

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Vídeo : <https://youtu.be/gbvdqz8XkLg>

## 1. Resumen

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Llamaremos **coeficientes** a los valores que multiplican a las  $x_i$  que serán elementos de un cuerpo  $K$ . La **matriz de los coeficientes** es la formada por dichos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

El número de filas de esta matriz coincide con el número de filas y el número de columnas es igual al número de incógnitas.

Los elementos que aparecen a la derecha del  $=$  se llaman términos independientes y llamaremos **matriz ampliada del sistema** a la matriz formada por los coeficientes con una columna extra para los términos independientes.

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

El sistema de ecuaciones también se puede representar matricialmente como  $AX = B$ ,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dado un sistema de ecuaciones, debemos ser capaces de reconocer la matriz ampliada y viceversa.

**Teorema 1.** Sea  $[A|B]$  la matriz ampliada del un sistema de ecuaciones y  $E$  una operación elemental por filas. Entonces el sistema asociado a  $[EA|EB]$  tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema asociado a  $[A|B]$ .

*Demostración.*  $X$  es solución de  $[A|B]$  si y solo si  $AX = B$ , pero  $AX = B$  si y solo si  $EAX = EAB$  por ser  $E$  una operación elemental invertible, y eso es equivalente a que  $X$  sea solución de  $[EA|EB]$ .  $\square$

**Proposición 2.** Las soluciones de un sistema de ecuaciones con matriz ampliada  $[A|B]$  son las mismas que las del sistema asociado a la matriz reducida por filas de  $[A|B]$  (que llamaremos **sistema reducido**).

*Demostración.* La matriz reducida se obtiene aplicando una sucesión de operaciones elementales por filas  $E_k \cdots E_2 E_1 [A|B]$ . Aplicando en cada paso el teorema anterior, concluimos el resultado de la proposición.  $\square$

Para resolver un sistema de ecuaciones, procederemos del siguiente modo:

**Teorema 3.** Sea  $[A|B]$  la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales y  $R$  su matriz reducida por filas.

1. Si la columna de los términos independientes es una columna pivote, entonces el sistema no tiene solución. Diremos que el sistema es **incompatible**.
2. Si eso no sucede, haremos parámetros las variables correspondientes a las columnas no pivote y dejaremos el resto de las variables respecto a ellas.
  - a) Si todas las columnas de la parte de los coeficientes son pivotes, entonces la solución es única. Diremos que el sistema es **compatible determinado**.
  - b) Si no, las soluciones dependerán de los parámetros que pueden tomar cualquier valor en el cuerpo  $K$ . Diremos que el sistema es **compatible indeterminado**.

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas				Clase: 30 min.

## 2. Erratas

(No detectadas)

## 3. Ejercicios

A continuación se proponen 50 sistemas de ecuaciones de distintos tipos. Los 20 primeros son en  $\mathbb{R}$ , los 20 siguientes en  $\mathbb{Z}_5$  y los 10 últimos en  $\mathbb{Z}_3$ .

**Ejercicio 4.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :*

$$\begin{aligned}
 x_1 + 5x_3 + 9x_4 &= 0 \\
 -x_1 + x_2 - 3x_4 &= 3 \\
 -x_1 - 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\
 -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 5 \\
 -2x_2 - 8x_3 - 6x_4 &= -7
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)-5(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

$$E_{(3)-2(4)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-2(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 5.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$

$$x_1 = -2$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{4}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$E_{(5) \rightarrow -3(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 6.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -5 \\ x_1 - 4x_3 + 6x_4 &= 6 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 & 6 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & -4 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= -2 \\ x_2 + x_4 &= -1 \\ x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= -2a - 2 \\ x_2 &= -a - 1 \\ x_3 &= a - 2 \\ x_4 &= a \end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ .  $\diamond$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

**Ejercicio 7.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -2$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 = 2$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_3$ .

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2a + 2$$

$$x_3 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ . ◇

**Ejercicio 8.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$-2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9$$

$$x_3 - x_4 = 6$$

$$-x_1 + x_3 = -2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 7 & -\frac{5}{2} & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 7 & -\frac{5}{2} & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 7 & -\frac{5}{2} & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-\frac{2}{7}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{3}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{7} & -\frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{7} & \frac{41}{7} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{9}{7} & \frac{66}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{7} & \frac{41}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{66}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{7} & \frac{41}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{66}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{43}{7} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{7(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{66}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{43}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{6}{7}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{7} & \frac{66}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{43}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{9}{7}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{43}{7} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{43}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{10}{7}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 9.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

$$x_3 = 2$$

$$-4x_3 = -8$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 2 \\ x_3 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_2$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= -4a + 2 \\ x_2 &= a \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ . ◇

**Ejercicio 10.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :*

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -9 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -9 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
E_{(1)+\frac{2}{3}(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{3}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{3}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
E_{(1)+5(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
\end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 11.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = 8$$

$$x_2 = -4$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 9$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
E_{(5)-1(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array} \right] \\
E_{(4)-1(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$E_{(4)+2(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -9 \end{array} \right] \quad E_{(5)-4(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 12.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 1$$

$$-3x_1 + x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = -1$$

$$-2x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 2$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -9 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -9 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & 22 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & 22 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -\frac{14}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -\frac{14}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 9 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -\frac{14}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{5}{6}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -\frac{14}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{14}{5}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{22}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+\frac{22}{5}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{5}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 4x_3 = -1$$

$$x_2 + 3x_3 = -1$$

$$x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_3$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= -4a - 1 \\x_2 &= -3a - 1 \\x_3 &= a \\x_4 &= 0\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ . ◇

**Ejercicio 13.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :*

$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 &= -5 \\x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3 \\x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 6\end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1}(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1}(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+3}(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1}(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1}(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+1}(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2}(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right].\end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_4 &= -2 \\x_2 - x_4 &= 1 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= 2a - 2 \\x_2 &= a + 1 \\x_3 &= 2 \\x_4 &= a\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ . ◇

**Ejercicio 14.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :*

$$\begin{aligned}-x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\-x_2 + x_3 + 7x_4 &= -8 \\-x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 7 \\x_3 + x_4 &= -4\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -10 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -10 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -10 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{11}{2}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{1}{2}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{2}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{2}(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 15.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$\begin{aligned}
 x_1 - 5x_3 &= 0 \\
 -2x_1 + x_2 + 8x_3 &= -4 \\
 x_1 - x_2 - 2x_3 &= 4 \\
 -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -8 \\
 2x_2 - 9x_3 &= -8
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -8 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+5(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -4$$

$$x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única. ◇

**Ejercicio 16.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 = 7$$

$$-x_1 + 2x_2 + 5x_4 = -5$$

$$x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 3$$

$$x_2 + 4x_4 = -6$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & -3 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(2)-4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+5(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -1 \\
 x_2 &= 2 \\
 x_3 &= -2 \\
 x_4 &= -2 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 17.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :*

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
 -x_1 - x_3 - 4x_4 &= -8 \\
 -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 6 \\
 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\
 -x_1 + x_2 - 4x_4 &= -8
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -8 \\ -3 & -3 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -8 \\ -3 & -3 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ -3 & -3 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -7 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-5(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = 2$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 18.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 - x_2 + 7x_3 - 6x_4 = -3$$

$$-x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0$$

$$-2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -6 & -3 \\ -1 & -4 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -6 & -3 \\ -1 & -4 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 8 & -13 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{27}{5} & -\frac{17}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{27}{5} & -\frac{17}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-5(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{27}{5} & -\frac{17}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)-\frac{27}{5}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{13}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{8}{5}(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 = 3$$

$$x_2 + x_4 = -1$$

$$x_3 - x_4 = -1$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$x_1 = -2a + 3$$

$$x_2 = -a - 1$$

$$x_3 = a - 1$$

$$x_4 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ .

◇

**Ejercicio 19.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 5$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -4$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -3 & -8 & 5 \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -7 & \frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -7 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -7 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{3}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -7 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -7 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 20.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$

$$-2x_1 - 5x_2 - x_3 = 2$$

$$-2x_2 + x_3 = 7$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - \underline{\rightarrow}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)} - \underline{\rightarrow}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + \underline{\rightarrow}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - \underline{\rightarrow}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + \underline{\rightarrow}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)} + \underline{\rightarrow}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - \underline{\rightarrow}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + \underline{\rightarrow}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + \underline{\rightarrow}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)} + \underline{\rightarrow}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 21.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$-3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)} - \frac{1}{3}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ 2 & -3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - 2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)} - 2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} \\ -2 & 2 & -4 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + 2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)} - 2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)} + \frac{2}{3}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{12}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)} + \frac{2}{3}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{12}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} - \frac{2}{3}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{12}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)} - \frac{11}{3}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + \frac{2}{3}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + \frac{2}{3}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 22.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -1 \\
 -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= -1 \\
 3x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= -7 \\
 -3x_1 + x_2 - 9x_3 + 2x_4 &= 6
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 8 & -7 \\ -3 & 1 & -9 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 8 & -7 \\ -3 & 1 & -9 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + (1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 8 & -7 \\ -3 & 1 & -9 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + 3(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 8 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -7 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)} + (2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 8 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -7 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)} - 3(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -7 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} + 2(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{E_{(1)}-3(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}+1(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)}-1(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_4 &= 0 \\
 x_2 + 2x_4 &= -3 \\
 x_3 - x_4 &= -1 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -3a \\
 x_2 &= -2a - 3 \\
 x_3 &= a - 1 \\
 x_4 &= a
 \end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ .

◇

**Ejercicio 23.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre los números reales :

$$\begin{aligned}
 -3x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -3 \\
 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -8 \\
 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & -9 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -9 & -3 \\ 2 & 3 & -9 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -9 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -15 & -10 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{E_{(3)}-2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -15 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}+1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{E_{(3)}-1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -1 \\
 x_2 - 3x_3 &= -2
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_3$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= -1 \\x_2 &= 3a - 2 \\x_3 &= a\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{R}$ . ◇

**Ejercicio 24.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\-x_1 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\-x_2 + x_3 - x_4 &= 4\end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_4(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_4(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}x_1 + x_4 &= 1 \\x_2 + 3x_4 &= 1 \\x_3 + 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= -a + 1 \\x_2 &= -3a + 1 \\x_3 &= -2a \\x_4 &= a\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ . ◇

**Ejercicio 25.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 3 \\-x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\3x_1 + 3x_3 &= 3\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 26.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables  $x_3$  y  $x_4$

$$x_1 = -a + 4$$

$$x_2 = -2a - 3b + 1$$

$$x_3 = a$$

$$x_4 = b$$

donde  $a$  y  $b$  toman cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ . ◇

**Ejercicio 27.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_2 - x_3 = 4$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única. ◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 28.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned}
 -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 1 \\
 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\
 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\
 -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 2
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4 \\
 x_2 &= 3 \\
 x_3 &= 2 \\
 x_4 &= 4 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 29.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \\
 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\
 x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\
 3x_1 + 3x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 3$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = 2$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 30.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$x_1 + x_2 - x_4 = 4$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_2 - x_4 = 4$$

$$x_3 + 2x_4 = 4$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables  $x_2$  y  $x_4$

$$x_1 = -a - 4b + 4$$

$$x_2 = a$$

$$x_3 = -2b + 4$$

$$x_4 = b$$

donde  $a$  y  $b$  toman cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ .  $\diamond$

**Ejercicio 31.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_2 - x_3 = 3$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 32.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 E_{(4)+3(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+2(4)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 3$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 33.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$-x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+1(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+4(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 4$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_3$ .

$$x_1 = -2a + 1$$

$$x_2 = -2a + 4$$

$$x_3 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ .  $\diamond$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 34.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
 x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\
 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
 3x_1 + x_3 &= 2 \\
 x_2 - x_3 &= 4
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 35.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned}
 3x_2 - x_3 &= 3 \\
 x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
 -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 4 \\
 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_3 &= 3 \\
 x_2 + 3x_3 &= 1 \\
 x_4 &= 4 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_3$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -4a + 3 \\
 x_2 &= -3a + 1 \\
 x_3 &= a \\
 x_4 &= 4
 \end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ .

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 36.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_2(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_4(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_2(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + 3x_4 = 2$$

$$x_3 + 3x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$x_1 = -2a + 4$$

$$x_2 = -3a + 2$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$x_3 = -3a$$

$$x_4 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ .

◇

**Ejercicio 37.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.

◇

**Ejercicio 38.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 2$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 39.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned} 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de 2 parámetros, que a la vista de la reducción, tomaremos en las variables  $x_3$  y  $x_4$

$$x_1 = -a - 2b + 4$$

$$x_2 = -a - 4b + 2$$

$$x_3 = a$$

$$x_4 = b$$

donde  $a$  y  $b$  toman cualquier valor de  $\mathbb{Z}_5$ .

◇

**Ejercicio 40.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4 \\
 x_2 &= 0 \\
 x_3 &= 1 \\
 x_4 &= 1
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 41.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\
 x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\
 x_1 + 3x_2 &= 3 \\
 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 42.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned}
 0 &= 2 \\
 -x_1 + x_2 &= 3 \\
 x_1 + 2x_3 &= 3 \\
 2x_1 + 2x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 43.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 5 elementos :*

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\
 2x_1 - x_3 - x_4 &= 2 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 4 \\
 -x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+4(5)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(5)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

**Ejercicio 44.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\x_2 - x_4 &= 2 \\-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2\end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}x_1 - x_4 &= 1 \\x_2 - x_4 &= 2 \\x_3 - x_4 &= 2\end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= -2a + 1 \\x_2 &= -2a + 2 \\x_3 &= -2a + 2 \\x_4 &= a\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_3$ .

◇

**Ejercicio 45.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :*

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\x_1 + x_2 &= 1 \\x_2 + x_3 &= 2 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 46.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$E_{(1)+1(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] E_{(2)+2(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 2$$

$$x_2 - x_4 = 2$$

$$x_3 = 2$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$x_1 = -2a + 2$$

$$x_2 = -2a + 2$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_3$ . ◇

**Ejercicio 47.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] E_{(4)+2(1)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] E_{(1)+2(2)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(1)+1(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] E_{(2)+2(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] E_{(4)+2(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & E_{(3)+2(4)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 2$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 2$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 48.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 = 2$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible determinado y tiene solución única.  $\diamond$

**Ejercicio 49.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$x_1 - x_4 = 2$$

$$x_2 - x_4 = 0$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$0 = 0$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$x_1 = -2a + 2$$

$$x_2 = -2a$$

$$x_3 = -2a$$

$$x_4 = a$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_3$ .  $\diamond$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas		Clase: 30 min.

**Ejercicio 50.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :*

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\-x_1 - x_3 - x_4 &= 2 \\-x_1 + x_2 + x_4 &= 2\end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}x_1 + x_4 &= 2 \\x_2 - x_4 &= 1 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_4$ .

$$\begin{aligned}x_1 &= -a + 2 \\x_2 &= -2a + 1 \\x_3 &= 2 \\x_4 &= a\end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_3$ .

◇

**Ejercicio 51.** *Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :*

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_1 + x_2 &= 2 \\-x_2 + x_3 &= 0 \\-x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\x_3 &= 2\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 52.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Sistemas de Ecuaciones y Reducción por Filas	Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 E_{(3)+2(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(2)+2(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución, es incompatible.  $\diamond$

**Ejercicio 53.** Estudia y resuelve si es posible el siguiente sistema de ecuaciones sobre el cuerpo de 3 elementos :

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\
 x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\
 x_1 - x_2 - x_3 &= 1
 \end{aligned}$$

*Solución:* Tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y la reducimos por filas

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+2(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(1)+2(3)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

El sistema reducido queda:

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &= 2 \\
 x_3 &= 1 \\
 x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro, que a la vista de la reducción tomaremos en la variable  $x_2$ .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -2a + 2 \\
 x_2 &= a \\
 x_3 &= 1 \\
 x_4 &= 0
 \end{aligned}$$

donde  $a$  toma cualquier valor de  $\mathbb{Z}_3$ .  $\diamond$