración: Diagrama de Venn.

> The ordinary functional analyst is naturally impatient with the multiplicity of definitions of 'integral' which have been proposed for vector-valued functions, and would prefer to have a single canonical one for general use.
>
> Fremlin-Mendoza

Declaración de originalidad

Souleymane Ndiaye Fall, autor del TFM **“Métodos de Integración Escalar y Vectorial”**, bajo la tutela de los profesores **Antonio Avilés López y José Rodríguez Ruiz**, declaro[1] que el trabajo que presento es original, en el sentido de que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 04 de Septiembre de 2021

[1]En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha entregado una copia firmada de esta declaración.

Contenidos

Introducción

El origen de la Teoría de Integración se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron método de exhaución. Desde sus orígenes, la Teoría de la Integración ha constituido una de las ramas más destacadas de las matemáticas y sus aplicaciones en otros campos son múltiples y de enorme importancia. Nuestro trabajo se enmarca dentro de lo que se conoce como Integración Vectorial, que podemos definir, sucintamente, como el estudio de técnicas de integración de funciones $f : \Omega \to X$, donde Ω es un espacio de medida y X es un espacio vectorial topológico, en general un espacio de Banach. Desde los trabajos iniciales de G. Birkhoff, S. Bochner, N. Dunford y B.J.Pettis en los años 30 (véase [16]), un gran número de matemáticos ha puesto toda su energía en el desarrollo de técnicas de integración vectorial como medio para estudiar propiedades topológicas y geométricas de los espacios de Banach. Nuestro objetivo en este trabajo se centra, básicamente, en las integrales de McShane y Henstock-Kurzweil, tanto para funciones reales como para funciones vectoriales, relacionándolas con la integral de Lebesgue (en el caso de funciones reales) y con las integrales de Bochner y Pettis (en el caso de funciones vectoriales). La integral de Henstock-Kurzweil debe su existencia a una ligera modificación de la clásica definición de la integral de Riemann y fue iniciada alrededor de 1960 por Jaroslav Kurzweil y, de manera independiente, por Ralph Henstock. Un aspecto muy interesante en relación a dicha integral es que, para funciones reales de una variable real, ella no necesita de la Teoría de Medida para su existencia. Además, esta integral resuelve el problema de las primitivas propuesto por Newton-Leibniz (Teorema 1.1.2), es decir, la validez del Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad y contiene en su interior a la integral de Lebesgue (Teorema 1.4.6). Sin embargo, una ingeniosa modificación de la definición de la integral de Henstock-Kurzweil, ideada por Edward J. Mcshane, da origen a una nueva integral que, a la postre, resulta ser equivalente a la integral de Lebesgue para funciones reales de una variable real (Teorema 2.2.2). Lo interesante de esta versión modificada de la integral de Henstock-Kurzweil es que la integral de Lebesgue puede ser pensada como límite de sumas de Riemann. Estas nuevas nociones, relativamente nuevas, de integrales tipo-Riemann, es decir, las integrales de Henstock-Kurzweil y McShane también juegan unos papeles muy importantes en la Integración Vectorial. Las investigaciones comenzaron alrededor de 1990 por el trabajo de R. A. Gordon y desde entonces una especial atención se ha prestado a este campo. Uno de los problemas cruciales es la comparación de estos nuevos conceptos de integrales tipo-Riemann con las integrales más analizadas y de mayor impacto en la teoría de espacios de Banach hasta hoy en día, es decir, las integrales de Bochner y Pettis. Con estas cuatro integrales puestas a nuestra disposición, se pueden hacer muchas cuestiones interesantes. Sin embargo, la situación se complica por el hecho de que ciertas restricciones naturales que se pueden poner en el espacio de Banach X y las funciones $f : [0,1] \to X$ cambian las respuestas. En efecto, consideremos, en primer lugar, la situación en la que no imponemos ninguna restricción ni en el espacio de Banach X ni en la función $f : [0,1] \to X$. En este contexto:

- Si f es Bochner integrable, entonces, es McShane integrable (Teorema 3.5.7).
- Si f es McShane integrable, entonces, es Pettis integrable (Teorema 4.2.2).

Además, ninguno de los recíprocos de las implicaciones anteriores es cierta (ver la Proposición 3.7.6 y la Sección 4.5). Ahora si añadimos la condición que f es fuertemente medible (Definición 3.4.1), entonces, las integrales de McShane y Pettis coinciden (Teoremas 3.5.7 y 4.3.2). Sin embargo, durante mucho tiempo la única condición suficiente para obtener la coincidencia entre las integrales de McShane y Pettis es exigir que X sea un espacio de Banach separable y no imponer ninguna restricción adicional sobre la función f (Teorema 4.3.4). Nosotros, en esta memoria, damos prioridad a este elegante resultado: f es McShane integrable si, y solamente si, es Henstock-Kurzweil integrable y Pettis integrable (Teorema 4.4.3). Lo interesante del resultado anterior es que si f es Pettis integrable y Henstock-Kurzweil integrable, entonces, es McShane. Ahora detallaremos brevemente cómo hemos organizado el contenido de este trabajo.

En el primer capítulo, hemos empezado demostrando el Teorema Fundamental del Cálculo que nos ha servido como una motivación para introducir la integral de Henstock-Kurzweil. Después, hemos presentado algunas propiedades básicas de la integral de Henstock-Kurzweil. Luego, hemos demostrado el lema de Saks-Henstock que es de capital importancia en la teoría. El resto del capítulo se centra en la prueba de los siguientes interesantes resultados: la integral de Henstock-Kurzweil es una extensión propia de la integral de Lebesgue; la clase de las funciones Henstock-Kurzweil integrables como sus valores absolutos es idéntica a la de las funciones Lebesgue integrables; una condición suficiente para que una función sea Henstock-Kurzweil integrable sobre $[0,1]$ es que sea Lebesgue integrable sobre cualquier subconjunto medible de $[0,1]$.

Respecto al segundo capítulo, hemos introducido la integral de McShane y algunas de sus propiedades básicas. También, hemos probado la inclusión de la clase de las funciones McShane integrables en la de las funciones Henstock-Kurzweil integrables. Sin embargo, el resultado más importante de este capítulo es la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane. Además, en este capítulo hemos analizado una condición suficiente para que una función sea McShane integrable: que tenga la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Dicha condición es muy importante, ya que, caracteriza a las funciones reales de una variable real que son McShane integrables. Finalmente, hemos acabado este capítulo demostrando que una función es McShane integrable sobre $[0,1]$ si, y solamente si, es McShane integrable sobre cualquier subconjunto medible de $[0,1]$.

En cuanto al tercer capítulo, en primer lugar, hemos empezado introduciendo algunos resultados elementales de las funciones simples y la integral de funciones simples. A continuación, hemos presentado la construcción de la integral de Bochner que, en realidad, es una extensión de la integral de Lebesgue a funciones que toman valores en un espacio Banach arbitrario, como el límite de integrales de funciones simples. Luego, hemos demostrado algunas propiedades básicas de la integral de Bochner. Después, hemos introducido las nociones de una función débilmente medible o fuertemente medible y hemos probado algunos resultados importantes sobre estos conceptos (el teorema de Pettis y algunas de sus consecuencias). Inmediatamente después, hemos iniciado nuestro análisis sobre la relación existente entre la integral de McShane y la de Bochner. En efecto, hemos probado que toda función Bochner integrable es McShane integrable. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general. Esto último lo hemos demostrado en la última sección de este capítulo. Además, hemos caracterizado a las funciones Bochner integrables mediante funciones que tienen la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Esta forma de caracterizar a las funciones Bochner integrables resulta ser muy interesante, ya que, nos ha permitido deducir, fácilmente, la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de Bochner para funciones reales de una variable real.

En lo que concierne al último capítulo, hemos introducido al lector sobre la integral de Pettis y hemos probado algunas de sus propiedades básicas. Justo después, hemos empezado a investigar sobre la relación que existe entre la integral de Pettis y las dos integrales tipo-Riemann que hemos introducido en esta memoria, es decir, las integrales McShane y Henstock-Kurzweil. En primer lugar, hemos probado que toda función McShane integrable es Pettis integrable y ambas integrales coinciden sobre el intervalo de integración considerado. No obstante, el recíproco no es verdadero en general. De hecho, hemos redactado la última sección de este capítulo para convencer al lector de esto último, pero sin entrar mucho en detalles técnicos. El resto de este capítulo, está dedicado a las pruebas de unos resultados muy elegantes sobre la relación que existe entre las integrales de Pettis, McShane y Henstock-Kurzweil por una parte y, por otra parte, sobre las integral de McShane y Henstock-Kurzweil. En concreto, hemos probado:

- Una función $f : [0,1] :\to X$ es McShane integrable si, y solamente si, es Pettis integrable y Henstock-Kurzweil integrable.
- Una función $f : [0,1] :\to X$ es McShane integrable si, y solamente si, es Henstock-Kurzweil integrable sobre cualquier subconjunto medible de $[0,1]$.

Para terminar, señalamos que este trabajo se sitúa en la frontera entre dos grandes ramas de las matemáticas, el Análisis Funcional y la Teoría de Integración. Por esta razón, hemos confeccionado un apéndice que contiene una serie de definiciones y resultados complementarios utilizados en el resto de la memoria, desglosado en una serie de apartados. La mayoría son sobradamente conocidos y nos limitamos a dar el enunciado y una referencia bibliográfica. Sin embargo, se incluye la demostración de otros menos difundidos o para los que no hemos podido dar una referencia concreta.

Además, a lo largo de esta memoria, hemos trabajado con funciones $f : I = [0,1] \to X$, donde X es un espacio de Banach (en algunos casos $X = \mathbb{R}$), pero todos los resultados que se obtienen se pueden generalizar sin ninguna dificultad a funciones $f : I \to X$, donde $I \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, es un intervalo compacto n-dimensional y X es un espacio de Banach (en algunos casos, $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$). Sin embargo, hemos decidido limitarnos al caso de funciones definidas en $[0,1]$ y que toman valores en un espacio de Banach X y fijar $n = 1$ cuando $X = \mathbb{R}^n$ solamente para una mejor claridad de la exposición.

Asimismo, en cuanto a las numerosas referencias empleadas, destacamos [12], [13] y [14] para las integrales de Henstock-Kurzweil, McShane y Pettis y, [19] y [24] en lo que se refiere a la integral de Bochner. No obstante, a lo largo de la memoria indicamos con precisión la fuente de cada resultado y proporcionamos al inicio de cada capítulo las referencias elementales relativas al mismo.

Finalmente, subrayamos que el presente trabajo no es una mera recopilación del material de los artículos y libros citados anteriormente o el resto de los que aparecen en la bibliografía y exponerlos juntos de forma coherente y conexa para dar una base teórica solida con la que poder abordar otros artículos más avanzados: [5] y [13]. Por el contrario, hemos completado los conocimientos adquiridos en los artículos y libros mencionados en la bibliografía (destacamos los Teoremas A.1.1, 3.4.6, 3.5.2 y 4.4.2). En algunos casos, hemos conseguido demostraciones alternativas más elementales o transparentes, como pueden ser las Proposiciones 3.7.6 y 4.1.3. En otros casos, hemos corregido algunas de las demostraciones originales (destacamos la Proposición 3.7.3).

Notación

A lo largo de este trabajo utilizamos la siguiente notación básica:

- I representa el intervalo compacto $[0,1]$.
- Si $J=[a,b]$ o (a,b), entonces, denotemos por $\ell(J)=|a-b|$. Además, si el conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$, entonces, $\mu^*(A)$ es la medida exterior de Lebesgue del conjunto A, es decir,

$$\mu^*(A)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n):(I_n)_{n\geq 1}\text{ es una sucesión de intervalos abiertos}\quad\text{y}\quad A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}.$$

  Asimismo, si $A\subseteq\mathbb{R}$ es un conjunto medible, entonces, designamos por

$$\mu(A):=\mu^*(A)$$

  a la medida de Lebesgue de A.
- Si $A\subseteq\mathbb{R}$, denotamos por $int(A)$ al interior de A y $cl(A)$ a su clausura.
- Si un conjunto $E\subseteq I$, entonces, designamos por χ_E a la función característica de E.
- X es un espacio de Banach con norma $||.||$. El dual de X lo representamos por X^* y $B(X)=\{x\in X:||x||\leq 1\}$ designa la bola unidad en el espacio de Banach X. Además, denotamos por $||.||_*$ a la norma de X^*.
- Dado un funcional $x^*\in X^*$, su valor en un $x\in X$ lo denotamos por $x^*(x)$.
- El símbolo $\mathcal{L}_1([0,1])$ será utilizado para representar el conjunto de todas las funciones Lebesgue integrables sobre I. También, definimos

$$f^+=\text{máx}(f,0)\quad\text{y}\quad f^-=-\text{mín}(f,0).$$

Capítulo 1

La integral de Henstock-Kurzweil

En este capítulo hemos desarrollado brevemente la integral de Henstock-Kurzweil. En primer lugar, hemos abordado el problema de la validez del Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad que nos ha servido como una motivación para introducir la integral de Henstock-Kurzweil. Luego, hemos presentado las propiedades básicas de la integral de Henstock-Kurzweil que utilizaremos a lo largo de esta memoria. Después, hemos demostrado el lema de Saks-Henstock que es de especial importancia en la teoría como afirma Gordon en su libro [15], pág. 144: "un lema simple, pero potente que se utiliza con frecuencia en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil". A continuación, hemos probado que la integral de Henstock-Kurzweil es una extensión propia de la integral de Lebesgue. Aun más, hemos demostrado que la clase de las funciones Henstock-Kurzweil integrables como sus valores absolutos es idéntica a la de las funciones Lebesgue integrables y las dos integrales coinciden sobre los elementos de dichas clases. Finalmente, hemos probado que una función es Lebesgue integrable sobre I si, y sólo si, es Henstock-Kurzweil integrable sobre cada subconjunto medible de I.

Estas son las referencias elementales que hemos consultado a la hora de redactar este capítulo: [1], [2], [3], [4], [11], [15], [18], [22], [24], [25], [26] y [27].

1.1. El Teorema Fundamental del Cálculo

El objetivo principal de esta sección es demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad que nos sirve como una motivación para presentar la integral de Henstock-Kurzweil. Además, hemos aprovechado la situación para introducir, paulatinamente, la integral de Henstock-Kurzweil a partir de la integral de Riemann con la intención de convencer al lector de que la definición de la integral de Henstock-Kurzweil es una ligera modificación de la clásica definición de la integral de Riemann. Pero, tiene un efecto muy profundo, dando lugar a una integral más general que la de Lebesgue.

Para empezar, supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función que tiene derivada f' sobre I. Entonces, la conclusión deseada del Teorema Fundamental del Cálculo es

$$\int_I f' = f(1) - f(0).$$

Sin embargo, Vito Volterra (1860-1940) construyó un ejemplo de función que tiene una derivada acotada sobre I, pero no es Riemann integrable (ver [3] en la sección 1.18 y ejercicio 5 : 5.5), es decir, el Teorema Fundamental del Cálculo no se cumple en toda generalidad para la integral de Riemann. Más aun, al igual que la integral de Riemann, la integral de Lebesgue tampoco es capaz de integrar a todas las derivadas (ver [27] en el capítulo 4, ejemplo 4.1). Ahora veamos cómo podríamos mejorar la definición de la integral de Riemann para conseguir la validez del Teorema Fundamental del Cálculo sin ningún requerimiento adicional sobre f'. El siguiente razonamiento, aunque no es una demostración, indica algunos de los trucos que se podrían ensayar, así como algunas de las dificultades que se encuentran. Empezamos, por supuesto, suponiendo que

$$\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1\}$$

es una partición del intervalo I. Primeramente, observemos que si pudiésemos elegir en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto t_{i-1} de tal forma que el término $f'(t_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ esté tan cerca como queramos de $f(x_i) - f(x_{i-1})$, entonces, la suma de Riemann

$$f'(t_0)(x_1 - x_0) + f'(t_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f'(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

nos proveería una buena aproximación del valor de la integral de f' sobre el intervalo I, ya que, $f'(t_0)(x_1 - x_0) + f'(t_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f'(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ estaría tan cerca como queramos de $[f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \cdots + [f(x_n) - f(x_{n-1}] = f(1) - f(0)$. Por consiguiente, se cumpliría el Teorema Fundamental del Cálculo. Luego, la primera cuestión que nos podríamos plantear es si esa elección de puntos intermedios es siempre posible. El siguiente lema muestra que, en cierto sentido, este es el caso.

Lema 1.1.1 (Definición alternativa de Derivada)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $t \in I$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un $\delta(t) > 0$ tal que si $u, v \in I$ satisfacen*

$$t - \delta(t) < u \leq t \leq v < t + \delta(t), \tag{1.1}$$

se cumple que

$$|f(v) - f(u) - f'(t)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u).$$

Demostración. Puesto que, por definición,

$$f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t},$$

entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(t) > 0$ tal que, para todo $x \in I$,

$$0 < |x-t| < \delta(t) \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(t)}{x-t} - f'(t) \right| < \varepsilon,$$

o de forma equivalente, para todo $x \in I$,

$$|x-t| < \delta(t) \Rightarrow |f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)| \leq \varepsilon |x-t|. \tag{1.2}$$

Ahora sean u, v elementos de I que verifiquen la condición (1.1). Entonces, tenemos que $|u-t| = t-u$, $|v-t| = v-t$ y teniendo en cuenta (1.2), resulta que

$$\begin{aligned} |f(v)-f(u)-f'(t)(v-u)| &= |f(v)-f(t)+f(t)-f(u)-f'(t)(v-t+t-u)| \\ &\leq |f(v)-f(t)-f'(t)(v-t)| + |f(u)-f(t)-f'(t)(u-t)| \\ &\leq \varepsilon|v-t| + \varepsilon|u-t| = \varepsilon(v-t)+\varepsilon(t-u) = \varepsilon(v-u) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Así pues, si pudiésemos particionar el intervalo I de tal manera que t_{i-1} sea elemento de $[x_{i-1}, x_i]$ y los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ satisfacen la conclusión del Lema 1.1.1, entonces,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} f'(t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - [f(1)-f(0)] \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{ f'(t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - [f(x_i) - f(x_{i-1})] \right\} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) - f'(t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Por esta razón, podemos concluir que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f'(t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - [f(1)-f(0)] \right| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Ahora consideremos la integrabilidad en el sentido de Riemann de la función f' sobre I. Recordemos que una función $g : I \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre I si, y sólo si, existe un número real $A \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ tal que $\big|[g(t_0)(x_1 - x_0) + g(t_1)(x_2 + x_1) + \cdots + g(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})] - A\big| < \varepsilon$ para cualquier partición $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ del intervalo I siempre que

$$\text{máx}\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\} < \delta \quad \text{y} \quad t_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{1.4}$$

Notemos que cuando estudiamos la integral de Riemann, elegimos una partición del intervalo considerado en función de la longitud de su subintervalo más grande. Esta condición no tiene en cuenta ninguna propiedad de la función que se está integrando. En cambio, el Lema 1.1.1, el ingrediente principal de la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo, asigna un $\delta(t) > 0$ a cada punto t del intervalo considerado donde la función es derivable dependiendo del comportamiento local de dicha función. Por ejemplo, si la función es, suficientemente, suave cerca de un punto t, entonces, esperaríamos que el $\delta(t)$ asociado fuera grande y si oscila de una manera violenta es de esperar que $\delta(t)$ sea pequeño. Este simple cambio de variar el valor de $\delta(t)$ de un punto a otro es la idea clave de la integral de Henstock-Kurzweil. En efecto, supongamos que reescribimos la condición (1.4) de la siguiente manera:

$$t_i - \delta < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta. \tag{1.5}$$

Observemos que, aunque no podamos garantizar la existencia de una constante $\delta > 0$ que cumpla (1.5) y la conclusión del Lema 1.1.1, puesto que $f'(t)$ existe para todo t perteneciente a I, entonces, podemos encontrar un $\delta(t) > 0$ que satisfaga la conclusión del Lema 1.1.1. Por lo tanto, si reemplazamos la constante δ de (1.5) por $\delta(t_i)$, es decir,

$$t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i), \tag{1.6}$$

entonces, la desigualdad dada en (1.3) demuestra que la suma de Riemann de cualquier partición del intervalo I y elección de puntos que satisfacen (1.6) nos proporciona una muy buena estimación al valor deseado de la integral de f' que es $f(1) - f(0)$. Como consecuencia, cambiando la constante δ en la definición de la integral de Riemann por una función positiva $\delta : I \to (0, +\infty)$, se obtiene una “nueva integral” que posee el privilegio de la validez del Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad y que llamaremos la integral de Henstock-Kurzweil. A continuación damos la definición de dicha integral que fue construida, de manera independiente, por los matemáticos Jaroslav Kurzweil (nacido el 7 de Mayo en Praga en el año 1926) y el inglés, Ralph Henstock (1923-2007).

- Un intervalo etiquetado es un par (τ, J), donde $\tau \in \mathbb{R}$ recibe el nombre de etiqueta asociada a J y $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto.
- Decimos que dos intervalos compactos $J, L \subset \mathbb{R}$ no se solapan si $int(J) \cap int(L) = \emptyset$.
- Una colección finita $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots, p\}$ de intervalos etiquetados que no se solapan dos a dos se llama K-sistema en I si $I_j \subseteq I$ y $\tau_j \in I_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, p$.
- Un K-sistema $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots, p\}$ en I se llama K-partición del intervalo I si

$$I = \bigcup_{j=1}^{p} I_j.$$

Si $\delta : I \to (0,+\infty)$ es una función, entonces, la nueva función $\gamma : I \to \mathcal{O}$ definida mediante

$$\gamma(t) = (t-\delta(t), t+\delta(t))$$

se llama calibre. Además, un intervalo etiquetado (τ, J) se dice subordinado a γ si $J \subseteq \gamma(\tau)$. Asimismo, un K-sistema $\{(\tau_j, I_j) : j = 1,2,\ldots,p\}$ en I se dice subordinado a γ si cada uno los intervalos etiquetados (τ_j, I_j), $j = 1,2,\ldots,p$ está subordinado a γ. Análogamente, una K-partición $\{(\tau_j, I_j) : j = 1,2,\ldots,p\}$ del intervalo I se dice subordinada a γ si cada uno los intervalos etiquetados (τ_j, I_j), $j = 1,2,\ldots,p$ está subordinado a γ. Ahora supongamos $f : I \to X$ una función. Entonces, la suma de Riemann de f asociada a la partición $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ se define como

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i).$$

Definición 1.1.1. *Una función $f : I \to X$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I si, y solamente si, existe un $A \in X$ de manera que: para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que si $\mathcal{P}$ es una K-partición de I subordinada a γ, entonces,*

$$||f(\mathcal{P}) - A|| < \varepsilon.$$

Si $X = \mathbb{R}$, usamos la función valor absoluto $|.|$ de $\mathbb{R}$ en lugar de la norma $||.||$ de X.

El elemento A de la definición anterior, si existe, es un único y se llama la integral de Henstock-Kurzweil de f el cual será representado por uno de los dos siguientes símbolos:

$$A = (HK)\int_I f \quad \text{o} \quad A = (HK)\int_0^1 f.$$

Además, denotaremos por $\mathcal{HK}([0,1],X)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to X$ que son Henstock-Kurzweil integrables sobre I. Asimismo, en general, si E es un subconjunto medible de I, entonces, decimos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre E si, y solamente si, $f \cdot \chi_E$ es Henstock-Kurweil integrable sobre I y escribimos

$$(HK)\int_E f = (HK)\int_I f \cdot \chi_E.$$

Para que la definición 1.1.1 tenga sentido, sólo, queda un asunto que necesitamos abordar: tenemos que probar que, para cada calibre γ sobre I, existe al menos una K-partición de I subordinada a γ. Esto es, precisamente, lo que viene a decirnos el siguiente lema.

Lema 1.1.2 (Cousin)**.** *Supongamos que $\gamma : I \to \mathcal{O}$ es un calibre. Entonces, existe una K-partición $\mathcal{P}$ del intervalo I subordinada a γ.*

Demostración. Consideremos el conjunto $E \subseteq I$ dado mediante

$$E = \{t \in I : \text{existe una K-partición del intervalo } [0,t] \text{ subordinada a } \gamma\}.$$

Evidentemente, $E \neq \emptyset$, ya que si $t \in \gamma(0) \cap I$, entonces, $\{(0,[0,t])\}$ es una K-partición del intervalo $[0,t]$ subordinada a γ. Además, como $E \subseteq I$, entonces, es acotado superiormente. Luego, sea $\alpha = \sup(E)$. Afirmamos que $\alpha \in E$. En efecto, sea $t \in E$ tal que $t \in \gamma(\alpha)$ y $t < \alpha$. Entonces, existe una K-partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[0,t]$ subordinada a γ. Por lo tanto, el conjunto de pares ordenados $\mathcal{P} \cup \{(\alpha,[t,\alpha])\}$ es una K-partición del intervalo $[0,\alpha]$ subordinada a γ, es decir, $\alpha \in E$. Puesto que $\alpha \in I$, entonces, podemos distinguir dos casos: $\alpha = 1$ o $\alpha < 1$. Nosotros afirmamos que $\alpha = 1$, o sea, no puede darse el caso $\alpha < 1$. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que $\alpha < 1$ y sea $w \in \gamma(\alpha) \cap (\alpha,1)$. Dado que $\alpha \in E$, entonces, existe una K-partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[0,\alpha]$ subordinada a γ y, por consiguiente, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{([\alpha,[\alpha,w])\}$ sería una K-partición de $[0,w]$ subordinada a γ. Así que, $w \in E$ con $\alpha < w$, lo cual es una contradicción. Luego, $\alpha = 1$ y, como consecuencia, existe una K-partición del intervalo I subordinada a γ. Esto termina la prueba. □

El Lema 1.1.2 fue descubierto por P. Cousin (1867-1933) y publicado en 1895 en Acta Matematica para el caso de un intervalo 2-dimensional en el plano (véase [4]). Nosotros, en este trabajo, hemos seguido la prueba de Charles Swartz que encontramos en el libro [26]. Para otras pruebas, el lector puede consultar los textos: [2], [22].

Tal y como lo hemos mencionado justo arriba, si f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces, su integral es única. En efecto, supongamos que A_1 y A_2 son dos elementos de X que satisfacen la definición 1.1.1. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma_1 : I \to \mathcal{O}$ tal que $||A_1 - f(\mathcal{P}_1)|| < \varepsilon$ para cualquier K-partición $\mathcal{P}_1$ de I subordinada a γ_1. Similarmente, existe un calibre $\gamma_2 : I \to \mathcal{O}$ tal que $||f(\mathcal{P}_2) - A_2|| < \varepsilon$ para cualquier K-partición $\mathcal{P}_2$ de I subordinada a γ_2. Ahora sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ el calibre definido por $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t)$ y, por el Lema 1.1.2, sea $\mathcal{P}$ una K-partición de I subordinada a γ. Observemos que $\mathcal{P}$ está subordinada tanto a γ_1 así como a γ_2 . Por consiguiente,

$$||A_1 - A_2|| \leq ||A_1 - f(\mathcal{P}_1)|| + ||f(\mathcal{P}_2) - A_2|| < 2\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces, se concluye que $A_1 = A_2$.

Además, por el razonamiento que hemos hecho al principio del capítulo, podemos probar de manera rigurosa el Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad.

Teorema 1.1.2 (El Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)**.** *Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y $f'(t)$ existe para cada $t \in I$. Entonces, $f' \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y*

$$(HK)\int_I f' = f(1) - f(0).$$

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Además, para cada $t \in I$, sea el $\delta(t) > 0$ dado por el Lema 1.1.1 y definimos el calibre $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Sea $\mathcal{P}$ una K-partición del intervalo I subordinada a γ. Por la desigualdad dada en (1.3), $f' \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y

$$(HK)\int_I f' = f(1) - f(0).$$

La prueba es completa. $\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil es que nos permite probar, sin mucha dificultad, la existencia de funciones que son Henstock-Kurzweil integrables, pero no son ni Riemann integrables ni Lebesgue integrables. A continuación ofrecemos un ejemplo.

Ejemplo 1.1.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la función definida mediante*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \cos(\pi/t^2) & si\ 0 < t \leq 1, \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

Entonces, f' es Henstock-Kurzweil integrable sobre el intervalo I, pero no es ni Riemann integrable ni Lebesgue integrable sobre dicho intervalo.

Demostración. Empezamos observando, en primer lugar, que f' viene dada por

$$f'(t) = \begin{cases} 2t\cos(\pi/t^2) + 2\pi/t \sin(\pi/t^2) & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

que no es acotada sobre I y, por lo tanto, no es Riemann integrable sobre I. Ahora veamos que f' tampoco es Lebesgue integrable sobre I. Observemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < a < b < 1,$$

entonces, f' es continua en $[a,b]$. Luego, es Riemann integrable sobre $[a,b]$ y

$$(R)\int_a^b f' = b^2 \cos\frac{\pi}{b^2} - a^2 \cos\frac{\pi}{a^2} = (L)\int_a^b f'.$$

Ahora si ponemos $a_n = \sqrt{2/(4n+1)}$ y $b_n = 1/\sqrt{2n}$, entonces, claramente,

$$(L)\int_{a_n}^{b_n} f' = f(b_n) - f(a_n) = \frac{1}{2n} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Además, $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m]$ es el conjunto vacío o un conjunto unitario si $n \neq m$, ya que,

- Si $n > m$, entonces, $n \geq m+1$. Por esta razón, resulta que

$$\sqrt{2/(4n+1)} < \sqrt{2/4n} \leq \sqrt{2/4(m+1)} < \sqrt{2/(4m+1)} < \sqrt{2/4m}.$$

- De manera similar, si $n < m$, entonces, $n+1 \leq m$. Luego, deducimos que

$$\sqrt{2/(4m+1)} < \sqrt{2/4m} \leq \sqrt{2/4(n+1)} < \sqrt{2/(4n+1)} < \sqrt{2/4n}.$$

Por esto, si f' fuese Lebesgue integrable sobre I, entonces, las siguientes desigualdades:

$$(L)\int_I |f'| \geq (L)\int_A |f'| = \sum_{k=1}^{n} (L)\int_{a_k}^{b_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{n} (L)\int_{a_k}^{b_k} f' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}, \text{ con } A = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k],$$

serían válidas para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n$ es convergente. Esta contradicción establece que f' no puede ser Lebesgue integrable sobre I. Sin embargo, por el Teorema 1.1.2, f' si que es Henstock-Kurzweil integral sobre I y

$$(HK)\int_I f' = f(1) - f(0) = -1.$$

$\square$

Lo importante del Teorema 1.1.2 es que cualquier derivada es Henstock-Kurzweil integrable. La versión del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann o la de Lebesgue requiere la suposición de que la derivada es Riemann integrable, Lebesgue integrable, respectivamente (consultar [27] en secciones 2.5 y 4.8).

1.2. Propiedades básicas

En esta sección presentamos las propiedades elementales de la integral de Henstock-Kurzweil que vamos a utilizar en este trabajo. Empezamos, en primer lugar, probando el Criterio de Cauchy que nos permite garantizar la existencia de la integral de Henstock-Kurzweil de una función sin necesidad de pasar por la definición. Luego, vemos que el conjunto $\mathcal{HK}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral de Henstock-Kurzweil es un funcional lineal sobre $\mathcal{HK}([0,1],X)$. También, demostramos la monotonía de la integral de Henstock-Kurzweil con respecto al integrando y algunas de sus propiedades como función de conjuntos.

Antes de probar el Criterio de Cauchy para la integral de Henstock-Kurzweil es conveniente recordar las siguientes nociones: base de filtro, convergencia de base de filtro y base de filtro de Cauchy, ya que, van a ser unos ingredientes esenciales en la prueba.

Recordemos que si (S,d) es un espacio métrico, entonces, una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de S se llama base de filtro sobre S si, y sólo si, cumple las siguientes dos propiedades:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
- Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces, existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Asimismo, decimos que una base de filtro $\mathcal{B}$ sobre S converge hacia $x \in S$ si, y solamente si, para todo entorno $N(x)$ de x, existe un $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subseteq N(x)$. También, dicho base de filtro se llama de Cauchy si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $F \in \mathcal{B}$ tal que

$$F \times F \subseteq \{(u,v) \in S \times S : d(u,v) < \varepsilon\}.$$

Ya poseemos las definiciones necesarias para demostrar el Criterio de Cauchy.

Proposición 1.2.1 (Criterio de Cauchy). *Una función $f : I \to X$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to$ tal que*

$$||f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)|| < \varepsilon$$

para cualquier par de K-particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ del intervalo I subordinadas a γ.

Demostración. Supongamos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualquier K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Por consiguiente, si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos K-particiones de I subordinadas a γ, entonces, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$||f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)|| \leq \left|\left| f(\mathcal{P}_1) - (HK)\int_I f \right|\right| + \left|\left| f(\mathcal{P}_2) - (HK)\int_I f \right|\right| < \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que

$$||f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)|| < \varepsilon$$

para cualquier par de K-particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de I subordinadas a γ. Ahora definimos

$$S(\gamma) = \{f(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una K-partición de } I \text{ subordinada a } \gamma\} \subseteq X$$

y denotemos por $\mathcal{B}$ la colección de todos los $S(\gamma)$. Entonces, observemos que:

- Por el Lema 1.1.2, sabemos que, para cada calibre γ sobre I, existe una K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ y, por lo tanto, $S(\gamma) \neq \emptyset$. Además, dado que todo elemento de $\mathcal{B}$ es de la forma $S(\gamma)$ para algún calibre γ sobre I, entonces, $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
- Sean $S(\gamma_1), S(\gamma_2) \in \mathcal{B}$. Entonces, γ_1 y γ_2 son dos calibres sobre I y, por lo tanto, la función $\gamma' : I \to \mathcal{O}$ definida por $\gamma'(t) = \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t)$ también es un calibre sobre I. Más aun, cualquier K-partición del intervalo I subordinada a γ' está subordinada tanto a γ_1 así como a γ_2. De esto se sigue, $S(\gamma') \subseteq S(\gamma_1) \cap S(\gamma_2)$.

Por consiguiente, $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre X. Pero, por nuestra hipótesis, sabemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $S(\gamma) \in \mathcal{B}$ con la siguiente propiedad:

$$S(\gamma) \times S(\gamma) \subseteq \{(u, v) \in X \times X : ||u - v|| < \varepsilon\}.$$

Luego, la base de filtro $\mathcal{B}$ es de Cauchy sobre X. Como X es un espacio de Banach, entonces, por el Teorema A.1.1, la base de filtro $\mathcal{B}$ converge hacia algún punto $A \in X$. Por esta razón, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $S(\gamma) \in \mathcal{B}$ tal que $S(\gamma) \subseteq B(A, \varepsilon)$. Evidentemente, esto es otra manera de frasear la Definición 1.1.1. Esto concluye la prueba. □

La siguiente proposición viene a decirnos que $\mathcal{HK}([0,1], X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral de Henstock-Kurzweil es un funcional lineal sobre $\mathcal{HK}([0,1], X)$.

Proposición 1.2.2. *Supongamos que $f, g \in \mathcal{HK}([0,1], X)$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ también es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y*

$$(HK)\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha (HK)\int_I f + \beta (HK)\int_I g.$$

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Además, sea $\gamma_f : I \to \mathcal{O}$ un calibre sobre I tal que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}_f) - (HK)\int_I f \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha|)}$$

para cualquier K-partición $\mathcal{P}_f$ de I subordinada a γ_f. Análogamente, sea $\gamma_g : I \to \mathcal{O}$ un calibre sobre I de manera que si $\mathcal{P}_g$ es una K-partición de I subordinada a γ_g, entonces,

$$\left|\left| g(\mathcal{P}_g) - (HK)\int_I g \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\beta|)}.$$

Ahora sea el calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ dado por $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$ y, por el Lema 1.1.2, sea $\mathcal{P}$ una K-partición de I subordinada a γ. Entonces, $\mathcal{P}$ está subordinada a γ_f así como a γ_g. Además, observemos que $(\alpha f + \beta g)(\mathcal{P}) = \alpha f(\mathcal{P}) + \beta g(\mathcal{P})$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\left|\left| (\alpha f + \beta g)(\mathcal{P}) - \left(\alpha (HK)\int_I f + \beta (HK)\int_I g\right) \right|\right| &\le |\alpha| \left|\left| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right|\right| \\ &\quad + |\beta| \left|\left| S(g, \mathcal{P}) - (HK)\int_I g \right|\right|.\end{aligned}$$

Por esto último y teniendo en cuenta que

$$|\alpha|\left\|f(\mathcal{P})-(HK)\int_I f\right\|+|\beta|\left\|S(g,\mathcal{P})-(HK)\int_I g\right\|<\frac{|\alpha|\varepsilon}{2(1+|\alpha|)}+\frac{|\beta|\varepsilon}{2(1+|\beta|)},$$

entonces, podemos concluir que

$$\left\|(\alpha f+\beta g)(\mathcal{P})-\left(\alpha(HK)\int_I f+\beta(HK)\int_I g\right)\right\|<\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon>0$ y $\mathcal{P}$ eran arbitrarios, se sigue que $\alpha f+\beta g\in\mathcal{HK}([0,1],X)$ y

$$(HK)\int_I(\alpha f+\beta g)=\alpha(HK)\int_I f+\beta(HK)\int_I g.$$

Esto completa la prueba. □

A continuación probamos la monotonía de la integral de Henstock-Kurzweil con respecto al integrando. Para ello, empezamos con el caso más sencillo.

Proposición 1.2.3. *Supongamos $f\in\mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y $f\geq 0$ sobre I. Entonces,*

$$(HK)\int_I f\geq 0.$$

Demostración. Fijemos un $\varepsilon>0$. Puesto que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces, por definición, existe un calibre $\gamma: I\to\mathcal{O}$ de manera que

$$\left|f(\mathcal{P})-(HK)\int_I f\right|<\varepsilon$$

para cualquier K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Además, como $f\geq 0$, entonces,

$$0\leq f(\mathcal{P})<\varepsilon+(HK)\int_I f$$

para cada $\varepsilon>0$. Esto nos permite concluir que

$$(HK)\int_I f\geq 0$$

y la prueba es completa. □

Corolario 1.2.1. *Supongamos que $f,g\in\mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y $f\leq g$ sobre I. Entonces,*

$$(HK)\int_I f\leq(HK)\int_I g.$$

Demostración. Por la proposición 1.2.2, sabemos que $g - f$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Además, como $g - f \geq 0$ sobre I, entonces, la conclusión deseada se sigue de las Proposiciones 1.2.3 y 1.2.2. □

Una primera aplicación del Criterio de Cauchy es el siguiente resultado.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],X)$ y sea $J \subseteq I$ un intervalo compacto. Entonces, $f \cdot \chi_J \in \mathcal{HK}([0,1],X)$, es decir, f es Henstock-Kurzweil integrable sobre J.*

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Puesto que $f \in \mathcal{HK}([0,1],X)$, por el Criterio de Cauchy, Proposición 1.2.1, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$||f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')|| < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ sean dos K-particiones del intervalo I subordinadas a γ. Consideremos el calibre $\gamma_J = \gamma\big|_J$ y supongamos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dos K-particiones del intervalo J subordinadas a γ_J. Es claro que $cl(I \setminus J)$ es unión de uno (si un extremo de J es 0 o 1) o dos subintervalos disjuntos compactos L, H de tal modo que L, J, H no se solapan y su unión es I. En L y H podemos encontrar, por el Lema 1.1.2, K-particiones $\mathcal{P}_L$ y $\mathcal{P}_H$ subordinadas a $\gamma\big|_L$ y $\gamma\big|_H$, respectivamente. Ahora construimos dos K-particiones de I subordinadas a γ como sigue:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_L \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_H \quad \mathcal{P}' = \mathcal{P}_L \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_H.$$

Es evidente que $(f \cdot \chi_J)(\mathcal{P}) - (f \cdot \chi_J)(\mathcal{P}') = f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2) = f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')$. Luego,

$$||(f \cdot \chi_J)(\mathcal{P}) - (f \cdot \chi_J)(\mathcal{P}')|| = ||f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}')|| < \varepsilon.$$

Esto termina la prueba. □

Terminamos esta sección presentando y demostrando la propiedad aditiva de la integral de Henstock-Kurzweil respecto al intervalo de integración.

Proposición 1.2.5. *Sean $f : I \to X$ una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I y c un elemento del intervalo $(0,1)$. Además, denotemos por $J_1 = [0,c]$ y $J_2 = [c,1]$. Entonces, f es Henstock-Kurzweil integrable sobre los intervalos $J_1, J_2 \subseteq I$ y*

$$(HK)\int_I f = (HK)\int_{J_1} + (HK)\int_{J_2} f.$$

Demostración. La proposición anterior asegura la integrabilidad de f sobre $J_1, J_2 \subseteq I$. Ahora fijemos $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{HK}([0,1],X)$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right|\right| < \varepsilon \tag{1.7}$$

para cualquier K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Además, la integrabilidad de f sobre J_i, para $i = 1,2$, implica la existencia de un calibre γ_i sobre J_i de manera que

$$\left\|f(\mathcal{P}_i) - (HK)\int_{J_i} f\right\| < \varepsilon \tag{1.8}$$

siempre que $\mathcal{P}_i$ sea una K-partición de J_i subordinada a γ_i. Evidentemente, para cada $i = 1,2$, la función $\gamma_i' : I \to \mathcal{O}$ definida por $\gamma_i'(t) = \gamma(t) \cap \gamma_i(t)$ es un calibre sobre J_i. Por lo tanto, para cada $i = 1,2$, por el Lema 1.1.2, existe una K-partición $\mathcal{P}_i$ de J_i subordinada a γ_i'. Observemos que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es una K-partición de I subordinada a γ_i' y

$$f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}_1) + f(\mathcal{P}_2).$$

Asimismo, teniendo en cuenta las desigualdades dadas en (1.7) y (1.8), deducimos que

$$\begin{aligned}\left\|(HK)\int_I f - (HK)\int_J f - (HK)\int_L f\right\| &\leq \left\|(HK)\int_I f - f(\mathcal{P})\right\| + \left\|f(\mathcal{P}_1) - (HK)\int_{J_1} f\right\| \\ &\quad + \left\|f(\mathcal{P}_1) - (HK)\int_{J_2} f\right\| \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

La validez de esta desigualdad para todo $\varepsilon > 0$ nos da la identidad buscada. □

1.3. El lema de Saks-Henstock

Esta sección está dedicada a la demostración de un lema fundamental para cualquier teoría de integración de tipo-Riemann que conocemos, comúnmente, como el lema de Saks-Henstock. Dicho lema, en cuestión, establece que las sumas de Riemann no sólo aproximan la integral sobre el intervalo I, sino también sobre uniones de subintervalos de I. Además, terminamos la sección probando que la integral indefinida de la integral de Henstock-Kurzweil es una función continua utilizando el lema de Saks-Henstock.

Lema 1.3.1 (Saks-Henstock)**.** *Supongamos que $f : I \to X$ una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ un calibre de tal manera que*

$$\left\|f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f\right\| < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea una K-partición de I subordinada a γ. Entonces, para cualquier K-sistema $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1,2\ldots,k\}$ en el intervalo I subordinado a γ, tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f\right)\right\| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ es un K-sistema en I subordinado a γ. Evidentemente, si $\bigcup_{i=1}^{k} J_i = I$, entonces, el resultado se sigue de la proposición 1.2.5. Por lo tanto, supongamos que $\bigcup_{i=1}^{k} J_i \subsetneqq I$. En este caso, existen intervalos compactos $K_1, \ldots, K_m$ que no se solapan entre si de manera que

$$cl\left(I \setminus \bigcup_{i=1}^{k} J_i\right) = \bigcup_{j=1}^{m} K_j.$$

Una aplicación de la proposición 1.2.4 nos garantiza que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre K_j para cada $j = 1, 2, \ldots, m$. Fijemos un $\eta > 0$ y, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, sea $\gamma_j : K_j \to \mathcal{O}$ un calibre sobre K_j de manera que

$$\left\| f(\mathcal{P}_j) - (HK)\int_{K_j} f \right\| < \frac{\eta}{m} \tag{1.9}$$

para cada K-partición $\mathcal{P}_j$ de K_j subordinada a γ_j. Puesto que, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, γ y γ_j son dos calibres sobre K_j, entonces, la función $\gamma' : K_j \to \mathcal{O}$ definida mediante

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \cap \gamma_j(t)$$

también es un calibre sobre K_j. Por consiguiente, en virtud del Lema 1.1.2, existe una K-partición $\mathcal{P}_j$ de K_j subordinada a γ'. Por lo tanto, claramente, $\mathcal{P} = \mathcal{S} \cup (\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_m)$ es una K-partición de I subordinada a γ que tiene la siguiente propiedad:

$$f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{S}) + \sum_{j=1}^{m} f(\mathcal{P}_j). \tag{1.10}$$

Además, una aplicación de la Proposición 1.2.5 nos revela que

$$(HK)\int_I f = \sum_{i=1}^{k} (HK)\int_{J_i} f + \sum_{j=1}^{m} (HK)\int_{K_j} f. \tag{1.11}$$

Luego, por (1.10), (1.11), el hecho de que $f \in \mathcal{HK}([0,1], X)$ y (1.9), tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \right\| &= \left\| \left(f(\mathcal{P}) - \sum_{j=1}^{m} f(\mathcal{P}_j) \right) \right. \\
&\qquad \left. - \left((HK)\int_I f - \sum_{j=1}^{m} (HK)\int_{K_j} f \right) \right\| \\
&\leq \left\| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right\| + \sum_{j=1}^{m} \left\| f(\mathcal{P}_j) - (HK)\int_{K_j} f \right\| \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \frac{\eta}{m} = \varepsilon + m\frac{\eta}{m} = \varepsilon + \eta.
\end{aligned}$$

Puesto que $\eta > 0$ era arbitrario, entonces, podemos concluir que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \right\| \leq \varepsilon.$$

La prueba es completa. □

Si $X = \mathbb{R}$, entonces, tenemos la siguiente versión del Lema de Saks-Henstock.

Corolario 1.3.1 (Saks-Henstock)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{k} \left| f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} \right| \leq 2\varepsilon$$

para cualquier K-sistema $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1, 2, \dots, k\}$ de I subordinado a γ.

Demostración. Supongamos que f es Henstock-Kurzweil sobre I y fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right| < \varepsilon$$

para cualquier K-partición de I subordinada a γ. Ahora fijemos cualquier K-sistema

$$\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1, 2 \dots, k\}$$

del intervalo I subordinada a γ. Entonces, por el Lema 1.3.1, tenemos

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Ahora definimos un conjunto $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ (s_i, J_i) \in \mathcal{S} : f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \geq 0 \right\}.$$

Por consiguiente, tomando $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$, resulta que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \right| &= \sum_{(s_i,J_i)\in\mathcal{S}_1} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \\ &\quad - \sum_{(s_i,J_i)\in\mathcal{S}_2} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (HK)\int_{J_i} f \right) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. □

Como primera aplicación del Lema de Saks-Henstock ofrecemos una prueba de la continuidad de la integral indefinida de una función Henstock-Kurzweil integrable.

Definición 1.3.1. *Dada una función $f : I \to X$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I, definimos su integral indefinida como la función $F : I \to X$ dada mediante $F(0) = 0$ y*

$$F(t) = (HK)\int_0^t f \quad \textit{para cada } t \in (0,1].$$

Observemos, por las Proposiciones 1.2.4 y 1.2.5, que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces, su integral indefinida satisface:

$$F(b) - F(a) = (HK)\int_a^b f \quad \text{donde} \quad 0 \leq a < b \leq 1.$$

Corolario 1.3.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Entonces, su integral indefinida es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para demostrar que F es continua sobre I, tomamos un número arbitrario t perteneciente a I. Puesto que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces, por definición, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (HK)\int_I f \right|\right| < \varepsilon$$

para cualquiera K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Observemos que el conjunto

$$N(t) = \gamma(t) \cap \left(t - \frac{\varepsilon}{1 + ||f(t)||}, t + \frac{\varepsilon}{1 + ||f(t)||} \right)$$

es un entorno del punto t. Además, si $s \in N(t) \cap int(I)$, entonces, cada uno de los K-sistemas $\{(t,[s,t]\}$ o $\{(t,[t,s]\}$ en I está subordinado a γ y, por consiguiente, por el Lema de Saks-Henstock, Lema 1.3.1, tenemos

$$\left|\left| f(t)(t-s) - (HK)\int_s^t f \right|\right| \leq \varepsilon \ o \ \left|\left| f(t)(s-t) - (HK)\int_t^s f \right|\right| \leq \varepsilon.$$

En cualquiera de los dos casos, se concluye que

$$\begin{aligned} ||F(s) - F(t)|| &= ||(F(s) - F(t)) - f(t)(s-t) + f(t)(s-t)|| \\ &\leq ||f(t)(s-t) - (F(s) - F(t))|| + ||f(t)|| \cdot ||s-t|| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot \frac{||f(t)||}{1 + ||f(t)||} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$ y t elemento arbitrario de I. De esto se sigue que F es continua en I. □

1.4. Relación con la integral de Lebesgue

Uno de los objetivos principales de esta sección es demostrar que toda función Lebesgue integrable es, también, Henstock-Kurzweil integrable y, además, ambas integrales coinciden sobre el intervalo de integración. Más aun, hemos demostrado que una función es Lebesgue integrable si, y solamente, tanto ella como su valor absoluto son Henstock-Kurzweil integrables. También, hemos probado que una función es Lebesgue integrable sobre I si, y solamente si, es Henstock-Kurzweil sobre cualquier subconjunto medible de I. Pero, antes de nada, necesitamos demostrar un resultado que en muchos libros de texto (ver [1] o [25]) se conoce como el Primer Teorema Fundamental del Cálculo. Este resultado nos permite probar que toda función Henstock-Kurzweil integrable es Lebesgue medible. Es en este resultado, es decir, el Teorema Fundamental del Cálculo, donde el lema de Saks-Henstock encuentra su más importante aplicación. Además, utilizaremos la noción de Cubrimiento de Vitali para su demostración. Por esta razón, empezamos definiendo lo que entendemos por un cubrimiento de Vitali.

Definición 1.4.1 (Cubrimiento de Vitali)**.** *Sean $E \subseteq I$ y $\mathcal{V}$ una colección de subintervalos cerrados no-degenerados de $\mathbb{R}$. Diremos que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de E si, y solamente si, para cada $t \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe un intervalo $J \in \mathcal{V}$ tal que: $t \in J$ y $\mu(J) < \varepsilon$.*

Teorema 1.4.2 (El Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)**.** *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Si*

$$F(t) = \int_0^t f \quad \textit{para cada } t \in I \quad \textit{y} \quad F(0) = 0,$$

entonces, F es derivable en casi todo punto de I y $F'(t) = f(t)$ en casi todo $t \in I$.

Demostración. Consideremos el conjunto $N_d \subseteq I$ dado mediante

$$N_d = \{t \in I : \text{la derivada de } F \text{ por la derecha no existe o existe pero no es igual a } f(t)\}.$$

La idea de la prueba es demostrar que N_d es un conjunto nulo. Además, como el mismo razonamiento se puede repetir para el conjunto $N_i \subseteq I$ que contiene los elementos $t \in I$ tal que la derivada de F por la izquierda no existe o existe pero no es igual a $f(t)$, entonces, concluimos que existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula de manera que $F'(t) = f(t)$, para cada $t \in I \setminus N$, que es lo que queremos probar. Pero, antes de nada, es conveniente realizar la siguiente observación: si $t \in I \setminus N_d$, entonces, la derivada de F por la derecha es $f(t)$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $h > 0$ tal que si $x \in (t, t+h) \cap I$, entonces,

$$|F(x) - F(t) - f(t)(x-t)| < \varepsilon(x-t).$$

Por consiguiente, si $t \in N_d$, entonces, existe un $\varepsilon_t > 0$ tal que para cada $h > 0$ existe un y_h^t que pertenece al intervalo $(t, t+h) \cap I$ con la siguiente propiedad:

$$|F(y_h^t) - F(t) - f(t)(y_h^t - t)| \geq \varepsilon_t (y_h^t - t). \tag{1.12}$$

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos un conjunto $N_n \subseteq N_d$ de la siguiente manera:

$$N_n = \left\{ t \in N_d : \varepsilon_t \geq \frac{1}{n} \right\}. \tag{1.13}$$

Sea $t \in N_d$, entonces, existe un $\varepsilon_t > 0$ tal que para cada $h > 0$ existe un y_h^t que pertenece al intervalo $(t, t+h) \cap I$ y que satisface la desigualdad (1.12). Además, como $\varepsilon_t > 0$, entonces existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon_t$ y, por lo tanto, $t \in E_{n_0}$. Luego, $N_d \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. De esto último y el hecho de que $N_n \subseteq N_d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$N_d = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n. \tag{1.14}$$

Fijemos un $n \in \mathbb{N}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ definido por $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ con $\delta(t) > 0$ tal que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (HK) \int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{n 2^{n+3}}, \; n \geq 1,$$

para cualquier K-partición $\mathcal{P}$ del intervalo I subordinada a γ. Ahora definimos una colección $\mathcal{V}$ de intervalos cerrados no-degenerados de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{V} = \{[t, y_h^t] : t \in N_n, 0 < h < \delta(t)\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de N_n. En efecto, sea $t \in N_n$ y $\eta > 0$. Por (1.14), se sigue que $t \in N_d$. Luego, existe un $\varepsilon_t > 0$ tal que para todo $h > 0$ existe un y_h^t que pertenece al intervalo $(t, t+h) \cap I$ y que satisface la desigualdad dada en (1.12). En particular, si $h \in (0, \delta(t))$ y $h < \eta$, entonces, $\mu([t, y_h^t]) \leq \mu((t, t+h)) = h < \eta$. En resumen, hemos probado que si $t \in N_n$ y $\eta > 0$, entonces, existe un intervalo cerrado no-degenerado $J = [t, y_h^t] \in \mathcal{V}$ tal que $t \in J$ y $\mu(J) < \eta$. Por tanto, $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de N_n. Por consiguiente, por el Corolario A.2.1, sabemos que existe una colección finita $\{[t_k, x_k] : k = 1, 2, \ldots, m\}$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{V}$ tal que

$$\mu^*(N_n) < \sum_{i=1}^{m} (x_k - t_k) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \quad \text{para cada } n \geq 1. \tag{1.15}$$

Observemos que cada intervalo etiquetado $(t_k,[t_k,x_k])$ está subordinado a γ y, además,

$$|F(x_k)-F(t_k)-f(t_k)(x_k-t_k)| \geq \varepsilon_{t_k}(x_k-t_k). \tag{1.16}$$

Ahora estamos en condiciones de invocar el lema de Saks-Henstock. En efecto, puesto que la colección $\{(t_k,[t_k,x_k]) : k=1,2,\dots,m\}$ de intervalos etiquetados es un K-sistema en I subordinada a γ, entonces, por (1.16), (1.13) y el Corolario 1.3.1, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}(x_k-t_k) &\leq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\varepsilon_{t_k}}\big|F(x_k)-F(t_k)-f(t_k)(x_k-t_k)\big| \\ &\leq n\sum_{k=1}^{m}|F(x_k)-F(t_k)-f(t_k)(x_k-t_k)| \\ &\leq n\frac{2\varepsilon}{n2^{n+3}}=\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, esto último y (1.15) nos permiten escribir la siguiente desigualdad:

$$\mu^*(N_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Además, por (1.14) y el hecho de que μ^* es numerablemente subaditiva, resulta que

$$\mu^*(N_d)=\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(N_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por un razonamiento similar se prueba que el conjunto $N_i \subseteq I$ que contiene los elementos de I en los cuales la derivada de F por la izquierda no existe o existe pero no es igual a $f(t)$ cumple que $\mu^*(N_i) < \varepsilon/2$. Por consiguiente, si denotamos por $N = N_d \cup N_i \subseteq I$, entonces, $\mu(N) < \varepsilon$ y $t \in I\setminus N \Rightarrow F'(t)$ existe y $F'(t)=f(t)$. La prueba es completa. □

Por el Corolario 1.3.2 y el Teorema 1.4.2, tenemos es el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3. *Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. Entonces, f es medible sobre I.*

Demostración. La integral indefinida F de f es continua sobre I por el Corolario 1.3.2. Por consiguiente, es medible sobre I. Ahora extendemos F de forma continua al intervalo $[0,2]$ definiendo $F(t)=F(1)$ para todo $t \in [1,2]$. Elegimos una sucesión $(\delta_n)_n$ en $(0,1)$ que converja hacia 0. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : I \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f_n(t)=\frac{F(t+\delta_n)-F(t)}{\delta_n}$$

es continua en $[0,2]$ y, en consecuencia, medible sobre $[0,2]$. Por lo tanto, $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles sobre I. Pero, por el Teorema 1.4.2, dicha sucesión converge puntualmente hacia f en casi todo punto sobre el intervalo I. De esto se sigue que f es medible sobre I. La prueba es completa. □

Antes de probar que la integral de Henstock-Kurzweil es, realmente, una extensión propia de la integral de Lebesgue, hay que advertir que, a diferencia de lo que ocurre con las integrales de Riemann y de Lebesgue, la siguiente desigualdad no es válida, en general, para la integral de Henstock-Kurzweil:

$$\left|(HK)\int_I f\right| \leq (HK)\int_I |f|.$$

La razón de esta deficiencia se encuentra en el hecho de que la integral de Henstock-Kurzweil no es una integral absoluta, o sea, el hecho de que $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ no implica que $|f| \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. He aquí un ejemplo.

Ejemplo 1.4.1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la función definida mediante*

$$f(t) = \begin{cases} t^2\cos(\pi/t^2) & si\ 0 < t \leq 1, \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

Entonces, f' es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, pero $|f'|$ no lo es sobre I.

Demostración. En el Ejemplo 1.1.1, hemos probado que f' es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, así que sólo falta por ver que no es el caso para $|f'|$. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que $|f'|$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Entonces, por la proposición 1.2.4, tanto f' como $|f'|$ son integrables sobre cada uno de los términos de la sucesión $([a_n,b_n])_n$ donde $a_n = 1/\sqrt{n+1}$ y $b_n = 1/\sqrt{n}$. Se sigue del Primer Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil que

$$(HK)\int_{a_n}^{b_n} f' = f(b_n) - f(a_n) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Además, puesto que $f' \leq |f'|$, entonces, por el Corolario 1.2.1, concluimos que

$$(HK)\int_{a_n}^{b_n} |f'| \geq (HK)\int_{a_n}^{b_n} f' = \frac{1}{n} \quad \text{para cada } n \geq 1. \tag{1.17}$$

Claramente, los términos de la sucesión $([a_n,b_n])_n$ no se solapan. Luego, una aplicación de las Proposiciones 1.2.5 y 1.2.3, nos permite justificar la siguiente desigualdad:

$$(HK)\int_I |f'| \geq \sum_{k=1}^{n} (HK)\int_{a_k}^{b_k} |f'| \quad \text{para cada } n \geq 1. \tag{1.18}$$

Finalmente, las desigualdades dadas en (1.18) y (1.17) nos permiten concluir que

$$(HK)\int_I |f'| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es convergente. Esta contradicción establece que $|f'|$ no es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y la prueba es completa. $\square$

Si $f, |f| \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$, entonces, $-|f| \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ por la Proposición 1.2.2. Por consiguiente, de las desigualdades $-|f| \leq f \leq |f|$ y del Corolario 1.2.1, se sigue

$$-(HK)\int_I |f| = (HK)\int_I -|f| \leq (HK)\int_I f \leq (HK)\int_I |f|.$$

La igualdad anterior es debido a la Proposición 1.2.2. Por esta razón, tenemos:

Corolario 1.4.1. *Si $f, |f| : I \to \mathbb{R}$ son Henstock-Kurzweil integrables sobre I, entonces*

$$\left|(HK)\int_I f\right| \leq (HK)\int_I |f|.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.4. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es absolutamente HK-integrable sobre I si, y solamente si, f y $|f|$ son Henstock-Kurzweil integrables sobre I.*

Denotaremos por $\mathcal{L}_{HK}([0,1])$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son absolutamente Henstock-Kurzweil integrables. En la prueba de nuestro siguiente teorema, que es el resultado más importante de esta sección, usaremos la noción de funciones semicontinuas y el teorema de Vitali-Carathéodory, Teorema A.2.8. Por este motivo, a continuación, recordamos al lector el concepto de funciones semicontinuas.

Definición 1.4.5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es semicontinua superiormente en $t_0 \in I$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(t_0)$ de t_0 tal que*

$$f(t) < f(t_0) + \varepsilon \text{ para todo } t \in N(t_0) \cap I.$$

De manera similar, decimos que f es semicontinua inferiormente en $t_0 \in I$ si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno $N(t_0)$ de t_0 tal que

$$f(t_0) - \varepsilon < f(t) \text{ para todo } t \in N(t_0) \cap I.$$

La función f se dice que es semicontinua superiormente (respectivamente, semicontinua inferiormente) sobre I, si ella es semicontinua superiormente (respectivamente, semicontinua inferiormente) en todos los puntos de I.

Teorema 1.4.6. *Si $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$, entonces, $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y, además, se cumple*

$$(L)\int_I f = (HK)\int_I f,$$

en particular, $\mathcal{L}_1([0,1]) \subseteq \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y fijemos un $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Vitali-Carathéodory, Teorema A.2.8, existe una función $u \geq f$ semicontinua inferiormente y otra función $v \leq f$ semicontinua superiormente de manera que $u, v \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y

$$(L)\int_I (u - v) < \varepsilon.$$

Sea t_0 un elemento arbitrario de I. Puesto que u se semicontinua inferiormente en t_0, existe un entorno $N_1(t_0)$ de t_0 tal que $u(t_0) - \varepsilon < u(t)$ para todo $t \in N_1(t_0) \cap I$. Similarmente, como v es semicontinua superiormente en t_0, resulta que existe un entorno $N_2(t_0)$ de t_0 de manera que que $v(t) < v(t_0) + \varepsilon$ para todo $t \in N_2(t_0) \cap I$. Por lo tanto, si tomamos $N(t_0) = N_1(t_0) \cap N_2(t_0)$, entonces, se cumple que $u(t_0) - \varepsilon < u(t)$ y $v(t) < v(t_0) + \varepsilon$ para todo $t \in N(t_0) \cap I$. Como $N(t_0)$ es un entorno de t_0, entonces, existe un $\delta(t_0) > 0$ tal que $(t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0) \subseteq N(t_0)$. Por consiguiente, si $t \in (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)) \cap I$, entonces, tendríamos que $u(t_0) - \varepsilon < u(t)$ y $v(t) < v(t_0) + \varepsilon$. De esto se sigue que

$$v(t) - \varepsilon < v(t_0) \leq f(t_0) \leq u(t_0) < u(t) + \varepsilon, \tag{1.19}$$

para todo $t \in (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)) \cap I$, ya que, $v \leq f \leq u$. Denotemos mediante

$$\gamma(t_0) = (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)).$$

Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta que (1.19), resulta que

$$v(t) \leq f(t_0) \leq u(t) \quad \text{para todo } t \in \gamma(t_0) \cap I. \tag{1.20}$$

Observemos que γ es un calibre sobre I. Ahora, por el Lema 1.1.2, sea

$$\mathcal{P} = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i] : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

una K-partición de I subordinada a γ. Entonces, para cada $i = 1, 2, \ldots n$, poniendo $t_0 = t_i$ en (1.20), resulta que $v(t) \leq f(t_i) \leq u(t)$ para todo $t \in \gamma(t_0) \cap I$. De esto se sigue que

$$(L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} v \leq f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq (L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} u.$$

Por un lado, de esto último, tenemos que

$$(L)\int_I v \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq (L)\int_I u.$$

Por otro lado, dado que $v \leq f \leq u$, entonces,

$$(L)\int_I v \leq (L)\int_I f \leq (L)\int_I u$$

y, en consecuencia,

$$\left| f(\mathcal{P}) - (L)\int_I f \right| \leq (L)\int_I (u-v) < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y toda K-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ, entonces, $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y

$$(L)\int_I f = (HK)\int_I f.$$

Finalmente, observemos que si $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$, entonces, $|f| \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y se sigue de la primera parte que $|f| \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. Por esta razón,

$$\mathcal{L}_1([0,1]) \subseteq \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R}).$$

□

El siguiente resultado es fundamental para establecer que $\mathcal{L}_1([0,1] = \mathcal{L}_{HK}([0,1])$.

Teorema 1.4.7. *Sea* $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$.

(I) *Si* f *es acotada sobre* I*, entonces,* $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$.
(II) *Si* f *es no-negativa sobre* I*, entonces,* $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$.

Demostración. (I) Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y es acotada. Puesto que f es medible sobre I por el Teorema 1.4.3, entonces, evidentemente, f es Lebesgue integrable sobre I. Para probar (II), supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ y es no-negativa sobre I. Por supuesto, si f es acotada, entonces, por (I), f es Lebesgue integrable sobre I. Supongamos que f es no acotada y sea $F : I \to \mathbb{R}$ la integral indefinida de f, es decir, $F(0) = 0$ y

$$F(t) = (HK)\int_0^t f \quad \text{para } t \in I.$$

Afirmamos que F es creciente sobre I. En efecto, sean $0 \leq x < y \leq 1$. Entonces, por la Proposición 1.2.4, f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[x,y]$. Además,

$$F(y) - F(x) = (HK)\int_x^y f \geq 0$$

por la proposición 1.2.3. La afirmación ha sido demostrada. Observemos que por ser F creciente sobre I, entonces, es Riemann integrable sobre I. Asimismo, por el Teorema 1.4.2, sabemos que $F'(t) = f(t) \geq 0$ en casi todo $t \in I$. Ahora extendemos F de forma continua al intervalo $[0,2]$ poniendo $F(t) = F(1)$ para todo $t \in [1,2]$ y definimos

$$F_n(t) = n(F(t+1/n) - F(t)) \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Entonces, $(F_n)_n$ es una sucesión de funciones no-negativas Riemann integrables (en particular, Lebesgue integrables) sobre I y $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F'(t) = f(t))$ en casi todo $t \in I$. Por consiguiente, una aplicación del Lema de Fatou nos revela que

$$\begin{aligned}(L)\int_I f = (L)\int_0^1 F' &= (L)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} F_n \le \liminf_{n\to\infty}\left(n\,(L)\int_0^1 F(\cdot + 1/n) - n\,(L)\int_0^1 F\right)\\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[n\left((L)\int_{1/n}^{1+1/n} F - (L)\int_0^1 F\right)\right]\\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[n\left((L)\int_1^{1+1/n} F - (L)\int_0^{1/n} F\right)\right] \le F(1) - F(0) = (HK)\int_I f < +\infty,\end{aligned}$$

ya que, $f \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. Luego, $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Observemos que el “cambio de variable” aplicado en el paso anterior queda justificado por el hecho de que, al ser F creciente, cada una de las integrales que aparecen en dichas desigualdaes son Riemann integrables. $\square$

Teorema 1.4.8. *Si $f \in \mathcal{L}_{HK}([0,1])$, entonces, $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Por consiguiente,*

$$\mathcal{L}_{HK}([0,1]) = \mathcal{L}_1([0,1]) \quad y \quad (HK)\int_I f = (L)\int_I f$$

para cualquier $f \in \mathcal{L}_{HK}([0,1])$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{L}_{HK}([0,1])$. Como $|f| \in \mathcal{HK}([0,1],X)$ y $|f| \ge 0$, el Teorema 1.4.7 nos garantiza que $|f| \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Además, por la Proposición 1.2.2, tenemos que $|f| - f \in \mathcal{HK}([0,1],X)$. Asimismo, dado que $|f| - f \ge 0$, entonces, una nueva aplicación del Teorema 1.4.7 nos revela que $|f| - f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y, en consecuencia, $f = |f| - (|f| - f) \in \mathcal{L}_1([0,1])$ porque $\mathcal{L}_1([0,1])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Luego,

$$\mathcal{L}_{HK}([0,1]) \subseteq \mathcal{L}_1([0,1]).$$

Un llamado al Teorema 1.4.6 termina la prueba. $\square$

Del Teorema 1.4.8 y del Ejemplo 1.1.1 se sigue que $\mathcal{L}_1([0,1])$ está estrictamente contenido en $\mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. En este sentido, lo mejor que podemos afirmar es:

Proposición 1.4.9. *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ si, y solamente si, $f \cdot \chi_E \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ para cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible.*

Demostración. La primera implicación se sigue de la Proposición A.2.2 y el Teorema 1.4.6. Recíprocamente, supongamos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible. Observemos que f es medible sobre I por el Teorema 1.4.3. Por esta razón, el conjunto $E = \{t \in I : f(t) \ge 0\}$ es medible. Puesto que $f \cdot \chi_E = f^+$, entonces, f^+ es Henstock-Lurzweil integrable sobre I y el Teorema 1.4.6 nos indica que es Lebesgue integrable sobre I. Un argumento similar nos dice que también f^- es Lebesgue integrable sobre I. Por consiguiente, $f = f^+ - f^-$ es Lebesgue integrable sobre I. $\square$

Capítulo 2

La integral de McShane

La integral de Henstock-Kurzweil, como lo hemos visto en el capítulo anterior, se construyó de modo muy similar a la integral de Riemann. Existe otra manera de considerar sumas de Riemann, muy similar a la definición de la integral de Henstock-Kurzweil, que da origen a una nueva integral que, a la postre, resulta ser equivalente a la integral de Lebesgue. Este enfoque fue ideado por Edward J. McShane (1904-1989) y se conoce como la integral de McShane. El objetivo de este capítulo es, precisamente, introducir la integral de McShane y probar que la clase de las funciones Lebesgue integrables y la de la funciones McShane integrables son iguales con idénticas integrales. El capítulo tiene tres secciones. En la primera sección, hemos dado la definición de la integral de McShane y algunas de sus propiedades. También, hemos probado que la clase de las funciones McShane integrables está incluida en la de las funciones Henstock-Kurzweil integrables y dicha inclusión es estricta. La segunda sección está dedicada a la prueba de la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane. En la tercera sección, hemos analizado una condición suficiente para que una función sea McShane integrable y hemos probado que, en el caso de las funciones reales de una variable real, dicha condición resulta ser equivalente a que la función sea McShane integrable. Esto nos ha permitido dar una caracterización de la integral de McShane para funciones reales de una variable real. Finalmente, para acabar la sección, hemos demostrado que toda función McShane integrable sobre I es McShane integrable sobre cualquier subconjunto medible de I.

Para elaborar este capítulo, nos hemos basado en estos libros: [24], [26] y [27].

2.1. Algunas observaciones previas

Recordemos que un intervalo etiquetado es un par (τ, J), donde a $\tau \in \mathbb{R}$ se le llama etiqueta asociada a J y $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto. Además, decimos que dos intervalos compactos $J, L \subset \mathbb{R}$ no se solapan si $int(J) \cap int(L) = \emptyset$.

- Una colección finita $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots p\}$ de intervalos etiquetados que no se solapan dos a dos se llama M-sistema en I si $I_j \subseteq I$ y $\tau_j \in I$ para cada $j = 1, 2, \ldots, p$.
- Un M-sistema $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots p\}$ en I se llama M-partición del intervalo I si

$$\bigcup_{j=1}^{p} I_j = I.$$

De nuevo, recordemos que si $\delta : I \to (0, +\infty)$ es una función positiva, entonces, la nueva función $\gamma : I \to \mathcal{O}$ definida mediante $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ se llama calibre. Además, un intervalo etiquetado (τ, J) se dice subordinado a γ si $J \subseteq \gamma(\tau)$. También, un M-sistema $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots p\}$ en I se dice subordinado a γ si cada uno de intervalos etiquetados $(\tau_j, I_j), j = 1, 2, \ldots, p$ está subordinado a γ. Asimismo, de manera análoga, una M-partición $\{(\tau_j, I_j) : j = 1, 2, \ldots p\}$ del intervalo I se dice subordinada a γ si cada uno de los intervalos etiquetados $(\tau_j, I_j), j = 1, 2, \ldots, p$ está subordinado a γ. Ahora sea $f : I \to X$ una función. La suma de Riemann de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ se define como

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i).$$

Definición 2.1.1. *Una función $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I, si, y solamente si, existe un A perteneciente a X con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que si $\mathcal{P}$ es una M-partición de I subordinada a γ, entonces,*

$$||f(\mathcal{P}) - A|| < \varepsilon.$$

Si $X = \mathbb{R}$, usamos la función valor absoluto $|.|$ de $\mathbb{R}$ en lugar de la norma $||.||$ de X.

El elemento A de la definición anterior, si existe, es único y se llama la integral de McShane de f el cual será denotado por el símbolo

$$A = (M)\int_I f.$$

Designemos por $\mathcal{M}([0,1], X)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to X$ que son McShane integrables sobre I. En general, si E es un subconjunto medible de I, decimos que f es McShane integrable sobre E si, y sólo si, $f \cdot \chi_E$ es McShane integrable sobre I y

$$(M)\int_E f = (M)\int_I f \cdot \chi_E,$$

por definición. Los argumentos que hemos utilizado para demostrar que la integral de Henstock-Kurzweil está bien definida se pueden usar para mostrar que la integral de McShane también está bien definida. A continuación vamos a citar algunas propiedades de la integral de McShane que vamos a utilizar en este trabajo. Las demostraciones, por ser muy similares a las de la integral de Henstock-Kurzweil, serán omitidas.

Lema 2.1.1 (Cousin)**.** *Supongamos que $\gamma : I \to \mathcal{O}$ es un calibre. Entonces, existe una M-partición $\mathcal{P}$ del intervalo I subordinada a γ.*

Proposición 2.1.2 (Criterio de Cauchy)**.** *Una función $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que*

$$||f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)|| < \varepsilon$$

para cualquier par de M-particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ del intervalo I subordinadas a γ.

Proposición 2.1.3. *Supongamos que $f, g : I \to X$ son McShane integrables sobre I. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ también es McShane integrable sobre I y*

$$(M)\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha (M)\int_I f + \beta (M)\int_I g.$$

Proposición 2.1.4. *Supongamos que $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I y sea $J \subseteq I$ un intervalo compacto. Entonces, f es McShane integrable sobre J.*

Proposición 2.1.5. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función McShane integrable sobre I y c es un elemento del intervalo $(0,1)$. Además, denotemos por $J_1 = [0,c]$ y $J_2 = [c,1]$. Entonces, f es McShane integrable sobre los intervalos $J_1, J_2 \subseteq I$ y*

$$(M)\int_I f = (M)\int_{J_1} + (M)\int_{J_2} f.$$

Lema 2.1.2 (Saks-Henstock)**.** *Supongamos que $f : I \to X$ es una función McShane integrable sobre I. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ un calibre de tal manera que*

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f \right|\right| < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}$ sea una M-partición de I subordinada a γ. Entonces, para cualquier M-sistema $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1, 2 \ldots, k\}$ en intervalo I subordinado a γ, tenemos

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(s_i)\mu(J_i) - (M)\int_{J_i} f \right) \right|\right| \leq \varepsilon.$$

Corolario 2.1.1. *Supongamos que $f, g \in \mathcal{M}([0,1], \mathbb{R})$ y $f \leq g$ en el intervalo I. Entonces,*

$$(M)\int_I f \leq (M)\int_I g.$$

Corolario 2.1.2 (Saks-Henstock)**.** *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función McShane integrable sobre I. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{k} \left| f(s_i)\mu(J_i) - (M)\int_{J_i} \right| \leq 2\varepsilon$$

para cualquier M-sistema $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ en I subordinado a γ.

En comparación con una M-partición, una K-partición impone una mayor restricción asumiendo que la etiqueta pertenezca a cada subintervalo de la partición. Por esta razón, cualquier K-partición del intervalo I es también una M-partición del mismo intervalo. De las definiciones 1.1.1 y 2.1.1 se sigue el siguiente resultado.

Proposición 2.1.6. *$\mathcal{M}([0,1], X) \subseteq \mathcal{HK}([0,1], X)$, es decir, si una función $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I, entonces, es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y*

$$(HK)\int_I f = (M)\int_I f.$$

Demostración. Supongamos que f es McShane integrable. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma \to \mathcal{O}$ tal que si $\mathcal{P}$ es una M-partición de I subordinada a γ, entonces,

$$\left\| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f \right\| < \varepsilon.$$

Ahora, por el Lema 1.1.2, sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ una K-partición de I subordinada a γ. Puesto que cualquier K-partición del intervalo I es una M-partición del mismo intervalo, entonces, $\mathcal{P}$ es una M-partición de I subordinada a γ y, en consecuencia,

$$\left\| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f \right\| < \varepsilon.$$

Dado que la desigualdad anterior se cumple para cualquier K-partición $\mathcal{P}$ de I y para todo $\varepsilon > 0$, entonces, concluimos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y

$$(HK)\int_I f = (M)\int_I f.$$

□

La inclusión $\mathcal{M}([0,1], X) \subseteq \mathcal{HK}([0,1], X)$ dada en la proposición 2.1.6 es estricta incluso en el caso de funciones reales de una variable real. Esto de verá de una manera más clara cuando hayamos probado la equivalencia de la integral de McShane y la de Lebesgue que es, precisamente, el objetivo de la siguiente sección.

2.2. La equivalencia de Lebesgue-McShane

Lo que haremos en esta sección es demostrar que las integrales de McShane y Lebesgue son, en realidad, equivalentes con integrales idénticas. Pero, antes de nada, necesitamos probar que la integral de McShane es una integral absoluta, es decir, si una función es McShane integrable, entonces, su valor absoluto también lo es. Como ya vimos, esta propiedad de la integral de McShane no es válida para la integral de Henstock-Kurzweil. El siguiente resultado es clave para lograr nuestro objetivo.

Lema 2.2.1. *Supongamos $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ un calibre sobre I tal que para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ, se cumple que*

$$\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, si $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1,2,\ldots,n\}$ son dos M-particiones del intervalo I subordinadas a γ, resulta que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |f(t_i) - f(s_j)|\mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon.$$

Demostración. Claramente, los intervalos no-degenerados de la siguiente colección

$$\mathcal{C} = \{I_i \cap J_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

forman una M-partición de I. Usando estos intervalos, podemos formar dos M-particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ del intervalo I subordinada a γ como sigue:

- Si $f(t_i) \geq f(s_j)$, entonces, pongamos $t_{ij} = t_i$ y $s_{ij} = s_j$.
- Si $f(t_i) < f(s_j)$, entonces, pongamos $t_{ij} = s_j$ y $s_{ij} = t_i$.

Observemos que $f(t_{ij}) - f(s_{ij}) = |f(t_i) - f(s_j)|$. Ahora si definimos

$$\mathcal{P}_1 = \{(t_{ij}, I_i \cap I_j) : I_i \cap I_j \in \mathcal{C}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{(s_{ij}, I_i \cap I_j) : I_i \cap I_j \in \mathcal{C}\},$$

entonces, podemos observar que

$$|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)| = \left| \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left\{ f(t_{ij}) - f(s_{ij}) \right\} \mu(I_i \cap J_j) \right| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |f(t_i) - f(s_j)|\mu(I_i \cap J_j).$$

Puesto que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ, resulta que

$$|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)| \leq \left| f(\mathcal{P}_1) - (M)\int_I f \right| + \left| (M)\int_I f - f(\mathcal{P}_2) \right| < \varepsilon.$$

La demostración es completa. $\square$

Teorema 2.2.1. *Si $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$, entonces, $|f| \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Probamos ahora que $|f|$ satisface el Criterio de Cauchy para la integral de McShane, la Proposición 2.1.2. En efecto, sean

$$\mathcal{P}_1 = \{(t_i,I_i) : 1 \leq i \leq m\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{(s_j,J_j) : 1 \leq j \leq n\}$$

dos M-particiones de I subordinadas a γ. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer, y así lo haremos, que la colección $\mathcal{C} = \{I_i \cap J_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ contiene, solamente, intervalos no-degenerados, ya que, si hubiese algún intervalo degenerado en $\mathcal{C}$ lo podemos eliminar de la colección. Usando estos intervalos, formemos dos nuevas M-particiones de I subordinadas a γ de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}_1' = \{(t_i, I_i \cap J_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \text{ y } \mathcal{P}_2' = \{(s_j, I_i \cap J_j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Observemos que, en realidad, $\mathcal{P}_1'$ y $\mathcal{P}_2'$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ y

$$|f|(\mathcal{P}_1') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |f(t_i)|\mu(I_i \cap J_j) = \sum_{i=1}^{m} |f(t_i)|\mu(I_i) = |f|(\mathcal{P}_1),$$

$$|f|(\mathcal{P}_2') = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |f(s_j)|\mu(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{n} |f(s_j)|\mu(J_j) = |f|(\mathcal{P}_2).$$

Por esto último y el Lema 2.2.1, tenemos

$$\begin{aligned} \Big| |f|(\mathcal{P}_1) - |f|(\mathcal{P}_2) \Big| &= \Big| |f|(\mathcal{P}_1') - |f|(\mathcal{P}_2') \Big| = \left| \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big\{ |f(t_i)| - |f(s_j)| \Big\} \mu(I_i \cap J_j) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Big| |f(t_i)| - |f(s_j)| \Big| \mu(I_i \cap J_j) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |f(t_i) - f(s_j)|\mu(I_i \cap J_j) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto nos dice que $|f|$ es McShane integrable sobre I y termina la prueba. □

Ya tenemos los argumentos necesarios para probar que $\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1([0,1])$.

Teorema 2.2.2 (McShane-Lebesgue)**.** *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$.
(II) $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$.

Además, para cada función $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1([0,1])$,

$$(M)\int_I f = (L)\int_I f.$$

Demostración. (I) $\Rightarrow$ (II) Supongamos que $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$. Entonces, por el Teorema 2.2.1. $|f| \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$. Como $\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ por la Proposición 2.1.6, entonces, $f, |f| \in \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$. Luego, $f \in \mathcal{L}_{HK}([0,1]) = \mathcal{L}_1([0,1])$ por el Teorema 1.4.8.
(II) $\Rightarrow$ (I) Supongamos que $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $f = f^+ - f^-$, podemos asumir, y así lo haremos que $f \geq 0$. Por consiguiente, por la absoluta continuidad de la integral de Lebesgue, el Teorema A.2.9, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$(L)\int_A f < \varepsilon$$

para todo conjunto $A \subseteq I$ medible con $\mu(A) < \delta$. Además, sean $\alpha = \text{mín}(\varepsilon, \delta)$ y

$$E_n = \{t \in I : (n-1)\alpha \leq f(t) < n\alpha\} \quad n \geq 1.$$

Observemos que si $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces:

- $E \subseteq I$, ya que $E_n \subseteq I$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- Ahora sea $t \in I$. Como $f(t)/\alpha \in [0,\infty)$, entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n - 1 \leq \frac{f(t)}{\alpha} < n,$$

  es decir, $(n-1)\alpha \leq f(t) < n\alpha$. Por lo tanto, $I \subseteq E$.

El razonamiento anterior prueba que $I = E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Además, $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. En efecto, supongamos que $n < m$. Entonces, $n-1 < n \leq m-1 < m$. Puesto $\alpha > 0$, entonces $(n-1)\alpha < n\alpha \leq (m-1)\alpha < m\alpha$. Luego, $[(n-1)\alpha, n\alpha) \cap [(m-1)\alpha, m\alpha) = \emptyset$ y, pues,

$$\emptyset = f^{-1}\big([(n-1)\alpha, n\alpha) \cap [(m-1)\alpha, m\alpha)\big) = E_n \cap E_m.$$

Por un razonamiento similar se prueba que $E_n \cap E_m = \emptyset$ para el caso $m < n$. También, como $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$, en particular medible sobre I, entonces, $(E_n)_n \subseteq I$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos cuya unión es I. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, como μ es una medida regular, entonces, existe un abierto G_n de I tal que $E_n \subseteq G_n$ y

$$\mu(G_n \setminus E_n) < \alpha/n2^n \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Con esta información podemos definir un calibre γ sobre I del modo siguiente: puesto que cada $t \in I$ pertenece a un único E_n, entonces, sea $\gamma : I \to \mathcal{O}$ un calibre sobre I de modo que $\gamma(t) \cap I \subseteq G_n$. La condición anterior sobre el calibre γ se puede conseguir, ya que, cada G_n es abierto en I y $E_n \subseteq G_n$. La prueba estará completa una vez que verifiquemos que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (L)\int_I f \right| < \varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Por el Lema 2.1.1, sea

$$\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \dots, m\}$$

una M-partición del intervalo I subordinada a γ. Para cada $i = 1, 2, \dots, m$, sea n_i el único número natural tal que $t_i \in E_{n_i}$. Empezamos, en primer lugar, observando que

$$(L)\int_I f = \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i} f.$$

Además, notemos que cada I_i se puede expresar como unión de $I_i \cap E_{n_i}$ y $I_i \setminus E_{n_i}$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\left| f(\mathcal{P}) - (L)\int_I f \right| &= \left| \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i} f \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i} (f(t_i) - f) \right| \le \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i} |f(t_i) - f| \\
&= \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \cap E_{n_i}} |f(t_i) - f| + \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \setminus E_{n_i}} |f(t_i) - f|
\end{aligned}$$

Por consiguiente, esto último nos permite concluir que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (L)\int_I f \right| \le \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \cap E_{n_i}} |f(t_i) - f| + \sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \setminus E_{n_i}} |f(t_i) - f|. \tag{2.1}$$

Ahora vamos a estimar cada una de las integrales que se encuentra a la derecha de la desigualdad anterior. Observemos que si $t_i, t \in I_i \cap E_{n_i} \subseteq E_{n_i}$, entonces, $f(t_i)$ y $f(t)$ pertenecen al intervalo $[(n_i - 1)\alpha, n_i\alpha)$. Luego, $|f(t_i) - f(t)| < \alpha$, y como consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{I_i \cap E_{n_i}} |f(t_i) - f| < \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i \cap E_{n_i}).$$

Además, teniendo en cuenta que $(I_i \cap E_{n_i}) \cap (I_j \cap E_{n_j}) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} (L)\int_{I_i \cap E_{n_i}} |f(t_i) - f| < \alpha \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i \cap E_{n_i}) = \alpha\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} (I_i \cap E_{n_i}) \right) \le \alpha.$$

Dado que, por definición, $\alpha \leq \varepsilon$, entonces, podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\cap E_{n_i}}|f(t_i)-f|<\varepsilon. \tag{2.2}$$

Ahora vamos a estimar la segunda integral del lado derecho de la desigualdad dada en (2.1). Empezamos observando que como estamos asumiendo que $f \geq 0$, entonces,

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}|f(t_i)-f| \leq \sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}f(t_i)+\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}f. \tag{2.3}$$

Luego, de nuevo, nuestra tarea consiste a estimar cada una de las integrales del lado derecho de la desigualdad anterior. Por un lado, como $t_i \in E_{n_i} \subseteq G_{n_i}$ y $I_i \subseteq \gamma(t_i) \subseteq G_{n_i}$, entonces, $f(t_i) \in [(n_i-1)\alpha, n_i\alpha)$ y $I_i \setminus E_{n_i} \subseteq G_{n_i} \setminus E_{n_i}$. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}f(t_i) \leq \alpha\sum_{i=1}^{m}n_i\mu(I_i\setminus E_{n_i}) \leq \alpha\sum_{i=1}^{m}n_i\mu(G_{n_i}\setminus E_{n_i}) \leq \alpha\sum_{n=1}^{\infty}n\mu(G_n\setminus E_n).$$

De esto último y el hecho de que $\mu(G_n \setminus E_n) < \alpha/n2^n$ se sigue

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}f(t_i) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{2^n}=\alpha\leq\varepsilon. \tag{2.4}$$

Finalmente, denotemos por $A=\bigcup_{i=1}^{m}(I_i\setminus E_{n_i})$. Además, observemos que, como $E_{n_i} \subseteq G_{n_i}$ y $I_i \subseteq \gamma(t_i) \subseteq G_{n_i}$, entonces, deducimos que $I_i \setminus E_{n_i} \subseteq G_{n_i} \setminus E_{n_i}$ y, por lo tanto,

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{m}\mu(I_i\setminus E_{n_i}) \leq \sum_{i=1}^{m}\mu(G_{n_i}\setminus E_{n_i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n\setminus E_n).$$

De esto último y del hecho de que $\mu(G_n \setminus E_n) < \alpha/n2^n$ se sigue que $\mu(A) < \alpha$. Dado que, $\alpha \leq \delta$, entonces, $\mu(A) < \delta$ y por la elección de δ, tenemos que $(L)\int_A f < \varepsilon$. Por tanto lo,

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}f(t)\,dt=\int_A f<\varepsilon. \tag{2.5}$$

La igualdad anterior es debido a la Proposición A.2.5, ya que, $\mu((I_i \setminus E_{n_i}) \cap (I_j \cap E_{n_j})) = 0$ si $i \neq j$. Reuniendo las estimaciones dadas en (2.4) y (2.5), entonces, por (2.3), se tiene

$$\sum_{i=1}^{m}(L)\int_{I_i\setminus E_{n_i}}|f(t_i)-f|<2\varepsilon. \tag{2.6}$$

Finalmente, por las desigualdad dadas en (2.2), (2.6) y (2.1), se sigue que

$$\left| f(\mathcal{P}) - (L)\int_I f \right| < 3\varepsilon$$

probándose, de este modo, que f es McShane integrable sobre I y, además,

$$(M)\int_I f = (L)\int_I f.$$

Esto finaliza la demostración. □

Observemos, por el Ejemplo 1.1.1, que existe una función Henstock-Kurzweil integrable sobre I, pero no es Lebesgue integrable sobre el mismo intervalo. De esto se sigue que la inclusión $\mathcal{L}_1([0,1]) = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{HK}([0,1],\mathbb{R})$ es estricta.

2.3. Más propiedades sobre la integral de McShane

En este sección hemos analizado una condición suficiente para que una función sea McShane integrable: que tenga la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Además, hemos probado que, en el caso de las funciones reales de una variable real, dicha condición es equivalente a que la función sea McShane integrable. Finalmente, hemos terminado la sección probando que toda función McShane integrable sobre I es, también, McShane integrable sobre cualquier subconjunto medible de I. Ahora definimos lo que entendemos por la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$.

Definición 2.3.1. *Una función $f : I \to X$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ si, y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1,2,\ldots,n\}$ sean dos M-particiones de I subordinadas a γ.

Proposición 2.3.2. *Si $f : I \to X$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$.*

Demostración. Vamos a usar el Criterio de Cauchy para probar que $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$. Puesto que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, existe un calibre γ sobre I tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon$$

si $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ. Supongamos que es el caso, es decir, $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ. Puesto que, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, $I_i = \bigcup_{j=1}^{n}(I_i \cap J_j)$ y $\{I_i \cap J_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ es una colección finita de subconjuntos medibles de I tal que $\mu((I_i \cap J_j) \cap (I_i \cap J_l)) = 0$ si $j \neq l$, entonces,

$$\mu(I_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(I_i \cap J_j)$$

por la Proposición A.2.1. De manera similar, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$\mu(J_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(I_i \cap J_j).$$

Por lo tanto, estas dos igualdades y la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ de f nos permiten concluir que

$$\begin{aligned} ||f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)|| &= \left|\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(s_j)\mu(I_i \cap J_j) \right|\right| \\ &= \left|\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(f(t_i) - f(s_j)\big)\mu(I_i \cap J_j) \right|\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Se sigue de la Proposición 2.1.2 que $f \in \mathcal{M}([0,1], X)$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Corolario 2.3.1. *Supongamos $f : I \to X$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Entonces, la función $||f|| : I \to \mathbb{R}$ es McShane integrable sobre I.*

Demostración. De nuevo, vamos a usar el Criterio de Cauchy, Proposición 2.1.2, para probar que $||f||$ es McShane integrable sobre I. Dado f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ sobre I de manera que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon$$

si $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ. Supongamos que es el caso, o sea, $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ son dos M-particiones de I subordinadas a γ. Puesto que

$$\Big|\, ||f(t_i)|| - ||f(s_j)|| \,\Big| \leq ||f(t_i) - f(s_j)||$$

para cada $(i,j) \in \{(i,j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, entonces, podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big| ||f(t_i)|| - ||f(s_j)|| \Big| \mu(I_i \cap J_j) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)|| \mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que la función $t \mapsto ||f(t)||$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Luego, es McShane integrable sobre I por la Proposición 2.3.2. La prueba es completa. □

Del Lema 2.2.1 y de la Proposición 2.3.2, tenemos la siguiente caracterización de la integral de McShane para funciones reales de variable real.

Teorema 2.3.3. *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera. Entonces, f es McShane integrable sobre I si, y solamente si, tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$.*

Finalizamos la sección presentando una generalización de la Proposición 2.1.4 que viene a decirnos que para que una función sea McShane integrable sobre cualquier subconjunto medible de I es suficiente que sea McShane integrable sobre I.

Teorema 2.3.4. *Supongamos que $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I. Entonces, f es McShane integrable sobre cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible.*

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y E un subconjunto medible de I. Puesto que f es McShane integrable sobre I, entonces, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f \right|\right| < \varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Además, como E es un subconjunto medible de I, entonces, por la regularidad de la medida de Lebesgue, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un conjuntos $C_k \subseteq I$ compacto y otro $A_k \in \mathcal{O}([0,1])$ tal que

$$C_k \subseteq E \subseteq A_k \quad \text{y} \quad \mu(A_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{k2^k}. \tag{2.7}$$

Empezamos, en primer lugar, definiendo un calibre $\gamma' : I \to \mathcal{O}$ de la siguiente manera:

$$\gamma'(t) \subseteq \begin{cases} \gamma(t) \cap A_k \text{ si } t \in E,\ k-1 \leq ||f(t)|| < k \\ \gamma(t) \setminus C_k \text{ si } t \notin E,\ k-1 \leq ||f(t)|| < k \end{cases}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $k-1 \leq ||f(t)|| < k$. El calibre γ' se puede conseguir, ya que, la intersección de dos abiertos sigue siendo un abierto. Vamos a usar el Criterio de Cauchy, Proposición 2.1.2, para probar que f es McShane integrable sobre E. Para ello, sean

$$\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,m\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : j = 1,2,\ldots,n\}$$

dos M-particiones de I subordinadas a γ'. Como lo hemos hecho en otra ocasión, usemos los intervalos de $\mathcal{C} = \{I_i \cap J_j : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, suponiendo que son no-degenerados, para formar las dos siguientes M-particiones de I subordinadas a γ':

$$\mathcal{P}_1' = \{(t_i, I_i \cap J_j) : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} \text{ y } \mathcal{P}_2' = \{(s_j, I_i \cap J_j) : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}.$$

Como, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, $I_i = \bigcup_{j=1}^n I_i \cap J_j$ y $\{I_i \cap J_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ es una colección finita de subconjuntos medibles de I con $\mu((I_i \cap J_k) \cap (I_i \cap J_l)) = 0$ si $k \ne l$, entonces,

$$\mu(I_i) = \sum_{j=1}^n \mu(I_i \cap J_j)$$

por la Proposición A.2.1. Como consecuencia de esto último, resulta que

$$f(t_i)\mu(I_i) = \sum_{j=1}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j).$$

Por consiguiente, de la definición de $\mathcal{P}_1'$ y de esto último, tenemos

$$f(\mathcal{P}_1') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) = \sum_{i=1}^m f(t_i)\mu(I_i) = f(\mathcal{P}_1).$$

Por un razonamiento similar se demuestra que $f(\mathcal{P}_2') = f(\mathcal{P}_2)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \big|\big|f \cdot \chi_E(\mathcal{P}_1) - f \cdot \chi_E(\mathcal{P}_2)\big|\big| &= \big|\big|f \cdot \chi_E(\mathcal{P}_1') - f \cdot \chi_E(\mathcal{P}_2')\big|\big| \\ &= \left|\left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f \cdot \chi_E)(t_i)\mu(I_i \cap J_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f \cdot \chi_E)(s_j)\mu(I_i \cap J_j) \right|\right| \\ &= \left|\left| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in E}}^m \sum_{j=1}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \in E}}^n f(s_j)\mu(I_i \cap J_j) \right|\right|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ahora bien, empezamos, en primer lugar, observando que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in E}}^m \sum_{j=1}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in E}}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \in E}}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in E}}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \notin E}}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) \quad \text{y}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \in E}}^n f(s_j)\mu(I_i \cap J_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in E}}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \in E}}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \notin E}}^m \sum_{\substack{j=1 \\ s_j \in E}}^n f(t_i)\mu(I_i \cap J_j).$$

Esta observación y la cadena de igualdades dada (2.8) nos permiten escribir

$$\begin{aligned}
\left|\left|f\cdot\chi_E(\mathcal{P}_1)-f\cdot\chi_E(\mathcal{P}_2)\right|\right| &= \left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n} f(s_j)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n}\left\{f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)-(M)\int_{I_i\cap J_j} f\right\}\right|\right| \\
&+\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n}\left\{(M)\int_{I_i\cap J_j} f - f(s_j)\mu(I_i\cap J_j)\right\}\right|\right| \\
&+\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\notin E}}^{n} f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right|+\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\notin E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n} f(s_j)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right|.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar cada una de las sumas del lado derecho de la desigualdad anterior. Para empezar, por el Lema de Saks-Henstock, Lema 2.1.2, tenemos que

$$\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n}\left\{f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)-(M)\int_{I_i\cap J_j} f\right\}\right|\right|\leq\varepsilon \quad \text{y}$$

$$\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n}\left\{f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)-(M)\int_{I_i\cap J_j} f\right\}\right|\right|\leq\varepsilon.$$

Además, para cada $k\in\mathbb{N}$, sea $\sigma_k=\{(i,j): t_i\in E, s_j\notin E, k-1\leq ||f(t_i)||<k\}$. Si, para algún $k\in\mathbb{N}$, $(i,j)\in\sigma_k$, como las particiones $\mathcal{P}_1'$ y $\mathcal{P}_2'$ están subordinadas a γ', entonces

- $I_i\cap J_j\subseteq\gamma'(t_i)=A_k\cap\gamma(t_i)$.
- $I_i\cap J_j\subseteq\gamma'(s_j)=\gamma(s_j)\setminus C_k=\gamma(s_j)\cap C_k^c$.

Por consiguiente, $I_i\cap J_j\subseteq A_k$ y $I_i\cap J_j\subseteq C_k^c$. Luego, $I_i\cap J_j\subseteq A_k\cap C_k^c=A_k\setminus C_k$. Así pues,

$$I_i\cap J_j\subseteq A_k\cap C_k^c=A_k\setminus C_k.$$

De esto último, se deduce que $\bigcup_{(i,j)\in\sigma_k} I_i\cap J_j\subseteq A_k\setminus C_k$ y, por consiguiente,

$$\mu(\cup_{(i,j)\in\sigma_k} I_i\cap J_j)\leq\mu(A_k\setminus C_k)<\frac{\varepsilon}{k2^k}$$

por (2.7). Como consecuencia de esto y teniendo en cuenta la definición σ_k, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\notin E}}^{n} f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right| &\leq \sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\notin E}}^{n} ||f(t_i)||\mu(I_i\cap J_j) = \sum_{(i,j)\in\sigma_k} ||f(t_i)||\mu(I_i\cap J_j)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(i,j)\in\sigma_k} ||f(t_i)||_X\mu(I_i\cap J_j) < \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{(i,j)\in\sigma_k} k\mu(I_i\cap J_j)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\cup_{(i,j)\in\sigma_k} I_i\cap J_j) < \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\varepsilon}{k2^k} = \varepsilon \quad \text{por (2.8)}.
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es debido a que $(I_i\cap J_j)\cap(I_p\cap J_q)$ es el conjunto vacío o, quizás, un conjunto unitario para todo $(i,j)\neq(p,q)$. En resumen, hemos probado que

$$\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\notin E}}^{n} f(t_i)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right| < \varepsilon.$$

Por un razonamiento similar se demuestra que

$$\left|\left|\sum_{\substack{i=1\\ t_i\notin E}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ s_j\in E}}^{n} f(s_j)\mu(I_i\cap J_j)\right|\right| < \varepsilon.$$

Combinando las cuatro estimaciones anteriores concluimos que

$$\left|\left|f\cdot\chi_E(\mathcal{P}_1) - f\cdot\chi_E(\mathcal{P}_2)\right|\right| < 4\varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$ y para cualquier par de M-particiones $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de I subordinadas a γ'. Por el criterion de Cauchy, Proposición 2.1.2, la función $f\cdot\chi_E$ es McShane integrable sobre I. Por consiguiente, f es McShane integrable sobre E y

$$(M)\int_E f = (M)\int_I f\cdot\chi_E.$$

Puesto que E era un subconjunto medible arbitrario de I, entonces, concluimos que f es McShane integrable sobre cualquier subconjunto medible de I. Esto termina la prueba. $\square$

Capítulo 3

La integral de Bochner y la integral de McShane

En este capítulo hemos introducido la integral de Bochner que, en realidad, es una extensión de la integral de Lebesgue a funciones que toman valores en un espacio de Banach arbitrario, como el límite de integrales de funciones simples. Dicha integral fue ideado por S. Bochner (1899-1982). En la primera sección hemos analizado algunos resultados elementales de las funciones simples y la integral de funciones simples que vamos a necesitar en las secciones posteriores. La segunda sección está dedicada a la construcción de la integral de Bochner, mientras que, en la tercera sección hemos presentado algunas propiedades básicas de la integral de Bochner. En la cuarta sección hemos introducido las nociones de una función fuertemente medible o débilmente medible y, además, algunos resultados importantes sobre estos conceptos. En la quinta sección hemos empezado nuestra análisis sobre la relación que existe entre la integral de Bochner y la de McShane. En efecto, en primer lugar, hemos probado que toda función simple es McShane integrable y su integral coincide con la de Bochner. En segundo lugar, hemos demostrado que toda función Bochner integrable es McShane integrable. Además, hemos caracterizado a las funciones Bochner integrables mediante funciones que tienen la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Esto nos ha permitido deducir, fácilmente, la equivalencia de la integral de Bochner y la de McShane y, en particular, la equivalencia de la integral de Bochner y la de Lebesgue, para funciones reales de una variable real. En la sexta sección hemos dado otras condiciones suficientes más convenientes para que una función sea Bochner integrable. Mientras que, en la última sección hemos analizado algunas propiedades interesantes de la integral de Mcshane y hemos presentado un ejemplo de función que es McShane integrable, pero no Bochner integrable. De esto se sigue que la integral de McShane es una extensión propia de la integral de Bochner y, de esta manera, hemos culminado nuestro análisis sobre la relación entre la integral de McShane y la de Bochner.

Estos son los textos que hemos utilizado para escribir este capítulo: [2], [6], [9], [14], [17], [19], [24] y [28]. De entre ellos, destacamos el libro [24] y el artículo [14].

3.1. Funciones simples e integral de funciones simples

En esta sección se dan unas propiedades fundamentales que satisfacen las funciones simples y la integral de una función simple que van a aparecer, frecuentemente, en este capítulo. La mayoría de estas propiedades parecen obvias cuando se interpretan geométricamente. Por esta razón, las demostraciones de estas propiedades no aparecen como teoremas o proposiciones. En cuanto a las funciones simples, la primera propiedad establece que la clase de las funciones simples $\varphi : I \to X$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, mientras que la segunda viene a decirnos que la norma de una función simple sigue siendo una función simple (en este caso $X = \mathbb{R}$). En lo que respecta la integral de una función simple, hemos presentado la propiedad de linealidad, la propiedad de monotonía con respecto al integrando y otras de sus propiedades como función de conjuntos. Finalmente, hemos introducido una seminorma en la clase de las funciones simples.

Recordemos que una partición medible de I es una colección finita $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de subconjuntos medibles incluidos en I que son disjuntos dos a dos y tales que

$$I = E_1 \cup \cdots \cup E_n.$$

Definición 3.1.1. *Una función $\varphi : I \to X$ se llama función simple si, y solamente si, se puede escribir en la siguiente forma*

$$\varphi = x_1 \chi_{E_1} + \cdots + x_n \chi_{E_n},$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una partición medible de I y $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de X.

Denotaremos por $\mathcal{S}([0,1], X)$ el conjunto de todas las funciones simples $\varphi : I \to X$. Es una tarea sencilla establecer que $\mathcal{S}([0,1], X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En efecto, sean $\varphi, \phi \in \mathcal{S}([0,1], X)$ que tienen las siguientes representaciones:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i} \quad \text{y} \quad \phi = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{F_j},$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ y $\{F_1, \ldots, F_m\}$ son particiones medibles de I y los correspondientes x_i son elementos distintos entre sí de X, así también como los y_j. Luego, evidentemente, el conjunto $\{E_i \cap F_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una partición medible de I. Así pues, $t \in I$ si, y solamente si, $t \in E_i \cap F_j$ para algún $(i, j) \in \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Por consiguiente,

$$\varphi + \phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \chi_{E_i \cap F_j} \in \mathcal{S}([0,1], X). \tag{3.1}$$

El hecho de que $\alpha \cdot \varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se comprueba más fácilmente. Esto prueba que $\mathcal{S}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Igualmente, por un razonamiento similar al que acabamos de hacer, si $\varphi, \phi \in \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R})$, entonces,

$$\varphi \cdot \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i \cdot y_j)\chi_{E_i \cap F_j} \in \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Asimismo, si φ es una función simple que tiene la siguiente representación

$$\varphi = x_1\chi_{E_1} + \cdots + x_n\chi_{E_n},$$

donde $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es una partición medible de I y $x_1,\ldots,x_n \in X$. Entonces,

$$||\varphi|| = ||x_1||\chi_{E_1} + \cdots + ||x_n||\chi_{E_n} \tag{3.3}$$

también es una función simple (en este caso $X = \mathbb{R}$). A continuación introducimos la integral de funciones simples y algunas de sus propiedades que usaremos en este capítulo.

Definición 3.1.2. *Supongamos que $\varphi : I \to X$ es una función simple que viene dada por*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k},$$

donde $\{E_1,\ldots,E_n\}$ es una partición medible de I y $x_1,\ldots,x_n$ son elementos de X. Entonces, su integral sobre I se define como:

$$\int_I \varphi = \sum_{k=1}^{n} x_k\mu(E_k).$$

Además, si $E \subseteq I$ es medible, entonces, $\varphi_E := \varphi \cdot \chi_E = \sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k \cap E}$ es también una función simple y definimos la integral de φ sobre E como:

$$\int_E \varphi = \int_I \varphi_E.$$

Es un ejercicio sencillo establecer que la integral que acabamos de definir para funciones simples está bien definida. En efecto, supongamos que $\varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$ tiene dos representaciones, digamos, $\Phi = x_1\chi_{E_1} + \cdots + x_n\chi_{E_n}$ y $\psi = y_1\chi_{F_1} + \cdots + y_m\chi_{F_m}$ donde $\{E_1,\ldots,E_n\}$ y $\{F_1,\ldots,F_m\}$ son dos particiones medibles de I y los correspondientes x_i son elementos distintos entre si de X, así como los y_j. Además, podemos suponer y, así lo haremos, que los x_i y y_j no son nulos, ya que, en caso contrario podemos eliminarlos de las sumas anteriores. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la colección $\{E_i \cap F_j : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ no contiene el conjunto vacío porque, de no ser así, podemos quitarlo de la colección. Ahora observemos que si $t \in E_i \cap E_j$ para algún $(i,j) \in \{(i,j) : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$, entonces, $x_i = \Phi(t) = \psi(t) = y_j$. También, notemos que $E_i = \bigcup_{j=1}^m (E_i \cap F_j)$ y $F_j = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap F_j)$ para cada $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$. Además, como $\{E_i \cap F_j : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ es una partición medible de I, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_I \Phi &= \sum_{i=1}^n x_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m (E_i \cap F_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^m y_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (E_i \cap F_j)\right) = \sum_{j=1}^m y_j \mu(F_j) = \int_I \psi.\end{aligned}$$

Asimismo, no es una tarea difícil ver que la integral de funciones simples que acabamos de definir es una aplicación lineal $\int : \mathcal{S}([0,1],X) \to X$. En efecto, puesto que $\mathcal{S}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, resulta que $\Phi + \psi, \alpha\Phi \in \mathcal{S}([0,1],X)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned}\int_I \Phi + \int_I \psi &= \sum_{i=1}^n x_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^m y_j \mu(F_j) = \sum_{i=1}^n x_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m (E_i \cap F_j)\right) + \sum_{j=1}^m y_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (E_i \cap F_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) \mu(E_i \cap F_j) \\ &= \int_I (\Phi + \psi),\end{aligned}$$

ya que, $\Phi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i + y_j) \chi_{E_i \cap F_j}$ por (3.1). El hecho de que

$$\int_I \alpha\Phi = \alpha \int_I \Phi$$

es mucho muy fácil de comprobar. Igualmente, si $A, B \subseteq I$ son conjuntos medibles y disjuntos, entonces, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ y de la linealidad de la integral se sigue que

$$\int_{A \cup B} \Phi = \int_A \Phi + \int_B \Phi. \tag{3.4}$$

En el caso especial en que $X = \mathbb{R}$, es evidente que si $\Phi \ge 0$, entonces,

$$\int_I \Phi = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{E_i} \ge 0. \tag{3.5}$$

Como consecuencia de esto último y la linealidad de la integral, si $\psi \le \Phi$, entonces,

$$\int_I \psi \le \int_I \Phi. \tag{3.6}$$

De (3.4) y (3.5), se deduce que si $A \subseteq B \subseteq I$ son conjuntos medibles y $\Phi \geq 0$, entonces

$$\int_A \Phi \leq \int_B \Phi. \tag{3.7}$$

Ahora bien, supongamos $E \subseteq I$ es un conjunto medible. Entonces,

$$\Phi_E := \Phi \cdot \chi_E = x_1 \chi_{E \cap E_1} + \cdots + x_n \chi_{E \cap E_n}.$$

De esto último y de la definición 3.1.2, concluimos que

$$\left|\left| \int_E \Phi \right|\right| = \left|\left| \int_I \Phi_E \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E \cap E_k) \right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n} ||x_k|| \mu(E \cap E_k) = \int_I ||\Phi||. \tag{3.8}$$

Vamos a terminar esta sección con un resultado que nos permite definir una seminorma sobre el espacio vectorial $\mathcal{S}([0,1],X)$.

Proposición 3.1.3. *La aplicación* $||.||_1 : \mathcal{S}([0,1],X) \to [0,\infty)$ *definida mediante*

$$||\varphi||_1 = \int_I ||\varphi||$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) $||\varphi||_1 \geq 0$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$,
(b) $||\alpha\varphi||_1 = |\alpha| \cdot ||\varphi||_1$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$,
(c) $||\varphi + \phi||_1 \leq ||\varphi||_1 + ||\phi||_1$ *para todo* $\varphi, \phi \in \mathcal{S}([0,1],X)$.

Demostración. Dado que $||\varphi|| \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{S}([0,1],X)$, $||\varphi||_1 \geq 0$ por (3.5). Además, por el hecho de que $\mathcal{S}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y (3.3), tenemos

$$||\alpha\varphi|| = |\alpha| \cdot ||\varphi||$$

es una función simple. Puesto que el operador $\int$ es lineal sobre $\mathcal{S}([0,1],X)$, entonces

$$||\alpha\varphi||_1 = \int_I ||\alpha\varphi|| = \int_I |\alpha| \cdot ||\varphi|| = |\alpha| \int_I ||\varphi|| = |\alpha| \cdot ||\varphi||_1.$$

Finalmente, supongamos que $\varphi, \phi \in \mathcal{S}([0,1],X)$. Observemos que $||\varphi + \phi|| \leq ||\varphi|| + ||\phi||$. Luego, de (3.6) y la linealidad de $\int$ sobre $\mathcal{S}([0,1],X)$ se sigue que

$$||\varphi + \phi||_1 = \int_I ||\varphi + \phi|| \leq \int_I (||\varphi|| + ||\phi||) = \int_I ||\varphi|| + \int_I ||\phi|| = ||\varphi||_1 + ||\phi||_1.$$

□

Observemos que la aplicación $||.||_1$ no es una norma sobre $\mathcal{S}([0,1],X)$. Por ejemplo, si $\varphi = x \cdot \chi_{\{t\}}$, con $x \in X$ y $t \in I$ tal que $||x|| \neq 0$. Entonces, $||\varphi||_1 = x \cdot \mu(\{t\}) = 0$, sin embargo $\varphi \neq 0$. Luego, $||.||_1$ es una seminorma que llamamos L-seminorma [1].

[1] Esta terminología aparece en el libro [24]

3.2. Construcción de la integral de Bochner

En la definición 3.1.2, hemos definido la integral de una manera muy natural para funciones simples. En esta sección vamos a extender dicha definición a una clase más amplia de funciones que llamaremos funciones Bochner integrables. En primer lugar, hemos empezado definiendo lo que entendemos por dos sucesiones equivalentes y una sucesión de L-Cauchy en el espacio $(\mathcal{S}([0,1],X),||.||_1)$. Luego, hemos probado que el límite de la integral de cualquier sucesión de L-Cauchy en $(\mathcal{S}([0,1],X),||.||_1)$ es un elemento de X. Después, hemos demostrado que si dos sucesiones en $(\mathcal{S}([0,1],||.||_1)$ son equivalentes, entonces, los límites de sus integrales son iguales y si dos sucesiones en $(\mathcal{S}([0,1],||.||_1)$ convergen puntualmente hacia alguna función, resulta que son equivalentes. Esto nos ha permitido definir, sin ninguna ambigüedad, la integral de Bochner. Ahora pasamos a definir estos nuevos conceptos que acabamos de mencionar.

Definición 3.2.1. *Una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ se llama L-cero si, y solamente si,*

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1 = 0.$$

Además, dos sucesiones $(\varphi_n)_n, (\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ se llaman equivalentes si, y solamente si, su diferencia $(\varphi_n - \phi_n)_n$ es L-cero. Asimismo, una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ se llama de L-Cauchy si, y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 < \varepsilon \text{ para todo } m,n \geq N.$$

Lema 3.2.1. *Sea $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ una sucesión de L-Cauchy. Entonces, existe una subsucesión $(\varphi_{n_k})_k$ de $(\varphi_n)_n$ que converge puntualmente en casi todo punto a una función $f : I \to X$. Además, para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $E \subseteq I$ medible con $\mu(E) < \varepsilon$ de manera que $(\varphi_{n_k})_k$ converge uniformemente sobre $I \setminus E$.*

Demostración. Puesto que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un n_k de manera que si $n,m \geq n_k$, entonces

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Notemos que podemos suponer, y así lo haremos, que la sucesión $(n_k)_k$ es estrictamente creciente. Por consiguiente, si fijamos $k \in \mathbb{N}$ y tomamos $m > k$, entonces $n_k, n_m \geq n_k$ y

$$||\varphi_{n_k} - \varphi_{n_m}||_1 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Nuestra tarea, en primer lugar, consiste en demostrar que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t))$$

converge absolutamente en casi todo $t \in I$ hacia algún elemento de X y que dicha convergencia es uniforme salvo en un subconjunto de I de medida arbitrariamente pequeña. Para ello, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto

$$M_k = \left\{ t \in I : ||\varphi_{n_{k+1}}(t) - \varphi_{n_k}(t)|| \geq \frac{1}{2^k} \right\} = ||\varphi_{n_{k+1}}(t) - \varphi_{n_k}(t)||^{-1}\left([1/2^k, \infty)\right).$$

Obviamente, M_k es un subconjunto medible de I, ya que, $||\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}|| : I \to \mathbb{R}$ es una función simple y, como consecuencia, es medible Lebesgue sobre I. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2^k}\mu(M_k) = \int_{M_k} \frac{1}{2^k} \leq \int_{M_k} ||\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}|| \leq \int_I ||\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}|| \leq ||\varphi_{n_{k+1}} - \varphi_{n_k}||_1 < \frac{1}{2^{2k}}.$$

Por lo tanto, esta cadena de desigualdades nos permite concluir que

$$\mu(M_k) < \frac{1}{2^k} \quad \text{para cada } k \geq 1. \tag{3.9}$$

Ahora fijemos un $k \in \mathbb{N}$ y definimos el siguiente conjunto

$$N_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} M_i. \tag{3.10}$$

Entonces, N_k es subconjunto medible de I por ser una unión numerable de subconjuntos medibles de I. Además, $t \notin N_k$ si, y sólo si, $t \notin M_i$ para cada $i \geq k$ y, como consecuencia,

$$||\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)|| < \frac{1}{2^{2i}} \leq \frac{1}{2^i}$$

para cada $i \geq k$. Luego, la serie $\sum_{i=k}^{\infty} \left(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right)$ es absolutamente y uniformemente convergente para todo $t \notin N_k$ con k arbitrario. Además, de (3.10) y (3.9) se sigue que

$$\mu(N_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu(M_i) < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}, \tag{3.11}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Ahora fijemos un $\varepsilon > 0$.

- De (3.11), resulta que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(N_k) < \varepsilon$ si $k \geq k_0$.
- Pero, también, sabemos que la serie $\sum_{i=k}^{\infty} \left(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right)$ es absolutamente y uniformemente convergente para todo $t \notin N_k$ con k arbitrario.

Luego, en particular, $\mu(N_{k_0}) < \varepsilon$ y la serie $\sum_{i=k_0}^{\infty} \left(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right)$ es absolutamente y uniformemente convergente para todo $t \notin N_{k_0}$. De esto se sigue que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right)$$

es absolutamente y uniformemente convergente para todo $t \in I \setminus N_{k_0}$ y $\mu(N_{k_0}) < \varepsilon$. Esto termina la primera parte de la prueba. Tomando $N = N_{k_0}$, vamos a probar que la subsucesión $(\varphi_{n_k})_k$ converge uniformemente hacia la función $f : I \to X$ definida mediante

$$f(t) = \varphi_{n_1}(t) + \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t))$$

en $I \setminus N$. Para ello, empezamos observando que, para cada $t \in I$, tenemos

$$\varphi_{n_k}(t) = \varphi_{n_1}(t) + \sum_{i=1}^{k-1}(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)),\ k \geq 2,$$

ya que, la suma del lado derecho de la igualdad anterior es una suma telescópica. Luego,

$$\begin{aligned} ||f(t) - \varphi_{n_k}(t)|| &= \left|\left|\left(\varphi_{n_1}(t) + \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t))\right) - \left(\varphi_{n_1}(t) + \sum_{i=1}^{k-1}(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t))\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\sum_{i=k}^{\infty}\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right|\right| \leq \sum_{i=k}^{\infty}||\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)||. \end{aligned}$$

Además, puesto que la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)\right)$ es absolutamente y uniformemente convergente para todo $t \in I \setminus N$, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{\infty}||\varphi_{n_{i+1}}(t) - \varphi_{n_i}(t)|| < \varepsilon$$

para todo $t \in I \setminus N$. Por consiguiente, $||f(t) - \varphi_{n_k}(t)|| < \varepsilon$ para todo $t \in I \setminus N$ siempre que $k \geq k_0$. La prueba es completa. $\square$

Lema 3.2.2. *Sean* $(\varphi_n)_n, (\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1], X)$ *dos sucesiones de L-Cauchy, entonces:*

(a) *Existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$ *en* X.

(b) *Si* $(\varphi_n)_n$ *y* $(\phi_n)_n$ *equivalentes, entonces* $\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n$.

(c) *Si* $(\varphi_n)_n$ *y* $(\phi_n)_n$ *convergen en casi todo punto hacia una función* $f : I \to X$*, entonces son equivalentes y, por lo tanto, por (b) tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n.$$

Demostración. (a) Como $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$, entones, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\left|\left|\int_I \varphi_n - \int_I \varphi_m\right|\right| = \left|\left|\int_I (\varphi_n - \varphi_m)\right|\right| \leq \int_I ||\varphi_n - \varphi_m|| = ||\varphi_n - \varphi_m||_1.$$

Por esto último y el hecho de que $(\varphi_n)_n$ es una sucesión L-Cauchy, concluimos que $\left(\int_I \varphi_n\right)_n$ es una sucesión de Cauchy en X. Por consiguiente, existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$, ya que, X es un espacio de Banach y, en particular, es completo.

(b) Fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, por el hecho de que $(\varphi_n)_n$ y $(\phi_n)_n$ son equivalentes y el apartado (a), existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, resulta que

$$||\varphi_n - \phi_n||_1 = \int_I ||\varphi_n - \phi_n|| < \varepsilon,$$

$$\left|\left|\int_I \varphi_n - \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\right|\right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\left|\int_I \phi_n - \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n\right|\right| < \varepsilon.$$

Estas tres estimaciones nos permiten deducir que

$$\begin{aligned}\left|\left|\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n - \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n\right|\right| &= \left|\left|\left(\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n - \int_I \varphi_N\right) + \left(\int_I \varphi_N - \int_I \phi_N\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\int_I \phi_N - \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n\right)\right|\right| \\ &\leq \left|\left|\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n - \int_I \varphi_N\right|\right| + \left|\left|\int_I \varphi_N - \int_I \phi_N\right|\right| \\ &\quad + \left|\left|\lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n - \int_I \phi_N\right|\right| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Dado que la desigualdad anterior es cierta para todo $\varepsilon > 0$, entonces, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n.$$

(c) Para cada $n \geq 1$, sea $\psi_n = \varphi_n - \phi_n$. Entonces, por hipótesis, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = 0$ en casi todo $t \in I$. Puesto que $\mathcal{S}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, resulta que

$$(\psi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X).$$

Además, observemos que $(\psi_n)_n$ es una sucesión de L-Cauchy, ya que,

$$||\psi_n - \psi_m||_1 \leq ||\varphi_n - \varphi_m||_1 + ||\phi_n - \phi_m||_1$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y que tanto $(\varphi_n)_n$ como $(\phi_n)_n$ son sucesiones de L-Cauchy. Por lo tanto, sólo falta por probar que $\lim_{n\to\infty} ||\psi_n||_1 = 0$. Para ello, fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, por ser $(\psi_n)_n$ una sucesión de L-Cauchy, existe un $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$n, m \geq N \Rightarrow ||\psi_n - \psi_m||_1 < \varepsilon.$$

Por el Lema 3.2.1, existe un conjunto medible $E \subseteq I$ y una subsucesión $(\psi_{n_k})_k$ de $(\psi_n)_n$ que converge uniformemente en $I \setminus E$ tal que $\mu(E) < \varepsilon$. Evidentemente, puesto que $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = 0$ en casi todo $t \in I$, resulta que $(\psi_{n_k})_k$ converge uniformemente hacia 0 en $I \setminus E$ y $\mu(E) < \varepsilon$. Luego, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_{k_0} \geq N \quad \text{y} \quad ||\psi_{n_k}(t)|| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in I \setminus E.$$

Por consiguiente, si $k \geq k_0$, resulta que

$$\begin{aligned} ||\psi_{n_k}||_1 &= \int_I ||\psi_{n_k}|| = \int_{I\setminus E} ||\psi_{n_k}|| + \int_E ||\psi_{n_k}|| \\ &\leq \left(\int_{I\setminus E} ||\psi_{n_k} - \psi_{n_{k_0}}|| + \int_{I\setminus E} ||\psi_{n_{k_0}}|| \right) + \left(\int_E ||\psi_{n_k} - \psi_{n_{k_0}}|| + \int_E ||\psi_{n_{k_0}}|| \right) \\ &\leq (||\psi_{n_k} - \psi_{n_{k_0}}||_1 + \varepsilon\mu(I \setminus E)) + \left(||\psi_{n_k} - \psi_{n_{k_0}}||_1 + \sup_{t\in I} ||\psi_{n_{k_0}}(t)||\mu(E) \right) \\ &< \varepsilon \left(3 + \sup_{t\in I} ||\psi_{n_{k_0}}(t)|| \right). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, entonces, $\lim_{k\to\infty} ||\psi_{n_k}||_1 = 0$. Luego, de nuevo, existe un k_0 tal que $n_{k_0} \geq N$ y $||\psi_{n_{k_0}}||_1 < \varepsilon$. Por lo tanto, si $n \geq N$, entonces

$$||\psi_n||_1 \leq ||\psi_n - \psi_{n_{k_0}}||_1 + ||\psi_{n_{k_0}}||_1 < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. De esto se sigue que $\lim_{n\to\infty} ||\psi_n||_1 = 0$ y la prueba es completa.

□

El apartado (a) del lema 3.2.2 nos permite asignar a cada sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1], X)$ de L-Cauchy un $x_{(\varphi_n)} \in X$ definido por $x_{(\varphi_n)} = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n$. Más aun, por el apartado (b), dicho elemento de X es único para todas las sucesiones de L-Cauchy que son equivalentes. Esto nos permite presentar los siguientes conceptos.

Definición 3.2.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función cualquiera. Decimos que una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1], X)$ de L-Cauchy determina f si, y solamente si,*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t)$$

en casi todo $t \in I$, con respecto a la norma $||.||$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - f(t)|| = 0$$

en casi todo $t \in I$. Además, decimos que f es Bochner integrable si, y sólo si, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ de L-Cauchy que determina f y su integral viene dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n.$$

Denotaremos por $\mathcal{B}([0,1],X)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to X$ que son Bochner integrables sobre I. Además, por el Lema 3.2.2, si $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, el elemento A de la definición anterior es único y será representado por el símbolo

$$A = (B)\int_I f.$$

Asimismo, en general, si $E \subseteq I$ es un conjunto medible, decimos que f es Bochner integrable sobre E si, y solamente si, $f \cdot \chi_E$ es Bochner integrable sobre I y, escribimos,

$$(B)\int_E f = (B)\int_I f \cdot \chi_E.$$

En nuestra presentación de la integral de Bochner, hemos seguido los libros [19] y [24]. Sin embargo, la integral de Bochner puede encontrarse en muchos libros clásicos de Análisis Funcional e Integración Vectorial como, por ejemplo, [6] o [28]. A continuación presentamos algunas propiedades básicas de la integral de Bochner.

3.3. Algunas propiedades elementales

En esta sección hemos probado unas propiedades básicas de la integral de Bochner que vamos a utilizar en secciones posteriores de este trabajo. En primer lugar, hemos demostrado que el conjunto $\mathcal{B}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral de Bochner es un funcional lineal sobre él. Además, hemos probado que la integral de Bochner es una integral absoluta, es decir, la norma de una función Bochner integrable sigue siendo Bochner integrable. En segundo lugar, hemos definido una seminorma sobre el conjunto $\mathcal{B}([0,1],X)$ y hemos demostrado que el espacio $(\mathcal{S}([0,1],X),||.||_1)$ es denso en $(\mathcal{B}([0,1],X),||.||_1)$ y este último es un espacio completo. También, hemos probado la monotonía de la integral de Bochner con respecto al integrando. En tercer lugar, hemos deducido una definición alternativa de la integral de Bochner que es la que suele aparecer en la mayoría de los libros clásicos sobre Análisis Functional e Integración Vectorial. Finalmente, hemos acabado la sección con algunas propiedades elementales de la integral de Bochner que necesitaremos en lo que queda de esta memoria.

Proposición 3.3.1. *El conjunto $\mathcal{B}([0,1],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral de Bochner es una aplicación lineal sobre $\mathcal{B}([0,1],X)$.*

Demostración. Sean $f,g \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y $(\varphi_n)_n,(\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ dos sucesiones cualquieras que determinan f y g, respectivamente. Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$||(\alpha\varphi_n+\beta\phi_n)(t)-(\alpha f+\beta g)(t)|| \leq |\alpha|\cdot||\varphi_n(t)-f(t)||+|\beta|\cdot||\phi_n(t)-g(t)||$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in I$. Además, por la Proposición 3.1.3, tenemos

$$||(\alpha\varphi_n-\beta\phi_n)-(\alpha\varphi_m-\beta\phi_m)||_1 \leq |\alpha|\cdot||\varphi_n-\varphi_m||_1+|\beta|\cdot||\phi_n-\phi_m||_1,$$

para cada $n,m \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty}||(\alpha\varphi_n+\beta\phi_n)(t)-(\alpha f+\beta g)(t)||=0$ en casi todo $t \in I$ y $\lim\limits_{n,m\to\infty}||(\alpha\varphi_n-\beta\phi_n)-(\alpha\varphi_m-\beta\phi_m)||_1=0$, ya que, $(\varphi_n)_n$ y $(\phi_n)_n$ determinan f y g, respectivamente. Esto prueba que $(\alpha\varphi_n+\beta\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ determina $\alpha f+\beta g$. Esto último nos permite concluir que $\alpha f+\beta g \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y, por definición,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I(\alpha\varphi_n-\beta\phi_n)=(B)\int_I(\alpha f+\beta g).$$

Asimismo, por la linealidad de la integral sobre los elementos de $\mathcal{S}([0,1],X)$, resulta que

$$\int_I(\alpha\varphi_n+\beta\phi_n)=\int_I\alpha\varphi_n+\int_I\beta\phi_n=\alpha\int_I\varphi_n+\beta\int_I\phi_n,\ n\geq 1.$$

También, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I\varphi_n=(B)\int_I f$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I\phi_n=(B)\int_I g$, entonces

$$(B)\int_I(\alpha f+\beta g)=\lim_{n\to\infty}\int_I(\alpha\varphi_n+\beta\phi_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}\int_I f_n+\beta\lim_{n\to\infty}\int_I g_n=\alpha(B)\int_I f+\beta(B)\int_I g.$$

La prueba es completa. □

Lema 3.3.1. *Supongamos $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión que determina f, entonces, $||f||: I \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable sobre I y $(||\varphi_n||)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R})$ es una sucesión que determina $||f||$. Además, en este caso, tenemos*

$$(B)\int_I||f||=\lim_{n\to\infty}\int_I||\varphi_n||=\lim_{n\to\infty}||\varphi_n||_1 \quad y \quad \left|\left|(B)\int_I f\right|\right| \leq (B)\int_I||f||.$$

Demostración. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $||\varphi_n||: I \to \mathbb{R}$ es una función simple por (3.3). Además, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, $\Big|||\varphi_n-\varphi_m||\Big| \leq ||\varphi_n-\varphi_m||$ y por (3.6), tenemos

$$\Big|\Big|||\varphi_n||-||\varphi_m||\Big|\Big|_1=\int_I\Big|||\varphi_n||-||\varphi_m||\Big| \leq \int_I||\varphi_n-\varphi_m||=||\varphi_n-\varphi_m||_1. \tag{3.12}$$

Como $(\varphi_n)_n$ es una sucesión de L-Cauchy, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \geq N \Rightarrow ||\varphi_n - \varphi_m||_1 < \varepsilon.$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta (3.12), concluimos que

$$n,m \geq N \Rightarrow \left|\left| ||\varphi_n|| - ||\varphi_m|| \right|\right|_1 < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $(||\varphi_n||)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R})$ es una sucesión de L-Cauchy. Además, como

$$\Big| ||\varphi_n|| - ||f|| \Big| \leq ||\varphi_n - f||$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - f(t)|| = 0$ en casi todo $t \in I$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t)|| = ||f(t)||$$

en casi todo $t \in I$. Por lo tanto, $(||\varphi_n||)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R})$ determina $||f||$ y, por definición,

$$(B)\int_I ||f|| = \lim_{n\to\infty} \int_I ||\varphi_n|| = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, por (3.8), tenemos que

$$\left|\left| \int_I \varphi_n \right|\right| \leq \int_I ||\varphi_n||.$$

Asimismo, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \in X$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I ||\varphi_n|| \in \mathbb{R}$, por el Lema 3.2.2, resulta que

$$\left|\left|(B)\int_I f\right|\right| = \left|\left| \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \right|\right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_I ||\varphi_n|| = (B)\int_I ||f||,$$

ya que, la norma $||.||$ es una aplicación continua. Esto acaba la prueba. □

Observemos que si $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ de L-Cauchy que determina f. Además, por el Lema 3.3.1, $(||\varphi_n||)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],\mathbb{R})$ es una sucesión de L-Cauchy que determina $||f||$. Luego, por el Lema 3.2.2, $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1$ existe y no depende de la elección de la sucesión $(\varphi_n)_n$. Asi pues, la seminorma $||.||_1$ definida en la Proposición 3.1.3 sobre $\mathcal{S}([0,1],X)$ la podemos extender al conjunto $\mathcal{B}([0,1],X)$.

Proposición 3.3.2. *La aplicación* $||.||_1 : \mathcal{B}([0,1],X) \to [0,\infty)$ *definida mediante*

$$||f||_1 = (B)\int_I ||f|| = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1,$$

donde $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ *es cualquier sucesión de L-Cauchy que determina* f*, satisface las siguientes propiedades:*

(a) $||f||_1 \geq 0$ *para todo* $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$*,*

(b) $||\alpha f||_1 = |\alpha| \cdot ||f||_1$ *para todo* $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

(c) $||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$ *para todo* $f,g \in \mathcal{B}([0,1],X)$*.*

Demostración. Supongamos que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión que determina f. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $||\varphi_n||_1 \geq 0$ por la Proposición 3.1.3. Por lo tanto,

$$||f||_1 = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1 \geq 0$$

y es finito por el Lema 3.2.2. De nuevo, por la Proposición 3.1.3, sabemos que

$$||\alpha\varphi_n||_1 = |\alpha| \cdot ||\varphi_n||_1 \tag{3.13}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, como $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, $\alpha f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ por la Proposición 3.3.1. Asimismo, observemos que como $(\varphi_n)_n$ determina f, entonces $(\alpha\varphi_n)_n$ determina αf y, por consiguiente, por el Lema 3.3.1, resulta que

$$||f||_1 = (B)\int_I ||f|| = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1 \quad \text{y} \quad ||\alpha f||_1 = (B)\int_I ||\alpha f|| = \lim_{n\to\infty} ||\alpha\varphi_n||_1. \tag{3.14}$$

Las igualdades dadas en (3.14) y (3.13) nos permiten concluir que

$$||\alpha f||_1 = (B)\int_I ||\alpha f|| = \lim_{n\to\infty} ||\alpha\varphi_n||_1 = |\alpha| \cdot \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1 = |\alpha| \cdot (B)\int_I ||f|| = |\alpha| \cdot ||f||_1.$$

Ahora supongamos que $(\varphi_n)_n, (\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ son dos sucesiones que determinan f y g, respectivamente. Notemos, por la Proposición 3.3.1, que $f+g \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Asimismo, evidentemente, $(\varphi_n + \phi_n)_n$ determina $f+g$. Luego, por el Lema 3.3.1, tenemos

$$||f+g||_1 = (B)\int_I (f+g) = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n + \phi_n||_1.$$

También, observemos que los tres límites $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1$, $\lim_{n\to\infty} ||\phi_n||_1$ y $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n + \phi_n||_1$ son finitos por Lema 3.2.2. Así pues, teniendo en cuenta la Proposición 3.1.3, resulta que

$$\begin{aligned} ||f+g||_1 = \int_I ||f+g|| &= \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n + \phi_n||_1 \leq \lim_{n\to\infty} \left(||\varphi_n||_1 + ||\phi_n||_1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_1 + \lim_{n\to\infty} ||\phi_n||_1 = \int_I ||f|| + \int_I ||g|| = ||f||_1 + ||g||_1. \end{aligned}$$

Esto acaba la prueba. □

Lema 3.3.2. *Sea* $f \in \mathcal{B}$ *y* $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ *es una sucesión que determina* f*, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_1 = 0.$$

Demostración. Puesto que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N de manera que

$$n,m \geq N \Rightarrow ||f_n - f_m||_1 < \varepsilon \tag{3.15}$$

Ahora fijemos $n \geq N$ y sea $\phi_m := f_n - f_m \in \mathcal{S}([0,1],X)$, $m \geq 1$. Dado que

$$||g_m - g_k||_1 = ||f_m - f_k||_1$$

para todo $m,k \in \mathbb{N}$, entonces, $(\phi_m)_m \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy. Además, como $\lim_{m\to\infty} \phi_m(t) = f_n(t) - f(t)$ en casi todo $t \in I$, entonces $(\phi_m)_m$ determina $f_n - f$ y, por lo tanto, $f_n - f \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Por consiguiente, teniendo en cuenta que $n \geq N$, tenemos

$$||f_n - f||_1 = \lim_{m\to\infty} ||\phi_m||_1 = \lim_{m\to\infty} ||f_n - f_m||_1 < \varepsilon$$

por (3.15). Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$. Esto finaliza la prueba. □

Corolario 3.3.1. *Supongamos que* $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$*. Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una función* $\varphi : I \to X$ *perteneciente a* $\mathcal{S}([0,1],X)$ *tal que*

$$||f - \varphi||_1 < \varepsilon.$$

Luego, el espacio $\mathcal{S}([0,1],X)$ *es denso en* $\mathcal{B}([0,1],X)$ *con respecto a la seminorma* $||.||_1$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ de L-Cauchy que determina f. Se sigue del Lema 3.3.2 que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f - \varphi_N||_1 < \varepsilon.$$

Por lo tanto, podemos tomar $\varphi := \varphi_N$. □

A continuación probamos que $(\mathcal{B}([0,1],X), ||.||_1)$ es un espacio completo.

Proposición 3.3.3. *El espacio* $(\mathcal{B}([0,1],X), ||.||_1)$ *es completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $(\mathcal{B}, ||.||_1)$. Entonces, para cada n elemento de $\mathbb{N}$, por el corolario 3.3.1, existe una función $\varphi_n \in \mathcal{S}([0,1],X) \subseteq \mathcal{B}([0,1],X)$ tal que

$$||f_n - \varphi_n||_1 < \frac{1}{n}. \tag{3.16}$$

Observemos que, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, $\varphi_n - f_n, f_n - f_m, f_m - \varphi_m \in \mathcal{B}([0,1],X)$ por la Proposición 3.3.1. Luego, por la Proposición 3.3.2 y la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}||\varphi_n - \varphi_m||_1 &= ||(\varphi_n - f_n) + (f_n - f_m) + (f_m - \varphi_m)||_1 \\ &\leq ||\varphi_n - f_n||_1 + ||f_n - f_m||_1 + ||f_m - \varphi_m||_1 \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + ||f_n - f_m||_1.\end{aligned}$$

para cada $n,m \in \mathbb{N}$. Puesto que $(f_n)_n$ es una sucesión de L-Cauchy, entonces,

$$\lim_{n,m\to\infty} ||\varphi_n - \varphi_m||_1 = 0.$$

De esto se sigue que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy. Por consiguiente, por el Lema 3.2.1, $(\varphi_n)_n$ contiene una subsucesión $(\varphi_{n_k})_k$ que converge puntualmente en casi todo punto a una función $f : I \to X$. Además, notemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} ||\varphi_m - \varphi_N||_1 = 0.$$

Luego, dado que, para cada $k,s \in \mathbb{N}$, tenemos $||\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s}||_1 \leq ||\varphi_{n_k} - \varphi_N||_1 + ||\varphi_N - \varphi_{n_s}||_1$, entonces, $\lim\limits_{k,s\to\infty} ||\varphi_{n_k} - \varphi_{n_s}||_1 = 0$. Por lo tanto, $(\varphi_{n_k})_k \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy. Así pues, $(\varphi_{n_k})_k$ determina f y, luego, $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Observemos que

$$||f_{n_k} - f||_1 \leq ||f_{n_k} - \varphi_{n_k}||_1 + ||\varphi_{n_k} - f||_1 < \frac{1}{n_k} + ||\varphi_{n_k} - f||_1$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. La primera desigualdad es debido a la Proposición 3.3.2, mientras que la segunda a (3.16). además, como $(\varphi_{n_k})_k$ es una sucesión de L-Cauchy que determina f, entonces, por el lema 3.3.2, concluimos que $\lim\limits_{k\to\infty} ||\varphi_{n_k} - f||_1 = 0$. Como consecuencia,

$$\lim_{k\to\infty} ||f_{n_k} - f||_1 = 0.$$

Asimismo, puesto que $(f_n)_n$ es una sucesión de L-Cauchy, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0,$$

ya que, $||f_n - f||_1 \leq ||f_n - f_{n_k}||_1 + ||f_{n_k} - f||_1$ para cada $n,k \in \mathbb{N}$. Esto termina la prueba. □

Proposición 3.3.4. *Una función $f : I \to X$ pertenece a $\mathcal{B}([0,1],X)$ si, y solamente si, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t)$ en casi todo $t \in I$ y*

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_1 = 0.$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ una sucesión que determina f. Entonces, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t)$ en casi todo $t \in I$ y, por el Lema 3.3.2, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_1 = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $f : I \to X$ es una función y que existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t)$ en casi todo $t \in I$ y $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_1 = 0$. Para probar que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, sólo queda por demostrar que la sucesión $(\varphi_n)_n$ es de L-Cauchy. Para ello, notemos que, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, $\varphi_n - f$ y $f - \varphi_m$ pertenecen a $\mathcal{B}([0,1],X)$ por la Proposición 3.3.1. Además, por la Proposición 3.3.2, tenemos

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 \leq ||\varphi_n - f||_1 + ||f - \varphi_m||_1 = ||\varphi_n - f||_1 + ||\varphi_m - f||_1$$

para cada $n,m \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, puesto que $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - f||_1 = 0$, entonces,

$$\lim_{n,m\to\infty} ||\varphi_n - \varphi_m||_1 = 0$$

y la prueba es completa. □

Observemos que, en realidad, la Proposición 3.3.4 nos da una definición alternativa de la integral de Bochner que es equivalente a la Definición 3.2.2. De hecho, dicha definición alternativa es la que suele aparecer en la mayoría de los libros clásicos de Análisis Funcional e Integración Vectorial (consultar [6] o [28]).

Proposición 3.3.5. *Sea $f : I \to X$ tal que $f(t) = 0$ en casi todo $t \in I$. Entonces,*

$$f \in \mathcal{B}([0,1],X) \quad y \quad (B)\int_I f = 0.$$

Demostración. Sea $M = \{t \in I : f(t) \neq 0\}$. Tomamos $x_0 \in X$ y definimos $\varphi_n = x_0 \cdot \chi_M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t)$ en casi todo $t \in I$. Además, la sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones simples es de L-Cauchy, ya que, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 = 0.$$

Por consiguiente, $(B)\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n = x_0 \cdot \mu(M) = 0$. La prueba es completa. □

Corolario 3.3.2. *Supongamos que $f : I \to X$ Bochner integrable y $g : I \to X$ es tal que $f(t) = g(t)$ en casi todo $t \in I$, entonces, g es Bochner integrable sobre I y*

$$(B)\int_I f = (B)\int_I g.$$

Demostración. De las proposiciones 3.3.5 y 3.3.1 se sigue que $g-f\in\mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$(B)\int_I (g-f)=0. \tag{3.17}$$

Además, por la Proposición 3.3.1, resulta que $g=(g-f)+f$ es Bochner integrable sobre I. Luego, una nueva aplicación de la Proposición 3.3.1 y (3.17) nos permiten concluir que

$$(B)\int_I g=(B)\int_I (g-f)+(B)\int_I f=(B)\int_I f.$$

Esto termina la demostración. □

Proposición 3.3.6. *Supongamos que $E\subseteq I$ es un conjunto medible y $f\in\mathcal{B}([0,1],X)$. Entonces, $f\cdot\chi_E\in\mathcal{B}([0,1],X)$, es decir, f es Bochner integrable sobre E y*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n\cdot\chi_E=(B)\int_I f\cdot\chi_E=\int_E f,$$

donde $(\varphi_n)_n$ es cualquier sucesión de L-Cauchy que determina f.

Demostración. Sea $(\varphi_n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{S}([0,1],X)$ que determina f. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi_n\cdot\chi_E)(t)=f(t)\cdot\chi_E(t)$$

en casi todo $t\in I$ y $||(\varphi_n\cdot\chi_E)-(\varphi_m\cdot\chi_E)||_1=||(\varphi_n-\varphi_m)\cdot\chi_E||_1=|\chi_E|\cdot||\varphi_n-\varphi_m||_1$, para todo $n,m\in\mathbb{N}$. De esto se sigue que $(\varphi_n\cdot\chi_E)_n\subseteq\mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy que converge puntualmente en casi todo punto hacia $f\cdot\chi_E$. Por consiguiente, $(\varphi_n\cdot\chi_E)_n$ determina $f\cdot\chi_E$. Por tanto, $f\cdot\chi_E$ es Bochner integrable sobre I y, por definición,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n\cdot\chi_E=(B)\int_I f\cdot\chi_E=(B)\int_E f.$$

Esto acaba la prueba. □

Proposición 3.3.7. *Supongamos que $X=\mathbb{R}$ y f,g son Bochner integrables sobre I tal que $f\leq g$ sobre I. Entonces, la siguiente desigualdad es válida:*

$$(B)\int_I f\leq(B)\int_I g.$$

Demostración. Observemos que $g-f\geq 0$ sobre I. Además, puesto que $f,g\in\mathcal{B}([0,1],X)$, por la Proposición 3.3.1, tenemos $g-f\in\mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$(B)\int_I (g-f)=(B)\int_I g-(B)\int_I f.$$

Además, por la Proposición 3.3.2, $||g-f||_1\geq 0$. Por consiguiente,

$$||g-f||_1=(B)\int_I |g-f|=(B)\int_I (g-f)=(B)\int_I g-(B)\int_I f\geq 0.$$

Esto nos da la desigualdad deseada y la prueba es completa. □

3.4. Funciones medibles

En esta sección hemos introducido las definiciones de una función fuertemente medible o débilmente medible y algunos resultados sobre estas nociones que volverán a aparecer en secciones posteriores. El primero de estos resultados viene a decirnos que el conjunto de todas las funciones fuertemente medibles es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, mientras que el segundo establece que la norma de una función fuertemente medible sigue siendo una función fuertemente medible. El resto de los resultados está dedicado a la demostración del teorema de Pettis y algunas de sus consecuencias.

Definición 3.4.1. *Una función $f : I \to X$ se dice que es fuertemente medible sobre I si, y sólo si, existe una sucesión $(\varphi_n)_n$ de elementos de $\mathcal{S}([0,1],X)$ con la siguiente propiedad:*

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - f(t)|| = 0$$

en casi todo $t \in I$.

Hecho 3.4.1. *Claramente, cualquier elemento de $\mathcal{S}([0,1],X)$ es fuertemente medible sobre I. Ahora supongamos que $X = \mathbb{R}$. Entonces, cada $\varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$ es medible Lebesgue, ya que, la función característica de un conjunto medible es medible Lebesgue y el espacio de las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ medibles Lebesgue es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En realidad, para funciones reales de variable real, la noción de función fuertemente medible es equivalente a la clásica definición de una función medible Lebesgue. En efecto, si f es fuertemente medible sobre I, entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ de funciones simples que converge puntualmente hacia f en casi todo punto. Pero, en este caso, cada uno de los términos de la sucesión $(\varphi_n)_n$ es medible Lebesgue. Por esta razón, f es medible Lebesgue. Recíprocamente, si f es medible Lebesgue sobre I, pues, es un hecho bien conocido que existe una sucesión de funciones simples que aproximan f. Por consiguiente, f es fuertemente medible sobre I. Para más detalles sobre esta equivalencia recomendamos al lector consultar [2], Corolario* 7.2.3 *y Teorema* 7.2.10 .

Proposición 3.4.2. *El conjunto de todas las funciones $f : I \to X$ fuertemente medibles sobre I es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.*

Demostración. Supongamos que $f, g : I \to X$ son dos funciones fuertemente medibles sobre I. Entonces, existen dos sucesiones $(\varphi_n)_n, (\phi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ de manera que

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - f(t)|| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} ||\phi_n(t) - f(t)|| = 0$$

en casi todo $t \in I$. Puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$||(\alpha\varphi_n(t) + \beta\phi_n(t)) - (\alpha f(t) + \beta g(t))|| \leq |\alpha|\left|\left|\varphi_n(t) - f(t)\right|\right| + |\beta|\left|\left|\phi_n(t) - g(t)\right|\right|.$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} ||(\alpha\varphi_n(t)+\beta\phi_n(t))-(\alpha f(t)+\beta g(t))||=0$ en casi todo $t\in I$. Esto prueba que $\alpha f+\beta g$ es una función fuertemente medible sobre I y la prueba es completa. □

Proposición 3.4.3. *Supongamos que $f: I\to X$ es una función fuertemente medible sobre I. Entonces, la función $||f||: I\to\mathbb{R}$ también es fuertemente medible sobre I.*

Demostración. Puesto que f es una función fuertemente medible, entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n\subseteq\mathcal{S}([0,1],X)$ que converge hacia f en casi todo punto. Sin embargo, por (3.3), para cada $n\in\mathbb{N}$, $||\varphi_n||: I\to\mathbb{R}$ es también una función simple. Por consiguiente, para que $||f||$ sea fuertemente medible, sólo falta por demostrar que $\lim_{n\to\infty}||\varphi_n(t)||=||f(t)||$ en casi todo $t\in I$. Pero, esto no es difícil de ver, ya que, para cada $n\in\mathbb{N}$, se cumple que

$$\Big|\,||\varphi_n(t)||-||f(t)||\,\Big|\le||\varphi_n(t)-f(t)||$$

para todo $t\in I$. Como $\lim_{n\to\infty}||\varphi_n(t)-f(t)||=0$ en casi todo $t\in I$, entonces resulta que

$$\lim_{n\to\infty}||\varphi_n(t)||=||f(t)|| \quad \text{en caso todo } t\in I.$$

Por consiguiente, $||f||$ es fuertemente medible sobre I. Esto termina la prueba. □

Definición 3.4.4. *Una función $f: I\to X$ se llama débilmente medible sobre I si, y solamente si, para cada $x^*\in X^*$, la función $x^*\circ f: I\to\mathbb{R}$ es medible sobre I.* [2]

En lo que sigue, cuando decimos que una función es fuertemente medible (débilmente medible) se sobreentiende que es fuertemente medible (débilmente medible) sobre I. Además, *para funciones reales de una variable real, cuando decimos que una función es medible nos referimos a que es medible en el sentido de la Definición 3.4.1 o en la clásica definición de una función medible, ya que, por el Hecho hecho3.4.1, ambas definiciones son equivalentes*. Además, la noción de función fuertemente medible que y la de débilmente medible están estrechamente relacionadas. La relación viene dada por el conocido teorema de Pettis que se presenta a continuación.
Las pruebas del Lema 3.4.1, la Proposición 3.4.5 y el Teorema 3.4.6 utilizan las ideas de [6] y [17]. Otra forma de probar el teorema de Pettis se puede encontrar en [19] o [24].

Lema 3.4.1. *Supongamos que $f: I\to X$ una función y $x_0\in X$. Además, supongamos que f débilmente medible y existe un conjunto $N\subseteq I$ de medida nula tal que $f(I\setminus N)$ es separable. Entonces, la función $||f-x_0||: I\to\mathbb{R}$ es medible.*

---

[2] En el sentido de la clásica definición de una función medible, es decir, $f^{-1}((a,+\infty))=\{t\in I: f(t)>a\}$ es un subconjunto medible de I para cada a perteneciente a $\mathbb{R}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer, y así lo haremos, que $x_0 = 0$ y $N = \emptyset$. Observemos que podemos suponer también que el espacio X es en sí mismo separable, ya que, de lo contrario, podemos reemplazamos X por el subespacio lineal cerrado más pequeño que contiene $f(I)$. Por consiguiente, por hipótesis, existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que el conjunto $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $f(I)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer, y así lo haremos, que el elemento 0 de X no pertenece a D. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el teorema de Hahn-Banach, existe un $x_n^* \in X^*$ tal que $||x_n^*||_* = 1$ y $x_n^*(x_n) = ||x_n||$. Puesto que f débilmente medible, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n^* \circ f$ es una función medible. Como consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^* \circ f|$ es una función medible. Así pues, la función $\sup_n |x_n^* \circ f| : I \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\sup_n |x_n^* \circ f|(t) = \sup\{|x_n^*(f(t))| : n \in \mathbb{N}\}$$

es también medible. Para ver que $||f||$ es medible, vamos a probar que

$$\sup_n |x_n^* \circ f|(t) = ||f(t)|| \quad \text{para cada } t \in I. \tag{✷}$$

En efecto, sea $t_0 \in I$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$|x_n^*(f(t_0))| \leq ||x_n^*||_* \cdot ||f(t_0)|| = ||f(t_0)||.$$

Por tanto, la validez de la desigualdad anterior para cada $n \in \mathbb{N}$ nos permite concluir que

$$\sup_n |x_n^* \circ f|(t_0) \leq ||f(t_0)||. \tag{3.18}$$

Ahora puesto que $f(t_0) \in f(I)$ y D es denso en $f(I)$, entonces, existe una sucesión $(x_k)_k \subseteq D$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = f(t_0)$. Esto último y el hecho de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n^* es continua nos permiten deducir que: para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n^*(f(t_0)) - x_n^*(x_K)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad ||x_K - f(t_0)|| < \varepsilon.$$

En particular, tomando $n = K$ en la primera de las desigualdad anteriores, tenemos

$$|x_K^*(f(t_0)) - x_K^*(x_K)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad ||x_K - f(t_0)|| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta que $x_K^*(x_K) = ||x_K||$, resulta que

$$\begin{aligned}
\Big|x_K^*(f(t_0)) - ||f(t_0)||\Big| &\leq |x_K^*(f(t_0)) - x_K^*(x_K)| + \Big|x_K^*(x_K) - ||f(t_0)||\Big| \\
&= |x_K^*(f(t_0)) - x_K^*(x_K)| + \Big|||x_K|| - ||f(t_0)||\Big| \\
&\leq |x_K^*(f(t_0)) - x_K^*(x_K)| + ||x_K - f(t_0)|| < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto demuestra que $x_K^*(f(t_0)) = ||f(t_0)||$. De esto se sigue

$$||f(t_0)|| \leq \sup_n |x_n^* \circ f|(t_0). \tag{3.19}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las desigualdades dadas en (3.18) y (3.19), tenemos

$$\sup_n |x_n^* \circ f|(t_0) = ||f(t_0)||.$$

Puesto que t_0 era un elemento arbitrario de $I \setminus N$, entonces, concluimos

$$\sup_n |x_n^* \circ f|(t) = ||f(t)|| \quad \text{para cada } t \in I$$

y (✱) se cumple. Por lo tanto, $||f||$ es medible. Esto acaba la prueba. □

Proposición 3.4.5. *Supongamos que $f : I \to X$ es débilmente medible y existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula tal que $f(I \setminus N)$ es separable. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una función medible $h : I \setminus N \to X$ definida mediante*

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t)$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_n \in X$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$ y para cada $t \in I \setminus N$, $||f(t) - h(t)|| < \varepsilon$.

Demostración. Por nuestra hipótesis, existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula y una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ tal que el conjunto $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $f(I \setminus N)$. Luego, por el Lema 3.4.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : I \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f_n(t) = ||f(t) - x_n||$$

es medible. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto:

$$F_n = \{t \in I \setminus N : f_n(t) < \varepsilon\}.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n es medible y $\mu(F_n) \leq \mu(I) < +\infty$. Ahora vamos a probar que $I \setminus N = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. En efecto, supongamos $t_0 \in I \setminus N$. Entonces, tenemos que $f(t_0) \in f(I \setminus N)$. Luego, puesto que D es denso en $f(I \setminus N)$, entonces existe una sucesión $(z_n)_n$ de elementos de D tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = f(t_0)$. Como consecuencia, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(t) = ||f(t_0) - z_{n_0}|| < \varepsilon$, es decir, $t_0 \in F_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Como $t_0 \in I$ era arbitrario, resulta que $I \setminus N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pero, evidentemente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq I \setminus N$ y, por consiguiente,

$$I \setminus N = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ahora vamos a formar una partición del conjunto $I \setminus N$ definiendo los siguiente conjuntos:

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1, \\ E_2 &= F_2 \setminus F_1, \\ \vdots &= \vdots \\ E_n &= F_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k \right), \ n \geq 2. \end{aligned}$$

Por construcción, $(E_n)_n$ es una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = I \setminus N.$$

Para demostrar que f es medible, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : I \setminus N \to X$ definida mediante

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(t).$$

Observemos que la función $h : I \setminus N \to X$ dada por $h(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ es medible, ya que,

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - h(t)|| = 0 \quad \text{para cada } t \in I \setminus N \quad \text{y} \quad (\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1], X).$$

Con esto queda establecida la prueba de la primera parte. Ahora sea t_0 perteneciente al conjunto $I \setminus N$. Entonces, existe un único $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in E_{n_0}$, ya que, los E_n son disjuntos. Por consiguiente, concluimos que $h(t_0) = x_{n_0}$. Asimimos, puesto que

$$E_{n_0} = F_{n_0} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n_0-1} F_k \right) n_0 \geq 2 \quad \text{y} \quad E_1 = F_1,$$

entonces, $t_0 \in F_{n_0}$. Luego, $f_{n_0}(t_0) = ||f(t_0) - x_{n_0}|| < \varepsilon$. Como consecuencia, tenemos

$$||f(t_0) - h(t_0)|| = ||f(t_0) - x_{n_0}|| < \varepsilon.$$

Como t_0 era un elemento arbitrario de $I \setminus N$, entonces, para cada $t \setminus N \in I$,

$$||f(t) - h(t)|| < \varepsilon.$$

La prueba es completa. □

Ya poseemos todos los resultados previos necesarios para probar el teorema de Pettis.

Teorema 3.4.6 (Pettis)**.** *Una función $f : I \to X$ es medible si, y solamente si, es débilmente medible y existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula tal que $f(I \setminus N)$ es separable.*

Demostración. Supongamos que f es una función medible. Entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ y un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f(t) \text{ para cada } t \in I \setminus N. \tag{3.20}$$

Sea $x^* \in X^*$.Observemos que la sucesión $(x^* \circ \varphi_n)_n$ de funciones reales de una variable real es una sucesión de funciones simples. Además, como x^* es continua, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} (x^* \circ \varphi_n)(t) = (x^* \circ f)(t) \quad \text{para cada } t \in I \setminus N.$$

De esto se sigue que $f \circ \varphi$ es medible. Puesto que x^* era un elemento arbitrario de X^*, entonces, concluimos que f es débilmente medible. Ahora veamos que $f(I \setminus N)$ es separable. Dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n es una función simple, resulta que el conjunto $\varphi_n(I)$ es un subconjunto finito de X y, por lo tanto, el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I)$ es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Ahora definimos el siguiente conjunto:

$$M = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I)}$$

y sea $d : M \times M \to \mathbb{R}$ la métrica definida mediante $d(x,y) = ||x-y||$. Observemos que (M,d) es un espacio métrico separable, ya que, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I)$ es denso en M. Así pues, para terminar esta parte de la prueba, sólo nos falta por demostrar que $f(I \setminus N) \subseteq M$ porque un subconjunto de un espacio métrico separable es separable. Para ello, sea $z \in f(I \setminus N)$. Entonces, existe un $t \in I \setminus N$ tal que $z = f(t)$. De esto último y (3.20), resulta que

$$z = f(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t).$$

Además, puesto que $(\varphi_n(t))_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I) \subseteq M$, resulta que $z \in M$, ya que, M es un subconjunto cerrado de X. De esto se sigue que $f(I \setminus N) \subseteq M$.
Recíprocamente, supongamos que f débilmente medible y existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula tal que $f(I \setminus N)$ es separable. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, por el Proposición 3.4.5, existe un función medible $h : I \to X$ y una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ tal que

$$||f(t) - h(t)|| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - h(t)|| = 0 \quad \text{para cada } t \in I \setminus N.$$

Por consiguiente, para cada $t \in I \setminus N$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$n \geq n_0 \Rightarrow ||f(t) - \varphi_n(t)|| \leq ||f(t) - h(t)|| + ||h(t) - \varphi_n(t)|| < 2\varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario. De esto que sigue que f es medible y la prueba es completa. $\square$

Corolario 3.4.1. *Supongamos que X es un espacio de Banach separable. Entonces, una función* $f : I \to X$ *es medible si, y solamente si,* f *es débilmente medible.*

Demostración. Supongamos que f es medible. Entonces, por el teorema de Pettis, Teorema 3.4.6, f es débilmente medible.
Recíprocamente, por ser X un espacio de Banach separable, es un espacio métrico separable y, en consecuencia, es hereditariamente separable. Luego, $f(I) \subseteq X$ es también separable. Además, como f es débilmente medible, por el Teorema 3.4.6 que f es medible. Esto termina la prueba. □

Proposición 3.4.7. *Supongamos* $f : I \to X$ *una función medible. Entonces, dado un* $\varepsilon > 0$, *existe una función medible* $g : I \to X$ *de forma que* $||g(t)|| < \varepsilon$ *en casi todo* $t \in I$ *y otra función medible* $h : I \to X$ *definida mediante*

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t)$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ *es un conjunto medible,* $x_n \in X$ *y* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *para cada* $n \neq m$ *de tal manera que* $f = g + h$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.4.5 y del Teorema 3.4.6. □

3.5. El problema $\mathcal{B}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$

En esta sección hemos iniciado nuestro análisis sobre la relación que existe entre la integral de McShane y la de Bochner. Para empezar, hemos demostrado que toda función simple es McShane integrable y la integral de McShane coincide con la de Bochner sobre la clase de las funciones simples. Después, hemos probado que toda función Bochner integrable tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ y, en consecuencia, es McShane integrable. Pero, el recíproco no es cierto en general como lo veremos en la última sección de este capítulo. Finalmente, hemos establecido que el hecho de que una función sea Bochner integrable es equivalente a que tenga la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Esta forma de caracterizar a las funciones Bochner integrables mediante funciones que tienen la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ resulta ser muy útil para nosotros, ya que, nos ha permitido deducir, fácilmente, la equivalencia de la integral de Bochner y la de McShane y, en particular la equivalencia de la integral de Bochner y la de Lebesgue, para funciones reales de una variable real.

Teorema 3.5.1. *Sea* $\varphi : I \to X$ *una función simple. Entonces,* $\varphi \in \mathcal{M}([0,1])$ *y*

$$(M)\int_I \varphi = (B)\int_I \varphi.$$

Demostración. Empezamos suponiendo que $\varphi = \chi_E$, donde $E \subseteq I$ es medible. Entonces, tenemos que $E^c = I \setminus E \subseteq I$ también es un conjunto medible. Además, evidentemente, $I = E \cup E^c$. Ahora sea un $\varepsilon > 0$. Como la medida de Lebesgue es regular, entonces, existen dos conjuntos abiertos relativos $U \subseteq I$ y $V \subseteq I$ de manera que $E \subseteq U$, $E^c \subseteq V$ y

$$\mu(U) < \mu(E) + \varepsilon, \quad \mu(V) < \mu(E^c) + \varepsilon. \tag{3.21}$$

Ahora, si $t \in E \subseteq U$, entonces $t \in U$. Como U es abierto, existe un $\delta_1(t) > 0$ tal que

$$(t - \delta_1(t), t + \delta_1(t)) \cap I \subseteq U.$$

De manera similar, si $t \in E^c \subseteq V$, entonces, existe un $\delta_2(t) > 0$ de tal manera que que

$$(t - \delta_2(t), t + \delta_2(t)) \cap I \subseteq V.$$

Por consiguiente, podemos definir un calibre $\gamma \to \mathcal{O}$ mediante $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ donde $\delta(t) = \text{mín}(\delta_1(t), \delta_2(t))$ de modo que se cumplan las dos siguientes implicaciones:

$$t \in E \Rightarrow \gamma(t) \cap I \subseteq U \quad \text{y} \quad t \in E^c \Rightarrow \gamma(t) \cap I \subseteq V. \tag{3.22}$$

Ahora por el lema de Cousin, Lema 2.1.1, sea $\mathcal{P} = \{(t_k, I_k) : k = 1, 2, \ldots, n\}$ es una M-partición del intervalo I subordinada a γ. Por consiguiente,

$$\varphi(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \chi_E(t_k)\mu(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ t_k \in E}}^{n} \mu(I_k). \tag{3.23}$$

Puesto que $\mathcal{P}$ es una M-partición de I subordinada a γ, resulta que $I_k \subseteq \gamma(t_k)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea $t_k \in E$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$. Teniendo en cuenta (3.22), tenemos

$$I_k = I_k \cap I \subseteq \gamma(t_k) \cap I \subseteq U.$$

Como t_k era un elemento arbitrario de E, entonces, concluimos que $\bigcup_{t_k \in E} I_k \subseteq U$. Luego,

$$\mu\left(\bigcup_{t_k \in E} I_k\right) = \sum_{t_k \in E} \mu(I_k) \leq \mu(U).$$

La Proposición A.2.1 justifica la igualdad anterior. Por consiguiente,

$$\varphi(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \chi_E(t_k)\mu(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ t_k \in E}}^{n} \mu(I_k) \leq \mu(U) < \mu(E) + \varepsilon. \tag{3.24}$$

La última desigualdad es debido a (3.21). Por un razonamiento similar, se demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{E^c}(t_k)\mu(I_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ t_k \in E^c}}^{n} \mu(I_k) \leq \mu(V) < \mu(E^c) + \varepsilon. \tag{3.25}$$

Teniendo en cuenta $\sum_{k=1}^{n} \chi_I(t_k)\mu(I_k) = \mu(I), \chi_I = \chi_E + \chi_{E^c}$ y (3.25), tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n} \chi_E(t_k)\mu(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \chi_I(t_k)\mu(I_k) - \sum_{k=1}^{n} \chi_{E^c}(t_k)\mu(I_k) \\
&= \mu(I) - \sum_{k=1}^{n} \chi_{E^c}(t_k)\mu(I_k) > \mu(I) - (\mu(E^c) + \varepsilon) \\
&= \mu(I \setminus E^c) - \varepsilon = \mu(E) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

De esto último y de (3.24), concluimos que $||\varphi(\mathcal{P}) - \mu(E)|| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Esto demuestra que $(M)\int_I \varphi = \mu(E)$. Puesto que, por definición, tenemos que $(B)\int_I \varphi = \mu(E)$, entonces resulta que

$$(M)\int_I \varphi = (B)\int_I \varphi.$$

Ahora supongamos que $\varphi = x \cdot \chi_E$, donde $x \in X$ y $E \subseteq I$ es medible. Entonces, φ es una función simple. Por consiguiente, es Bochner integrable y

$$(B)\int_I x \cdot \chi_E = x \cdot \mu(E) = x \cdot (B)\int_I \chi_E.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, si elegimos el calibre γ como arriba, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\varphi(\mathcal{P}) - (B)\int_I x \cdot \chi_E\right|\right| &= \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x \cdot \chi_E(t_k) \cdot \mu(I_k) - (B)\int_I x \cdot \chi_E\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x \cdot \chi_E(t_k) \cdot \mu(I_k) - x \cdot (B)\int_I \chi_E\right|\right| \\
&= \left|\left|x \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_E(t_k)\mu(I_k) - (M)\int_I \chi_E\right)\right|\right| \\
&= ||x|| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \chi_E(t_k)\mu(I_k) - (M)\int_I \chi_E\right| < ||x|| \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P} = \{(t_k, I_k) : k = 1, 2, \ldots, n\}$ de I subordinada a γ y para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Con esto hemos demostrado que

$$(M)\int_I \varphi = (B)\int_I \varphi.$$

De esto último y de la linealidad de ambas integrales, si $\varphi \in \mathcal{S}([0,1],X)$, tenemos

$$(M)\int_I \varphi = (\mathcal{B})\int_I \varphi.$$

Esto termina la prueba. □

Lema 3.5.1. *Supongamos que* $f : I \to [0,+\infty)$ *es Bochner integrable y sea* $\varepsilon > 0$. *Entonces, existe un calibre* $\gamma : I \to \mathcal{O}$ *y* $\eta \in (0,\varepsilon)$ *tal que: si* $\mathcal{S} = \{(s_i,J_i) : i = 1,2,\ldots,k\}$ *es un M-sistema del intervalo I subordinada a* γ *que satisface* $\sum_{i=1}^{k} \mu(J_i) < \eta$, *entonces,*

$$f(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{k} f(s_i)\mu(J_i) < \varepsilon. \tag{❣}$$

Demostración. Para cada $n = 1,2,\ldots$, definimos el siguiente conjunto:

$$E_n = \{t \in I : n-1 \le f(t) < n\}.$$

Notemos que f es una función medible, ya que, es Bochner integrable sobre I. Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $E_n \subseteq I$ es medible. Además, observemos que si $n,m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$, entonces, $[m-1,m) \cap [n-1,n) = \emptyset$, ya que $m \le n-1$. Por lo tanto, $\emptyset = f^{-1}\big([m-1,m) \cap [n-1,n)\big) = E_m \cap E_n$. De manera similar, se prueba que si $n < m$, entonces $E_n \cap E_m = \emptyset$. Además, obviamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ y, como consecuencia, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq I$. Asimismo, si $t \in I$, entonces, $f(t) \ge 0$. Luego, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N-1 \le f(t) < N$, es decir, $t \in E_N$. Como $E_N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces, concluimos que $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. En resumen, hemos probado que $(E_n)_{n\ge 1}$ es una sucesión de subconjuntos medibles de I, disjuntos dos a dos y cuya unión es I. Ahora bien, puesto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot \chi_{E_k} \le f$, entonces,

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mu(E_k) \le (B)\int_I f,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 3.3.7. Por consiguiente, de esta desigualdad se sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mu(E_n) \le (B)\int_I f < +\infty.$$

Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, entonces, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) \le (B)\int_I f + \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = (B)\int_I f + \mu(I) < +\infty. \tag{3.26}$$

Por la regularidad de la medida de Lebesgue, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto abierto ralativo $A_n \subseteq I$ tal que $E_n \subseteq A_n$ y $\mu(A_n) \leq \mu(E_n) + 1/2^n$. De esto último y (3.26), se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < +\infty.$$

Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.27}$$

Ahora fijemos un $t_0 \in I$ arbitrario. Entonces, existe exactamente un $n = n(t_0) \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 \in E_n \subseteq A_n$. Dado que $t_0 \in A_n$ que es abierto de I, resulta que existe un $\delta(t_0) > 0$ tal que

$$I \cap (t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)) \subseteq A_n = A_{n(t_0)} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Puesto que t_0 es un elemento arbitrario de I, entonces, la función $\gamma : I \to \mathcal{O}$ definida mediante $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$ es un calibre sobre I tal que $I \cap \gamma(t) \subseteq A_{n(t)}$ para un único $n(t) \in \mathbb{N}$. Luego, si $\mathcal{S} = \{(s_i, J_i) : m = 1, 2, \ldots, k\}$ es un M-sistema de I subordinada a γ, entonces, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existe un único $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $s_i \in E_{n_i} \subseteq A_{n_i}$ y

$$J_i = I \cap J_i \subseteq I \cap \gamma(t_i) \subseteq A_{n_i}.$$

Por tanto, $\mu(J_i) \leq \mu(A_{n_i})$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Puesto que $f(s_i) < n_i$, resulta que

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{k} f(s_i)\mu(J_i) &= \sum_{\substack{i=1 \\ n_i \leq N}}^{k} f(s_i)\mu(J_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ n_i > N}}^{k} f(s_i)\mu(J_i) < \sum_{\substack{i=1 \\ n_i \leq N}}^{k} n_i\mu(J_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ n_i > N}}^{k} n_i\mu(J_i) \\ &\leq N \sum_{\substack{i=1 \\ n_i \leq N}}^{k} \mu(J_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ n_i > N}}^{k} n_i\mu(A_{n_i}) \leq N \sum_{i=1}^{k} \mu(J_i) + \sum_{n>N}^{\infty} n\mu(A_n) < N\eta + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ya que, $\sum_{i=1}^{k} \mu(J_i) < \eta$ (por hipótesis) y $\sum_{n>N}^{\infty} n\mu(A_m) < \varepsilon/2$ por (3.27). Por consiguiente, tomando $\eta = \varepsilon/2N$, tenemos que $\eta \in (0, \varepsilon)$ y se cumple (❣). Esto finaliza la prueba. □

Observemos que si $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ que determina f. Pero, por el Lema 3.2.1, $(\varphi_n)_n$ tiene una subsucesión $(\varphi_{n_k})_k \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ que converge uniformemente sobre I salvo en un conjunto de medida nula. Luego, necesariamente, $(\varphi_{n_k})_k$ converge uniformemente hacia f, ya que (X,d) con la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = ||x - y||$ es un espacio métrico. Además, puesto que $(\varphi_n)_n$ es una sucesión de L-Cauchy, entonces, evidentemente, $(\varphi_{n_k})_k$ también es una sucesión de L-Cauchy. Por consiguiente, $(\varphi_{n_k})_k$ determina f y, por definición,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n = (B)\int_I f = \lim_{k\to\infty}\int_I \varphi_{n_k}.$$

Además, siempre, podemos suponer que $||\varphi_{n_k}(t)|| \leq ||f(t)||+1$ para cada $t\in I$ y $k\in\mathbb{N}$. En efecto, sea $N=\{t\in I : \lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(t)\neq f(t)\}$. Entonces, $\mu(N)=0$ y como $(\varphi_{n_k})_k$ determina f, resulta $\lim_{n\to\infty}||\varphi_{n_k}(t)-f(t)||=0$ para cada $t\in I\setminus N$. Luego, dado $\varepsilon>0$, existe un $k_0\in\mathbb{N}$ tal que: $k\geq k_0 \Rightarrow ||\varphi_{n_k}(t)||\leq ||f(t)||+1$ para todo $t\in I\setminus N$ $(*)$. Ahora definimos

$$E_k=\Big\{t\in I\setminus N : ||\varphi_{n_k}(t)||\leq ||f(t)||+1\Big\} \qquad \text{para cada } k\geq 1.$$

Notemos que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $E_k\subseteq I$ es un conjunto medible, ya que, $||\varphi_{n_k}|| : I\to\mathbb{R}$ es una función simple por (3.3) y, en particular, es medible sobre I. Además, puesto que $f\in\mathcal{B}([0,1],X)$, resulta que la función $||f|| : I\to\mathbb{R}$ también es Bochner integrable sobre I por el Lema 3.3.1 y, en particular, es medible. Luego, la función $||\varphi_{n_k}||-||f|| : I\to\mathbb{R}$ es medible por la Proposición 3.4.2. Por esta razón, cada E_k es un conjunto medible. Asimismo, para cada $k\in\mathbb{N}$, sea $\phi_k : I\to X$ la función definida mediante $\phi_k(t)=\varphi_{n_k}(t)\cdot\chi_{E_k}(t)$, con $t\in I$. Resulta que la sucesión $(\phi_k)_k$ satisface las siguiente propiedades:

- $(\phi_k)_k\subseteq\mathcal{S}([0,1],X)$ por (3.2), ya que, es producto de dos funciones simples.
- Sea $t_0\in I\setminus N$ y $k\geq k_0$, entonces, por la implicación dada en $(*)$, $t_0\in E_k$. De esto se sigue que $\chi_{E_k}(t)=1$. Dado que $t_0\in I\setminus N$ era un elemento, concluimos que

  $$k\geq k_0\Rightarrow \phi_k(t)=\varphi_{n_k}(t)\cdot\chi_{E_k}(t)=\varphi_{n_k}(t) \text{ para todo } t\in I\setminus N.$$

  Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty}||\phi_k(t)-f(t)||=\lim_{k\to\infty}||\varphi_{n_k}(t)-f(t)||=0$ para cada $t\in I\setminus N$. Por un razonamiento parecido al que acabamos de hacer, se demuestra que

  $$k,l\geq k_0\Rightarrow \phi_k(t)=\varphi_{n_k}(t) \text{ y } \phi_l(t)=\varphi_{n_l}(t) \text{ para todo } t\in I\setminus N.$$

  Por esta razón, $\lim_{k,l\to\infty}||\phi_k-\phi_l||_1=\lim_{k,l\to\infty}||\varphi_{n_k}-\varphi_{n_l}||_1=0$. Por consiguiente, $(\phi_k)_k$ también determina f y, por definición, tenemos

  $$\lim_{k\to\infty}\int_I\phi_k=(B)\int_I f=\lim_{k\to\infty}\int_I\varphi_{n_k}$$

- Finalmente, supongamos que $t\in I$. Entonces, t pertenece a E_k para algún $k\in\mathbb{N}$ o t es un elemento de $I\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. Pero, en ambos casos, $||\phi_k(t)||\leq||f(t)||+1$, $k\geq 1$.

Por está razón, podemos suponer que $||\varphi_{n_k}(t)|| \leq ||f(t)||+1$ para cada $t \in I$ y $k \in \mathbb{N}$, ya que, siempre podemos construir otra sucesión $(\phi_k)_k$ que también determina f y que satisface la desigualdad deseada ($||\phi_k(t)|| \leq ||f(t)||+1$ para cada $t \in I$ y $k \in \mathbb{N}$). Estas observaciones se utilizan de manera implícita en la demostración del siguiente teorema. También, en caso de que fuera necesario, el lector puede volver a consultar la definición del concepto de $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ en el capítulo 2, Definición 2.3.1.

Teorema 3.5.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es Bochner integrable. Entonces, f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Además, f es McShane integrable y*

$$(M)\int_I f = (B)\int_I f.$$

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$ y sea $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ una sucesión de L-Cauchy que determina f. Además, sean $\eta \in (0,\varepsilon)$ y el calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ dados por el Lema 3.5.1. También, sea $\alpha \in (0,\eta/2)$. Entonces, por el Lema 3.2.1, existe una subsucesión $(\varphi_{n_k})_k$ de $(\varphi_n)_n$ y un conjunto medible $E \subseteq I$ tal que $\mu(E) < \alpha/2$ y $(\varphi_{n_k})_k$ converge uniformemente hacia f en $I \setminus E$. Por la regularidad de la medida de Lebesgue, existe abierto relativo $G \subseteq I$ de modo que $E \subseteq G$ y $\mu(G) < \mu(E)+\alpha/2 = \alpha$. Ahora definimos un conjunto cerrado de I, en particular compacto, de la siguiente manera: $K = I \setminus G \subseteq I \setminus E$. Por consiguiente,

$$\mu(I \setminus K) = \mu(G) < \alpha. \tag{3.28}$$

Pero, también, sabemos que existe un k_0 con la siguiente propiedad:

$$||\varphi_{n_k}(t) - f(t)|| < \alpha \quad \text{para todo } k \geq k_0 \text{ y } t \in K. \tag{3.29}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n_k} : I \to X$ es una función simple, luego, puede escribirse como

$$\varphi_{n_k} = \sum_{i=1}^{m_k} x_{n_i} \chi_{E_{n_i}}.$$

donde $\{E_{n_1}, \ldots, E_{n_{m_k}}\}$ es una partición medible de I y $x_1, \ldots, x_{n_{m_k}} \in X$. De nuevo, por la regularidad de la medida de Lebesgue, existe un $K_{n_i} \subseteq I$ compacto tal que $K_{n_i} \subseteq E_{n_i}$ y

$$\mu(E_{n_i} \setminus K_{n_i}) < \frac{\eta}{2m_k} \quad \text{para } i = 1,2,\ldots,m_k.$$

Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$, la desigualdad anterior nos permite concluir que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m_k}(E_{n_i} \setminus K_{n_i})\right) \leq \sum_{i=1}^{m_k} \mu(E_{n_i} \setminus K_{n_i}) < \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\eta}{2m_k} = \frac{\eta}{2}. \tag{3.30}$$

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, vamos a definir los siguientes conjuntos:

$$A_{n_i} = K \cap K_{n_i} \subseteq E_{n_i},\ i = 1,2,\ldots,m_k \quad \text{y} \quad A = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} A_{n_i}. \tag{3.31}$$

Observemos que cada A_{n_i} es un compacto por ser intersección de dos compactos y

$$I \setminus A = \bigcup_{i=1}^{m_k} E_{n_i} \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} (K \cap K_{n_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_k} \Big((E_{n_i} \setminus K_{n_i}) \cup (E_{n_i} \setminus K) \Big) = \bigcup_{i=1}^{m_k} (E_{n_i} \setminus K_{n_i}) \cup I \setminus K.$$

De la inclusión anterior y de las desigualdades dadas en (3.30) y (3.28), resulta que

$$\mu(I \setminus A) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m_k} (E_{n_i} \setminus K_{n_i}) \right) + \mu(I \setminus K) < \frac{\eta}{2} + \alpha < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta. \tag{3.32}$$

También, notemos que $A_{n_i} \cap A_{n_j} \subseteq E_{n_i} \cap E_{n_j}$. Luego, $A_{n_i} \cap A_{n_j} = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Además, para cada $i = 1,2,\ldots,m_k$, puesto que A_{n_i} es compacto, entonces, existe un $\rho > 0$ tal que

$$d(A_{n_i}, A_{n_i}) = \text{ínf}\{|t-s| : t \in A_{n_i}, s \in A_{n_i}\} > \rho \quad \text{siempre que } i \neq j. \tag{3.33}$$

Ahora elegimos un calibre $\gamma' : I \to \mathcal{O}$ que satisface las dos siguientes condiciones:

$$\gamma'(t) \subseteq \gamma(t) \cap \left(t - \frac{\rho}{2}, t + \frac{\rho}{2} \right) \quad \text{si } t \in I \quad \text{y} \quad \gamma'(t) \cap I \subseteq I \setminus A \quad \text{si } t \in I \setminus A.$$

Observemos que podemos exigir la segunda condición de las condiciones anteriores sobre el calibre γ', ya que, el conjunto $I \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} A_{n_i} = \bigcap_{i=1}^{m_k} (I \setminus A_{n_i})$ es un abierto de I por ser una intersección finita de abiertos de I. Ahora veamos que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. En efecto, sean $\mathcal{P}_1 = \{(t_s, I_s) : s = 1,2,\ldots,p\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(u_l, J_l) : l = 1,2,\ldots,q\}$ dos M-particiones de I subordinadas a γ'. Además, definimos el siguiente conjunto:

$$M = \{(s,l) : 1 \leq s \leq p, 1 \leq l \leq q\}.$$

Observemos que M puede escribirse como una unión de los siguientes dos conjuntos:

$$M_1 = \Big\{ (s,l) \in M : (t_s, u_l) \in A \Big\} \quad \text{y} \quad M_2 = \Big\{ (s,l) \in M : t_s \in I \setminus A \text{ o } u_l \in I \setminus A \Big\}.$$

Afirmamos que si $(s,l) \in M_1$ y $I_s \cap J_l \neq \emptyset$, entonces, $|t_s - u_l| < \rho$. Para ver esto, supongamos que $(s,l) \in M_1$. Entonces, por definición del calibre γ', tenemos

$$I_s \subseteq \gamma'(t_s) \subseteq \left(t_s - \frac{\rho}{2}, t_s + \frac{\rho}{2} \right) \quad \text{y} \quad J_l \subseteq \gamma'(u_l) \subseteq \left(u_l - \frac{\rho}{2}, u_l + \frac{\rho}{2} \right).$$

De esto se sigue que si $a \in I_s \cap J_j$, entonces, $|t_s - a| < \rho/2$ y $|a - u_l| < \rho/2$. Luego,

$$|t_s - u_l| \leq |t_s - a| + |a - u_l| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

Nuestra afirmación ha sido demostrada. Además, si $(s,l) \in M_1$, entonces, existe un único r perteneciente al conjunto $\{1,2,\ldots,m_k\}$ de manera que t_s, u_l pertenecen al conjunto A_{n_r} y la razón es: si $t_s \in A_{n_i}$ y $u_l \in A_{n_j}$ con $i \neq j$, resulta que $|t_s - u_l| \geq d(A_{n_i}, A_{n_j}) > \rho$, por (3.33). Esto contradice lo que acabamos de probar y nos permite deducir que

$$\varphi_{n_k}(t_s) = \varphi_{n_k}(u_l) \quad \text{siempre que } (s,l) \in M_1, \tag{3.34}$$

ya que, $A_{n_r} \subseteq E_{n_r}$ por (3.31). Además, de (3.31) y (3.29), resulta que $A_{n_r} \subseteq K$ y, por ende,

$$||\varphi_{n_k}(t) - f(t)|| < \alpha \quad \text{para todo } t \in A_{n_r} \subseteq K \text{ con } r \in \{1,2,\ldots m_k\} \text{ con si } k \geq k_0. \tag{3.35}$$

Teniendo en cuenta las desigualdades dades en (3.34) y (3.35), deducimos que

$$\begin{aligned} ||f(t_s) - f(u_l)|| &\leq ||f(t_s) - \varphi_{n_{k_0}}(t_s)|| + ||\varphi_{n_{k_0}}(t_s) - f(u_l)|| \\ &= ||f(t) - \varphi_{n_{k_0}}(t_s)|| + ||\varphi_{n_{k_0}}(u_l) - f(u_l)|| \\ &< 2\alpha. \end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que si $(s,l) \in M_1$, entonces $||f(t_s) - f(u_l)|| < 2\alpha$. También, notemos que los elementos de $\{I_s \cap J_l : (t_s, u_l) \in M_1\}$ no se solapan entre si. Por lo tanto,

$$\sum_{(s,l)\in M_1} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) < 2\alpha\mu\left(\bigcup_{(s,l)\in M_1} (I_s \cap J_l)\right) \leq 2\alpha\mu(I) = 2\alpha. \tag{3.36}$$

Ahora veamos el caso cuando $(s,l) \in M_2$. Evidentemente, tenemos que

$$I_s \subseteq \gamma'(t_s) \cap I \quad \text{y} \quad J_l \subseteq \gamma'(u_l) \cap I,$$

ya que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ están subordinadas a γ'. Por consiguiente, por la definición de γ', tenemos

$$I_s \cap J_l \subseteq I_s \subseteq \gamma'(t_s) \cap I \subseteq I \setminus A \quad \text{o} \quad I_s \cap J_l \subseteq J_l \subseteq \gamma'(u_l) \cap I \subseteq I \setminus A$$

siempre que $(s,l) \in M_2$. En ambos casos llegamos a la misma conclusión, es decir,

$$\bigcup_{(s,l)\in M_2} (I_s \cap J_l) \subseteq I \setminus A.$$

Puesto que los elementos de $\{I_s \cap J_l : (t_s, u_l) \in M_2\}$ no se solapan entre si, resulta que

$$\mu\left(\bigcup_{(s,l)\in M_2} (I_s \cap J_l)\right) = \sum_{(s,l)\in M_2} \mu(I_s \cap J_j) \leq \mu(I \setminus A) < \eta,$$

(3.32) justifica la desigualdad anterior. Ahora observemos que las dos colecciones

$$\mathcal{S}_1 = \{(u_l, I_s \cap J_l) : (s,l) \in M_2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_2 = \{(t_s, I_s \cap J_l) : (s,l) \in M_2\}$$

de pares ordenados son M-sistemas en I subordinados a γ, ya que, están subordinado a γ'. Además, Puesto $\gamma : I \to \mathcal{O}$ y $\eta \in (0,\varepsilon)$ vienen dados por el Lema 3.5.1, resulta que

$$\sum_{(s,l)\in M_2} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) \leq ||f||(\mathcal{S}_1) + ||f||(\mathcal{S}_2) < 2\varepsilon. \tag{3.37}$$

Por consiguiente, de las estimaciones dadas en (3.36) y (3.37), se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) &= \sum_{(s,l)\in M} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) \\ &= \sum_{(s,l)\in M_1} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) \\ &+ \sum_{(s,l)\in M_2} ||f(t_s) - f(u_l)||\mu(I_s \cap J_l) < 2\alpha + 2\varepsilon < 4\varepsilon\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Esto muestra que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Por consiguiente, de la Proposición 2.3.2 se sigue que f es McShane integrable sobre I y y finalizaría la demostración de la primera parte del teorema. Ahora veamos que la integral de McShane de f coincide con la de Bochner de f sobre I. En efecto, puesto que

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left| \int_I \varphi_{n_k} - (B)\int_I f \right|\right| = 0,$$

entonces, podemos deducir que existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ de manera que

$$k \geq k_1 \Rightarrow \left|\left| \int_I \varphi_{n_k} - (B)\int_I f \right|\right| < \varepsilon. \tag{3.38}$$

Además, se sigue del Teorema 3.5.1 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n_k} \in \mathcal{M}([0,1])$ y

$$(M)\int_I \varphi_{n_k} = (B)\int_I \varphi_{n_k}.$$

Por esta razón, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un calibre $\gamma_k : I \to \mathcal{O}$ tal que

$$\left|\left| \varphi_{n_k}(\mathcal{P}) - (B)\int_I \varphi_{n_k} \right|\right| < \varepsilon \tag{3.39}$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ_k. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea el calibre $\gamma_k' : I \to \mathcal{O}$ definida por $\gamma_k'(t) = \gamma'(t) \cap \gamma_k$. Observemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, cualquier

M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ'_k está subordinada a, γ_k, γ' y, en particular, a γ. Por el Lema 2.1.1, sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, p\}$ una M-partición cualquiera de I subordinada a γ'_{k_2} y donde $k_2 = \text{máx}(k_0, k_1)$. Por tanto, de (3.38) y (3.39) se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\left|f(\mathcal{P}) - (B)\int_I f\right|\right| &\leq ||f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P})|| + \left|\left|\varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P}) - (\mathcal{B})\int_I \varphi_{n_{k_2}}\right|\right| \\ &+ \left|\left|(B)\int_I \varphi_{n_{k_2}} - (B)\int_I f\right|\right| \\ &< ||f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P})|| + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Por consiguiente, la cadena de desigualdades anteriores nos permite concluir que

$$\left|\left|f(\mathcal{P}) - (B)\int_I f\right|\right| < ||f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P})|| + 2\varepsilon. \tag{3.40}$$

Una vez establecida la desigualdad anterior, ahora vamos a ocuparnos del primer término del lado derecha de dicha desigualdad. Para ello, empezamos, primeramente, notando que

$$\begin{aligned}f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in A}}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i).\end{aligned}$$

Consiguientemente, las propiedades de la norma $||.||$ nos permiten deducir que

$$||f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P})|| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in A}}^{p} ||f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i)||\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} ||f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i)||\mu(I_i). \tag{3.41}$$

Ahora vamos a estimar cada una de las sumas del lado derecho de la desigualdad anterior.

- Sea $t_i \in I \setminus A$. Entonces, por definición de γ', $I_i = I_i \cap I \subseteq \gamma'(t_i) \cap I \subseteq I \setminus A$. Por tanto,

$$\bigcup_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} I_i \subseteq I \setminus A.$$

  Además, teniendo en cuenta que los I_i no se solapan entre si y (3.32), tenemos

$$\sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} \mu(I_i) = \mu\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} I_i\right) \leq \mu(I \setminus A) < \eta.$$

Notemos que la colección $\{(t_i, I_i) : t_i \in I \setminus A\}$ es un M-sistema en I subordinada a γ. Luego, estamos en condiciones de invocar el Lema 3.5.1 que viene a decirnos que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} ||f(t_i)||\mu(I_i) < \varepsilon.$$

También, podemos suponer, y así lo haremos, que $||\varphi_{n_k}(t)|| \leq ||f(t)|| + 1$ para cada t perteneciente al intervalo I. Luego, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}\left|\left| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i) \right|\right| &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} ||f(t_i)||\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} ||\varphi_{n_{k_2}}(t_i)||\mu(I_i) \\ &\leq 2 \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} ||f(t_i)||\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} \mu(I_i) < 2\varepsilon + \eta\end{aligned}$$

En consecuencia, la cadena de desigualdades anterior nos permite concluir que

$$\left|\left| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in I \setminus A}}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i) \right|\right| < 2\varepsilon + \eta. \tag{3.42}$$

- Ahora Sea $t_i \in A$, entonces, existe un $r \in \{1, 2, \dots, m_{k_2}\}$ tal que $t_i \in A_{n_r}$. Por lo tanto, por la desigualdad dada (3.35), resulta que $||\varphi_{n_{k_2}}(t) - f(t)|| < \alpha$. Por ende,

$$\left|\left| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in A}}^{p} (f(t_i) - \varphi_{n_{k_2}}(t_i))\mu(I_i) \right|\right| \leq \alpha \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in A}}^{p} \mu(I_i) \leq \alpha \sum_{i=1}^{p} \mu(I_i) = \alpha\mu(I) = \alpha. \tag{3.43}$$

Las estimaciones obtenidas en (3.43) y (3.42) convierten (3.41) en

$$||f(\mathcal{P}) - \varphi_{n_{k_2}}(\mathcal{P})|| \leq \alpha + (2\varepsilon + \eta). \tag{3.44}$$

Igualmente, las estimaciones dadas en (3.44) y (3.40) hacen que (3.40) se transforme en

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (B)\int_I f \right|\right| < \alpha + (2\varepsilon + \eta) + 2\varepsilon < 6\varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ'_{k_2} y $\varepsilon > 0$. Esto termina la prueba. □

En resumen, hemos demostrado que si X es un espacio de Banach arbitrario, entonces, una función $f : I \to X$ es Bochner integrable sobre I implica que tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ y, como consecuencia, es McShane integrable sobre I. Ahora nuestro objetivo es probar que, en realidad, todas las funciones que tienen la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ son Bochner integrables. De ahí la importancia del siguiente lema.

Lema 3.5.2. *Supongamos que $f : I \to X$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left| f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} f \right|\right| < \varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ de I subordinada a γ.

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Puesto que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.45}$$

siempre que $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ y $\mathcal{D} = \{(s_j, J_j) : j = 1,2,\ldots,m\}$ sean dos M-particiones de I subordinadas a γ. Por el Lema 2.1.1, sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ una M-partición de I subordinada a γ. Además, por la Proposición 2.3.2, $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$ y, como consecuencia, f es McShane integrable sobre I_i, para cada $i = 1,2,\ldots,n$ por la Proposición 2.1.4. Luego, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, existe un calibre $\gamma_i : I \to \mathcal{O}$ tal que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}_i) - (M)\int_{I_i} f \right|\right| < \varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}_i = \{\left(l_j^i, L_j^i\right) : j = 1,2,\ldots,k_i\}$ de I_i subordinada a γ_i. Ahora sea $\gamma' : I \to \mathcal{O}$ el calibre definido por $\gamma'(t) = \gamma(t) \cap \gamma_1(t) \cap \cdots \gamma_n(t)$. Asimismo, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, dado que $\gamma'\big|_J$ es un calibre sobre I_i, entonces, por el Lema 2.1.1, podemos encontrar una M-partición $\mathcal{P}_i = \{\left(l_j^i, L_j^i\right) : j = 1,2,\ldots,k_i\}$ de I_i subordinada a γ' tal que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}_i) - (M)\int_{I_i} f \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{para cada } i = 1,2,\ldots,n.$$

Una aplicación de la Proposición 2.1.5 nos permite escribir la siguiente igualdad:

$$(M)\int_{I_i} f = \sum_{j=1}^{k_i} (M)\int_{I_i \cap L_j^i} f, \quad \text{para cada } i = 1,2,\ldots,n,$$

ya que, $I_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} \left(I_i \cap L_j^i\right)$. Como consecuencia de esto, resulta que

$$\left|\left| f(\mathcal{P}_i) - (M)\int_{I_i} f \right|\right| = \left|\left| \sum_{j=1}^{k_i} \left(f(l_j^i)\mu(I_i \cap L_j^i) - (M)\int_{I_i \cap L_j^i} f \right) \right|\right| < \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{3.46}$$

para cada $i = 1,2,\ldots,n$. Además, dado que $I_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} \left(I_i \cap L_j^i\right)$, entonces, resulta que

$$f(t_i)\mu(I_i) = \sum_{j=1}^{k_i} f(t_i)\mu(I_i \cap L_j^i) \quad \text{para cada } i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.47}$$

Por consiguiente, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, de (3.47) y (3.46) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} f\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{k_i} f(t_i)\mu(I_i \cap L_j^i) - \sum_{j=1}^{k_i}(M)\int_{I_i\cap L_j^i} f\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^{k_i}\big(f(t_i) - f(l_j^i)\big)\mu(I_i \cap L_j^i)\right\| \\
&\quad + \left\|\sum_{j=1}^{k_i}\left(f(l_j^i))\mu\big(I_i \cap L_j^i\big) - (M)\int_{I_i\cap L_j^i} f\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Puesto que la desigualdad anterior es válida para cada $i = 1,2,\ldots n$, entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\|f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} f\right\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{k_i}\big(f(t_i) - f(l_j^i)\big)\mu(I_i \cap L_j^i)\right\| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{k_i}\left(f(l_j^i))\mu\big(I_i \cap L_j^i\big) - (M)\int_{I_i\cap L_j^i} f\right)\right\|.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Ahora vamos a estimar cada una de las sumas del derecho derecho de la desigualdad anterior. Para empezar, notemos que $\{\left(l_j^p, L_j^p\right) : j = 1,2,\ldots,k_p, p = 1,2,\ldots,n\}$ es una M-partición de I subordinada a γ, ya que está subordinada a γ'. También, observemos que, para cada $j = 1,2,\ldots,k_p$, $I_i \cap L_j^p$ es el conjunto vacío o un conjunto unitario para todo $p \neq i$. Además, teniendo en cuenta la desigualdad dada en (3.45), tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} ||f(t_i) - f(l_j^i)||\mu(I_i \cap L_j^i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_p} ||f(t_i) - f(l_j^p)||\mu(I_i \cap L_j^p)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La desigualdad anterior nos permite concluir que

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{k_i}\big(f(t_i) - f(l_j^i)\big)\mu(I_i \cap L_j^i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} ||f(t_i) - f(l_j^i)||\mu(I_i \cap L_j^i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Asimismo, por la desigualdad dada en (3.46), tenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|\sum_{j=1}^{k_i}\left(f(l_j^i)\mu(I_i \cap L_j^i) - (M)\int_{I_i\cap L_j^i} f\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De las dos últimas desigualdades y la desigualdad dada en (3.48) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left| f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} f \right|\right| < \varepsilon.$$

Esto termina la prueba, ya que $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ eran arbitrarios. $\square$

Observemos que si $(w_n)_n$ es una sucesión de calibres sobre I, entonces, se puede construir a partir de ella otra sucesión $(\gamma_n)_n$ de calibre sobre el mismo intervalo de la siguiente manera: $n \in \mathbb{N}$, sea $\gamma_n : I \to \mathcal{O}$ el calibre definido mediante

$$\gamma_n(t) = w_t(t) \cap w_2(t) \cap \ldots \cap w_n(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}, \gamma_{n+1}(t) \subseteq \gamma_n(t)$ para todo $t \in I$. Esta observación la utilizaremos de forma implícita en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 3.5.3. *Si $f : I \to X$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$.*

Demostración. Puesto que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, por la Proposición 2.3.2, f es McShane integrable sobre I. De esto se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un calibre $\gamma_n : I \to \mathcal{O}$ y una partición $\mathcal{P}_n$ de I subordinada a γ_n con la siguiente propiedad:

$$\left|\left| f(\mathcal{P}_n) - (M)\int_I f \right|\right| < \frac{1}{2^n}.$$

Además, Puesto f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, resulta que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)||\mu(I_i \cap J_j) < \frac{1}{2^n} \tag{3.49}$$

siempre que $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ sean dos M-particiones de I subordinadas a γ_n. Notemos que podemos suponer ,y así lo haremos, que $\gamma_{n+1}(t) \subseteq \gamma_n(t)$ para todo t perteneciente al intervalo I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\mathcal{P}_n = \{(t_i^n, I_i^n) : i = 1, 2, \ldots, k_n\}$$

una M-partición de I subordinada a γ_n sea $\varphi_n : I \to X$ definida mediante

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} f(t_i^n) & \text{si } t \in int(I_i^n), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Evidentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\varphi_n : I \to X$ que acabamos de definir es una función simple. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer y, así lo haremos, que los intervalos de la colección $\mathcal{C} = \{I_i^n \cap I_j^{n+1} : 1 \leq i \leq k_n, 1 \leq j \leq k_{n+1}\}$ son no-degenerados, ya que, si hubiese algún intervalo degenerado lo podemos eliminar de de la colección. Usando esos intervalos, podemos formar un par de M-particiones de I como sigue:

$$\mathcal{P}'_n = \{(t_i^n, I_i^n \cap I_j^{n+1}) : 1 \leq i \leq k_n, 1 \leq j \leq k_{n+1}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \{(t_j^{n+1}, I_i^n \cap I_j^{n+1}) : 1 \leq i \leq k_n, 1 \leq j \leq k_{n+1}\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tanto $\mathcal{P}'_n$ como $\mathcal{P}'_{n+1}$ están subordinadas γ_n, ya que, $\gamma_{n+1}(t) \subseteq \gamma_n(t)$ para todo t perteneciente al intervalo. Por tanto,

$$\begin{aligned}||\varphi_{n+1} - \varphi_n||_1 &= \int_I ||\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|| = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{k_{n+1}} ||\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)|| \mu\left(I_i^n \cap J_j^{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{k_{n+1}} ||f(t_i^{n+1}) - f(t_j^n)|| \mu\left(I_i^n \cap J_j^{n+1}\right) < \frac{1}{2^n},\ n \geq 1.\end{aligned}$$

por (3.49). Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{r=1}^{\infty} 1/2^r$ es convergente, entonces, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{r=N}^{\infty} \frac{1}{2^r} < \varepsilon. \tag{3.50}$$

Ahora sean $n, m \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m < n$. Entonces,

$$\begin{aligned}||\varphi_n - \varphi_m||_1 &\leq ||\varphi_{m+1} - \varphi_m||_1 + ||\varphi_{m+2} - \varphi_{m+1}||_1 + \cdots + ||\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}||_1 + ||\varphi_n - \varphi_{n-1}||_1 \\ &\leq \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq \sum_{r=N}^{\infty} \frac{1}{2^r} < \varepsilon\end{aligned}$$

si $n > m \geq N$ por (3.50). Esto demuestra que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy. Por lo tanto, por el Lema 3.2.1, $(\varphi_n)_n$ tiene una subsucesión $(\varphi_p)_p \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ que converge puntualmente en casi todo punto hacia una función $g : I \to X$. Además, $(\varphi_p)_p$ es una sucesión de L-Cauchy, ya que, lo es $(\varphi_n)_n$. Luego, $(\varphi_p)_p$ determina g y, por lo tanto, $g \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Ahora sea $J \subseteq I$ un intervalo compacto. Sabemos que $(\varphi_p \cdot \chi_J)_p \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy que determina $g \cdot \chi_J$. Por consiguiente, $g \cdot \chi_J \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$(B)\int_J g = (B)\int_I g \cdot \chi_J = \lim_{p\to\infty} (B)\int_I \varphi_p \cdot \chi_J = \lim_{p\to\infty} (M)\int_I \varphi_p \cdot \chi_J = \lim_{p\to\infty} (M)\int_J \varphi_p.$$

El Teorema 3.5.1 justifica la tercera igualdad de las anteriores, mientras que el resto de las igualdades es por definición. De esta cadena de igualdades concluimos que

$$(B)\int_I g \cdot \chi_J = \lim_{p\to\infty} (M)\int_J \varphi_p = (B)\int_J g. \tag{3.51}$$

Además, teniendo en cuenta el Teorema 3.5.2 podemos concluir que

$$(B)\int_I g\cdot\chi_J = (M)\int_I g\cdot\chi_J. \tag{3.52}$$

Luego, (3.52) y (3.51) justifican las dos últimas igualdades de las siguientes igualdades:

$$(M)\int_J g = (M)\int_I g\cdot\chi_J = (B)\int_I g\cdot\chi_J = \lim_{p\to\infty}(M)\int_J \varphi_p.$$

La cadenas de igualdades anterior nos permite concluir que

$$\lim_{p\to\infty}(M)\int_J \varphi_p = (M)\int_J g. \tag{3.53}$$

Además, por Teorema 3.5.1, resulta que $\varphi_p\cdot\chi_J$ es McShane integrable sobre I y

$$(M)\int_J \varphi_p = (M)\int_I \varphi_p\cdot\chi_J = (B)\int_I \varphi_p\cdot\chi_J = \sum_{i=1}^{k} f(t_i^p)\mu(J\cap I_i^p), \quad p\geq 1.$$

Ahora puesto que, para cada $p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}=\{(t_i^p, J\cap I_i^p) : i=1,2,\ldots,k\}$ es un M-sistema en I subordinada a γ_p, entonces, por el Lema de Saks-Henstock, Lema 2.1.2, concluimos que

$$\left|\left|(M)\int_J \varphi_p - (M)\int_J f\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{k}\left(f(t_i^p)\mu(J\cap I_i^p) - (M)\int_{J\cap I_i^p} f\right)\right|\right| < \frac{1}{2^p}, \quad p\geq 1$$

ya que, $J=\bigcup_{i=1}^k J\cap I_i^p$ y $\varphi_p\chi_J\in\mathcal{M}([0,1])$. Asimismo, como $||.||$ es continua, entonces,

$$\lim_{p\to\infty}(M)\int_J \varphi_p = (M)\int_J f. \tag{3.54}$$

De las igualdades dadas, (3.53), (3.54) y la Proposición 2.1.3 deducimos que

$$(M)\int_J (f-g) = 0. \tag{3.55}$$

donde $J\subseteq I$ es intervalo compacto arbitrario. Dado que $g\in\mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, por el Teorema 3.5.2, g tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Luego, f y g tienen la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. Afirmamos que, $f-g$ también tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$. En efecto, puesto que f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, existe un calibre $\gamma_f : I\to\mathcal{O}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} ||f(t_i)-f(s_j)||\mu(I_i\cap J_j) < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ sean dos M-particiones del intervalo I subordinadas a γ_f. De manera similar, dado que g tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, entonces, existe un calibre $\gamma_g : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} ||g(t_i) - g(s_j)|| \mu(I_i \cap J_j) < \varepsilon$$

siempre que $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ sean dos M-particiones del intervalo I subordinadas a γ_f. Ahora sea el calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ dada por

$$\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t).$$

Si $\mathcal{P}_1 = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{(s_j, J_j) : i = 1, 2, \ldots, m\}$ son dos M-particiones de I subordinada γ, entonces, están subordinadas tanto a γ_f así como γ_g. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} ||(f-g)(t_i) - (f-g)(s_j)|| \mu(I_i \cap J_j) &\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} ||f(t_i) - f(s_j)|| \mu(I_i \cap J_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} ||g(t_i) - g(s_j)|| \mu(I_i \cap J_j)|| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Esto prueba que $f - g$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$ y nuestra afirmación ha sido demostrada. Además, por el Corolario 2.3.1, la función $||f - g|| : I \to \mathbb{R}$ es McShane integrable sobre I. Por consiguiente, por el Teorema 2.2.2, la función $||f - g||$ es Lebesgue integrable sobre I y, en particular, es medible sobre I. Ahora afirmamos que $f = g$ en casi todo punto. Para ver esto, procedemos por reducción suponiendo que existe un conjunto medible $E \subseteq I$ tal que $\mu(E) > 0$ y $f(t) \neq g(t)$ para todo $t \in E$. Puesto que la función $||f - g||$ es medible sobre I, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el siguiente conjunto

$$E_n = \{t \in E : n - 1 < ||f(t) - g(t)|| \leq n\}$$

es conjunto medible. Además, notemos que si $n \neq m$, entonces,

$$[n-1, n) \cap [m-1, m) = \emptyset$$

y, como consecuencia, $E_n \cap E_m = \emptyset$. Asimismo, si $t \in E$, entonces $||f(t) - g(t)|| \in (0, +\infty)$. Por esto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_0 - 1 \leq ||f(t) - g(t)|| < n_0$. De esto se sigue que $t \in E_{n_0}$. Por consiguiente, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. También, evidentemente, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E$. Luego,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad \mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) > 0.$$

Por esta razón, existe un $\kappa \in \mathbb{N}$ y un conjunto $E_\kappa \subseteq E$ medible tal que $\mu(E_\kappa) > 0$. Pero, puesto que $E_\kappa \subseteq E$, entonces, $||f(t) - g(t)|| > 0$ para todo $t \in E_\kappa$. Además, como

$$\kappa \geq ||f(t) - g(t)|| \quad \text{para todo } t \in E_\kappa,$$

entonces $\kappa > 0$. También, por la regularidad de la medida de Lebesgue existe un conjunto compacto $F \subseteq E_\kappa$ de manera que $\mu(F) > 0$. Ahora ya estamos en condiciones de invocar el Lema 3.5.2. En efecto, Puesto que $f - g$ tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$, se sigue del Lema 3.5.2 que existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de tal manera que

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\left|(f(t_i) - g(t_i))\mu(J_j) - (M)\int_{I_i} f - g\right|\right| < \kappa\mu(F) \tag{3.56}$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ de I subordinada a γ. Sea

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \text{ si } t \in I \quad \text{y} \quad \gamma'(t) \cap I \subseteq \gamma(t) \cap I \setminus F \text{ si } t \in I \setminus F.$$

Esta segunda condición la podemos establecer porque $I \setminus F$ es abierto. Ahora, por el Lema 2.1.1, sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ una M-partición de I subordinada a γ'. Notemos que si $t_i \in I \setminus F$, entonces, $I_i \subseteq \gamma'(t_i) \subseteq I \setminus F$. Por esto, $\bigcup_{t_i \in I \setminus F} I_i \subseteq I \setminus F$. Como consecuencia,

$$F \subseteq \bigcup_{t_i \in F} I_i. \tag{3.57}$$

Además, por la igualdad dada en (3.55), para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos

$$(M)\int_{I_i} f - g = 0.$$

Por esto último y (3.56) concluimos que $||f - g||(\mathcal{P}) < \kappa\mu(F)$. Además, teniendo en cuenta que $||f(t) - g(t)|| \geq \kappa$ para cada $t \in F \subseteq E_\kappa$ y la inclusión dada en (3.57), entonces,

$$\kappa\mu(F) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in F}}^{n} ||f(t_i) - g(t_i)||\mu(I_i) \leq ||f - g||(\mathcal{P}) < \kappa\mu(F)$$

que es una contradicción. Esta contradicción establece que $f = g$ en casi todo punto. Puesto que $g \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, el Corolario 3.3.2 nos dice que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$(B)\int_I g = (B)\int_I f.$$

La prueba es completa. $\square$

El siguiente resultado, que en realidad es una caracterización de las funciones Bochner integrables, es una consecuencia inmediata del Teorema 3.5.2 y de la Proposición 3.5.3.

Teorema 3.5.4. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función cualquiera. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$.

(II) *f tiene la propiedad $\mathcal{S}^*\mathcal{M}$*

Además, cuando $X = \mathbb{R}$, los Teoremas 2.3.3 y 3.5.4 nos proporcionan la equivalencia la integral de McShane y la de Bochner.

Teorema 3.5.5. *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$.

(II) $f \in \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$.

También, por el Teorema 3.5.2, para cada función $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$,

$$(M)\int_I f = (B)\int_I f.$$

Finalmente, los Teoremas 2.2.2 y 3.5.5 se sigue el siguiente resultado.

Teorema 3.5.6. *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$.

(II) $f \in \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$.

Además, para cada función $f \in \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$,

$$(L)\int_I f = (B)\int_I f.$$

Sin embargo, el resultado principal de esta sección es el siguiente teorema que vamos a enunciar a continuación y que es una consecuencia directa del Teorema 3.5.2.

Teorema 3.5.7. *Supongamos que $f : I \to X$ es Bochner integrable sobre I, entonces, f es McShane integrable sobre I, es decir, $\mathcal{B}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ y, además,*

$$(M)\int_I f = (B)\int_I f.$$

La inclusión dada en el Teorema 3.5.7, en realidad, es estricta. En la última sección de este capítulo ofreceremos al lector una demostración de este hecho.

3.6. Más propiedades sobre la integral de Bochner

El objetivo de esta sección es dar unas condiciones suficientes para que una función definida como el límite de una sucesión de funciones simples sea Bochner integrable. También, hemos probado que el hecho de que una función sea Bochner integrable es equivalente a que dicha función sea medible y su norma sea Bochner integrable. Esto último es equivalente a que dicha función sea medible y su norma sea integrable Lebesgue.

Lema 3.6.1. *Supongamos que la función $f : I \to X$ viene definida mediante*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t),$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_n \in X$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$. Entonces, f es Bochner integrable sobre I si $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n) < +\infty$. Además,

$$(B)\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n) \quad y \quad ||f||_1 = (B)\int_I ||f|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n).$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : I \to X$ la función definida mediante

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Observemos, en primer lugar, que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ y

$$\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(t) - f(t)|| = 0 \quad \text{para todo } t \in I. \tag{3.58}$$

Para que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$, sólo falta por probar que $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es de L-Cauchy. Para ello, sean $n,m \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq n$. Entonces,

$$||\varphi_n - \varphi_m|| = \left|\left| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \chi_{E_k} \right|\right| = \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k|| \chi_{E_k}.$$

Por consiguiente, esta cadena de igualdades nos permite deducir que

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 = \int_I ||\varphi_n - \varphi_m|| = \int_I \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k|| \chi_{E_k} = \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k|| \mu(E_k). \tag{3.59}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n) < +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n|| \chi_{E_n} < \varepsilon.$$

Luego, si $n \geq m \geq N$, teniendo en cuenta la cadena de igualdades dada (3.59), resulta que

$$||\varphi_n - \varphi_m||_1 = \sum_{k=m+1}^{n} ||x_k||\mu(E_k) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n) < \varepsilon.$$

Por esta razón, $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ es una sucesión de L-Cauchy. De esto último y (3.58), deducimos que $(\varphi_n)_n$ determina f y, por definición,

$$(B)\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int_I \sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\mu(\chi_{E_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n).$$

Finalmente, del Lema 3.3.1 y de la definición de la integral de funciones simples, tenemos

$$\begin{aligned}||f||_1 = (B)\int_I ||f|| = \lim_{n\to\infty}\int_I ||\varphi_n|| = \lim_{n\to\infty}\int_I \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k}\right|\right| = \lim_{n\to\infty}\int_I \sum_{k=1}^{n} ||x_k||\mu(E_k)\\ = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ||x_k||\mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n).\end{aligned}$$

La demostración es completa. □

Corolario 3.6.1. *Supongamos que una función $f : I \to X$ viene definida mediante*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\chi_{E_n}(t),$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_n \in X$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$. Si $g \in \mathcal{B}([0,1],X)$ tal que $||f(t)|| \leq g(t)$ en casi todo $t \in I$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n) < +\infty$ y, como consecuencia, f es Bochner integrable sobre I y

$$(B)\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n) \quad y \quad ||f||_1 = (B)\int_I ||f|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n).$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : I \to X$ la función definida mediante

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k}(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Empezamos, en primer lugar, observando que $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f(t)$ en X para todo $t \in I$ y

$$||\varphi_n(t)|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{E_k}(t)\right|\right| = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||\chi_{E_k}(t) \quad \text{para cada } t \in I \text{ y } n \geq 1.$$

Además, por la continuidad de la norma $||.||$, para todo $t \in I$, tenemos

$$||f|| = \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t) \right|\right| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \chi_{E_n}(t).$$

Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $||\varphi_n|| \leq ||f|| \leq g$, es decir,

$$||\varphi_n|| \leq g \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Por (3.3), para cada $n \in \mathbb{N}$, $||\varphi_n|| : I \to \mathbb{R}$ es una función simple y, en particular, es Bochner integrable sobre I. Por consiguiente, por la Proposición 3.3.7 y (3.60), tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} ||x_k|| \mu(E_k) = (B) \int_I ||\varphi_n|| \leq (B) \int_I g < +\infty \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \mu(E_n) < +\infty$. Luego, una llamada al Lema 3.6.1 completa la prueba. □

Proposición 3.6.1. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función. Entonces, f es Bochner integrable si, y solamente si, f es medible y $||f|| : I \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable.*

Demostración. Supongamos que f es Bochner integrable. Entonces, por definición, f es medible y, por el Lema 3.3.1, $||f|| : I \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable.
Recíprocamente, supongamos que f es medible y $||f|| : I \to \mathbb{R}$ es Bochner integrable. Puesto que f es medible, entonces, por la Proposición 3.4.7, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una función medible $f_k : I \to X$ definida mediante

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{k,n} \chi_{E_{k,n}}(t)$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_{n,k} \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_{n,k} \in X$, $E_{n,k} \cap E_{m,k} = \emptyset$ para cada $n \neq m$ y existe un conjunto $N \subseteq I$ de medida nula tal que

$$||f(t) - f_k(t)|| < \frac{1}{2k} \quad \text{para cada } t \in I \setminus N. \tag{3.61}$$

Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$, por la desigualdad triangular de la norma $||.||$, tenemos

$$||f_k(t)|| \leq ||f(t)|| + ||f(t) - f_k(t)|| < ||f(t)|| + \frac{1}{2k} \quad \text{para cada } t \in I \setminus N.$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que $||f||, 1/2k \in \mathcal{B}([0,1], X)$, entonces, resulta que

$$g := ||f|| + 1/2k \in \mathcal{B}([0,1], X)$$

por la Proposición 3.3.1. Por consiguiente, por el Corolario 3.6.1, $f_k \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$||f_k||_1 = (B)\int_I ||f_k|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_{k,n}||\mu(E_{k,n}) < +\infty$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como consecuencia, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_k+1}^{\infty} ||x_{k,n}||\mu(E_{k,n}) < \frac{1}{2k}. \tag{3.62}$$

Puesto que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $f, f_k \in \mathcal{B}([0,1],X)$, entonces, $f - f_k$ es Bochner integrable sobre I por la Proposición 3.3.1 y, como consecuencia, $||f - f_k|| : I \to \mathbb{R}$ también es Bochner integrable sobre I por el Lema 3.3.1. Además, teniendo en cuenta la desigualdad dada en (3.61) y la Proposición 3.3.7, resulta que

$$||f - f_k||_1 = (B)\int_I ||f - f_k|| < \frac{1}{2k}\mu(I) = \frac{1}{2k} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{3.63}$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_k : I \to X$ la función definida mediante

$$\varphi_k(t) = \sum_{n=1}^{N_k} x_{k,n}\chi_{E_{k,n}}(t).$$

observemos que $(\varphi_k)_k \subseteq \mathcal{S}([0,1],X)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes igualdades:

$$f_k = \varphi_k + \sum_{n=N_k+1}^{\infty} x_{k,n}\chi_{E_{k,n}} \quad \text{y}$$

$$\left|\left| \sum_{n=N_k+1}^{m} x_{k,n}\chi_{E_{k,n}} \right|\right| = \sum_{n=N_k+1}^{m} ||x_{k,n}||\chi_{E_{k,n}}, \; m \geq N_k + 1. \tag{3.64}$$

Por consiguiente, la continuidad de la seminorma $||.||_1$ y (3.62) nos permiten concluir que

$$||f_k - \varphi_k||_1 = \sum_{n=N_{k+1}}^{\infty} ||x_{k,n}||\chi_{E_{k,n}} < \frac{1}{2k} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Esto último, la Proposición 3.3.2 y (3.63) justifican la siguiente cadena de desigualdades:

$$||f - \varphi_k||_1 \leq ||f - f_k||_1 + ||f_k - \varphi_k||_1 < \frac{1}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $\lim_{k\to\infty} ||f - \varphi_k||_1 = 0$. Además, sea $t \in I \setminus N$. Entonces, por la continuidad de la norma $||.||$, (3.64), (3.61) y (3.62), resulta que

$$\begin{aligned} ||f(t) - \varphi_k(t)|| &\leq ||f(t) - f_k(t)|| + ||f_k(t) - \varphi_k(t)|| \\ &= ||f(t) - f_k(t)|| + \sum_{n=N_k+1}^{\infty} ||x_{k,n}||\chi_{E_{k,n}} < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que $\lim_{k\to\infty} ||f(t) - \varphi_k(t)|| = 0$ para cada $t \in I \setminus N$. Por lo tanto, de la Proposición 3.3.4 se sigue que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Esto termina la prueba. □

Corolario 3.6.2. *Una función $f : I \to X$ es Bochner integrable si, y solamente si, f es medible y $||f|| : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.5.6, del Lema 3.3.1 y de la Proposición 3.6.1. □

Corolario 3.6.3. *Supongamos que $f : I \to X$ es medible y acotada por una función Lebesgue integrable $g : I \to \mathbb{R}$ en casi todo punto, es decir, $||f(t)|| \leq g(t)$ en casi todo $t \in I$, entonces, f es Bochner integrable.*

Demostración. Como $||f(t)|| \leq g(t)$ en casi todo $t \in I$ y g es Lebesgue integrable, entonces, $||f(t)||$ es Lebesgue integrable. Además, como f es medible, entonces, por el Corolario 3.6.2, concluimos que f es Bochner integrable. □

Proposición 3.6.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función que viene definida mediante*

$$f(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t),$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_n \in X$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $g : I \to X$ es una función medible y acotada. Entonces, $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$ si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$$

es absolutamente convergente en X y, en cuyo caso, tenemos

$$(B)\int_E f = (B)\int_E g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \quad \textit{para cada conjunto } E \subseteq I \textit{ medible}.$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Dado que g es medible y existe un número natural $M > 0$ tal que $||g(t)|| \leq M$ para todo $t \in I$, entonces, por el Corolario

3.6.3, $g \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Por consiguiente, teniendo en cuenta que $f-g \in \mathcal{B}([0,1],X)$ por la Proposición 3.3.1, entonces, concluimos que $||f-g||_1 < +\infty$. Ahora, puesto que $E_n \cap E_m = \emptyset$, entonces, por la continuidad de la seminorma $||.||_1$, resulta que

$$||f-g||_1 = \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n) \right|\right|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \mu(E_n) < +\infty.$$

Recíprocamente, de nuevo, dado que Dado que g es medible y existe un $M > 0$ tal que $||g(t)|| \leq M$ para todo $t \in I$, entonces, por el Corolario 3.6.3, $g \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \mu(E_n) < +\infty$, entonces, por el Lema 3.6.1, la función $h : I \to X$ dada por

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n} \in \mathcal{B}([0,1],X).$$

Luego, $f = g + h \in \mathcal{B}([0,1],X)$ por la Proposición 3.3.1. Ahora bien, observemos que

$$h \cdot \chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E \cap E_n}.$$

Además, evidentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \mu(E \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \mu(E_n) < +\infty$. Asimismo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E \subseteq I$ es un conjunto medible y $(E \cap E_n) \cap (E \cap E_m) = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, entonces, de nuevo, por el Lema 3.6.1, $h \cdot \chi_E \in \mathcal{B}([0,1],X)$ y

$$(B) \int_E h = (B) \int_I h \chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n).$$

También, notemos que el hecho de que $f, g \in \mathcal{B}([0,1],X)$ implica que ellas son Bochner integrables sobre cada conjunto medible $E \subseteq I$. Luego, de la Proposición 3.3.1 se sigue

$$(B) \int_E f = (B) \int_E g + (B) \int_E h = (B) \int_E g + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E \cap E_n)$$

para cualquier conjunto medible $E \subseteq I$. La prueba es completa. $\square$

3.7. Más sobre la integral McShane y la falsedad de $\mathcal{M}([0,1],X) \subseteq \mathcal{B}([0,1],X)$

En esta sección hemos presentado algunas propiedades interesantes de la integral de McShane. Además, tal y como lo habíamos prometido al lector, hemos probado que el recíproco del Teorema 3.5.7 no es cierto en general. Esto último junto al Teorema 3.5.7

nos permite concluir que la integral de McShane es una extensión propia de la integral de Bochner cuando X es un espacio de Banach arbitrario. Esto culmina nuestro análisis sobre la relación existente entre la integral de McShane y la de Bochner.

Pero, antes de nada, empezamos recordando al lector un concepto que es de importancia fundamental en la Teoría de Series y donde el orden de los términos no altera la convergencia de la serie es el siguiente.

Definición 3.7.1. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X se dice que es incondicionalmente convergente si, y sólo si, para cualquier permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_\pi(n)$ es convergente.*

Otra noción que vamos a necesitar es en esta sección es el siguiente concepto:

Definición 3.7.2. *Una sucesión $(f_n)_n$ en $\mathcal{M}([0,1],X)$ se dice M-equi-integrable sobre I si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que*

$$\left\| f_n(\mathcal{P}) - (M)\int_I f_n \right\| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ.

La idea detrás de este nuevo concepto es que debe existir un sólo calibre que funcione para todas las funciones de la sucesión. De entre los resultado que vamos a presentar a continuación sobre la integral de McShane, destacamos el Teorema 3.7.5 que fue demostrado por R. A. Gordon (consultar [14], Teorema 15). También, las demostraciones de la Proposición 3.7.3 y del Teorema 3.7.5 utilizan las ideas de [14].

Proposición 3.7.3. *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es un subconjunto medible de I, $x_n \in X$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ es incondicionalmente convergente en X, entonces, la sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones definidas mediante*

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(t), \quad t \in I,\ n \in \mathbb{N}$$

es M-equi-integrable.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.5.1, la función $\varphi_n : I \to X$ dada por

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \chi_{E_k}(t)$$

es McShane integrable y la integral de McShane y la de Bochner de φ_n coinciden, es decir,

$$(M)\int_I \varphi_n = (B)\int_I \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E_k). \tag{3.65}$$

Ahora fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un calibre $\gamma_n \to \mathcal{O}$ tal que

$$\left|\left|\varphi_n(\mathcal{P}) - (M)\int_I \varphi_n\right|\right| = \left|\left|\sum_{i=1}^{p} \varphi_n(t_i)\mu(I_i) - \sum_{k=1}^{n} x_k\mu(E_k)\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \tag{3.66}$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, p\}$ de I subordinada a γ_n. Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n)$ es incondicionalmente convergente. Por consiguiente, por la Proposición A.3.5, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x^*(x_n)|\mu(E_n) < \varepsilon$ para todo $x^* \in X^*$ con $||x^*||_* = 1$. Por esta razón, podemos concluir que

$$\sup_{||x^*||=1} \sum_{n=N+1}^{\infty} |x^*(x_n)|\mu(E_n) \leq \varepsilon. \tag{3.67}$$

Ahora sean los conjuntos $H_N, H_{N+1}, H_{N+1}, \ldots$ definidos mediante

$$H_N = \bigcup_{k=1}^{N} E_k \bigcup \left(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad \text{y} \quad H_n = E_n, \text{ si } n > N.$$

Puesto que $E_n \cap E_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$, entonces, si $n > N$, resulta que

$$H_N \cap H_n = \left[\bigcup_{k=1}^{N} E_k \cup \left(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right] \cap E_n = \bigcup_{k=1}^{N} (E_k \cap E_n) \cup \left[\left(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cap E_n\right] = \emptyset \quad \text{y}$$

$$H_N \cup \left(\bigcup_{n>N} H_n\right) = \left[\bigcup_{k=1}^{N} E_k \bigcup \left(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right] \cup \left(\bigcup_{n>N} E_n\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cup \left(I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = I.$$

Esto demuestra que la colección $\{H_n : n \geq N\}$ es una partición del intervalo I. Con esta información, podemos definir un calibre $\gamma \to \mathcal{O}$ de la siguiente manera

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t) \cap \cdots \cap \gamma_N(t)) \text{ si } t \in H_N \\ \gamma_1(t) \cap \gamma_2(t) \cap \cdots \cap \gamma_n(t)) \text{ si } t \in H_n, n > N. \end{cases}$$

Sea, por el Lema 2.1.1, $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, p\}$ una M-partición de I subordinada a γ. Notemos que, si $n = 1, 2, \ldots, N$, entonces, por la desigualdad dada en (3.66), tenemos

$$\left|\left|\varphi_n(\mathcal{P}) - (\mathcal{M})\int_I \varphi_n\right|\right| < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < \varepsilon, \tag{3.68}$$

ya que $\mathcal{P}$ está subordinada a γ_n para cada $n = 1, 2, \ldots, N$. Luego, el problema está resuelto para $n = 1, 2, \ldots, N$. Por esta razón, fijemos un $n_0 > N$. Observemos que

$$\sum_{i=1}^{p} (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} = (M)\int_I \varphi_{n_0}$$

por la Proposición 2.1.5. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea J_n definido mediante

$$J_n = \Big\{ i \in \{1,2,\ldots,p\} : t_i \in H_n \Big\}.$$

Es un ejercicio sencillo establecer que $J := \bigcup_{n=N}^{\infty} J_n = \{1,2,\ldots,p\}$ y $J_n \cap J_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$. En efecto, sea $i \in \{1,2,\ldots,p\}$. Entonces, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_i \in H_n$. De esto se sigue que $i \in J_n \subseteq J$. Puesto que i era un elemento arbitrario de $\{1,2,\ldots,p\}$, entonces, concluimos que $\{1,2,\ldots,p\} \subseteq J$. La inclusión $J \subseteq \{1,2,\ldots,p\}$ es evidente, ya que, $J_n \subseteq \{1,2,\ldots,p\}$ para cada $n \in N$. La primera parte de nuestra afirmación ha sido probada. Sin embargo, la otra parte es igual de sencilla, ya que, si $i \in J_n \cap J_m$ con $n \neq m$, entonces, existe un $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ tal que $t_i \in H_n \cap H_m$ con $n \neq m$. Pero, evidentemente, esto es una contradicción, ya que, la colección $\{H_n : n \geq N\}$ es una partición de I. Esta contradicción establece que $J_n \cap J_m = \emptyset$. La prueba nuestra afirmación es completa. Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_{n_0}(\mathcal{P}) - (M)\int_I \varphi_{n_0} &= \sum_{i=1}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right) \\
&= \sum_{i \in J} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right) \\
&= \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right) \\
&= \sum_{n=N}^{n_0-1} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right) \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right).
\end{aligned}$$

Consiguientemente, esta cadena de igualdades nos permite deducir que

$$\begin{aligned}
\varphi_{n_0}(\mathcal{P}) - (M)\int_I \varphi_{n_0} &= \sum_{n=N}^{n_0-1} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (\mathcal{M})\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right) \\
&\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i) - (\mathcal{M})\int_{I_i} \varphi_{n_0} \right). \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar cada una de las sumas del lado derecho de la igualdad anterior. Pero, en primer lugar, notemos que la colección $\{(t_i,I_i) : i = 1,2,\ldots,p, t_i \in H_n, n \geq n_0\}$ es finita y está subordinada a γ. Luego, es un M-sistema en I subordinado a γ. Así pues, está subordinada a γ_{n_0} por definición de γ. Por tanto, por el Lema 2.1.2 y (3.66), tenemos

$$\left\|\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i)-(\mathcal{M})\int_{I_i}\varphi_n\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{2^{n_0+2}}<\varepsilon. \tag{3.70}$$

Supongamos algún $t_i\in H_n$ con $N\leq n<n_0$, entonces, $\varphi_{n_0}(t_i)=\varphi_n(t_i)$. En efecto,

- Si $n=N$, entonces, $t_i\in H_N=\bigcup_{k=1}^{N}E_k$. Como los E_k son disjuntos dos a dos, entonces, existe un $r\in\{1,2,\dots,N\}$ tal que $t_i\in E_r$. Además, como $N<n_0$, entonces,

$$\varphi_{n_0}(t_i)=\sum_{k=1}^{n_0}x_k\cdot\chi_{E_k}(t_i)=x_r=\sum_{k=1}^{N}x_k\cdot\chi_{E_k}(t_i)=\varphi_N(t_i)=\varphi_n(t_i).$$

- Si $N<n<n_0$, entonces, $H_n=E_n$. Por lo tanto, $\varphi_{n_0}(t_i)=x_n=\varphi_n(t_i)$.

En resumen, si $t_i\in H_n$ con $N\leq n<n_0$, entonces, $\varphi_{n_0}(t_i)=\varphi_n(t_i)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\| &= \left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|\\ &\leq \left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_n\right)\right\|\\ &+\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left((M)\int_{I_i}\varphi_n-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|.\end{aligned}$$

Denotando por S_1 y S_2 a las dos sumas del lado derecho de esta desigualdad, es decir,

$$S_1=\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_n\right)\right\|,\ S_2=\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left((M)\int_{I_i}\varphi_n-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|,$$

entonces, podemos reescribir la desigualdad anterior de la siguiente manera:

$$\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|\leq S_1+S_2. \tag{3.71}$$

De nuevo, por la elección del calibre γ, para cada $n=N,\dots,n_0-1$, como el M-sistema $\{(t_i,I_i):i=1,2,\dots,p,t_i\in H_n\}$ está subordinada a γ, entonces, está subordinada a γ_n.

Nuevamente, por el Lema de Saks-Henstock, Lema 2.1.2 y (3.66), resulta que

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_n \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \text{ para cada } \quad n = N, \ldots, n_0 - 1.$$

Por consiguiente, esto nos permite obtener una estimación de S_1,ya que,

$$S_1 \leq \sum_{n=N}^{n_0-1} \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left(\varphi_n(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} \varphi_n \right) \right\| < \sum_{n=N}^{n_0-1} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2^{N+1}} < \varepsilon.$$

Ahora para estimar S_2, observemos que, para cada $i = 1, 2, \ldots, p$, por ser φ_n McShane integrable sobre I, entonces, por la Proposición 2.1.4, es también es McShane sobre I_i y

$$(M)\int_{I_i} \varphi_n = (B)\int_{I_i} \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E_k \cap I_i) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

La primera igualdad de las igualdades anteriores es por (3.65) y la segunda es por definición. Por consiguiente, puesto que $N \leq n < n_0$, resulta que

$$(M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} - (M)\int_{I_i} \varphi_n = \sum_{k=n+1}^{n_0} x_k \mu(E_k \cap I_i).$$

Luego, teniendo en cuenta que los E_k son disjuntos dos a dos, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{n_0-1} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \left((M)\int_{I_i} \varphi_{n_0} - (M)\int_{I_i} \varphi_n \right) &= \sum_{n=N}^{n_0-1} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} \sum_{k=n+1}^{n_0} x_k \mu(E_k \cap I_i) \\
&= \sum_{n=N}^{n_0-1} \sum_{k=n+1}^{n} x_k \mu\left(E_k \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} I_i \right) \\
&= \sum_{k=N+1}^{n_0} x_k \sum_{n=N}^{k-1} \mu\left(E_k \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} I_i \right) \qquad (\star) \\
&= \sum_{k=N+1}^{n_0} x_k \mu\left(E_k \cap \bigcup_{n=N}^{k-1} \left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ t_i \in H_n}}^{p} I_i \right) \right).
\end{aligned}$$

Podemos llegar a (★), disponemos en una tabla los términos de la suma previa y sumamos en diagonal. Luego, por el Teorema de Hahn Banach y la monotonía de μ, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p}\left((M)\int_{I_i}\varphi_n-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\| &= \left\|\sum_{k=N+1}^{n_0} x_k\mu\left(E_k\cap\bigcup_{n=N}^{k-1}\left(\bigcup_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p} I_i\right)\right)\right\|\\ &= \sup_{\|x^*\|_*=1}\left|x^*\left[\sum_{k=N+1}^{n_0} x_k\mu\left(E_k\cap\bigcup_{n=N}^{k-1}\left(\bigcup_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p} I_i\right)\right)\right]\right|\\ &\le \sup_{\|x^*\|_*=1}\sum_{k=N+1}^{n_0}|x^*(x_k)|\mu\left(E_k\cap\bigcup_{n=N}^{k-1}\left(\bigcup_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p} I_i\right)\right)\\ &\le \sup_{\|x^*\|_*=1}\sum_{k=N+1}^{\infty}|x^*(x_k)|\mu(E_k).\end{aligned}$$

Por consiguiente, de esto último y de la desigualdad dada en (3.67), resulta que

$$S_2=\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p}\left((M)\int_{I_i}\varphi_n-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|\le\varepsilon.$$

Reuniendo las estimaciones obtenidas para S_1 y S_2 y teniendo en cuenta (3.71), tenemos

$$\left\|\sum_{n=N}^{n_0-1}\sum_{\substack{i=1\\ t_i\in H_n}}^{p}\left(\varphi_{n_0}(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{I_i}\varphi_{n_0}\right)\right\|<2\varepsilon. \tag{3.72}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.69), (3.70) y (3.72), podemos concluir que

$$\left\|\varphi_{n_0}(\mathcal{P})-(M)\int_I\varphi_{n_0}\right\|<3\varepsilon$$

con $n_0>N$. Puesto que habíamos tomado n_0 de forma arbitraria, entonces,

$$\left\|\varphi_n(\mathcal{P})-(M)\int_I\varphi_n\right\|<3\varepsilon$$

para todo $n>N$. De esto último y (3.68) se sigue que la sucesión $(\varphi_n)_n\subseteq\mathcal{S}([0,1])$ es M-equi-integrable. Esto finaliza la demostración. $\square$

Proposición 3.7.4 (Un teorema de convergencia)**.** *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to X$ es McShane integrable y $(f_n)_n$ es una sucesión M-equi-integrable tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \quad \textit{para cada } t \in I.$$

Entonces, la función $f : I \to X$ es McShane integrable y

$$\lim_{n\to\infty} (M) \int_I f_n = \int_I f.$$

Demostración. Puesto que $(f_n)_n$ es una sucesión M-equi-integrable, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma \to \mathcal{O}$ de tal manera que

$$\left|\left| f_n(\mathcal{P}) - (M)\int_I f_n \right|\right| < \varepsilon \tag{3.73}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier M-partción $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Por el Lema 2.1.1, sea $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : 1 = 1, 2, \ldots, p\}$ una M-partición de I subordinada a γ. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) = \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) = f(\mathcal{P}),$$

ya que, $f_n \to f$. Luego, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces,

$$\left|\left| f_n(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}) \right|\right| < \varepsilon. \tag{3.74}$$

Así pues, por esto último y la desigualdad dada en (3.73), si $n \geq n_0$, tenemos

$$\left|\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f_n \right|\right| \leq \left|\left| f(\mathcal{P}) - f_n(\mathcal{P}) \right|\right| + \left|\left| f_n(\mathcal{P}) - (M)\int_I f_n \right|\right| < 2\varepsilon. \tag{3.75}$$

Por esta razón, si $n, m \geq n_0$, entonces, resulta que

$$\left|\left| (M)\int_I f_n - (M)\int_I f_m \right|\right| \leq \left|\left| f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f_m \right|\right| + \left|\left| (M)\int_I f_n - f(\mathcal{P}) \right|\right| < 4\varepsilon.$$

Esto demuestra que $(\int_I f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy. Además, puesto que X es un espacio de Banach, en particular completo, entonces, existe un $L \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (M)\int_I f_n = L.$$

Por consiguiente, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, entonces

$$\left\| (M) \int_I f_n - L \right\| < \varepsilon. \tag{3.76}$$

Como consecuencia, si tomamos $N = \text{máx}(n_0, n_1)$, por (3.74), (3.75) y (3.76), entonces,

$$\left\| f(\mathcal{P}) - L \right\| \leq \left\| f(\mathcal{P}) - f_N(\mathcal{P}) \right\| + \left\| f_N(\mathcal{P}) - (M) \int_I f_N \right\| + \left\| (M) \int_I f_N - L \right\| < 4\varepsilon$$

para cualquier M-partción $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ. Por consiguiente, $f \in \mathcal{M}([0,1])$ y

$$\int_I f = L = \lim_{n \to \infty} (M) \int_I f_n.$$

Esto acaba la demostración. $\square$

Teorema 3.7.5. *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, x_n es un elemento X y $E_n \cap E_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ es incondicionalmente convergente en X, entonces, la función $f : I \to X$ definida mediante*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \chi_{E_n}(t) \quad \textit{para cada } t \in I$$

es McShane integrable y su integral de McShane viene dada por

$$(M) \int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n).$$

Demostración. Por la Proposición 3.7.3, la sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones dadas por

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \chi_{E_k}(t) \quad \text{para cada } t \in I,\ n \geq 1$$

es M-equi-integrable y cada $\varphi_n \in \mathcal{M}([0,1])$ por el Teorema 3.5.1. También, es obvio que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = f(t) \quad \text{para cada } t \in I.$$

Por consiguiente, por la Proposición 3.7.4, f es McShane integrable y

$$(M) \int_I f = \lim_{n \to \infty} (M) \int_I \varphi_n = \lim_{n \to \infty} (B) \int_I \varphi_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n).$$

El Teorema 3.5.1 justifica la segunda igualdad, mientras que la tercera es por definición y esto completa la demostración. $\square$

Por el Teorema 3.5.7, sabemos que la clase de las funciones McShane integrables está contenida en la de las funciones Bochner integrables. Ahora vamos a probar que el recíproco no es cierto cuando X es un espacio de Banach de dimensión infinita. En la prueba de esto últimos, utilizaremos el conocido teorema de Dvoretzky-Rogers que afirma que, en cada espacio de Banach de dimensión infinita, existe una serie incondicionalmente convergente, pero no absolutamente convergente (consultar [9], Teorema 13.38).

Proposición 3.7.6. *Sea X es un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe una función $f : I \to X$ que es McShane integrable, pero no es Bochner integrable.*

Demostración. Supongamos, por el Teorema de Dvoretzky-Rogers, que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es una serie incondicionalmente convergente en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} ||z_n|| = +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\emptyset \neq E_n \subseteq I$ un conjunto abierto de I tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$. Definimos

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad E^c = I \setminus E.$$

Observemos que E es un conjunto abierto por ser unión de conjuntos abiertos y

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(I) < +\infty.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = z_n/\mu(E_n)$. Notemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

es incondicionalmente convergente. Por consiguiente, teniendo en cuenta el Teorema 3.7.5, sabemos que la función $f : I \to X$ definida mediante

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \chi_{E_n}(t) \quad \text{para cada } t \in I$$

es McShane integrable y su integral de McShane viene dada por

$$(M)\int_I f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n).$$

En cambio, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ no es absolutamente convergente en X, ya que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} ||z_n|| = +\infty,$$

entonces, por la Proposición 3.7.3, $f \notin \mathcal{B}([0,1],X)$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Capítulo 4

Relación con la integral de Pettis

Una teoría de integración similar a la integral de Bochner, presentada en el Capítulo 3, es imposible para funciones que son solamente débilmente medibles (Definición 3.4.4). Sin embargo, hay métodos de análisis funcional elemental que nos permiten definir un concepto razonable de integral si para una función débilmente medible $f : I \to X$, le añadimos la condición de que $x^* \circ f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ para cada $x^* \in X^*$. La integral resultante, conocida comúnmente como la integral de Pettis o integral de Gelfand-Pettis llamada así por Israel M. Gelfand (1913-2009) y Billy James Pettis (1913-1979), tiene una estructura muy rica y extiende la definición de la integral de Lebesgue a funciones que toman valores en un espacio de Banach arbitrario. Este capítulo tendrá pues un doble objetivo. Por una parte, hemos presentado algunos hechos elementales sobre la integral de Pettis. El lector interesado en más detalles sobre la integral de Pettis puede consultar [8], [20] o [21]. Por otra parte, hemos relacionado dos las integrales tipo-Riemann que hemos introducido en esta memoria, es decir, las integrales de Henstock-Kurzweil y McShane con la integral de Pettis. En efecto, en la primera sección hemos presentado la definición de la integral de Pettis y algunos resultados básicos de dicha integral que necesitaremos en las secciones posteriores. En la segunda sección hemos probado que toda función McShane integrable es Pettis integrale. No obstante, el recíproco no es cierto en general. De hecho, hemos escrito la última sección con la intención de convencer al lector de esto último, pero sin entrar mucho en detalles técnicos. En la tercera sección hemos dado algunas condiciones suficientes para que una función Pettis integrable sea McShane integrable. Mientras que, en la cuarta sección, hemos empezado demostrando que toda función Bochner integrable es Pettis y las dos integrales coinciden sobre el intervalo de integración. la cuarta sección está dedicada a la prueba de algunos resultados muy interesantes y elegantes sobre la relación que existe entre la integral de Pettis, la de McShane y la de Henstock-Kurzweil por un lado y, por otro lado, sobre la relación existente entre la integral de McShane y la Henstock-Kurzweil.

Para redactar este capítulo, hemos usado estos textos: [5], [8], [10], [12], [13],

[14], [20] y [21]. Sin embargo, destacamos los siguientes artículos: [5], [12], [13] y [14].

Recordemos, por el Teorema 3.5.6, que $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1([0,1])$ y, además,

$$(L)\int_I f = (B)\int_I f$$

para cada $f \in \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1([0,1])$. Por consiguiente, por la Proposición 3.3.2, la aplicación $||.||_1 : \mathcal{L}_1([0,1]) \to [0,+\infty)$ definida mediante

$$||f||_1 = (L)\int_I |f|$$

es una seminorma sobre $\mathcal{L}_1([0,1])$. Asimismo, decimos que un conjunto $K \subseteq \mathcal{L}_1([0,1])$ es totalmente acotado con respecto a la seminorma $||.||_1$ si, y solamente si, para cada $r > 0$, existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K$ tal que $K \subseteq B(f_1,r) \cap B(f_2,r) \cup \cdots \cup B(f_n,r)$ donde

$$B(f_k,r) := \{f \in \mathcal{L}_1([0,1]) : ||f - f_k||_1 < r\} \quad \text{para cada } k = 1,2,\ldots,n.$$

4.1. Integral de Pettis y algunos resultados preliminares

Esta sección contiene la definición de la integral de Pettis algunos resultados básicos. El primero de estos resultados establece que el conjunto de todas las funciones Pettis integrables es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral de Pettis es un funcional lineal sobre él. Los dos siguientes resultados son propiedades de la integral de Pettis como función de conjuntos. El tercer resultado nos da una condición suficiente para que una cierta serie sea incondicionalmente convergente a partir de la integrabilidad de Pettis de una cierta función definida como una serie cuyas sumas parciales son funciones simples.

Definición 4.1.1. *Una función $f : I \to X$ es Pettis integrable sobre I si, y solamente si, $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue sobre I para cada $x^* \in X^*$ y para cada conjunto medible $E \subseteq I$ existe un $\nu_f(E) \in X$ con la siguiente propiedad:*

$$x^*(\nu_f(E)) = (L)\int_E x^* \circ f \quad \textit{para cada } x^* \in X^*.$$

Designamos por $\mathcal{P}([0,1],X)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to X$ Pettis integrables sobre I. Además, si f es Pettis integrable sobre I, denotamos su integral por

$$\nu_f(E) = (P)\int_E f.$$

El vector $\nu_f(E) \in X$ de la definición precedente, si existe es, necesariamente, único como consecuencia del teorema de Hahn-Banach. A continuación presentamos algunas propiedades de la integral de Pettis que vamos a usar en este capítulo.

Proposición 4.1.2. *El conjunto* $\mathcal{P}([0,1],X)$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que $f,g \in \mathcal{P}([0,1],X)$. Entonces, $x^* \circ f, x^* \circ g \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Ahora sea $E \subseteq I$ un conjunto medible. Entonces, existen $\nu_f(E), \nu_g(E) \in X$ de manera que

$$x^*(\nu_f(E)) = \int_E x^* \circ f \quad \text{y} \quad x^*(\nu_g(E)) = \int_E x^* \circ g$$

para cada $x^* \in X^*$. Por consiguiente, para todo $x^* \in X^*$, si α y β son números reales, entonces, $\alpha(x^* \circ f), \beta(x^* \circ g), \alpha(x^* \circ f) + \beta(x^* \circ g) \in \mathcal{L}_1([0,1])$, ya que, $\mathcal{L}_1([0,1])$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, observemos que

$$\alpha(x^* \circ f) + \beta(x^* \circ g) = x^* \circ (\alpha f + \beta g)$$

es Lebesgue integrable sobre I, para cada $x^* \in X^*$, y $\alpha\nu_f(E) + \beta\nu_g(E) \in X$. Por tanto,

$$\begin{aligned} x^*(\alpha\nu_f(E) + \beta\nu_g(E)) &= \alpha x^*(\nu_f(E)) + x^*(\beta\nu_g(E)) = \alpha(L)\int_E x^* \circ f + \beta(L)\int_E x^* \circ g \\ &= (L)\int_E \big(\alpha(x^* \circ f) + \beta(x^* \circ g)\big) = (L)\int_E x^*(\alpha f + \beta g). \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha\nu_f(E) + \beta\nu_g(E) \in X$, por la unicidad de la integral de Pettis, resulta que

$$\nu_{(\alpha f + \beta g)}(E) = \alpha\nu_f(E) + \beta\nu_g(E).$$

Por consiguiente, $\alpha f + \beta g$ es Pettis integrable, que es lo que queríamos probar. □

Lema 4.1.1. *Supongamos que* f *es Pettis integrable sobre* I*. Además, supongamos que* $\mathcal{C}$ *es la colección de todos los subconjuntos medibles de* I *y* $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \subseteq \mathcal{C}$ *tal que* $\mu(E_k \cap E_m) = 0$ *siempre que* $k \neq m$*. Entonces, la función* $\nu_f : \mathcal{C} \to X$ *definida mediante*

$$\nu_f(E) = (\mathcal{P})\int_E f,$$

llamada la integral indefinida de Pettis, satisface la siguiente propiedad:

$$\nu_f\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \nu_f(E_k).$$

Demostración. Supongamos que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un una colección finita de subconjuntos medibles de I y sea $x^* \in X^*$. Evidentemente, el subconjunto de I definido mediante

$$E = \bigcup_{k=1}^n E_k$$

es medible. Además, puesto que f es Pettis integrable sobre I, entonces, por definición, la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable sobre I y, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$x^*(\nu_f(E_k)) = (B)\int_{E_k} x^* \circ f.$$

Asimismo, teniendo en cuenta la Proposición A.2.5 y la linealidad de x^*, resulta que

$$x^*(\nu_f(E)) = (B)\int_E x^* \circ f = \sum_{k=1}^n (L)\int_{E_k} x^* \circ f = \sum_{k=1}^n x^*(\nu_f(E_k)) = x^*\left(\sum_{k=1}^n \nu_f(E_k))\right).$$

Por consiguiente, una aplicación del Teorema de Hahn Banach nos permite concluir que

$$\nu_f(E) = \nu_f\left(\bigcup_{k=1}^n E_k)\right) = \sum_{k=1}^n \nu_f(E_k),$$

ya que, x^* era un elemento arbitrario de X^*. Esto termina la prueba. $\square$

Proposición 4.1.3. *Supongamos $f : I \to X$ una función Pettis integrable sobre I. Entonces, la integral indefinida de Pettis, satisface la propiedad de aditividad numerable.*

Demostración. Sea $(E_n)_n$ una sucesión de subconjuntos medibles de I tal que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Entonces, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ es un subconjunto medible de I. Queremos probar que

$$\nu_f\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \nu_f(E_n).$$

Para ello, fijemos un x^* un elemento de X^* arbitrario. Además, sea $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ cualquier sucesión estrictamente creciente. Puesto que $f \in \mathcal{P}([0,1],X)$, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $\nu_f(E_{n_k})$ perteneciente a X de manera que

$$x^*(\nu_f(E_{n_k})) = (L)\int_{E_{n_k}} x^* \circ f = (L)\int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_{E_{n_k}}.$$

Por lo tanto, por la linealidad de la integral de Lebesgue, resulta que

$$\sum_{i=1}^k x^*(\nu_f(E_{n_i})) = (L)\int_I \left(\sum_{i=1}^k (x^* \circ f)\right) \cdot \chi_{E_{n_i}} \quad \text{para cada } k \geq 1. \tag{4.1}$$

sea E el subconjunto medible de I dado por $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_{n_k}$. Puesto que los términos de la sucesión $(E_{n_k})_k$ son disjuntos dos a dos, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^k (x^* \circ f) \cdot \chi_{E_{n_i}} = (x^* \circ f) \cdot \chi_E \quad \text{y} \quad \left|\sum_{i=1}^k (x^* \circ f) \cdot \chi_{E_{n_i}}\right| \leq |(x^* \circ f) \cdot \chi_E| \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, notemos que $|(x^* \circ f) \cdot \chi_E| \in \mathcal{L}_1([0,1])$ porque $f \in \mathcal{P}([0,1],X)$. Por lo tanto, tomando el límite en ambos lados de (4.1), el Teorema de la Convergencia Dominada nos permite intercambiar el símbolo de integración con el de paso al límite. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^*(\nu_f(E_{n_k})) = (L)\int_I = (x^* \circ f) \cdot \chi_E = \int_E (x^* \circ f) = x^*(\nu_f(E)).$$

Puesto que, x^* era un elemento arbitrario de X^*, entonces, para cada $x^* \in X^*$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^*(\nu_f(E_{n_k})) = x^*(\nu_f(E)) = x^*\left(\nu_f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right)\right) \tag{4.2}$$

es un número real, ya que, $f \in \mathcal{P}([0,1],X)$. Así pues, por Corolario A.3.1, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_f(E_{n_k})$ es débilmente convergente. Dado que $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ es una sucesión estrictamente creciente arbitraria, entonces, por el Teorema de Orlicz-Pettis, Teorema A.3.3, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n)$ es incondicionalmente convergente y, en particular, es convergente en X. Por consiguiente, para cada x^* perteneciente a X^*, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*\big(\nu_f(E_n)\big) = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n)\right). \tag{4.3}$$

Tomando $(n_k)_k = \mathbb{N}$ en (4.2) y teniendo en cuenta (4.3), concluimos que

$$x^*\left(\nu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n)\right) \quad \text{para cada } x^* \in X^*.$$

Finalmente, una aplicación del Teorema de Hahn Banach nos permite concluir que

$$\nu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n).$$

La prueba es completa. □

Proposición 4.1.4. *Sea $f : I \to X$ una función Pettis integrable sobre I de la forma*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \chi_{E_n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es un subconjunto medible de I, $x_n \in X$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \mu(E_n)$ es incondicionalmente convergente en X.

Demostración. Observemos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq I$ es medible y, por la Proposición 4.1.3, la integral indefinida de Pettis ν_f tiene la propiedad de aditividad numerable. Por lo tanto,

$$(\mathcal{P})\int_E f = \nu_f(E) = \nu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n). \tag{4.4}$$

De esto se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n)$ es incondicionalmente convergente. Ahora fijemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ y notemos que si $t \in E_{n_0}$, entonces, $f(t) = x_{n_0}$. Por esta razón,

$$x^*\big(\nu_f(E_{n_0})\big) = (L)\int_{E_{n_0}} x^* \circ f = (L)\int_{E_{n_0}} x^*(x_{n_0}) = x^*(x_{n_0})\mu(E_{n_0}) = x^*\big(x_{n_0}\mu(E_{n_0})\big)$$

para cada $x^* \in X^*$. Puesto que n_0 era un número natural arbitrario, entonces,

$$x^*\big(\nu_f(E_n)\big) = x^*\big(x_n\mu(E_n)\big)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $x^* \in X^*$. Por consiguiente, una aplicación del Teorema de Hahn Banach nos revela que $x_n\mu(E_n) = \nu_f(E_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por esta razón, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(E_n)$$

que es incondicionalmente convergente. Esto finaliza la prueba. $\square$

4.2. El problema $\mathcal{M}([0,1],X) \subseteq \mathcal{P}([0,1],X)$

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función McShane integrable es Pettis integrable y ambas integrales coinciden sobre el intervalo de integración considerado. La siguiente proposición es clave para alcanzar nuestro objetivo.

Proposición 4.2.1. *Supongamos que $f : I \to X$ es McShane integrable sobre I. Entonces, para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es también McShane integrable sobre I y*

$$x^*\left((M)\int_I f\right) = (M)\int_I x^* \circ f.$$

Demostración. Puesto que f es McShane integrable sobre I, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ de manera que

$$\left\|f(\mathcal{P}) - (M)\int_I f\right\| < \varepsilon$$

para cualquier M-partición $\mathcal{P}$ del intervalo I subordinada a γ. Por el Lema 2.1.1, sea

$$\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

una M-partición de I subordinada a γ. Como cada $x^* \in X^*$ es lineal, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} (x^* \circ f)(t_i)\mu(I_i) = \sum_{i=1}^{n} x^*(f(t_i)\mu(I_i)) = x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i)\right)$$

para cada $x^* \in X^*$. Además, debido a que $(M)\int_I f$ es un elemento de X, se cumple que

$$x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i)\right) - x^*\left((M)\int_I f\right) = x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_I f\right).$$

Por consiguiente, para cada x^* perteneciente a X^*, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|(x^* \circ f)(\mathcal{P}) - x^*\left((M)\int_I f\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (x^* \circ f)(t_i)\mu(I_i) - x^*\left((M)\int_I f\right)\right| \\
&= \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i)\right) - x^*\left((M)\int_I f\right)\right| \\
&= \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_I f\right)\right| \\
&\leq ||x^*||_* \cdot \left|\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_I f\right|\right| \\
&< ||x^*||_* \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

para cada M-partición $\mathcal{P}$ de I subordinada a γ, $\varepsilon > 0$ y $x^* \in X^*$. Esto termina la prueba. $\square$

Puesto que, por el Teorema 2.2.2, una función $f : I \to \mathbb{R}$ es McShane integrable si, y solamente si, es Lebesgue integrable y que ambas integrales coinciden, entonces, tenemos el siguiente corolario de la Proposición 4.2.1.

Corolario 4.2.1. *Supongamos que $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$. Entonces, para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es tanto McShane integrable como Lebesgue integrable sobre I y*

$$x^*\left((M)\int_I f\right) = (M)\int_I x^* \circ f = (L)\int_I x^* \circ f.$$

Ya poseemos estamos en condiciones para probar que $\mathcal{M}([0,1],X) \subseteq \mathcal{P}([0,1],X)$.

Teorema 4.2.2. *Supongamos que tenemos una función $f : I \to X$ McShane integrable sobre I. Entonces f es Pettis integrable sobre I y*

$$(P)\int_E f = (M)\int_E f$$

para cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible. En particular $\mathcal{M}([0,1],X) \subseteq \mathcal{P}([0,1],X)$.

Demostración. Fijemos un conjunto $E \subseteq I$ medible. Dado que f es McShane integrable sobre I, entonces, por el Teorema 2.3.4, $f \cdot \chi_E$ también es McShane integrable sobre I. Además, por el Corolario 4.2.1, para cada $x^* \in X^*$, la función

$$x^* \circ (f \cdot \chi_E) = (x^* \circ f) \cdot \chi_E : I \to \mathbb{R}$$

es, a la vez, McShane integrable así como Lebesgue integrable sobre I y

$$x^*\left((M)\int_I f \cdot \chi_E\right) = (M)\int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E = (L)\int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E.$$

Pero, por definición, esta cadena de igualdades se puede reescribir la siguiente manera:

$$x^*\left((M)\int_E f\right) = (M)\int_E x^* \circ f = (L)\int_E x^* \circ f$$

para cada $x^* \in X^*$. Puesto que E era un subconjunto medible arbitrario de I, entonces, concluimos que f es Pettis integrable sobre I y la prueba es completa. □

4.3. El problema $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$

En la sección 4.2, hemos probado que todas las funciones $f : I \to X$ McShane integrables son también Pettis integrables, es decir, $\mathcal{M}([0,1],X) \subseteq \mathcal{P}([0,1],X)$. Ahora vamos a considerar la inclusión inversa que es más complicada y depende de las propiedades de las funciones o del espacio de Banach en el que las funciones toman sus valores. Pero, antes de nada, notemos que la siguiente proposición es una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.5.7 y 4.2.2.

Proposición 4.3.1. *Supongamos que $f \in \mathcal{B}([0,1],X)$. Entonces, $f \in \mathcal{P}([0,1],X)$ y*

$$(P)\int_E f = (B)\int_E f$$

sobre cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible.

El siguiente resultado pertenece a R. A. Gordon [14], Teorema 17.

Teorema 4.3.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función fuertemente medible. Si f es Pettis integrable sobre I, entonces, f es McShane integrable sobre I.*

Demostración. Puesto que f es medible, entonces, por la Proposición 3.4.7, existe una función medible $g : I \to X$ de forma que $||g(t)|| < 1$ en casi todo $t \in I$ y otra función medible $h : I \to X$ que se puede escribir de la siguiente manera

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(t) \quad \text{para cada } t \in I$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq I$ es un conjunto medible, $x_n \in X$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$ de tal manera que $f(t) = g(t) + h(t)$ para cada $t \in I$. Además, como g es una función medible y $||g(t)|| < 1$ en casi todo $t \in I$, entonces, por el Corolario 3.6.3, g es Bochner integrable sobre I. Por consiguiente, g es Pettis integrable sobre I por la Proposición 4.3.1. Asimismo, dado que f es Pettis integrable sobre I, por la Proposición 4.1.2, resulta que $h = f - g$ es Pettis integrable sobre I. Por consiguiente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ es incondicionalmente convergente por la Proposición 4.1.4. Por lo tanto, por el Teorema 3.7.5, h es McShane integrable sobre I. Luego, teniendo en cuenta la Proposición 2.1.3, concluimos que f es McShane integrable sobre I y la prueba es completa. □

El siguiente teorema es un corolario del Teorema 4.3.2. También, lo ha mencionado Gordon en su artículo [14], pág. 566 .

Teorema 4.3.3. *Supongamos que X es un espacio de Banach separable y $f : I \to X$ es una función Pettis integrable sobre I. Entonces, f es McShane integrable sobre I.*

Demostración. Puesto que f es Pettis integrable sobre I, entonces, para cada $x^* \in X^*$ la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable sobre I. En particular, $x^* \circ f$ es medible sobre I para todo $x^* \in X^*$. De esto se sigue que f es débilmente medible. Además, como X es un espacio de Banach separable, por el Corolario 3.4.1, f es fuertemente medible. Luego, por el Teorema 4.3.2, $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$. Esto termina la prueba. □

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los Teoremas 4.3.3 y 4.2.2.

Teorema 4.3.4. *Supongamos que X es un espacio de Banach separable. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{P}([0,1],X)$.
(II) $f \in \mathcal{M}([0,1],X)$.

Además, para cada $f \in \mathcal{P}([0,1]) = \mathcal{M}([0,1])$, tenemos

$$(P)\int_E f = (M)\int_E f$$

para cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible.

4.4. Otras relaciones interesantes entre $\mathcal{M}([0,1],X)$, $\mathcal{P}([0,1],X)$ y $\mathcal{HK}([0,1],X)$

Esta sección contiene la prueba de unos resultados muy elegantes que, por una parte, relacionan la integral de McShane, la de Pettis y la de Henstock-Kurzweil y, por otra parte, enlazan la integral de McShane y la de Henstock-Kurzweil. Pero, antes de nada, vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 4.4.1. *Sean $g : I \to \mathbb{R}$ una función, $\gamma : I \to \mathcal{O}$ un calibre y $\eta > 0$ tal que*

$$g(\mathcal{P}) \leq \eta$$

para cada K-sistema $\{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ del intervalo I subordinada a δ. Entonces,

$$\mu\left(I \cap \bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right) \leq \frac{2\eta}{\varepsilon}$$

para cada $\varepsilon > 0$, donde $J = \{t \in I : g(t) \geq \varepsilon\}$.

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Puesto que $I \cap \bigcup_{t\in J} \gamma(t) \subseteq I$ un conjunto abierto en I, en particular medible, entonces, existe un conjunto compacto $F \subseteq I \cap \bigcup_{t\in J} \gamma(t)$ tal que

$$\mu\left(I \cap \bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right) \leq \mu(F) + \frac{\eta}{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Notemos que $\gamma\big|_F$ es un calibre sobre F. Por consiguiente, por el Lema 1.1.2, sea

$$\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$$

una K-partición de I subordinada a $\gamma\big|_F$. Observemos que $\mathcal{P}$ es un K-sistema de I subordinada a γ. Dado que $F = \bigcup_{i=1}^n I_i$ y $g(t_i) \geq \varepsilon$, para cada $i = 1,2,\ldots,n$, resulta que

$$g(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n g(t_i)\mu(I_i) \geq \varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(I_i) = \varepsilon\mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \varepsilon\mu(F).$$

La penúltima igualdad se justifica por el hecho de que $I_i \cap I_j$ es el conjunto vacío o un conjunto unitario para todo $i \neq j$. Además, como $g(\mathcal{P}) \leq \eta$, entonces, deducimos que

$$\mu(F) < \frac{\eta}{\varepsilon}. \tag{4.6}$$

Finalmente, por las desigualdades dada en (4.5) y (4.6), concluimos que

$$\mu\left(I \cap \bigcup_{t\in J} (t - \delta(t), t + \delta(t))\right) \leq \frac{2\eta}{\varepsilon}.$$

Esto acaba la prueba. □

Además, un razonamiento similar al que hicimos para demostrar la Proposición 4.2.1 también nos permite probar la siguiente proposición.

Proposición 4.4.1. *Supongamos que $f \in \mathcal{HK}([0,1],X)$. Entonces, para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es también Henstock-Kurzweil integrable sobre I y*

$$x^*\left((HK)\int_I f\right) = (HK)\int_I x^* \circ f.$$

A continuación vamos a dar una relación interesante entre $\mathcal{P}([0,1],X)$ y $\mathcal{M}([0,1],X)$ y $\mathcal{HK}([0,1],X)$ debido a D. H. Fremlin [12].

Teorema 4.4.2. *Supongamos que $f : I \to X$ es Pettis integrable y Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Entonces, f es McShane integrable sobre I y*

$$(M)\int_I f = (HK)\int_I f = (P)\int_I f.$$

Demostración. Puesto que f es Pettis integrable sobre I, entonces, para cada $x^* \in X^*$, la función $(x^* \circ f)\cdot\chi_E : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable sobre I y

$$x^*\left((P)\int_E f\right) = (L)\int_I (x^* \circ f)\cdot\chi_E.$$

Luego, para cada $x^* \in X^*$, por el Teorema 2.2.2, $(x^* \circ f)\cdot\chi_E \in \mathcal{M}([0,1])$ y, además,

$$x^*\left((P)\int_E f\right) = (M)\int_I (x^* \circ f)\cdot\chi_E.$$

Como consecuencia, por la Proposición 2.1.6, $(x^* \circ f)\cdot\chi_E \in \mathcal{HK}([0,1])$ y

$$x^*\left((P)\int_E f\right) = (HK)\int_I (x^* \circ f)\cdot\chi_E \quad \text{para cada } x^* \in X^*.$$

Además, teniendo en cuenta que $(x^* \circ f)\cdot\chi_E = x^* \circ (f\cdot\chi_E)$ y la Proposición 4.4.1, tenemos

$$x^*\left((P)\int_E f\right) = (HK)\int_I x^* \circ (f\cdot\chi_E) = x^*\left((HK)\int_I f\cdot\chi_E\right) = x^*\left((HK)\int_E f\right)$$

para cada $x^* \in X^*$. De esto último y del teorema de Hahn Banach se sigue que

$$(P)\int_E f = (HK)\int_E f \quad \text{para cada conjunto } E \subseteq I \text{ medible.} \tag{4.7}$$

Puesto que f es Pettis integrable sobre I, entonces, por el Teorema 9.2 de [20], resulta que

$$K = \{x^* \circ f : x^* \in B(X^*)\} \subseteq \mathcal{L}_1([0,1])$$

es totalmente acotado con respecto a la seminorma $||.||_1$. Por consiguiente, para cada $\eta > 0$, existe una colección finita $C = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\} \subseteq K$ con la siguiente propiedad: para cualquier $h \in K$ existe un $h_k \in C$ de manera que

$$||h - h_k||_1 = (L)\int_I |h - h_k| = (M)\int_I |h - h_k| \leq \eta.$$

Ahora fijemos $\varepsilon > 0$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $\eta_k > 0$ de la siguiente manera:

$$\eta_k = \frac{\varepsilon^2}{2^k(2\varepsilon + 24k)}.$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una colección finita $C_k = \{h_{k,1}, h_{k,2}, \ldots, h_{k,r(k)}\}$ tal que

$$\text{para cada } h \in K \text{ existe } h_{k,l} \in C_k \text{ de manera que } (M)\int_I |h - h_{k,l}| \leq \eta_k. \tag{4.8}$$

Fijemos un $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. Puesto que f es integrable Henstock-Kurzweil sobre I, existe un calibre $\gamma_k : I \to \mathcal{O}$ tal que si $\mathcal{P}$ es una K-partición de I subordinada a γ_k, entonces,

$$\left|\left|(HK)\int_I f - f(\mathcal{P})\right|\right| < \eta_k. \tag{4.9}$$

Ahora sean el conjunto E_k y el calibre $\gamma : I \to \mathcal{O}$ definidos mediante

$$E_k = \{t \in I : k-1 \leq ||f(t)|| < k\} \quad \text{y} \quad \gamma(t) = \gamma_k(t) \text{ si } t \in E_k.$$

A esta altura es evidente que $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $E_n \cap E_m = \emptyset$ siempre que $n \neq m$, ya que, es un ejercicio sencillo que hemos realizado muchas veces a lo largo de esta memoria. A continuación nuestro objetivo es demostrar que f es integrable McShane sobre I y

$$(M)\int_I f = (P)\int_I f.$$

Para ello, por el Lema de Cousin, Lema 2.1.1, sean $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ una M-partición de I subordinada a γ y h un elemento cualquiera de K. Además, definimos

$$J_k = \Big\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : t_i \in E_k\Big\} \quad \text{y} \quad H_k = \bigcup_{i \in J_k} I_i.$$

Ahora elegimos un $h_{k,l} \in C_k$ tal que se cumpla la desigualdad dada en (4.8). Entonces,

$$\left|(M)\int_{H_k}(h-h_k)\right| = \left|(L)\int_{H_k}(h-h_k)\right| \le (L)\int_{H_k}|h-h_k| \le (L)\int_I |h-h_k| \le \eta_k. \quad (4.10)$$

Asimismo, puesto que $h_{k,l}$ es McShane integrable sobre I, entonces, resulta que

$$\left|h_{k,l}(\mathcal{P}) - (M)\int_I h_{k,l}\right| \le \eta_k.$$

Observemos que la colección $\mathcal{S} = \{(t_i, I_i) : i \in J_k\}$ es un M-sistema en I subordinado a γ. Por consiguiente, por el Lema de Saks-Hentock, Lema 2.1.2, tenemos

$$\left|\sum_{i\in J_k}\left(h_{k,l}(t_i)\mu(I_i) - (M)\int_{I_i} h_{k,l}\right)\right| = \left|h_{k,l}(\mathcal{S}) - \sum_{i\in J_k}(M)\int_{I_i} h_{k,l}\right| \le \eta_k.$$

Luego, por la equivalencia Lebesgue-McShane y la Proposición A.2.5, concluimos que

$$\left|h_{k,l}(\mathcal{S}) - (M)\int_{H_k} h_{k,l}\right| \le \eta_k \quad (4.11)$$

Sea $\mathcal{R} = \{(v_r, V_r) : r = 1, 2, \ldots, m\}$ un K-sistema en I subordinada a γ y definimos

$$H = \bigcup_{r=1}^{m} V_r.$$

Notemos que H es un subconjunto medible de I y $\mu(V_r \cap V_s) = 0$ si $r \neq s$. Luego, por el Lema 4.1.1, (4.7), el Lema de Saks-Hentock, Lema 1.3.1, y (4.9), tenemos

$$\left\|f(\mathcal{R}) - (P)\int_H f\right\| = \left\|\sum_{r=1}^{m}\left(f(v_r)\mu(V_r) - (P)\int_{V_r} f\right)\right\| \le \eta_k.$$

Observemos que, por la Proposición 4.2.1, para cada $x^* \in X^*$,

$$(M)\int_E x^* \circ f = \int_I (x^* \circ f)\cdot \chi_E = x^*\left((M)\int_I f \cdot \chi_E\right) = x^*\left((M)\int_E f\right)$$

para cada conjunto $E \subseteq I$ medible. Por consiguiente, para cada $x^* \in B(X^*)$,

$$\begin{aligned}\left|(x^*\circ f)(\mathcal{R}) - (M)\int_H x^*\circ f\right| &= \left|x^*(f(\mathcal{R})) - x^*\left((M)\int_H f\right)\right| = \left|x^*\left(f(\mathcal{R}) - (M)\int_H f\right)\right| \\ &\le \|x^*\|_* \cdot \left\|f(\mathcal{R}) - (P)\int_H f\right\| \le \left\|f(\mathcal{R}) - (P)\int_H f\right\| \le \eta_k.\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que para cada elemento $x^* \circ f$ del conjunto K, resulta que

$$\left|(x^* \circ f)(\mathcal{R}) - (M)\int_H x^* \circ f\right| \leq \eta_k.$$

En particular, Puesto que $h, h_{k,l}$ son elementos de K, entonces, tenemos

$$\left|(h - h_{k,l})(\mathcal{R}) - (M)\int_H (h - h_{k,l})\right| \leq \left|h(\mathcal{R}) - (M)\int_H h\right| + \left|h_{k,l}(\mathcal{R}) - (M)\int_H h_{k,l}\right| \leq 2\eta_k.$$

Recordemos que habíamos elegido $h_{k,l} \in C_k$ de forma que se cumpla (4.8). Por lo tanto,

$$(h - h_{k,l})(\mathcal{R}) \leq |(h - h_{k,l})(\mathcal{R})| \leq \left|(h - h_{k,l})(\mathcal{R}) - (M)\int_H (h - h_{k,l})\right| + (M)\int_I |h - h_{k,l}| < 3\eta_k.$$

Ahora definimos $J = \{t \in I : h(t) - h_{k,l}(t) \geq \varepsilon\}$. Entonces, por el Lema 4.4.1, resulta que

$$\mu\left(I \cap \bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right) \leq \frac{6\eta_k}{\varepsilon}. \tag{4.12}$$

Una vez establecida la desigualdad anterior, consideremos el siguiente conjunto:

$$\bigcup_{i\in W_+} I_i \quad \text{donde} \quad W_+ = \{i \in J_k : h(t_i) - h_{k,l}(t_i) \geq \varepsilon\}.$$

Notemos que $I_i \subseteq I \cap \gamma(t_i)$ para cada $i \in W$. Ahora denotemos por $T = \{t_i : i \in W_+\}$. Entonces, $\{I \cap \gamma(t_i) : i \in W_+\} = \{I \cap \gamma(t_i) : t_i \in T\} \subseteq J$ y, por consiguiente,

$$\bigcup_{i\in W_+} I_i \subseteq \bigcup_{i\in W_+} (I \cap \gamma(t_i)) = \bigcup_{t_i\in T} (I \cap \gamma(t_i)) = I \cap \left(\bigcup_{t_i \in T} \gamma(t_i)\right) \subseteq I \cap \left(\bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right).$$

Además, teniendo en cuenta la Proposición A.2.1 y (4.12), podemos concluir que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in W_+} I_i\right) = \sum_{i\in W_+} \mu(I_i) \leq \mu\left(\bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right) \leq \frac{6\eta_k}{\varepsilon}.$$

De manera similar, si denotamos por $W_- = \{i \in J_k : h_{k,l}(t_i) - h(t_i) \leq -\varepsilon\}$, resulta que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in W_-} I_i\right) = \sum_{i\in W_-} \mu(I_i) \leq \mu\left(\bigcup_{t\in J} \gamma(t)\right) \leq \frac{6\eta_k}{\varepsilon}.$$

Sea $W = \{i \in J_k : |h(t_i) - h_{k,l}(t_i)| \geq \varepsilon\}$. Entonces, de estas dos estimaciones se sigue

$$\sum_{i\in W} \mu(I_i) = \sum_{i\in W_+} \mu(I_i) + \sum_{i\in W_-} \mu(I_i) \leq \frac{12\eta_k}{\varepsilon}.$$

Notemos que, para cada $t \in I$, $|h(t) - h_{k,l}(t)| \leq |h(t)| + |h_{k,l}(t)| \leq 2||f(t)||$ ya que,

$$h(t) = x_1^*(f(t)) \quad \text{y} \quad h_{k,l}(t) = x_2^*(f(t)) \quad \text{para algunos } x_1^*, x_2^* \in B(X^*).$$

En particular, si $i \in J_k$, $|h(t_i) - h_{k,l}(t_i)| \leq 2||f(t_i)|| < 2k$, ya que, $t_i \in E_k$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J_k} |h(t_i) - h_{k,l}(t_i)|\mu(I_i) &= \sum_{i\in W} |h(t_i) - h_{k,l}(t_i)|\mu(I_i) + \sum_{i\in J_k\setminus W} |h(t_i) - h_{k,l}(t_i)|\mu(I_i)\\ &\leq 2k\sum_{i\in W}\mu(I_i) + \varepsilon \sum_{i\in J_k\setminus W}\mu(I_i) \leq \frac{24k\eta_k}{\varepsilon} + \varepsilon\sum_{i\in J_k}\mu(I_i). \end{aligned} \tag{4.13}$$

De la definición de J_k y la de $\mathcal{S}$ se sigue que las siguientes igualdades son válidas:

$$\sum_{i\in J_k}(h_{k,l}(t_i) - h(t_i))\mu(I_i) = \sum_{t_i\in E_k}(h_{k,l}(t_i) - h(t_i))\mu(I_i) = h_{k,l}(\mathcal{S}) - h(\mathcal{S}).$$

Luego, de esto último y de las estimaciones dadas en (4.10), (4.11) y (4.13) resulta que

$$\begin{aligned}\left|(M)\int_{H_k} h - \sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)\right| &\leq \left|(M)\int_{H_k} h - (M)\int_{H_k} h_{k,l}\right| + \left|(M)\int_{H_k} h_{k,l} - h_{k,l}(\mathcal{S})\right|\\ &\quad + |h_{k,l}(\mathcal{S}) - h(\mathcal{S})| \leq \eta_k + \eta_k + \left|\sum_{i\in J_k}(h_{k,l}(t_i) - h(t_i))\mu(I_i)\right|\\ &\leq 2\eta_k + \sum_{i\in J_k}|h_{k,l}(t_i) - h(t_i)|\mu(I_i) \leq 2\eta_k + \frac{24k\eta_k}{\varepsilon} + \varepsilon\sum_{i\in J_k}\mu(I_i)\\ &= \left(2 + \frac{24k}{\varepsilon}\right)\eta_k + \varepsilon\sum_{i\in J_k}\mu(I_i) = \frac{2\varepsilon + 24k}{\varepsilon}\eta_k + \sum_{i\in J_k}\mu(I_i).\end{aligned}$$

La última igualdad es debido a las definiciones de η_k y H_k. Luego, podemos concluir que

$$\left|(M)\int_{H_k} h - \sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon\mu(H_k) \quad \text{para cada } k \geq 1. \tag{4.14}$$

Observemos que si $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, entonces, existe un único k_0 tal que $t_i \in E_{k_0}$. Luego,

$$i \in J_{k_0} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Como i era un elemento arbitrario del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, entonces, concluimos que

$$\{1,2,\ldots,n\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Pero, evidentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $J_k \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Por esta razón, tenemos

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \subseteq \{1,2,\ldots,n\}.$$

Estas dos inclusiones anteriores nos permiten escribir la siguiente igualdad:

$$Q := \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \{1,2,\ldots,n\}.$$

Así pues, la suma de Riemann de h asociada a la partición $\mathcal{P}$ se puede expresar como

$$h(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} h(t_i)\mu(I_i) = \sum_{i\in Q} h(t_i)\mu(I_i) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i). \tag{4.15}$$

La última igualdad de las igualdades anteriores es debido a que $J_k \cap J_l = \emptyset$ para cada $k \neq l$. También, notemos que si $I_l \in \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, entonces, $l \in \{1,2,\ldots,n\} = Q$. Por esta razón, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l \in J_{k_0}$. Esto último nos permite concluir que

$$I_l \in \bigcup_{i\in J_{k_0}} \{I_i\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\in J_k} \{I_i\}.$$

Además, evidentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i\in J_k}\{I_i\} \subseteq \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$. Por esto, tenemos

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\in J_k} \{I_i\} \subseteq \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}.$$

Reuniendo las dos inclusiones anteriores podemos concluir que

$$\mathcal{A} := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\in J_k} \{I_i\} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}.$$

Dado que $J_k \cap J_l = \emptyset$ si $k \neq l$. Entonces, $\bigcup_{i\in J_k}\{I_i\} \cap \bigcup_{i\in J_j}\{I_i\} = \emptyset$ si $k \neq l$. Por lo tanto,

$$(M)\int_I h = \sum_{i=1}^{n} (M)\int_{I_i} h = \sum_{I_i\in\mathcal{A}} (M)\int_{I_i} h = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in J_k} (M)\int_{I_i} h = \sum_{k=1}^{\infty} (M)\int_{H_k} h. \tag{4.16}$$

La Proposición 2.1.5 justifica la primera y la última de la anterior cadena de igualdades. De las igualdades dadas en (4.15), (4.16) y la estimación dada en (4.14), se sigue que

$$\begin{aligned}\left|h(\mathcal{P})-(M)\int_I h\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)-\sum_{k=1}^{\infty}(M)\int_{H_k} h\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{H_k} h\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)-(M)\int_{H_k} h\right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left|(M)\int_{H_k} h-\sum_{i\in J_k} h(t_i)\mu(I_i)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2^k}+\varepsilon\mu(H_k)\right) \\ &= \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\mu(H_k)=\varepsilon+\varepsilon\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\mu(H_i).\end{aligned}$$

Observemos que de la Proposición A.2.1 se sigue que $\sum_{i=1}^{k}\mu(H_i)=\mu(\bigcup_{i=1}^{k}H_i)$. Luego,

$$\left|h(\mathcal{P})-(M)\int_I h\right| \leq \varepsilon+\varepsilon\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)$$

donde $A_k = H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_k$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Como $(A_k)_k$ es una sucesión creciente de subconjuntos medible de I, entonces, por el Teorema A.2.9, resulta que

$$\left|h(\mathcal{P})-(M)\int_I h\right| \leq \varepsilon+\varepsilon\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)=\varepsilon+\varepsilon\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right).$$

Además, teniendo en cuenta la monotonía de la medida de Lebesgue, tenemos

$$\left|h(\mathcal{P})-(M)\int_I h\right| \leq 2\varepsilon,$$

ya que, $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subseteq I$. Puesto que h era un elemento arbitrario de K, concluimos que

$$\begin{aligned}\left|(x^*\circ f)(\mathcal{P})-(M)\int_I(x^*\circ f)\right| &= \left|x^*(f(\mathcal{P}))-x^*\left((P)\int_I f\right)\right| \\ &= \left|x^*\left(f(P)-(P)\int_I f\right)\right| \leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

para cada $x^*\in B(X^*)$. Luego, una aplicación del teorema de Hahn Banach nos revela que

$$\left\|f(\mathcal{P})-(P)\int_I f\right\| \leq 2\varepsilon$$

para cualquier partición $\mathcal{P} = \{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ del intervalo I subordinada a γ y cada $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, f es integrable McShane sobre el intervalo I y

$$(M)\int_I f = (P)\int_I f.$$

Esto finaliza la prueba. □

Puesto que cualquier función McShane integrable es Pettis integrable por el Teorema 4.2.2 y integrable Henstock-Kurzweil por la Proposición 2.1.6, entonces, tenemos el siguiente corolario del Teorema 4.4.2.

Teorema 4.4.3. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $f \in \mathcal{M}([0,1], X)$.

(II) $f \in \mathcal{P}([0,1], X) \cap \mathcal{HK}([0,1], X)$,

es decir, tenemos $\mathcal{M}([0,1], X) = \mathcal{P}([0,1], X) \cap \mathcal{HK}([0,1], X)$.

Este es el resultado de D. H. Fremlin dado en [12] (Teorema 8). Nuestra demostración del Teorema 4.4.2 sigue de cerca las ideas de [12]. Además, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.4.3.

Corolario 4.4.1. *Supongamos que $f : I \to X$ es integrable Pettis sobre I. Entonces, f es integrable McShane sobre I si, y solamente si, f es integrable Henstock-Kurzweil sobre I.*

Vamos a acabar esta sección con una interesante caracterización de las funciones McShane integrable que fue demostrado por D. H. Fremlin ([12], Corolario 9). Es en este resultado donde el Teorema 4.4.2 encuentra su más importante aplicación.

Teorema 4.4.4. *Supongamos que $f : I \to X$ es una función cualquiera. Entonces, f es McShane integrable sobre I si, y solamente si, para cada conjunto $E \subseteq I$ medible, la función $f \cdot \chi_E : I \to X$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I.*

Demostración. Supongamos que f es McShane integrable sobre I y sea $E \subseteq I$ cualquier conjunto medible. Entonces, por el Teorema 2.3.4, $f \cdot \chi_E$ es McShane integrable sobre I. Luego, por el Teorema 4.4.3, $f \cdot \chi_E$ es Henstock-integrable sobre I.
Recíprocamente, supongamos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre cualquier subconjunto medible de I. Sean $x^* \in X^*$ y $E \subseteq I$ medible. Entonces, $x^* \circ (f \cdot \chi_E) : I \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y, por la Proposición 3.4.2, tenemos

$$(HK)\int_I x^* \circ (f \cdot \chi_E) = x^*\left((HK)\int_I f \cdot \chi_E\right). \tag{4.17}$$

Asimismo, por la Proposición 1.4.9, la función $x^* \circ f : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable sobre I. Luego, por el Teorema 2.2.2, $x^* \circ f$ es McShane integrable sobre I. De nuevo, por el Teorema 2.3.4, $(x^* \circ f) \cdot \chi_E = x^* \circ (f \cdot \chi_E)$ es McShane integrable sobre I y

$$(HK) \int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E = (M) \int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E = (L) \int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E. \tag{4.18}$$

De las igualdades anterior, la primera es debido a la Proposición 2.1.6 y la segunda al Teorema 2.2.2. Como $x^* \circ (f \cdot \chi_E) = (x^* \circ f) \cdot \chi_E$, entonces, por (4.17) y (4.18), tenemos

$$(L) \int_I (x^* \circ f) \cdot \chi_E = x^* \left((HK) \int_I f \cdot \chi_E \right).$$

Evidentemente, la igualdad anterior también se puede expresar de la siguiente manera:

$$(L) \int_E x^* \circ f = x^* \left((HK) \int_E f \right).$$

Puesto que la igualdad anterior se cumple para cada $x^* \in X^*$ y conjunto $E \subseteq I$ medible, entonces, resulta que f es Pettis integrable sobre I. Igualmente, por hipótesis, f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Por consiguiente, por el Teorema 4.4.3, f es McShane integrable sobre I. Esto finaliza la demostración. □

4.5. $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ no es cierta en general

Por el Teorema 4.2.2, sabemos que cada función McShane integrable es también Pettis integrable. Así que, nuestro objetivo de esta sección es comentar brevemente algunos resultados que demuestren que la inclusión $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ no es verdadera en general, pero sin entrar mucho en detalles técnicos.

El primer ejemplo que muestra que existen funciones Pettis integrables que no son McShane integrables fue dado por Fremlin y Mendoza en [13], 3C Example. Las ideas esenciales del ejemplo de Fremlin y Mendoza son las siguientes:
Supongamos que $(E_n)_n$ es una sucesión de subconjuntos medibles de I estocásticamente independientes tal que $\mu(E_n) = 1/(n+1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\{\chi_{E_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es estable en el sentido de Talagrand (consultar [21], Definición 4.24). Ahora sea $f : I \to \ell_\infty(\mathbb{N})$ la función definida mediante

$$f(t)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in E_n \\ 0 & \text{si } t \in I \setminus E_n. \end{cases}$$

Puesto que esta función es acotada y propiamente medible [1], es Talagrand integrable y, por lo tanto, debe ser Pettis integrable. El valor de la integral es $w = \{1/2, 1/3, \ldots,\} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. En [13] se demuestra que la suposición de integrabilidad de McShane de f conduce a una contradicción. Este resultado de Fremlin y Mendoza muestra que la posible hipótesis de $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ es falsa cuando X es un espacio de Banach arbitrario.
Otro ejemplo es dado por L. Di Piazza y D. Preiss en [5] mostrando que bajo la Hipótesis del Continuo, existe una función $f : I \to \ell_\infty(\omega_1)$ escalarmente nula sobre I que no es McShane integrable sobre I, donde ω_1 es el primer ordinal no-numerable. Por esta razón empezamos definiendo la noción de una función escalarmente nula.

Definición 4.5.1. *Una función $f : I \to X$ se dice escalarmente nula sobre I si, y solamente si, para cada x^* perteneciente a X^*, $x^* \circ f = 0$ en casi todo punto sobre I.*

Además, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición A.2.6 y la Definición 4.1.1.

Proposición 4.5.2. *Sea $f : I \to X$ una función escalarmente nula sobre I. Entonces, f es Pettis integrable sobre I y, para cada conjunto $E \subseteq I$ medible, tenemos*

$$(P)\int_E f = 0.$$

Observemos, por la Proposición 4.5.2, que f debe ser Pettis integrable sobre I con la integral de Pettis igual a $0 \in X$. Ahora presentamos las ideas fundamentales del ejemplo de Di Piazza y Preiss: Supongamos que $(N_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ y $(C_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ son dos colecciones de subconjuntos de I que satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Para cada $\alpha \in \omega_1$, N_α es un subconjunto de I de medida nula.
(b) $N_\alpha \subseteq N_\beta$ si $\alpha < \beta$.
(c) Para cada conjunto $E \subseteq I$ de medida nula, existe un $\alpha \in \omega_1$ tal que $E \subseteq N_\alpha$.
(d) Para cada $\alpha \in \omega_1$, C_α es un conjunto numerable.
(e) $C_\alpha \subset C_\beta$ si $\alpha < \beta$.
(f) Para cada conjunto $E \subseteq I$ numerable, existe un $\alpha \in \omega_1$ tal que $E \subseteq C_\alpha$.

Ahora sea $f : I \to \ell_\infty(\omega_1)$ la función definida mediante

$$f(t)(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in E_\alpha \setminus C_\alpha \\ 0 & \text{si } t \in I \setminus (E_\alpha \setminus C_\alpha). \end{cases}$$

En [5], se muestra que esta función f es escalarmente nula sobre I, pero no McShane integrable sobre I. Ambos ejemplos abren el problema de caracterizar a los espacios de

[1] Es traducción del autor de “properly measurable”. Esta terminología aparece en [21], Definición 4.25.

Banach para los que la inclusión $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ es válida. Durante mucho tiempo la única condición suficiente para la inclusión $\mathcal{P}([0,1],X) \subseteq \mathcal{M}([0,1],X)$ fue la separabilidad del espacio X (Teorema 4.3.3). Sin emgargo, si nos centramos en los espacios de Banach no-separables, un paso crucial en este campo fue dado por L. Di Piazza y D. Preiss en [5]. Ellos, demostraron lo siguiente:

Teorema 4.5.3. *Supongamos que X es un espacio super-reflexivo o $X = c_0(\Gamma)$ para algún conjunto Γ. Entonces, toda función $f : I \to X$ Pettis integrable es McShane integrable.*

La prueba del teorema anterior utiliza resultados profundos sobre los espacios de Banach no-separables y su geometría. La extraordinariamente compendiosa monografía [10] es la mejor fuente para comprenderla. Solamente recordemos que un espacio de Banach X se dice es super-reflexivo si, y sólo si, todo espacio de Banach finitamente representable en X es reflexivo. Un espacio de Banach Y es finitamente representable en X si, y solamente si, para cada subespacio $F \subseteq Y$ de dimensión finita y $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal inyectivo $T : F \to T(F) \subseteq X$ tal que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| < 1+\varepsilon$. Sin embargo, en la demostración del Teorema 4.5.3 en [5], los autores han utilizado la caracterización de espacios super-reflexivos X como aquellos que tienen una norma uniformemente convexa equivalente. Recordemos que una norma $||.||$ en X se dice uniformemente convexa si, y solamente, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B(X)$

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \geq 1-\delta \Rightarrow ||x-y|| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.
También, en los trabajos de Deville-Rodríguez y Avilés-Plebanek-Rodríguez se profundiza en el problema de la equivalencia de las integrales de McShane y Pettis.

Apéndice A

Complementos

A.1. Convergencia de base de filtro

Teorema A.1.1. *Supongamos que $(X, ||.||)$ un espacio de Banach y sea $\mathcal{B}$ una base de Filtro sobre X. Entonces, $\mathcal{B}$ es convergente si, y solamente si, es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ converge hacia $x \in X$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $F_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tal que $F_\varepsilon \subseteq B(x, \varepsilon/2)$. Luego, si $(u,v) \in F_\varepsilon \times F_\varepsilon$, entonces, $u, v \in B(x, \varepsilon/2)$. Por consiguiente, $||u-v|| \leq ||u-x|| + ||x-v|| < \varepsilon$. Puesto que (u,v) era un elemento arbitrario de $F_\varepsilon \times F_\varepsilon$, entonces, concluimos que $F_\varepsilon \times F_\varepsilon \subseteq \{(u,v) \in S \times S : ||u-v|| < \varepsilon\}$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es una base de filtro de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de filtro de Cauchy. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un F_n perteneciente a $\mathcal{B}$ de manera que

$$F_n \times F_n \subseteq \left\{(u,v) \in S \times S : ||u-v|| < \frac{1}{n}\right\}. \tag{A.1}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ (esta intersección no es vacía, ya que, $\mathcal{B}$ es una base de filtro). Además, observamos que, por construcción, si $k \leq n$, entonces, $x_n \in F_k$. Afirmamos que la sucesión $(x_n)_n$ así obtenida es una sucesión de Cauchy en X. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Entonces, si $n, m \geq n_0$, resulta que $x_n, x_m \in F_{n_0}$ y, por lo tanto, $||x_n - x_m|| < 1/n_0 < \varepsilon$. Esto prueba que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en X. Por consiguiente, dado que X es completo, existe un $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Ahora veamos que $\mathcal{B}$ converge hacia x. Tenemos que probar que, para entorno $N(x)$ de x, existe un $F \in \mathcal{B}$ tal que $F \subseteq N(x)$. Fijemos un entorno $N(x)$ de x. Entonces, existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq N(x)$. Además, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $1/n_0 < r/2$. Si $n \geq n_0$, como $x_n, x_{n_0} \in F_{n_0}$, entonces, $||x_n - x_{n_0}|| < 1/n_0$. Luego, si n tiende hacia infinito, entonces,

$$||x - x_{n_0}|| < \frac{1}{n_0},$$

ya que, $||.||$ es continua. Por esto último y teniendo en cuenta (A.1), si $y \in F_{n_0}$, entonces,

$$||y-x|| \leq ||x-x_{n_0}|| + ||x_{n_0}-y|| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < r.$$

Por lo tanto, podemos concluir que $F_{n_0} \subseteq B(x,r) \subseteq N(x)$. Dado que $N(x)$ era un entorno arbitrario de x, entonces, la prueba es completa. □

A.2. Medida e integral de Lebesgue

Proposición A.2.1. *Sea $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ una colección finita de subconjuntos medibles de I. Además, supongamos que $\mu(E_n \cap E_m) = 0$ si $n \neq m$, entonces,*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right).$$

Demostración. Supongamos que $E \subseteq I$ es medible tal que $\mu(E) = 0$. Entonces, □

Demostración. Para probarla para dos subconjuntos medibles de I, digamos, E_1, E_2. El caso general se puede deducir fácilmente por inducción por ejemplo. En efecto, aplicando dos veces la propiedad aditividad numerable de la medida de Lebesgue, tenemos

$$\mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Además, puesto que $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, entonces concluimos que

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Esto acaba la prueba. □

Proposición A.2.2. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Entonces, $f \cdot \chi_E$ es también Lebesgue integrable sobre I para cualquier conjunto $E \subseteq I$ medible y, por definición,*

$$(L)\int_E f = (L)\int_I f \cdot \chi_E.$$

Demostración. Puesto que $f = f^+ - f^-$, entonces, podemos suponer, y así lo haremos que, $f \geq 0$. Además, $E \subseteq I$ un conjunto medible arbitrario. Definimos los dos conjuntos:

$$A = \left\{ \int_I s : \ s \text{ es una función simple sobre } I \text{ y } 0 \leq s \leq f \cdot \chi_E \right\} \quad \text{y}$$

$$B = \left\{ \int_I s: \; s \text{ es una función simple sobre } I \text{ y } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Observemos que $A \subseteq B$ y, en consecuencia, $\sup(A) \leq \sup(B)$. Esto demuestra que

$$(L)\int_I f \cdot \chi_E \leq (L)\int_I f < +\infty.$$

Esto finaliza la prueba. □

Proposición A.2.3. *Supongamos que $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y A, B son dos subconjuntos medibles del intervalo I de manera que $A \cap B = \emptyset$, entonces,*

$$(L)\int_{A \cup B} = (L)\int_A + (L)\int_B f.$$

Demostración. Observemos que $A \cup B \subseteq I$ es medible. Además, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, ya que,

$$A \cap B = \emptyset.$$

Por lo tanto, $f \cdot \chi_{A \cup B} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_B$. Además, teniendo en cuenta la Proposición A.2.2 y la linealidad de la integral de Lebesgue, tenemos

$$(L)\int_{A \cup B} = (L)\int_I f \cdot \chi_{A \cup B} = (L)\int_I f \cdot \chi_A + (L)\int_I f \cdot \chi_B = (L)\int_A f + (L)\int_B f.$$

Este acaba la prueba. □

Proposición A.2.4. *Sean $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y $N \subseteq I$ medible con $\mu(N) = 0$. Entonces,*

$$\int_N f = 0.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f \geq 0$, ya que

$$f = f^+ - f^-.$$

Ahora sea una función simple tal que $0 \leq s \leq f$. Además, definimos

$$A = \left\{ \int_I s : \text{s es una función simple sobre } I \text{ y } 0 \leq s \leq f \right\}$$

y sea $a \in A$. Entonces, podemos expresar a de la siguiente manera:

$$a = \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E_k \cap N)$$

donde cada $x_k \in [0,\infty)$ y $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una partición medible de I. Pero, como cada $E_k \cap E \subseteq N$, entonces, $\mu(E_k \cap N) \leq \mu(N) = 0$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$. Luego, $a = 0$. Puesto que a era un elemento arbitrario de A, entonces, $\sup(A) \leq 0$. De esto se sigue que

$$\int_I f = \sup(A) = 0,$$

ya que, por otro lado, $\sup(A) \geq a \geq 0$ para cada $a \in A$. Esto termina la prueba. $\square$

Proposición A.2.5. *Sean $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$ y $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una colección finita de subconjuntos medibles de I tal que $\mu(E_n \cap E_m) = 0$ si $n \neq m$. Entonces,*

$$(L)\int_E f = \sum_{k=1}^{k} (L)\int_{E_k} f \quad \textit{donde} \quad E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Demostración. Basta probarla para $n = 2$. El caso general de puede demostrar fácilmente por inducción. En efecto, por una doble aplicación de la Proposición A.2.3, resulta que

$$(L)\int_{E_1 \cup E_2} f + (L)\int_{E_1 \cap E_2} f = (L)\int_{E_1} f + (L)\int_{E_2} f.$$

Ahora puesto que $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, entonces, por la Proposición A.2.4, concluimos que

$$(L)\int_{E_1 \cup E_2} f = (L)\int_{E_1} f + (L)\int_{E_2} f.$$

Esto finaliza la prueba. $\square$

Proposición A.2.6. *Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,1])$. Si $f = 0$ en casi todo punto sobre I. Entonces,*

$$\int_E f = 0$$

para cada conjunto $E \subseteq I$ medible.

Demostración. Sea $N = \{t \in I : f(t) \neq 0\}$. Además, definimos estos dos conjuntos:

$$A = E \cap N \subseteq N \quad \text{y} \quad B = E \cap (I \setminus N) \subseteq I \setminus N.$$

Entonces, $A, B \subseteq I$ son medibles y $A \cap B = \emptyset$. Asimismo, notemos que $f = 0$ en B y $\mu(A) = 0$. Luego, teniendo en cuenta las Proposiciones A.2.3 y A.2.4, resulta que

$$(L)\int_E f = (L)\int_A f + (L)\int_B f = 0.$$

$\square$

Las demostraciones de los tres siguientes teoremas clásicos (el teorema del cubrimiento de Vitali, el teorema de Vitali-Carathéodory y la absoluta continuidad de la medida de Lebesgue) de la teoría de medida e integral de Lebesgue se pueden consultar en [2]. Más precisamente, son los Teoremas 9.1.28, 10.2.46 y 10.2.7, respectivamente.

Teorema A.2.7 (Cubrimiento de Vitali)**.** *Supongamos que $E \subseteq I$ y $\mathcal{V}$ un cubrimiento de Vitali de E. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\{I_1, \ldots, I_n\}$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{V}$ de manera que*

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n}\right) < \varepsilon. \tag{✇}$$

Corolario A.2.1. *Sea $E \subseteq I$ y $\mathcal{V}$ un cubrimiento de Vitali de E. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\{I_1, \ldots, I_n\}$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{V}$ de manera que*

$$\mu^*(E) < \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) + \varepsilon.$$

$$\mu^*(E) < \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) + \varepsilon.$$

Demostración. Por el Teorema A.2.7, para cada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita $\{I_1, \ldots, I_n\}$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{V}$ de manera que

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n}\right) < \varepsilon.$$

Además, observemos que las siguientes igualdades son válidas:

$$E = E \cap \left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)^c\right] = \left(\bigcup_{k=1}^{n} E \cap I_k\right) \bigcup \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) = \mu\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} E \cap I_k\right) \cup \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{k} I_k\right)\right] &\leq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E \cap I_k\right) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \\
\leq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(I_k) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \\
= \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) + \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) &< \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

En esta cadena de igualdades y desigualdades hemos utilizado la subaditividad numerable y la monótona de μ^*. También, hemos usado el hecho de que μ^* coincide con μ en los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, en particular en los intervalos acotados y, finalmente, (♣) justifica la última desigualdad. La prueba es completa. □

Teorema A.2.8 (Vitali-Carathéodory)**.** *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue integrable sobre I. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen funciones $u, v \in \mathcal{L}_1([0,1])$ tales que u es semicontinua inferiormente, v es semicontinua superiormente, $v \leq f \leq u$ y*

$$(L)\int_I (u - v) < \varepsilon.$$

Teorema A.2.9 (Absoluta continuidad)**.** *Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto $A \subseteq I$ medible con $\mu(A) < \delta$ se tiene que*

$$(L)\int_A |f| < \varepsilon.$$

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar [23], Teorema 1.19.

Teorema A.2.10. *Supongamos que $(A_n)_n$ una sucesión creciente ($A_n \subseteq A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$) de subconjuntos medible de I. Entonces, tenemos la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

A.3. Series en un espacio de Banach

Recordemos que la norma $||.||$ de X genera una topología natural que llamaremos topología fuerte. Sin embargo, existen otras topologías interesantes sobre X las cuales permiten obtener información valiosa sobre la estructura del espacio X. Una de tales topologías, la llamada topología débil, se genera a través de todos los funciones lineales sobre X, es decir, los elementos de X^*. Esto motiva la siguiente definición.

Definición A.3.1. *La topología débil sobre X es la topología menos fina (que contiene menos abiertos) bajo la cual cada funcional lineal $x^* : X \to \mathbb{R}$ es continuo.*

Esta es una "verdadera" definición en el sentido de que es posible construir la topología débil sobre X. En efecto, dicha topología debe contener, al menos, todos los conjuntos de la forma ${x^*}^{-1}(U)$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}$. Por consiguiente, si consideramos todas las uniones arbitrarias e intersecciones finitas de dichos conjuntos obtenemos una topología sobre X y esta es, por supuesto, la que tiene menos abiertos

entre las topologías que contienen los conjuntos $x^{*-1}(U)$ como abiertos.
Una vez que hemos definido la topología débil sobre X, podemos aplicar todas las nociones de topología que conocemos. Por ejemplo, un conjunto $K \subseteq X$ es débilmente compacto si, y solamente si, es compacto en la topología débil. Además, afortunadamente, la convergencia de una sucesión en la topología débil se caracteriza como sigue: La convergencia de una sucesión en la topología débil se puede caracterizar como:

Proposición A.3.2. *Una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ converge débilmente hacia $x \in X$ si, y solamente si, $(x^*(x_n))_n$ converge hacia $x^*(x)$ para cada $x^* \in X^*$.*

Una prueba del resultado anterior se puede consultar en [10], Proposición 3.7.

Corolario A.3.1. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en X. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente convergente hacía s perteneciente a X si, y solamente si, para cada $x^* \in X^*$, tenemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) = x^*(s).$$

Demostración. Basta definir $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ para cada $n \geq 1$ y aplicar la Proposición A.3.2 a la sucesión $(s_n)_n \subseteq X$. □

El siguiente resultado se obtiene en [8], Corolario 4, como una aplicación de la Teoría de Medidas Vectoriales:

Teorema A.3.3 (Orlicz-Pettis)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en el espacio de Banach X de tal manera que para cualquier sucesión $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ estrictamente creciente la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$$

es débilmente convergente. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente.

Finalizamos este apéndice con los dos siguientes resultados.

Teorema A.3.4. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en el espacio de Banach X. Es conocido que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) La serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente.
(2) La red $\{\sum_{n \in F} x_n : F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito}\}$ converge en X (el orden en el conjunto los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es el dado por la inclusión).
(3) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{n \in F} x_n\| \leq \varepsilon$ para todo subconjunto finito F de $\{N+1, N+2, \ldots\}$.

La equivalencia entre (2) y (3) es consecuencia de la completitud de X. La equivalencia entre (1) y (2) se pueden encontrar en [7], Teorema 1.5.

Proposición A.3.5. *Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie incondicionalmente convergente en X. Entonces, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x^*(x_n)| < \varepsilon$$

para cada $x^* \in X^*$ con $||x^*||_* = 1$.

Demostración. Por el aparatado (3) del Teorema A.3.4, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo subconjunto finito F de $\{N+1, N+2, \ldots\}$. Fijamos $x^* \in X^*$ con $||x^*||_* = 1$. Observemos que, dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$\sum_{n=N+1}^{N+k} |x^*(x_n)| \mu(E_n) = \sum_{n \in F^+} x^*(x_n) - \sum_{n \in F_-} x^*(x_n) = x^* \left(\sum_{n \in F^+} x_n - \sum_{n \in F_-} x_n \right)$$

donde F^+ (resp., F^-) denota el conjunto de los $n \in \{N+1, \ldots, N+k\}$ tales que $x^*(x_n) \geq 0$ (resp., $x^*(x_n) < 0$). Por consiguiente, esto nos permite deducir que

$$\sum_{n=N+1}^{N+k} |x^*(x_n)| \leq \left\| \sum_{n \in F^+} x_n - \sum_{n \in F_-} x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in F^+} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in F_-} x_n \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puesto que $k \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se sigue que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x^*(x_n)| \leq \varepsilon.$$

Esta desigualdad vale para cualquier $x^* \in X^*$ con $\|x^*\|_* = 1$. La prueba es completa. $\square$

Bibliografía

[1] T. M. APOSTOL, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[2] W. BRITO, *Las integrales de riemann, lebesgue y hentock-kurzweil*. Disponible libremente en http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf, s.f.

[3] A. M. BRUCKNER, J. B. BRUCKNER, AND B. S. THOMSON, *Real analysis*, Prentice-Hall, 1997.

[4] P. COUSIN, *Sur les fonctions de n variables complexes*, Acta mathematica, 19 (1895), pp. 1–61.

[5] L. DI PIAZZA AND D. PREISS, *When do mcshane and pettis integrals coincide?*, Illinois Journal of Mathematics, 47 (2003), pp. 1177–1187.

[6] J. DIESTEL, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer, 1984.

[7] J. DIESTEL, H. JARCHOW, AND A. TONGE, *Absolutely summing operators*, Cambridge university press, 1995.

[8] J. DIESTEL AND J. J. UHL JR, *Vector Measures*, vol. 15 of Mathematical Surveys and Monographs, Amer Mathematical Society, 1977.

[9] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS, AND V. ZIZLER, *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*, Springer Science & Business Media, 2011.

[10] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. M. SANTALUCÍA, J. PELANT, AND V. ZIZLER, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Springer, 2001.

[11] D. L. FORKERT, *The banach space-valued integrals of riemann, mcshane, henstock-kurzweil and bochner*. Disponible libremente en http://aurora.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/bac_forkert.pdf, 2012.

[12] D. FREMLIN, *The henstock and mcshane integrals of vector-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics, 38 (1994), pp. 471–479.

[13] D. FREMLIN AND J. MENDOZA, *On the integration of vector-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics, 38 (1994), pp. 127–147.

[14] R. A. GORDON, *The mcshane integral of banach-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics, 34 (1990), pp. 557–567.

[15] R. A. GORDON, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, vol. 4 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[16] T. HILDEBRANDT, *Integration in abstract spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society, 59 (1953), pp. 111–139.

[17] E. HILLE AND R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, vol. 31, American Mathematical Soc., 1996.

[18] T. JECH, *Set theory*, Academic Press, 2006.

[19] S. LANG, *Real and functional analysis*, Springer-Verlag New York, 1993.

[20] K. MUSIAŁ, *Topics in the theory of Pettis integration*, Università degli Studi di Trieste. Dipartimento di Scienze Matematiche, 1991. Disponible libremente en https://www.openstarts.units.it/bitstream/10077/4780/1/MusialRendMat23.pdf.

[21] K. MUSIAL, *Pettis integral*, Handbook of measure theory, 1 (2002), pp. 531–586. Dispobible libremente en http://www.math.uni.wroc.pl/~musial/HandbookPettis.pdf.

[22] J. RODRÍGUEZ RUIZ, *Integrales vectoriales de Riemann y Mcshane*. Disponible libremente en http://www.um.es/beca/Tesinas/TesinaJoseR.pdf, 2002.

[23] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, second ed., 1987.

[24] S. SCHWABIK AND G. YE, *Topics in Banach space integration*, vol. 10, World Scientific, 2005.

[25] M. SPIVAK, *Calculus*, W.A. Benjamin, Inc., New York, second ed., 1967.

[26] C. SWARTZ, *Introduction to gauge integrals*, World Scientific, 2001.

[27] C. W. SWARTZ AND D. S. KURTZ, *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*, vol. 13, World Scientific Publishing Company, 2012.

[28] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 1965.