Operadores absolutamente sumantes e integración vectorial

José Rodríguez

Universidad de Murcia

Valencia, 1 de febrero de 2005

Problema

Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford.

¿La composición $u \circ f$ es integrable Bochner?

- La respuesta es **"sí"** en cualquiera de los siguientes casos:
  - f es fuertemente medible e integrable Pettis. (Diestel, 1972)
  - (Ω, Σ, μ) es un espacio compacto con una probabilidad de Radon y f es integrable McShane. (Marraffa, 2004)
- Si μ es perfecta y f es acotada e integrable Pettis, entonces $u \circ f$ es **escalarmente equivalente** a una función integrable Bochner. (Belanger-Dowling, 1988)
- Heiliö (1988) estudió el problema cuando μ es una medida de Baire en (X, w) y f es la identidad en X.

Lema

Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante, $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford y $g : \Omega \longrightarrow Y$ una función escalarmente equivalente a $u \circ f$. Entonces

$$g \text{ es fuertemente medible} \iff g \text{ es integrable Bochner.}$$

En particular,

$$u \circ f \text{ es fuertemente medible} \iff u \circ f \text{ es integrable Bochner.}$$

Teorema

Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces $u \circ f$ es escalarmente equivalente a una función integrable Bochner $u_f : \Omega \longrightarrow Y$.

Proposición

Sea $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante. Entonces la aplicación lineal

$$\tilde{u} : (D(\mu, X), \| \ \|_{Pe}) \longrightarrow (L^1(\mu, Y), \| \ \|_1), \quad \tilde{u}(f) := u_f,$$

es continua.

Una aplicación del teorema de factorización de Pietsch

Para un espacio compacto K son equivalentes:

(1) Cada operador absolutamente sumante definido en $C(K)$ con valores en otro espacio de Banach tiene rango separable.

(2) $L^1(\nu)$ es separable para cada probabilidad de Radon ν en K.

Algunos ejemplos de compactos con las propiedades de arriba:

- Compactos de Gul'ko (e.g. compactos de Eberlein).
- Compactos de Rosenthal.
- Compactos linealmente ordenados.
- Compactos de Radon-Nikodým (e.g. compactos dispersos).
- (MA + $\neg$CH) Compactos con "tightness" numerable.

Definición

Un espacio de Banach pertenece a la clase MS si es isomorfo a un subespacio de $C(K)$ para algún compacto K tal que $L^1(\nu)$ es separable para cada probabilidad de Radon ν en K.

Algunos ejemplos de espacios de Banach en la clase MS:

- Espacios débilmente numerablemente $\mathscr{K}$-determinados.
- Espacios Asplund generados y sus subespacios.
- (MA $+ \neg$CH) Espacios de Banach X tales que (B_{X^*}, w^*) tiene "tightness" numerable.

Teorema

Si X es un espacio de Banach que pertenece a la clase MS, entonces cada operador absolutamente sumante definido en X con valores en otro espacio de Banach tiene rango separable.

Definición (Fremlin, Talagrand)

Una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ es **estable** si para cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y cada par de números reales $\alpha < \beta$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu^*_{2k}\Big(\bigcup_{h\in\mathscr{H}} \left(\{h < \alpha\}^k \times \{h > \beta\}^k\right) \cap A^{2k}\Big) < \mu(A)^{2k},$$

donde μ_{2k} es el producto de $2k$ copias de μ.

Definición (Fremlin, Talagrand)

Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es **correctamente medible** si la familia $\{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$ es estable.

Ejemplos de funciones correctamente medibles:

- Funciones integrables Talagrand.
- Funciones integrables Birkhoff.
- (MA) Funciones escalarmente medibles definidas en un espacio de probabilidad perfecto con valores en un espacio de Banach X tal que (B_{X^*}, w^*) es separable.

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Consideremos las siguientes afirmaciones:

(1) Existe un conjunto normante w^*-compacto $K \subset B_{X^*}$ tal que, para cada probabilidad de Radon ν en K, la familia $\{x^* \circ f : \; x^* \in \operatorname{supp}(\nu)\}$ es estable.

(2) Para cada operador u definido en X con valores en otro espacio de Banach, la composición $u \circ f$ es integrable Bochner.

Entonces (1)⇒(2). Si, además, μ es perfecta y asumimos MA, entonces (1)⇔(2).

Corolario

Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función correctamente medible. Entonces $u \circ f$ es fuertemente medible. Si, además, f es integrable Dunford, entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.

Corolario

Sea X un espacio de Banach que es isomorfo a un subespacio de un espacio débilmente Lindelöf de la forma $C(K)$. Sean $u : X \longrightarrow Y$ un operador absolutamente sumante y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Entonces $u \circ f$ es integrable Bochner.

Referencias

- A. Belanger y P. N. Dowling, *Two remarks on absolutely summing operators*, Math. Nachr. **136** (1988).
- B. Cascales y J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann., por aparecer (publicado electrónicamente).
- S. Díaz, A. Fernández, M. Florencio, y P. J. Paúl, *A wide class of ultrabornological spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. **190** (1995), no. 3.
- J. Diestel, *An elementary characterization of absolutely summing operators*, Math. Ann. **196** (1972).
- M. Džamonja y K. Kunen, *Properties of the class of measure separable compact spaces*, Fund. Math. **147** (1995), no. 3.
- G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 4.
- D. H. Fremlin, *The McShane and Birkhoff integrals of vector-valued functions*, University of Essex Mathematics Department Research Report 92-10.
- D. H. Fremlin, *The generalized McShane integral*, Illinois J. Math. **39** (1995), no. 1.
- D. H. Fremlin, *On compact spaces carrying Radon measures of uncountable Maharam type*, Fund. Math. **154** (1997).
- D. H. Fremlin y M. Talagrand, *A decomposition theorem for additive set-functions, with applications to Pettis integrals and ergodic means*, Math. Z. **168** (1979), no. 2.

Referencias

M. Heiliö, *Weakly summable measures in Banach spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes (1988), no. 66, 49.

V. Marraffa, *A characterization of absolutely summing operators by means of McShane integrable functions*, J. Math. Anal. Appl. **293** (2004), no. 1.

K. Musiał, *The weak Radon-Nikodým property in Banach spaces*, Studia Math. **64** (1979), no. 2.

M. Talagrand, *Pettis integral and measure theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **51** (1984), no. 307.

M. Talagrand, *The Glivenko-Cantelli problem*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 3.