La integral de McShane de funciones vectoriales

José Rodríguez

Universidad de Valencia

15 de junio de 2007

$(X, \|\cdot\|) \equiv$ espacio de Banach

$(X, \|\cdot\|) \equiv$ espacio de Banach

$[0,1]$ equipado con la medida de Lebesgue λ

$(X, \|\cdot\|) \equiv$ espacio de Banach

$[0,1]$ equipado con la medida de Lebesgue λ

Consideramos funciones de la forma

$$f : [0,1] \longrightarrow X$$

Fremlin-Mendoza (1994)

El analista funcional ordinario se muestra, por naturaleza, impaciente ante la multiplicidad de definiciones de 'integral' que se han propuesto para funciones vectoriales, y preferiría tener una única integral canónica para uso general.

Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. La **integral de Riemann** de f (si existe) se obtiene como límite de sumas

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i), \quad \text{cuando} \max_{1 \leq i \leq n} (b_i - b_{i-1}) \rightarrow 0,$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. La **integral de Riemann** de f (si existe) se obtiene como límite de sumas

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i), \quad \text{cuando} \max_{1 \le i \le n} (b_i - b_{i-1}) \to 0,$$

donde $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ es una partición y $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. La **integral de Riemann** de f (si existe) se obtiene como límite de sumas

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i), \quad \text{cuando} \quad \max_{1 \le i \le n} (b_i - b_{i-1}) \to 0,$$

donde $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ es una partición y $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$.

Teoría de integración de Kurzweil y Henstock

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. La **integral de Riemann** de f (si existe) se obtiene como límite de sumas

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i), \quad \text{cuando } \max_{1 \le i \le n} (b_i - b_{i-1}) \to 0,$$

donde $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ es una partición y $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$.

Teoría de integración de Kurzweil y Henstock

La integral se aproxima mediante las "sumas de Riemann" asociadas a todas las particiones $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y elecciones de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. La **integral de Riemann** de f (si existe) se obtiene como límite de sumas

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i), \quad \text{cuando} \max_{1 \le i \le n} (b_i - b_{i-1}) \to 0,$$

donde $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ es una partición y $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$.

Teoría de integración de Kurzweil y Henstock

La integral se aproxima mediante las "sumas de Riemann" asociadas a todas las particiones $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y elecciones de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que

$$b_i - b_{i-1} \le \delta(t_i)$$

donde δ es una cierta **función positiva**.

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**,

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

Definición

$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Propiedades:

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Propiedades:

- Integrable KH $\Longrightarrow$ medible Lebesgue.

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Propiedades:

- Integrable KH $\Longrightarrow$ medible Lebesgue.
- f es integrable Lebesgue $\Longleftrightarrow$ f y $|f|$ son integrables KH.

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Propiedades:

- Integrable KH $\Longrightarrow$ medible Lebesgue.
- f es integrable Lebesgue $\Longleftrightarrow$ f y $|f|$ son integrables KH.
- Integrable KH $\not\Longrightarrow$ integrable Lebesgue.

Definición

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha \in \mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Propiedades:

- Integrable KH $\Longrightarrow$ medible Lebesgue.
- f es integrable Lebesgue $\Longleftrightarrow$ f y $|f|$ son integrables KH.
- Integrable KH $\not\Longrightarrow$ integrable Lebesgue.
- g derivable $\Longrightarrow$ g' integrable KH, con integral $g(1) - g(0)$.

Definición

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es **integrable Kurzweil-Henstock (KH)**, con integral $\alpha\in\mathbb{R}$,
si para todo $\varepsilon>0$ existe una función $\delta:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i-1})f(t_i)-\alpha\right|<\varepsilon$$

para cada partición $0=b_0<b_1<\cdots<b_n=1$ y cada elección de puntos $t_i\in[b_{i-1},b_i]$ tales que $[b_{i-1},b_i]\subset[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)]$.

Propiedades:

- Integrable KH $\Longrightarrow$ medible Lebesgue.
- f es integrable Lebesgue $\Longleftrightarrow$ f y $|f|$ son integrables KH.
- Integrable KH $\not\Longrightarrow$ integrable Lebesgue.
- g derivable $\Longrightarrow$ g' integrable KH, con integral $g(1)-g(0)$.

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe una función $\delta:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i-1})f(t_i)-\alpha\right|<\varepsilon$$

para cada partición $0=b_0<b_1<\cdots<b_n=1$ y cada elección de puntos $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ tales que $[b_{i-1},b_i]\subset[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)]$.

Teorema (McShane, 1969)

Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es **integrable Lebesgue** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \alpha \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.
En tal caso,

$$\alpha = \int_0^1 f \, d\lambda.$$

Definición

Una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$,

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Definición

Una función $f:[0,1]\to X$ es **integrable McShane**, con integral $x\in X$, si para todo $\varepsilon>0$ existe una función $\delta:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i-1})f(t_i)-x\right\|<\varepsilon$$

para cada partición $0=b_0<b_1<\cdots<b_n=1$ y cada elección de puntos $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ tales que $[b_{i-1},b_i]\subset[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)]$.

Contribuciones:

McShane (1969),

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Contribuciones:

McShane (1969), Gordon (1990),

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Contribuciones:

McShane (1969), Gordon (1990), Fremlin-Mendoza (1994), Fremlin (1995),

Definición

Una función $f : [0,1] \to X$ es **integrable McShane**, con integral $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - x \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Contribuciones:

McShane (1969), Gordon (1990), Fremlin-Mendoza (1994), Fremlin (1995), Di Piazza-Musial (2001), Di Piazza-Preiss (2003), etc.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0, 1] \longrightarrow X$ se tiene:

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\implies$ McShane $\implies$ Pettis.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\implies$ McShane $\implies$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\implies$ McShane $\implies$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\implies$ McShane $\implies$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

McShane $\not\Longrightarrow$ Bochner

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\Longrightarrow$ McShane $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

McShane $\not\Longrightarrow$ Bochner

$f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ dada por $f(t) = e_t$.

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\Longrightarrow$ McShane $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

McShane $\not\Longrightarrow$ Bochner

$f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ dada por $f(t) = e_t$.

Pettis $\not\Longrightarrow$ McShane (Fremlin-Mendoza, 1994)

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\Longrightarrow$ McShane $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

McShane $\not\Longrightarrow$ Bochner

$f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ dada por $f(t) = e_t$.

Pettis $\not\Longrightarrow$ McShane (Fremlin-Mendoza, 1994)

$f : [0,1] \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ dada por

$$f(t) = (\chi_{A_1}(t), \chi_{A_2}(t), \ldots)$$

Relación con otras integrales

Para funciones $f : [0,1] \to X$ se tiene:

- McShane $\equiv$ Lebesgue cuando $X = \mathbb{R}$.
- En general, Bochner $\Longrightarrow$ McShane $\Longrightarrow$ Pettis.
- Los recíprocos no son ciertos en general.

McShane $\not\Longrightarrow$ Bochner

$f : [0,1] \to \ell^2([0,1])$ dada por $f(t) = e_t$.

Pettis $\not\Longrightarrow$ McShane (Fremlin-Mendoza, 1994)

$f : [0,1] \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ dada por

$$f(t) = (\chi_{A_1}(t), \chi_{A_2}(t), \dots)$$

donde $A_1, A_2, \dots$ es una sucesión estocásticamente independiente de subconjuntos medibles de $[0,1]$ tales que $\lambda(A_n) = 1/n$.

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**,

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f:[0,1]\to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f = g + h, \quad h = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \chi_{A_n},$$

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f = g + h, \quad h = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \chi_{A_n},$$

donde g es integrable **Bochner**,

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f = g + h, \quad h = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \chi_{A_n},$$

donde g es integrable **Bochner**, $x_n \in X$ y $A_1, A_2, \ldots$ son subconjuntos medibles de [0,1] disjuntos.

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f = g + h, \quad h = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \chi_{A_n},$$

  donde g es integrable **Bochner**, $x_n \in X$ y $A_1, A_2, \dots$ son subconjuntos medibles de [0,1] disjuntos.
- Como h es integrable **Pettis**,

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f:[0,1]\to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f=g+h, \quad h=\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\chi_{A_n},$$

donde g es integrable **Bochner**, $x_n\in X$ y $A_1,A_2,\dots$ son subconjuntos medibles de [0,1] disjuntos.

- Como h es integrable **Pettis**, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(A_n)x_n$ es incondicionalmente convergente.

Teorema (Gordon 1990, Fremlin-Mendoza 1994)

Si X es **separable**, entonces una función $f:[0,1]\to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Idea:

- Por el **teorema de medibilidad de Pettis** podemos escribir

$$f = g + h, \quad h = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \chi_{A_n},$$

  donde g es integrable **Bochner**, $x_n \in X$ y $A_1, A_2, \dots$ son subconjuntos medibles de [0,1] disjuntos.
- Como h es integrable **Pettis**, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) x_n$ es incondicionalmente convergente.
- Teorema de convergencia $\Longrightarrow$ h integrable **McShane**.

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \longrightarrow X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ débilmente en c.t.p.

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \longrightarrow X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente.}$$

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \to f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente}.$$

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \to f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente}.$$

Entonces f es integrable McShane,

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \to f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente}.$$

Entonces f es integrable McShane, con integral $\nu([0,1])$.

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \to f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente.}$$

Entonces f es integrable McShane, con integral $\nu([0,1])$.

Proposición (Fremlin, 1995)

Suponiendo (i), la condición (ii) se cumple si

Teorema (Fremlin, 1995)

Sean $f_n : [0,1] \to X$ funciones integrables McShane y $f : [0,1] \to X$ una función tales que:

(i) $f_n(t) \to f(t)$ débilmente en c.t.p.

(ii) Para todo $E \subset [0,1]$ medible existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \nu(E) \in X \quad \text{débilmente}.$$

Entonces f es integrable McShane, con integral $\nu([0,1])$.

Proposición (Fremlin, 1995)

Suponiendo (i), la condición (ii) se cumple si la familia de funciones reales

$$\{x^* f_n : \; n \in \mathbb{N}, \; x^* \in B_{X^*}\}$$

es **uniformemente integrable**.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sup_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \sum_{i \in S} a_i \right|.$$

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sup_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \sum_{i \in S} a_i \right|.$$

Proposición (McShane, 1969)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sup_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \sum_{i \in S} a_i \right|.$$

Proposición (McShane, 1969)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue.
Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sup_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \sum_{i \in S} a_i \right|.$$

Proposición (McShane, 1969)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue.
Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right| < \varepsilon$$

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sup_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \sum_{i \in S} a_i \right|.$$

Proposición (McShane, 1969)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue.
Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right\| < \varepsilon$$

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Aplicación (Marraffa 2004, R. 2006)

Si $u : X \to Y$ es un operador **absolutamente sumante** entre espacios de Banach

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Aplicación (Marraffa 2004, R. 2006)

Si $u : X \to Y$ es un operador **absolutamente sumante** entre espacios de Banach y $f : [0,1] \to X$ es integrable **McShane**,

Teorema (Wu-Yao 1994, Di Piazza-Musial 2001)

Sea $f : [0,1] \to X$ una función integrable Pettis.
Entonces f es **integrable Bochner** si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (b_i - b_{i-1}) f(t_i) - \int_{b_{i-1}}^{b_i} f \, d\lambda \right\| < \varepsilon$$

para cada partición $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$ y cada elección de puntos $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $[b_{i-1}, b_i] \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Aplicación (Marraffa 2004, R. 2006)

Si $u : X \to Y$ es un operador **absolutamente sumante** entre espacios de Banach y $f : [0,1] \to X$ es integrable **McShane**, entonces

$u \circ f : [0,1] \to Y$ es integrable **Bochner**.

Integración en espacios de Banach no separables

Pregunta

¿Existen espacios de Banach **no separables** para los que

$$\text{McShane} \;\equiv\; \text{Pettis ?}$$

Pregunta

¿Existen espacios de Banach **no separables** para los que

$$\text{McShane} \equiv \text{Pettis ?}$$

¡SÍ!

Pregunta

¿Existen espacios de Banach **no separables** para los que

$$\text{McShane} \equiv \text{Pettis ?}$$

¡SÍ!

Ejemplo: $\ell^1(\Gamma)$, donde Γ es cualquier conjunto no numerable

Pregunta

¿Existen espacios de Banach **no separables** para los que

$$\text{McShane} \equiv \text{Pettis ?}$$

¡SÍ!

Ejemplo: $\ell^1(\Gamma)$, donde Γ es cualquier conjunto no numerable

¡Cualquier función integrable Pettis $f : [0,1] \to \ell^1(\Gamma)$ es fuertemente medible!

Pregunta

¿Existen espacios de Banach **no separables** para los que

$$\text{McShane} \equiv \text{Pettis ?}$$

¡SÍ!

Ejemplo: $\ell^1(\Gamma)$, donde Γ es cualquier conjunto no numerable

¡Cualquier función integrable Pettis $f : [0,1] \to \ell^1(\Gamma)$ es fuertemente medible!

Hay más ejemplos . . .

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Si X admite una norma equivalente uniformemente convexa,

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Si X admite una norma equivalente uniformemente convexa, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Si X admite una norma equivalente uniformemente convexa, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Sea Γ un conjunto no vacío.

Una norma $\|\cdot\|$ en X se dice **uniformemente convexa** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in B_{(X,\|\cdot\|)}$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1-\delta \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo: la norma canónica de los espacios L^p con $1 < p < \infty$.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Si X admite una norma equivalente uniformemente convexa, entonces una función $f : [0,1] \to X$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Teorema (Di Piazza-Preiss, 2003)

Sea Γ un conjunto no vacío.
Entonces una función $f : [0,1] \to c_0(\Gamma)$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss . . .

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss . . .

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss . . .

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss . . .

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f : [0,1] \to X$ es **escalarmente nula** si

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ es **escalarmente nula** si para cada $x^* \in X^*$ se tiene $x^* f = 0$ en c.t.p.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ es **escalarmente nula** si para cada $x^* \in X^*$ se tiene $x^* f = 0$ en c.t.p.

Teorema (Lewis 1970 y Edgar 1977)

Supongamos que X es WCG.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f : [0,1] \longrightarrow X$ es **escalarmente nula** si para cada $x^* \in X^*$ se tiene $x^* f = 0$ en c.t.p.

Teorema (Lewis 1970 y Edgar 1977)

Supongamos que X es WCG.
Sea $f : [0,1] \longrightarrow X$ una función escalarmente medible.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f : [0,1] \to X$ es **escalarmente nula** si para cada $x^* \in X^*$ se tiene $x^* f = 0$ en c.t.p.

Teorema (Lewis 1970 y Edgar 1977)

Supongamos que X es WCG.
Sea $f : [0,1] \to X$ una función escalarmente medible.
Entonces existe una función **fuertemente medible** $g : [0,1] \to X$ tal que $f - g$ es escalarmente nula.

Técnicas empleadas por Di Piazza y Preiss ...

- Reducción al caso de funciones escalarmente nulas.
- Resoluciones proyectivas de la identidad.

Una función $f:[0,1]\to X$ es **escalarmente nula** si para cada $x^*\in X^*$ se tiene $x^*f=0$ en c.t.p.

Teorema (Lewis 1970 y Edgar 1977)

Supongamos que X es WCG.
Sea $f:[0,1]\to X$ una función escalarmente medible.
Entonces existe una función **fuertemente medible** $g:[0,1]\to X$ tal que $f-g$ es escalarmente nula.

Problema (Di Piazza-Preiss, 2003)

¿Son equivalentes las integrales de McShane y Pettis para funciones con valores en un espacio WCG arbitrario?

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Bajo la **Hipótesis del Continuo** ...

...existen funciones escalarmente nulas $f : [0,1] \to X$ que **no** son integrables McShane.

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Bajo la **Hipótesis del Continuo** . . .

. . . existen funciones escalarmente nulas $f : [0, 1] \longrightarrow X$ que **no** son integrables McShane.

Por ejemplo:

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Bajo la Hipótesis del Continuo . . .

. . . existen funciones escalarmente nulas $f : [0,1] \to X$ que **no** son integrables McShane.

Por ejemplo:

- para $X = \ell^\infty([0,1])$ (Di Piazza-Preiss, 2003)

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Bajo la Hipótesis del Continuo ...

...existen funciones escalarmente nulas $f : [0,1] \to X$ que **no** son integrables McShane.

Por ejemplo:

- para $X = \ell^\infty([0,1])$ (Di Piazza-Preiss, 2003)
- para cierto X débilmente Lindelöf determinado (R., 2006)

Problema (Musial, 1999)

¿Es integrable McShane cualquier función escalarmente nula?

En general, la respuesta es **"no"**:

Bajo la Hipótesis del Continuo ...

...existen funciones escalarmente nulas $f : [0,1] \to X$ que **no** son integrables McShane.

Por ejemplo:

- para $X = \ell^\infty([0,1])$ (Di Piazza-Preiss, 2003)
- para cierto X débilmente Lindelöf determinado (R., 2006)

Otro caso donde McShane = Pettis

Teorema (R., 2006)

Sea μ una medida finita, no negativa y numerablemente aditiva definida en una σ-álgebra.

Otro caso donde McShane = Pettis

Teorema (R., 2006)

Sea μ una medida finita, no negativa y numerablemente aditiva definida en una σ-álgebra.
Entonces una función $f : [0,1] \to L^1(\mu)$ es integrable McShane si y sólo si es integrable Pettis.

Algunas referencias

- R.G. Bartle, *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2001.
- L. Di Piazza and K. Musial, *A characterization of variationally McShane integrable Banach-space valued functions*, Illinois J. Math. **45** (2001).
- L. Di Piazza and D. Preiss, *When do McShane and Pettis integrals coincide?*, Illinois J. Math. **47** (2003).
- G.A. Edgar, *Measurability in a Banach space*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977).
- D.H. Fremlin, *The generalized McShane integral*, Illinois J. Math. **39** (1995).
- D.H. Fremlin and J. Mendoza, *On the integration of vector-valued functions*, Illinois J. Math. **38** (1994).
- R.A. Gordon, *The McShane integral of Banach-valued functions*, Illinois J. Math. **34** (1990).
- R.A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1994.
- E.J. McShane, *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 88, AMS, 1969.
- J. Rodríguez, *On the equivalence of McShane and Pettis integrability in non-separable Banach spaces*, preprint.