	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Vídeo : <https://youtu.be/KTRWQwo1F8g>

1. Resumen

Para calcular la matriz reducida completa de una matriz A realizaremos los siguientes pasos:

- I. Para cada una de las filas $i = 1, 2, \dots, m$, si no son filas nulas, hacer:
 1. Buscar el primer elemento no nulo de la fila i . Este elemento se llamará **elemento pivote** y la columna que lo contiene **columna pivote**.
 2. Si el pivote no es 1, convertirlo en un 1 multiplicando la fila por el inverso del pivote.
 3. Eliminar todos los elementos no nulos que haya encima y debajo del pivote realizando operaciones elementales del segundo tipo.
- II. Ordenar las filas con operaciones del tercer tipo, de forma que las filas nulas estén debajo y que cada pivote esté más a la derecha que el pivote de la fila superior.

Cuando realicemos las operaciones en este orden preciso, diremos que será el orden estricto explicado en clase. Este método siempre funciona, pero cuando tengamos más práctica, veremos que dependiendo de los valores concretos que aparezcan en la matriz, se podrá intercambiar el orden de las operaciones. También veremos que a veces no es necesario obtener la reducida completa y únicamente con una matriz parcialmente reducida tenemos información suficiente. De momento calcularemos la reducida completa y en este orden.

Teorema 1 (Teorema Fundamental de la Reducción por Filas). *Sea A una matriz, $[A|I]$ la matriz ampliada con la matriz identidad a la derecha. Si realizamos el proceso de reducción por filas a la matriz ampliada $[A|I]$ para obtener $[R|P]$, entonces se cumple que*

$$PA = R.$$

A esta matriz P se le llamará matriz de paso.

Demostración. Supongamos que para pasar de la matriz A a la reducida R hay que hacer las siguientes operaciones elementales:

$$E_t E_{t-1} \cdots E_3 E_2 E_1 A = R$$

Si realizamos las mismas operaciones sobre la matriz ampliada $[A|I]$ lo que obtenemos es


$$E_t E_{t-1} \cdots E_3 E_2 E_1 [A|I] = [E_t E_{t-1} \cdots E_3 E_2 E_1 A | E_t E_{t-1} \cdots E_3 E_2 E_1 I],$$

Y si llamamos $P = E_t E_{t-1} \cdots E_3 E_2 E_1$, entonces mirando la parte izquierda de la matriz, tenemos el resultado del teorema, que $PA = R$. □

Nota 2. *Cuando hagamos operaciones por filas a la matriz ampliada, solo buscaremos pivotes hasta la línea vertical, es decir, si por ejemplo la matriz A tiene una fila nula, pero a la derecha tiene valores no nulos, la consideraremos una fila nula y la pondremos al final sin hacer pivotes más allá de la línea. Si en alguna ocasión nos pasamos y hacemos pivotes en esa parte, el teorema también será cierto (incluso es cierto si no hacemos la reducida completa), pero simplemente habremos hecho operaciones innecesarias.*

2. Erratas

(No detectadas)

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

3. Ejercicios

Aquí se plantean muchas reducciones por filas. Los 20 primeros ejercicios serán sobre \mathbb{R} , los 20 siguientes sobre \mathbb{Z}_5 y los 10 últimos sobre \mathbb{Z}_3 . No es necesario hacer muchos. Conviene hacer uno o dos de cada tipo hasta que se adquiera suficiente soltura con el proceso.

Ejercicio 3. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*


$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & -8 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+5(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -18 & 17 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & -1 & 2 \\ -18 & 17 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & -1 & 2 \\ -18 & 17 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 0 & -8 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

◇

Ejercicio 4. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)-1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)-1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 5. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$


Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)-1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)+1}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-5}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 6. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{4}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$


◇

Ejercicio 7. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)-5(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)+\frac{3}{4}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{4}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)-\frac{3}{2}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Reducción por Filas		Clase: 30 min.

$$E_{(4) \rightarrow \frac{3}{2}(3)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 8. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & -9 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -9 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & -9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 9. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$


Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 10. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}}(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-1}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-2}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+\frac{13}{2}}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(2)+\frac{7}{2}}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 11. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:


$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 9 & 4 \\ 3 & -9 & -2 \\ -5 & 9 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4}(1)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-3}(1)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+5}(1)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)+2}(2)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3}(2)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+1}(2)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1}(3)} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 18 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 18 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 9 & 4 \\ 3 & -9 & -2 \\ -5 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Reducción por Filas		Clase: 30 min.

◇

Ejercicio 12. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 13. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 14. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -9 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$


Solución:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -9 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{E_{5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+\frac{4}{5}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 15. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{6}}(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ -5 & -4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{6(2)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-\frac{5}{6}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 16. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 17. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$


Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 18. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$


◇

Ejercicio 19. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+5(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

◇

Ejercicio 20. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 21. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 22. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$


Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 23. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$


Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇


	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 24. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & | & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & | & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & | & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & | & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & | & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & | & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & | & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & | & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & | & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & | & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 25. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇


Ejercicio 26. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 27. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 28. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇


Ejercicio 29. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 30. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4(1)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 31. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_5)$$


Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_4(1)} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 32. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 33. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 34. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$


Solución:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 35. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 36. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 37. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:


$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

◇

Ejercicio 38. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$


La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 39. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_4(1)} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 40. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_4(3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 41. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$


La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 42. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 43. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 44. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 45. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3)$$


Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 46. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3)$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 47. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 48. Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_3)$$


Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Ejercicio 49. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase y calcula la matriz de paso:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de paso es $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y podemos comprobar que se cumple el teorema fundamental de la reducción por filas viendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 50. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$


◇

Ejercicio 51. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$E_{(4)+1(3)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇

Ejercicio 52. *Calcula la matriz reducida por filas completa de la siguiente matriz utilizando el orden estricto explicado en clase:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◇