Aplicaciones Lineales. S1

Leandro Marín

6 de Noviembre de 2009

Definición

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación lineal $f : V \to W$ es una aplicación entre los conjuntos V y W que respeta las operaciones del espacio vectorial, es decir

- $f(v + v') = f(v) + f(v')$ para todo $v, v' \in V$.
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todo $v \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ejemplos

- La derivada es una aplicación lineal entre los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n y los de grado menor o igual que $n-1$.

Ejemplos

- La derivada es una aplicación lineal entre los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n y los de grado menor o igual que $n-1$.
- Si M es una matriz de tamaño $n \times m$ sobre $\mathbb{K}$, nos define una aplicación lineal $M : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$.

Ejemplos (II)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,z + y + x \\ 2\,y + 2\,x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dados dos espacios vectoriales V y W y una aplicación lineal entre ellos $f : V \to W$, fijaremos bases B de V y B' de W para definir la matriz de f respecto a esas bases, la denotaremos $\mathsf{M}_{BB'}(f)$ y estará formada por las coordenadas de los vectores $f(v)$ en la base B' para cada uno de los vectores de $v \in B$.
Las coordenadas de los $f(v)$ serán las *columnas* de la matriz $\mathsf{M}_{BB'}(f)$.

$$\dim(V) = m, B = \{v_1, \cdots, v_m\}, \dim(W) = n, B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$$

$$f(v_1) = a_{11}v'_1 + a_{21}v'_2 + \cdots + a_{n1}v'_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v'_1 + a_{22}v'_2 + \cdots + a_{n2}v'_n$$

$$\cdots$$

$$f(v_m) = a_{1m}v'_1 + a_{2m}v'_2 + \cdots + a_{nm}v'_n$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim(V) = m, B = \{v_1, \cdots, v_m\}, \dim(W) = n, B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$$

$$f(v_1) = a_{11}v'_1 + a_{21}v'_2 + \cdots + a_{n1}v'_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v'_1 + a_{22}v'_2 + \cdots + a_{n2}v'_n$$

$$\cdots$$

$$f(v_m) = a_{1m}v'_1 + a_{2m}v'_2 + \cdots + a_{nm}v'_n$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim(V) = m, B = \{v_1, \cdots, v_m\}, \dim(W) = n, B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$$

$$f(v_1) = a_{11}v'_1 + a_{21}v'_2 + \cdots + a_{n1}v'_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v'_1 + a_{22}v'_2 + \cdots + a_{n2}v'_n$$

$$\cdots$$

$$f(v_m) = a_{1m}v'_1 + a_{2m}v'_2 + \cdots + a_{nm}v'_n$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\dim(V) = m, B = \{v_1, \cdots, v_m\}, \dim(W) = n, B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$$

$$f(v_1) = a_{11}v'_1 + a_{21}v'_2 + \cdots + a_{n1}v'_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v'_1 + a_{22}v'_2 + \cdots + a_{n2}v'_n$$

$$\cdots$$

$$f(v_m) = a_{1m}v'_1 + a_{2m}v'_2 + \cdots + a_{nm}v'_n$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de $\mathsf{M}_{BB'}(d/dx)$ siendo $B = \{1, x, x^2, x^3\}, B' = \{1, x, x^2\}$.

Calcular la matriz de $\mathsf{M}_{BB'}(d/dx)$ siendo $B = \{1, x, x^2, x^3\}, B' = \{1, x, x^2\}$.

$$\frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\mathsf{M}_{BB'}\left(\frac{d}{dx}\right) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de $\mathsf{M}_{BB'}(d/dx)$ siendo $B = \{1, x, x^2, x^3\}, B' = \{1, x, x^2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1) &= 0 \\ \frac{d}{dx}(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(\frac{d}{dx}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de $\mathsf{M}_{BB'}(d/dx)$ siendo $B = \{1, x, x^2, x^3\}, B' = \{1, x, x^2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1) &= 0 \\ \frac{d}{dx}(x) &= 1 \\ \frac{d}{dx}(x^2) &= \quad 2x \end{aligned}$$

$$\mathsf{M}_{BB'}(\frac{d}{dx}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de $\mathsf{M}_{BB'}(d/dx)$ siendo
$B = \{1, x, x^2, x^3\}, B' = \{1, x, x^2\}$.

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dx}(1) & = & 0 \\ \frac{d}{dx}(x) & = & 1 \\ \frac{d}{dx}(x^2) & = & 2x \\ \frac{d}{dx}(x^3) & = & 3x^2 \end{array}$$

$$\mathsf{M}_{BB'}\left(\frac{d}{dx}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Fórmula de la Aplicación Compuesta

$$\begin{array}{ccccc} & & g\circ f & & \\ V & f & W & g & U \\ B & & B' & & B'' \end{array}$$

$$\dim(V) = m \qquad \dim(W) = n \qquad \dim(U) = t$$

$$\underbrace{\mathsf{M}_{BB''}(g\circ f)}_{t\times m} = \underbrace{\mathsf{M}_{B'B''}(g)}_{t\times n}\,\underbrace{\mathsf{M}_{BB'}(f)}_{n\times m}$$

Una aplicación es $f: V \to W$ se dice invertible cuando existe una aplicación $g: W \to V$ tal que $f \circ g = 1_W$, $g \circ f = 1_V$.
Si B es base de V, B' base de W

$$\mathsf{M}_{B'B}(g) = \left(\mathsf{M}_{BB'}(f)\right)^{-1}$$

Cambio de Base: Planteamiento

Supongamos que tenemos la aplicación identidad $1_V : V \to V$ y que tomamos bases B y B' que en principio pueden ser diferentes. La aplicación identidad nos deja todos los vectores fijos, pero si calculamos la matriz $\mathsf{M}_{BB'}(1_V)$ tenemos que poner en columnas las coordenadas de los vectores de la base B escritos en base B'. Estas matrices las llamaremos matrices de cambio de base de B a B' y las representaremos por $P_{BB'}$.

Cambio de base B a la canónica C

Supongamos que estamos en un espacio del tipo $\mathbb{K}^n$ y que tenemos una base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Con

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_{BC} = \mathsf{M}_{BC}(1_{\mathbb{K}^n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cambio de base canónica C a la base B'

Supongamos que estamos en un espacio del tipo $\mathbb{K}^n$ y que tenemos una base $B' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$. Con

$$v'_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \quad v'_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad v'_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_{CB'} = \mathsf{M}_{CB'}(1_{\mathbb{K}^n}) = \mathsf{M}_{B'C}(1_{\mathbb{K}^n})^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

Cambio de base B a la base B'

$$P_{BB'} = P_{CB'}P_{BC} = \mathsf{M}_{CB'}(1_{\mathbb{K}^n})^{-1}\mathsf{M}_{BC}(1_{\mathbb{K}^n}) =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cambio de Base en una Aplicación

Supongamos que $f : V \to W$ es una aplicación lineal de la que conocemos su matriz respecto a las bases B de V y B' de W. Supongamos que nos piden la matriz de f respecto a las bases A de V y A' de W.

$$\mathsf{M}_{AA'}(f) = \mathsf{M}_{AA'}(1_W \circ f \circ 1_V) =$$

$$\mathsf{M}_{B'A'}(1_W)\mathsf{M}_{BB'}(f)\mathsf{M}_{AB}(1_V) = P_{B'A'}\mathsf{M}_{BB'}(f)P_{AB}$$

Calcula la matriz de la aplicación d/dx con respecto a las bases $B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x+x^3\}$ y $B' = \{1, x, x+x^2\}$.
Como conocemos la matrix de d/dx respecto a las bases $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $C' = \{1, x, x^2\}$, simplemente tenemos que calcular

$$\mathsf{M}_{BB'}\left(\frac{d}{dx}\right) = P_{C'B'}\mathsf{M}_{CC'}(f)P_{BC} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dada una aplicación lineal $f : V \to W$, llamaremos núcleo de f al subespacio de V dado por

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

Llamaremos imagen de f al subespacio de W formado por los vectores

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ tal que } f(v) = w\}$$

Núcleo en Implícitas

El núcleo de una aplicación lineal se calcula de forma inmediata mediante ecuaciones implícitas:

$$\text{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}2\,z + y + x\\ 2\,y + 2\,x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

En realidad cuando nos dan un subespacio en implíticas, nos están dando un núcleo.

Imagen en Paramétricas

Si $f : V \to W$ es una aplicación lieal y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V (o un conjunto generador de V) entonces

$$\mathsf{Im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n) \rangle$$

Por lo tanto las columnas de la matriz nos dan la representación de $\mathsf{Im}(f)$ en paramétricas.
En realidad, cuando nos dan ecuaciones paramétricas de un espacio, nos están dando el espacio como imagen de una aplicación lineal.

Imagen y Antiimagen de un subespacio

$f : V \to W$ lineal, U subespacio de V y L subespacio de W. Llamaremos imagen de U por f al subespacio de W dado por

$$f(U) = \{w \in W : \exists u \in U \text{ tal que } f(u) = w\}$$

Llamaremos antiimagen de L por f al subespacio de V dado por

$$f^{-1}(L) = \{v \in V : f(v) \in L\}$$

Imagen y Antiimagen de un subespacio

$f : V \to W$ lineal, U subespacio de V dado en paramétricas, es decir, $U = \text{Im}(h)$ y L subespacio de W en implícitas, es decir, $W = \text{Ker}(g)$. Entonces

$$f(U) = \{w \in W : \exists u \in U \text{ tal que } f(u) = w\} = \text{Im}(f \circ h)$$

$$f^{-1}(L) = \{v \in V : f(v) \in L\} = \text{Ker}(g \circ f)$$

La forma más directa de calcularlos es calculando el núcleo y la imagen de estas composiciones.