Medibilidad en espacios de funciones continuas

José Rodríguez

Universidad de Murcia

II Country Mathematical Meeting

Torres, 5 de julio de 2012

1. Espacios de Banach arbitrarios
   - Espacios separables
   - σ-álgebras en espacios no separables
   - Medibilidad de la norma

2. Espacios de Banach de funciones continuas
   - σ-álgebras en espacios no separables
   - Medibilidad de la norma del supremo

Notación

X: espacio de Banach

$\|\cdot\|$: norma de X

$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

X^*: dual de X

semiespacio abierto: $\{x \in X : x^*(x) > a\}$ (donde $x^* \in X^*$ y $a \in \mathbb{R}$)

w: topología débil de X

w^*: topología débil* de X^*

σ-álgebras en espacios de Banach

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

σ-álgebras en espacios de Banach

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$: generada por los abiertos en norma

σ-álgebras en espacios de Banach

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$: generada por los abiertos en norma
- $\mathrm{Borel}(X, w)$: generada por los abiertos de la topología débil

σ-álgebras en espacios de Banach

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$: generada por los abiertos en norma
- $\mathrm{Borel}(X, w)$: generada por los abiertos de la topología débil
- $\mathrm{Cyl}(X, w)$: generada por los semiespacios abiertos

σ-álgebras en espacios de Banach

Tenemos varias **σ-álgebras** en X:

- $\mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$: generada por los abiertos en norma
- $\mathrm{Borel}(X, w)$: generada por los abiertos de la topología débil
- $\mathrm{Cyl}(X, w)$: generada por los semiespacios abiertos

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\mathrm{Cyl}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Demostración

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\Longrightarrow$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\implies$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.
2. X separable $\iff$ (B_{X^*}, w^*) metrizable

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\operatorname{Cyl}(X, w) \;=\; \operatorname{Borel}(X, w) \;=\; \operatorname{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\Longrightarrow$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.
2. X separable $\Longleftrightarrow$ (B_{X^*}, w^*) metrizable $\Longrightarrow$ (B_{X^*}, w^*) separable.

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X, w) \; = \; \mathrm{Borel}(X, w) \; = \; \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\implies$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.
2. X separable $\iff$ (B_{X^*}, w^*) metrizable $\implies$ (B_{X^*}, w^*) separable.
   Fijamos $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$.

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\implies$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.
2. X separable $\iff$ (B_{X^*}, w^*) metrizable $\implies$ (B_{X^*}, w^*) separable.
   Fijamos $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$.
3. Si $A_n = x_n + r_n B_X$ (bola cerrada de centro x_n y radio r_n) entonces

$$A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X : \; -r_n + x_m^*(x_n) \le x_m^*(x) \le r_n + x_m^*(x_n) \right\}$$

Coincidencia de σ-álgebras en espacios separables

Proposición

Si X es **separable**, entonces

$$\mathrm{Cyl}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,w) \;=\; \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Demostración

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto **en norma**.

1. X separable $\implies$ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es una bola cerrada.
2. X separable $\iff$ (B_{X^*}, w^*) metrizable $\implies$ (B_{X^*}, w^*) separable.
   Fijamos $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$.
3. Si $A_n = x_n + r_n B_X$ (bola cerrada de centro x_n y radio r_n) entonces

$$A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X : \; -r_n + x_m^*(x_n) \leq x_m^*(x) \leq r_n + x_m^*(x_n) \right\}$$

Por tanto, $A \in \mathrm{Cyl}(X,w)$. $\square$

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, w) \subseteq \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X, w) \neq \mathrm{Borel}(X, w)$ para $X = \ell^2([0, 1])$.

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f:[0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible porque para cada $s \in [0,1]$ se cumple

$$\langle e_s, f(t)\rangle = 1_A(t)\,\delta_{s,t} = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus \{s\}.$$

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible porque para cada $s \in [0,1]$ se cumple

$$\langle e_s, f(t)\rangle = 1_A(t)\,\delta_{s,t} = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus \{s\}.$$

Además $f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus A$.

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible porque para cada $s \in [0,1]$ se cumple

$$\langle e_s, f(t)\rangle = 1_A(t)\,\delta_{s,t} = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus \{s\}.$$

Además $f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus A$. Luego $\{0\} \notin \mathrm{Cyl}(X,w)$. □

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible porque para cada $s \in [0,1]$ se cumple

$$\langle e_s, f(t)\rangle = 1_A(t)\,\delta_{s,t} = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus \{s\}.$$

Además $f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus A$. Luego $\{0\} \notin \mathrm{Cyl}(X,w)$. $\square$

Teorema (Talagrand, 1978)

Para $X = \ell^\infty$ se cumple

$$\mathrm{Borel}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Mapa de σ-álgebras: $\mathrm{Cyl}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,w) \subseteq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Ejemplo

$\mathrm{Cyl}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,w)$ para $X = \ell^2([0,1])$.

Demostración

Fijamos $A \subseteq [0,1]$ que **no** sea de Borel y definimos $f : [0,1] \to X$ por

$$f(t) = 1_A(t)\, e_t$$

f es $\mathrm{Borel}([0,1])$–$\mathrm{Cyl}(X,w)$–medible porque para cada $s \in [0,1]$ se cumple

$$\langle e_s, f(t)\rangle = 1_A(t)\,\delta_{s,t} = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus \{s\}.$$

Además $f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus A$. Luego $\{0\} \notin \mathrm{Cyl}(X,w)$. $\square$

Teorema (Talagrand, 1978)

Para $X = \ell^\infty$ se cumple

$$\mathrm{Borel}(X,w) \neq \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Teorema (Fremlin, 1980)

Para $X = \ell^1(\omega_1)$ se cumple

$$\mathrm{Cyl}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

A veces $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

A veces $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

A veces $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

A veces $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Idea de la demostración (Schachermayer)

Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec.

A veces $\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X, w) = \mathrm{Borel}(X, \|\cdot\|)$$

Idea de la demostración (Schachermayer)

Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec.

1. Factorizamos la identidad en $X \setminus \{0\}$ como sigue:

$$X \setminus \{0\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^+ \times S_X \xrightarrow{v} X \setminus \{0\} \quad u(x) = (\|x\|, x/\|x\|) \quad v(\lambda, x) = \lambda\, x$$

A veces $\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Idea de la demostración (Schachermayer)

Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec.

1. Factorizamos la identidad en $X\setminus\{0\}$ como sigue:

$$X\setminus\{0\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^+ \times S_X \xrightarrow{v} X\setminus\{0\} \quad u(x) = (\|x\|, x/\|x\|) \quad v(\lambda,x) = \lambda\, x$$

2. Consideramos la σ-álgebra $\Sigma = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+ \times S_X) = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathrm{Borel}(S_X)$.

A veces $\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Idea de la demostración (Schachermayer)

Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec.

1. Factorizamos la identidad en $X\setminus\{0\}$ como sigue:

$$X\setminus\{0\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^+\times S_X \xrightarrow{v} X\setminus\{0\} \quad u(x) = (\|x\|, x/\|x\|) \quad v(\lambda,x) = \lambda x$$

2. Consideramos la σ-álgebra $\Sigma = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+\times S_X) = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+)\otimes\mathrm{Borel}(S_X)$.
3. u es $\mathrm{Borel}(X\setminus\{0\},w)$–$\Sigma$–medible, v es Σ–$\mathrm{Borel}(X\setminus\{0\},\|\cdot\|)$–medible.

A veces $\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$

Se dice que $\|\cdot\|$ tiene la **propiedad de Kadec** si la topología de la norma coincide con la topología débil en S_X.

Teorema (Edgar, 1977)

Si X admite una norma equivalente con la propiedad de Kadec, entonces

$$\mathrm{Borel}(X,w) = \mathrm{Borel}(X,\|\cdot\|)$$

Idea de la demostración (Schachermayer)

Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Kadec.

1. Factorizamos la identidad en $X \setminus \{0\}$ como sigue:

$$X\setminus\{0\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^+ \times S_X \xrightarrow{v} X\setminus\{0\} \quad u(x) = (\|x\|, x/\|x\|) \quad v(\lambda,x) = \lambda\, x$$

2. Consideramos la σ-álgebra $\Sigma = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+ \times S_X) = \mathrm{Borel}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathrm{Borel}(S_X)$.
3. u es $\mathrm{Borel}(X\setminus\{0\}, w)$–$\Sigma$–medible, v es Σ–$\mathrm{Borel}(X\setminus\{0\},\|\cdot\|)$–medible.

▶▶ Cualquier espacio **WCG** (e.g. **reflexivo**) cumple la hipótesis del teorema.

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Fijamos $y \in S_X$ tal que $\langle y, x \rangle = 1$.

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Fijamos $y \in S_X$ tal que $\langle y, x\rangle = 1$. Entonces

$$1 \geq \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| \geq \left\langle y, \frac{x_\alpha + x}{2} \right\rangle \to 1$$

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Fijamos $y \in S_X$ tal que $\langle y, x \rangle = 1$. Entonces

$$1 \geq \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| \geq \left\langle y, \frac{x_\alpha + x}{2} \right\rangle \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_\alpha \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| = 1$$

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Fijamos $y \in S_X$ tal que $\langle y, x \rangle = 1$. Entonces

$$1 \geq \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| \geq \left\langle y, \frac{x_\alpha + x}{2} \right\rangle \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_\alpha \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| = 1$$

Aplicando la identidad del paralelogramo:

$$\|x_\alpha - x\|^2 = 2\|x_\alpha\|^2 + 2\|x\|^2 - \|x_\alpha + x\|^2 = 4 - \|x_\alpha + x\|^2 \to 0$$

Proposición.- La norma de un espacio de Hilbert tiene la propiedad de Kadec.

Demostración

Supongamos que X es un espacio de Hilbert y que $\|\cdot\|$ es la norma en X inducida por el producto escalar.

Sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red convergente a $x \in S_X$ en la topología **débil**.

Fijamos $y \in S_X$ tal que $\langle y, x \rangle = 1$. Entonces

$$1 \geq \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| \geq \left\langle y, \frac{x_\alpha + x}{2} \right\rangle \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_\alpha \left\| \frac{x_\alpha + x}{2} \right\| = 1$$

Aplicando la identidad del paralelogramo:

$$\|x_\alpha - x\|^2 = 2\|x_\alpha\|^2 + 2\|x\|^2 - \|x_\alpha + x\|^2 = 4 - \|x_\alpha + x\|^2 \to 0$$

Luego (x_α) converge a x **en norma**. $\square$

1. Espacios de Banach arbitrarios
   - Espacios separables
   - σ-álgebras en espacios no separables
   - Medibilidad de la norma

2. Espacios de Banach de funciones continuas
   - σ-álgebras en espacios no separables
   - Medibilidad de la norma del supremo

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces. . .

. . . existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$,

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces...

...existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \text{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\text{–medible,}$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces...

...existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \textit{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\textit{–medible,}$$

y esta condición equivale a:

$$\textit{todas las bolas de } \|\cdot\| \textit{ pertenecen a } \mathrm{Cyl}(X, w).$$

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces...

...existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \text{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\text{–medible,}$$

y esta condición equivale a:

$$\textit{todas las bolas de } \|\cdot\| \textit{ pertenecen a } \mathrm{Cyl}(X, w).$$

Proposición

(B_{X^*}, w^*) separable $\Longrightarrow$ $\|\cdot\|$ $\mathrm{Cyl}(X, w)$–medible

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces...

...existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \text{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\text{–medible,}$$

y esta condición equivale a:

$$\textit{todas las bolas de } \|\cdot\| \textit{ pertenecen a } \mathrm{Cyl}(X, w).$$

Proposición

(B_{X^*}, w^*) separable $\Longrightarrow$ $\|\cdot\|$ $\mathrm{Cyl}(X, w)$–medible $\Longrightarrow$ (X^*, w^*) separable

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces. . .

. . . existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \textit{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\textit{–medible,}$$

y esta condición equivale a:

$$\textit{todas las bolas de } \|\cdot\| \textit{ pertenecen a } \mathrm{Cyl}(X, w).$$

Proposición

(B_{X^*}, w^*) separable $\Longrightarrow$ $\|\cdot\|$ $\mathrm{Cyl}(X, w)$–medible $\Longrightarrow$ (X^*, w^*) separable

Pregunta (Okada, 2006)

¿Qué ocurre con los recíprocos?

Medibilidad de la norma y w^*-separabilidad

Si (B_{X^*}, w^*) es separable, entonces. . .

. . . existe una sucesión $(x_m^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $\|x\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m^*(x)|$ para todo $x \in X$, luego

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R} \text{ es una función } \mathrm{Cyl}(X, w)\text{–medible,}$$

y esta condición equivale a:

todas las bolas de $\|\cdot\|$ pertenecen a $\mathrm{Cyl}(X, w)$.

Proposición

(B_{X^*}, w^*) separable $\Longrightarrow$ $\|\cdot\|$ $\mathrm{Cyl}(X, w)$–medible $\Longrightarrow$ (X^*, w^*) separable

Pregunta (Okada, 2006)

¿Qué ocurre con los recíprocos?

Teorema (R., 2008)

Existen normas equivalentes en ℓ^∞ para las que los recíprocos son falsos.

Notación

K: espacio topológico compacto (y Hausdorff)

$C(K)$: espacio de las funciones reales continuas en K

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$: norma del supremo en $C(K)$

Notación

K: espacio topológico compacto (y Hausdorff)

$C(K)$: espacio de las funciones reales continuas en K

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$: norma del supremo en $C(K)$

$C_u(K)$: $C(K)$ con la topología de la norma

$C_w(K)$: $C(K)$ con la topología débil

$C_p(K)$: $C(K)$ con la topología de convergencia puntual

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos
- $\mathrm{Cyl}(C_p(K))$: generada por los conjuntos de la forma

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \quad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos
- $\mathrm{Cyl}(C_p(K))$: generada por los conjuntos de la forma

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \quad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K)) \end{array}$$

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos
- $\mathrm{Cyl}(C_p(K))$: generada por los conjuntos de la forma

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \quad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K)) \end{array}$$

Proposición

Todas estas σ-álgebras coinciden si K es **metrizable**.

σ-álgebras en espacios de funciones continuas

Tenemos varias **σ-álgebras** en $C(K)$:

- Las σ-álgebras de Borel de $C_u(K)$, $C_w(K)$ y $C_p(K)$.
- $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$: generada por los semiespacios abiertos
- $\mathrm{Cyl}(C_p(K))$: generada por los conjuntos de la forma

$$\{f \in C(K) : f(t) > a\} \quad (\text{donde } t \in K \text{ y } a \in \mathbb{R})$$

En general, se cumplen las inclusiones siguientes:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K))
\end{array}$$

Proposición

Todas estas σ-álgebras coinciden si K es **metrizable**.

▶▶ K es metrizable $\iff$ $C(K)$ es separable.

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K))
\end{array}$$

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K)) \end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K)) \end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

$\mathrm{Cyl}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para $K = \{0,1\}^{\omega_1}$.

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K))
\end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

$\mathrm{Cyl}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para $K = \{0,1\}^{\omega_1}$.

Corolario (Fremlin, 1980)

$\mathrm{Cyl}(\ell^1(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(\ell^1(\omega_1), \|\cdot\|)$

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K))
\end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

$\mathrm{Cyl}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para $K = \{0,1\}^{\omega_1}$.

Corolario (Fremlin, 1980)

$\mathrm{Cyl}(\ell^1(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(\ell^1(\omega_1), \|\cdot\|)$

1. $\mathrm{Cyl}(C_p(K)) \neq \mathrm{Cyl}(C_w(K))$ para $K = \beta\mathbb{N}$.

1: Avilés-Plebanek-R. (201?)

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\
\cap & & \cap & & \\
\mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K))
\end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

$\mathrm{Cyl}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para $K = \{0,1\}^{\omega_1}$.

Corolario (Fremlin, 1980)

$\mathrm{Cyl}(\ell^1(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(\ell^1(\omega_1), \|\cdot\|)$

1. $\mathrm{Cyl}(C_p(K)) \neq \mathrm{Cyl}(C_w(K))$ para $K = \beta\mathbb{N}$.
2. $\mathrm{Borel}(C_w(K)) \neq \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para cualquier K tal que $C(K) \simeq \ell^\infty$.

1: Avilés-Plebanek-R. (201?)   2: Talagrand (1978)

Mapa de σ-álgebras

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cyl}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Cyl}(C_w(K)) & & \\ \cap & & \cap & & \\ \mathrm{Borel}(C_p(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_w(K)) & \subset & \mathrm{Borel}(C_u(K)) \end{array}$$

Teorema (Valdivia, 1990 + Edgar, 1977)

Si K es un compacto de **Valdivia**, entonces $\mathrm{Borel}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

$\mathrm{Cyl}(C_p(K)) = \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para $K = \{0,1\}^{\omega_1}$.

Corolario (Fremlin, 1980)

$\mathrm{Cyl}(\ell^1(\omega_1), w) = \mathrm{Borel}(\ell^1(\omega_1), \|\cdot\|)$

1. $\mathrm{Cyl}(C_p(K)) \neq \mathrm{Cyl}(C_w(K))$ para $K = \beta\mathbb{N}$.
2. $\mathrm{Borel}(C_w(K)) \neq \mathrm{Borel}(C_u(K))$ para cualquier K tal que $C(K) \simeq \ell^\infty$.
3. $\mathrm{Borel}(C_p(K)) \neq \mathrm{Borel}(C_w(K))$ para cierto K tal que $C(K) \simeq \ell^\infty$.

1: Avilés-Plebanek-R. (201?) 2: Talagrand (1978) 3: Marciszewski-Pol (2010)

Medibilidad de la norma del supremo y w^*-separabilidad

K separable

$\Downarrow$

$(B_{C(K)^*}, w^*)$ separable

$\Downarrow$

$\|\cdot\|_\infty$ $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$–medible

$\Downarrow$

$(C(K)^*, w^*)$ separable

Medibilidad de la norma del supremo y w^*-separabilidad

$$K \quad \text{separable}$$
$$\Downarrow$$
$$(B_{C(K)^*}, w^*) \quad \text{separable}$$
$$\Downarrow$$
$$\|\cdot\|_\infty \quad \mathrm{Cyl}(C_w(K))\text{–medible}$$
$$\Downarrow$$
$$(C(K)^*, w^*) \quad \text{separable}$$

Teorema (Talagrand, 1980)

Suponiendo la *Hipótesis del Continuo*, existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Medibilidad de la norma del supremo y w^*-separabilidad

K separable

$\Downarrow$

$(B_{C(K)^*}, w^*)$ separable

$\Downarrow$

$\|\cdot\|_\infty$ $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$–medible

$\Downarrow$

$(C(K)^*, w^*)$ separable

Teorema (Talagrand, 1980)

Suponiendo la *Hipótesis del Continuo*, existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Medibilidad de la norma del supremo y w^*-separabilidad

K separable

$\Downarrow$

$(B_{C(K)^*}, w^*)$ separable

$\Downarrow$

$\|\cdot\|_\infty$ $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$–medible

$\Downarrow$

$(C(K)^*, w^*)$ separable

Teorema (Talagrand, 1980)

Suponiendo la *Hipótesis del Continuo*, existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Teorema (Avilés-Plebanek-R., 201?)

Existe un compacto K tal que $C(K)^*$ es w^*-separable pero $B_{C(K)^*}$ no lo es.

Pero. . . no sabemos si $\|\cdot\|_\infty$ es $\mathrm{Cyl}(C_w(K))$–medible en esos ejemplos.