	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Vídeo : [https://youtu.be/HTchhPP3Y\\_o](https://youtu.be/HTchhPP3Y_o)

## 1. Resumen

**Definición 1.** Sea  $a$  entero y  $b$  entero positivo. Diremos que  $b$  es un divisor de  $a$  si existe un entero  $c$  tal que  $a = bc$ . Al conjunto de los divisores de  $a$  lo denotaremos  $D(a)$  y la relación de que  $b$  sea divisor de  $a$  la denotaremos  $b|a$ .

Consideraremos únicamente divisores positivos, de esta forma tenemos que

$$D(4) = \{1, 2, 4\} = D(-4)$$

1 y  $|a|$  son siempre divisores de  $a$  ya que  $a = 1 \cdot a$  y  $a = |a| \cdot \text{signo}(a)$ .

**Definición 2.** Un número entero  $p \neq \pm 1$  diremos que es primo si sus únicos divisores son 1 y  $|p|$ , es decir,  $D(p) = \{1, |p|\}$ . Normalmente consideraremos solo primos positivos.

**Definición 3.** Dados dos números enteros, llamaremos máximo común divisor de  $a$  y  $b$  al más grande de sus divisores comunes, es decir, al elemento más grande del conjunto  $D(a) \cap D(b)$ .

Por ejemplo:

$$D(15) = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$D(27) = \{1, 3, 9, 27\}$$

$$D(15) \cap D(27) = \{1, 3\}$$

por lo tanto, el máximo común divisor de 15 y 27 es 3.

**Definición 4.** Dos números enteros  $a$  y  $b$  se dicen coprimos si su máximo común divisor es 1.

**Proposición 5.** Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros y sean  $q$  y  $r$  números enteros tales que  $a = bq + r$ , entonces

$$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r),$$

en particular,  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$ .


*Demostración.* Sea  $x \in D(a) \cap D(b)$ :

- Por estar en  $D(a)$  sabemos que existe un número entero  $u$  tal que  $a = xu$ .
- Por estar en  $D(b)$  sabemos que existe un número entero  $v$  tal que  $b = xv$ .
- Entonces  $r = a - bq = xu - xvq = x(u - vq)$  y por lo tanto  $x \in D(r)$ .
- Como está en  $D(b)$  y  $D(r)$  deducimos que está en su intersección,  $x \in D(b) \cap D(r)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $y \in D(b) \cap D(r)$ :

- Por estar en  $D(b)$  sabemos que existe un número entero  $m$  tal que  $b = ym$ .
- Por estar en  $D(r)$  sabemos que existe un número entero  $n$  tal que  $r = yn$ .
- Entonces  $a = bq + r = ymq + yn = y(mq + n)$  y por lo tanto  $y \in D(a)$ .
- Como está en  $D(b)$  y  $D(a)$  deducimos que está en su intersección,  $y \in D(a) \cap D(b)$ .

Para deducir la última parte, si los divisores comunes son los mismos, en particular, el más grande de ellos también será el mismo. □

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

Para calcular el máximo común divisor de dos números  $a$  y  $b$  podemos ponerlos en una matriz columna  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  y hacer operaciones elementales del siguiente tipo:

1. Multiplicar una fila por  $-1$ , porque  $D(a) = D(-a)$  entonces  $D(a) \cap D(b) = D(-a) \cap D(b)$ .
2. Sumar a una fila, otra multiplicada por una constante entera  $q$ , por la proposición anterior.
3. Intercambiar filas porque  $D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(a)$ .

Entonces, si hacemos operaciones por filas hasta obtener una columna del tipo  $\begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ , el máximo común divisor de  $a$  y  $b$  será precisamente  $d$ , ya que  $D(d) \cap D(0) = D(d)$ .

Esto siempre sucederá si seguimos la regla de que los números deben ir decreciendo en valor absoluto, porque antes o después llegaremos al 0.

**Proposición 6** (Identidad de Bézout). Sean  $a$  y  $b$  dos números enteros y  $d = \text{mcd}(a, b)$ . Entonces existen valores enteros  $u$  y  $v$  tales que  $d = au + bv$ .

*Demostración.* Tomaremos la matriz ampliada  $\left[ \begin{array}{c|cc} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{array} \right]$  y la reduciremos por filas utilizando únicamente operaciones en  $\mathbb{Z}$  hasta obtener  $\left[ \begin{array}{c|cc} d & u & v \\ 0 & r & s \end{array} \right]$ . Utilizando la relación fundamental del proceso de reducción por filas tendremos

$$\begin{bmatrix} u & v \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$au + bv = d \quad ar + bs = 0.$$

La primera relación es la Identidad de Bézout y la segunda nos será también de utilidad para resolver las ecuaciones diofánticas.  $\square$

Una ecuación diofántica es una ecuación de la forma

$$ax + by = m$$

donde  $a, b$  y  $m$  son números enteros. De esta ecuación nos piden, si existen, las soluciones  $x$  e  $y$  enteras.

Si  $d$  es el máximo común divisor de  $a$  y  $b$ , también será divisor de  $ax + by$  y por lo tanto si  $d$  no divide a  $m$ , la ecuación diofántica no tendrá solución.

Si  $m = dk$  para algún entero  $k$ , entonces procederemos como en la demostración de la Identidad de Bézout y buscaremos los valores  $u, v, r, s$  tales que

$$au + bv = d \quad ar + bs = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por  $k$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera y sumándolas, obtendremos


$$a(uk + rt) + b(vk + st) = dk = m$$

de donde obtendremos las infinitas soluciones:

$$x = uk + rt \quad y = vk + st \quad t \in \mathbb{Z}.$$

## 2. Erratas

(No detectadas)

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

### 3. Ejercicios

En esta sección hay 50 ecuaciones diofánticas de distintos tipos. No es necesario hacer muchas, dos o tres serían suficientes para entender el mecanismo de resolución.

**Ejercicio 7.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$83x + 50y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 83 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 83 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -17 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 50 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 3(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -17 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -5 & 3 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 17(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & -50 & 83 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -5 & 3 & -5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -50 & 83 & 0 & -50 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -50 & 83 & 0 & -50 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -50 & 83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 83(-3) + 50(5) &= 1 \\ 83(-50) + 50(83) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 83(-15) + 50(25) &= 5 \\ 83(-50t) + 50(83t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$83 \underbrace{(-50t - 15)}_x + 50 \underbrace{(83t + 25)}_y = 5$$


Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -50t - 15 \\ y &= 83t + 25 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 8.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$176x - 583y = 44$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 176 & 1 & 0 & & \\ -583 & 0 & 1 & & \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 176 & 1 & 0 & & \\ -583 & 0 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 176 & 1 & 0 & & \\ -55 & 3 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 11 & 10 & 3 & & \\ -55 & 3 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 11 & 10 & 3 & & \\ 0 & 53 & 16 & & \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 53 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 176 \\ -583 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 176(10) - 583(3) &= 11 \\ 176(53) - 583(16) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 176(40) - 583(12) &= 44 \\ 176(53t) - 583(16t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$176 \underbrace{(53t + 40)}_x - 583 \underbrace{(16t + 12)}_y = 44$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 53t + 40 \\ y &= 16t + 12 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 9.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:


$$38x + 34y = 6$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 38 & 1 & 0 & & \\ 34 & 0 & 1 & & \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 38 & 1 & 0 & & \\ 34 & 0 & 1 & & \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -1 & & \\ 34 & 0 & 1 & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-8(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -1 & & \\ 2 & -8 & 9 & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 17 & -19 & & \\ 2 & -8 & 9 & & \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & -8 & 9 & & \\ 0 & 17 & -19 & & \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ 17 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 38(-8) + 34(9) &= 2 \\ 38(17) + 34(-19) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 38(-24) + 34(27) &= 6 \\ 38(17t) + 34(-19t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$38 \underbrace{(17t - 24)}_x + 34 \underbrace{(-19t + 27)}_y = 6$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 17t - 24 \\ y &= -19t + 27 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 10.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$20x - 54y = 8$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 20 & 1 & 0 \\ -54 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 20 & 1 & 0 \\ -54 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 20 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 2 & -8 & -3 \\ 6 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 2 & -8 & -3 \\ 0 & 27 & 10 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que


$$\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 27 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 20(-8) - 54(-3) &= 2 \\ 20(27) - 54(10) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 20(-32) - 54(-12) &= 8 \\ 20(27t) - 54(10t) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$20 \underbrace{(27t - 32)}_x - 54 \underbrace{(10t - 12)}_y = 8$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 27t - 32 \\ y &= 10t - 12 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 11.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-3x - 2y = -4$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 2E_{(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 2E_{(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -3(1) - 2(-2) &= 1 \\ -3(2) - 2(-3) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-4$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -3(-4) - 2(8) &= -4 \\ -3(2t) - 2(-3t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-3 \underbrace{(2t - 4)}_x - 2 \underbrace{(-3t + 8)}_y = -4$$


Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 2t - 4 \\ y &= -3t + 8 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 12.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$28x + 99y = 5$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 28 & 1 & 0 \\ 99 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 28 & 1 & 0 \\ 99 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-4(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 28 & 1 & 0 \\ -13 & -4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 2 & -7 & 2 \\ -13 & -4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+7(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 2 & -7 & 2 \\ 1 & -53 & 15 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)}-2(2)} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 99 & -28 \\ 1 & -53 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -53 & 15 \\ 0 & 99 & -28 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -53 & 15 \\ 99 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 28(-53) + 99(15) &= 1 \\ 28(99) + 99(-28) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 28(-265) + 99(75) &= 5 \\ 28(99t) + 99(-28t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$28 \underbrace{(99t - 265)}_x + 99 \underbrace{(-28t + 75)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 99t - 265 \\ y &= -28t + 75 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 13.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:


$$75x - 4y = 3$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 75 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 75 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+19(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 19 \\ -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-4(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -1 & 1 & 19 \\ 0 & -4 & -75 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -1 & -19 \\ 0 & -4 & -75 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -1 & -19 \\ -4 & -75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$75(-1) - 4(-19) = 1$$

$$75(-4) - 4(-75) = 0$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$75(-3) - 4(-57) = 3$$

$$75(-4t) - 4(-75t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$75 \underbrace{(-4t - 3)}_x - 4 \underbrace{(-75t - 57)}_y = 3$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$x = -4t - 3$$

$$y = -75t - 57$$

◇

**Ejercicio 14.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-57x + 105y = -5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} -57 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 105 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} -57 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 105 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -57 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-6(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -3 & -11 & -6 & -3 & -11 \\ -9 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -3 & -11 & -6 & -3 & -11 \\ 0 & 35 & 19 & 9 & 43 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & 11 & 6 & 3 & 11 \\ 0 & 35 & 19 & 9 & 43 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 15.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:


$$69x + 63y = 15$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 69 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 69 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 63 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 63 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-10(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -10 & 11 & -10 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 21 & -23 & 21 & -23 \\ 3 & -10 & 11 & -10 & 11 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -10 & 11 & -10 & 11 \\ 0 & 21 & -23 & 21 & -23 \end{array} \right].$$



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 21 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 69 \\ 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$69(-10) + 63(11) = 3$$

$$69(21) + 63(-23) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$69(-50) + 63(55) = 15$$

$$69(21t) + 63(-23t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$69 \underbrace{(21t - 50)}_x + 63 \underbrace{(-23t + 55)}_y = 15$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$x = 21t - 50$$

$$y = -23t + 55$$

◇

**Ejercicio 16.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$29x - 40y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 29 & 1 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} 29 & 1 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 29 & 1 & 0 & 0 \\ -11 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -4 & 4 & 3 & 3 \\ -11 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & -11 & -8 & -8 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & -40 & -29 & -29 \\ 1 & -11 & -8 & -8 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -11 & -8 & -8 \\ 0 & -40 & -29 & -29 \end{array} \right]. \end{aligned}$$


A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -11 & -8 \\ -40 & -29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$29(-11) - 40(-8) = 1$$

$$29(-40) - 40(-29) = 0$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 29(-55) - 40(-40) &= 5 \\ 29(-40t) - 40(-29t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$29 \underbrace{(-40t - 55)}_x - 40 \underbrace{(-29t - 40)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -40t - 55 \\ y &= -29t - 40 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 17.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$75x + 213y = 7$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 75 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 213 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 75 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 213 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - 3(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 75 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} + 6(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -17 & 6 & 1 & 6 \\ -12 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 4(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -17 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & -71 & 25 & 4 & 25 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 18.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$85x - 40y = 21$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 85 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -40 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 85 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -40 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} + 2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 5 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -40 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 8(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 5 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 17 & 8 & 17 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 19.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-165x - 267y = -3$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} -165 & 1 & 0 \\ -267 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} -165 & 1 & 0 \\ -267 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -165 & 1 & 0 \\ 63 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 24 & -5 & 3 \\ 63 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 24 & -5 & 3 \\ -9 & 13 & -8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 34 & -21 \\ -9 & 13 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 34 & -21 \\ 0 & -89 & 55 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & -34 & 21 \\ 0 & -89 & 55 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -34 & 21 \\ -89 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -165 \\ -267 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -165(-34) - 267(21) &= 3 \\ -165(-89) - 267(55) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-1$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -165(34) - 267(-21) &= -3 \\ -165(-89t) - 267(55t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-165 \underbrace{(-89t + 34)}_x - 267 \underbrace{(55t - 21)}_y = -3$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -89t + 34 \\ y &= 55t - 21 \end{aligned}$$

◇


**Ejercicio 20.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$90x - 19y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 90 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 90 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -5 & 1 & 5 \\ -19 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -5 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -19 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & -19 & -90 \\ 1 & -4 & -19 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -4 & -19 \\ 0 & -19 & -90 \end{array} \right].$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -4 & -19 \\ -19 & -90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 90(-4) - 19(-19) &= 1 \\ 90(-19) - 19(-90) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 90(-20) - 19(-95) &= 5 \\ 90(-19t) - 19(-90t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$90 \underbrace{(-19t - 20)}_x - 19 \underbrace{(-90t - 95)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -19t - 20 \\ y &= -90t - 95 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 21.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$30x - 22y = 2$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 30 & 1 & 0 & 0 \\ -22 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.


$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} 30 & 1 & 0 & 0 \\ -22 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & 1 & 1 & 1 \\ -22 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & -11 & -15 & -15 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & -15 & -15 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 30(3) - 22(4) &= 2 \\ 30(-11) - 22(-15) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 30(3) - 22(4) &= 2 \\ 30(-11t) - 22(-15t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$30 \underbrace{(-11t + 3)}_x - 22 \underbrace{(-15t + 4)}_y = 2$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -11t + 3 \\ y &= -15t + 4 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 22.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-138x - 57y = -8$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\begin{bmatrix} -138 & 1 & 0 \\ -57 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} -138 & 1 & 0 \\ -57 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -24 & 1 & -2 \\ -57 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -24 & 1 & -2 \\ -9 & -2 & 5 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 7 & -17 \\ -9 & -2 & 5 \end{array} \right] \\ & & & \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 7 & -17 \\ 0 & 19 & -46 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 23.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:


$$13x + 18y = 1$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\begin{bmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} 13 & 1 & 0 \\ 18 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 13 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -2 & 4 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{array} \right] \\ & & & \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 18 & -13 \\ 1 & 7 & -5 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 18 & -13 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 13(7) + 18(-5) &= 1 \\ 13(18) + 18(-13) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 13(7) + 18(-5) &= 1 \\ 13(18t) + 18(-13t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$13 \underbrace{(18t + 7)}_x + 18 \underbrace{(-13t - 5)}_y = 1$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 18t + 7 \\ y &= -13t - 5 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 24.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$250x + 335y = 20$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 250 & 1 & 0 \\ 335 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.


$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} 250 & 1 & 0 \\ 335 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} - 1(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 250 & 1 & 0 \\ 85 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 3(2)} \left[ \begin{array}{c|cc} -5 & 4 & -3 \\ 85 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 17(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -5 & 4 & -3 \\ 0 & 67 & -50 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & -4 & 3 \\ 0 & 67 & -50 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} -4 & 3 \\ 67 & -50 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 250 \\ 335 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 250(-4) + 335(3) &= 5 \\ 250(67) + 335(-50) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 250(-16) + 335(12) &= 20 \\ 250(67t) + 335(-50t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$250 \underbrace{(67t - 16)}_x + 335 \underbrace{(-50t + 12)}_y = 20$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 67t - 16 \\ y &= -50t + 12 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 25.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$43x - 25y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 43 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} 43 & 1 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -7 & 1 & 2 & 1 \\ -25 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -7 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & -3 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & -7 & -12 & -5 \\ 3 & -4 & -7 & -3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & -7 & -12 & -5 \\ 0 & -25 & -43 & -18 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 12 & 5 \\ 0 & -25 & -43 & -18 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que


$$\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -25 & -43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 43(7) - 25(12) &= 1 \\ 43(-25) - 25(-43) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 43(35) - 25(60) &= 5 \\ 43(-25t) - 25(-43t) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$43 \underbrace{(-25t + 35)}_x - 25 \underbrace{(-43t + 60)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -25t + 35 \\ y &= -43t + 60 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 26.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$11x + 58y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 58 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 58 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} - 5(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 11 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)} - 4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 21 & -4 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} + 3(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 21 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 58 & -11 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{-1}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & -21 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 58 & -11 & 3 & -5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -21 & 4 \\ 58 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 11(-21) + 58(4) &= 1 \\ 11(58) + 58(-11) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 11(-105) + 58(20) &= 5 \\ 11(58t) + 58(-11t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que


$$11 \underbrace{(58t - 105)}_x + 58 \underbrace{(-11t + 20)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 58t - 105 \\ y &= -11t + 20 \end{aligned}$$

◇



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

**Ejercicio 27.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$15x + 34y = 2$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & 1 & 0 & 0 \\ 34 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & 1 & 0 & 0 \\ 34 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - 2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 15 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 4(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & -4 & -4 \\ 0 & 34 & -15 & -3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -9 & 4 & 4 \\ 0 & 34 & -15 & -3 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 34 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 15(-9) + 34(4) &= 1 \\ 15(34) + 34(-15) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 15(-18) + 34(8) &= 2 \\ 15(34t) + 34(-15t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$15 \underbrace{(34t - 18)}_x + 34 \underbrace{(-15t + 8)}_y = 2$$


Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 34t - 18 \\ y &= -15t + 8 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 28.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$253x - 330y = 44$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 253 & 1 & 0 \\ -330 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 253 & 1 & 0 \\ -330 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 253 & 1 & 0 \\ -77 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 22 & 4 & 3 \\ -77 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 22 & 4 & 3 \\ 11 & 17 & 13 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & -30 & -23 \\ 11 & 17 & 13 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 11 & 17 & 13 \\ 0 & -30 & -23 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 17 & 13 \\ -30 & -23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 253 \\ -330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 253(17) - 330(13) &= 11 \\ 253(-30) - 330(-23) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 253(68) - 330(52) &= 44 \\ 253(-30t) - 330(-23t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$253 \underbrace{(-30t + 68)}_x - 330 \underbrace{(-23t + 52)}_y = 44$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -30t + 68 \\ y &= -23t + 52 \end{aligned}$$

◇


**Ejercicio 29.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$15x - 61y = 3$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 15 & 1 & 0 \\ -61 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 15 & 1 & 0 \\ -61 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 15 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+15(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 61 & 15 \\ -1 & 4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 61 & 15 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 61 & 15 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 61 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ -61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 15(-4) - 61(-1) &= 1 \\ 15(61) - 61(15) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 15(-12) - 61(-3) &= 3 \\ 15(61t) - 61(15t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$15 \underbrace{(61t - 12)}_x - 61 \underbrace{(15t - 3)}_y = 3$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 61t - 12 \\ y &= 15t - 3 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 30.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-63x + 138y = -8$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} -63 & 1 & 0 \\ 138 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} -63 & 1 & 0 \\ 138 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -63 & 1 & 0 \\ 12 & 2 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 11 & 5 \\ 12 & 2 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & 11 & 5 \\ 0 & 46 & 21 \end{array} \right] \\ &&&&\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & -11 & -5 \\ 0 & 46 & 21 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 31.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$245x - 220y = 6$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 245 & 1 & 0 \\ -220 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 245 & 1 & 0 \\ -220 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 1 \\ -220 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+9(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & -44 & -49 \\ 5 & 9 & 10 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & 9 & 10 \\ 0 & -44 & -49 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras.  $\diamond$

**Ejercicio 32.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$55x - 185y = 21$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 55 & 1 & 0 \\ -185 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 55 & 1 & 0 \\ -185 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 55 & 1 & 0 \\ -20 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} -5 & 10 & 3 \\ -20 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} -5 & 10 & 3 \\ 0 & -37 & -11 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 5 & -10 & -3 \\ 0 & -37 & -11 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras.  $\diamond$

**Ejercicio 33.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$6x + 62y = 2$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 6 & 1 & 0 \\ 62 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 6 & 1 & 0 \\ 62 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-10(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 6 & 1 & 0 \\ 2 & -10 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 31 & -3 \\ 2 & -10 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 2 & -10 & 1 \\ 0 & 31 & -3 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 31 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:


$$6(-10) + 62(1) = 2$$

$$6(31) + 62(-3) = 0$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$6(-10) + 62(1) = 2$$

$$6(31t) + 62(-3t) = 0$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$6 \underbrace{(31t - 10)}_x + 62 \underbrace{(-3t + 1)}_y = 2$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 31t - 10 \\ y &= -3t + 1 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 34.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$22x + 27y = 1$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 22 & 1 & 0 & 1 \\ 27 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 22 & 1 & 0 & 1 \\ 27 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} - 1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 22 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)} - 4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} - 2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -11 & 9 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1)} - 2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 27 & -22 & 1 \\ 1 & -11 & 9 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -11 & 9 & 1 \\ 0 & 27 & -22 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} -11 & 9 \\ 27 & -22 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 22 \\ 27 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 22(-11) + 27(9) &= 1 \\ 22(27) + 27(-22) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 22(-11) + 27(9) &= 1 \\ 22(27t) + 27(-22t) &= 0 \end{aligned}$$


Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$22 \underbrace{(27t - 11)}_x + 27 \underbrace{(-22t + 9)}_y = 1$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 27t - 11 \\ y &= -22t + 9 \end{aligned}$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

**Ejercicio 35.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$7x - 2y = 1$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 7(1) - 2(3) &= 1 \\ 7(2) - 2(7) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 7(1) - 2(3) &= 1 \\ 7(2t) - 2(7t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$7 \underbrace{(2t+1)}_x - 2 \underbrace{(7t+3)}_y = 1$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1 \\ y &= 7t + 3 \end{aligned}$$


◇

**Ejercicio 36.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$96x + 25y = 4$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 96 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} 96 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -4 & 1 & -4 \\ 25 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+6(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -4 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & -23 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 25 & -96 \\ 1 & 6 & -23 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 6 & -23 \\ 0 & 25 & -96 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 6 & -23 \\ 25 & -96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 96 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 96(6) + 25(-23) &= 1 \\ 96(25) + 25(-96) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 96(24) + 25(-92) &= 4 \\ 96(25t) + 25(-96t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$96 \underbrace{(25t + 24)}_x + 25 \underbrace{(-96t - 92)}_y = 4$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 25t + 24 \\ y &= -96t - 92 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 37.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-135x - 123y = -12$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\begin{bmatrix} -135 & 1 & 0 \\ -123 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  para calcular el máximo común divisor extendido.


$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} -135 & 1 & 0 \\ -123 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)} - 1(2)} \left[ \begin{array}{c|cc} -12 & 1 & -1 \\ -123 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)} - 10(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -12 & 1 & -1 \\ -3 & -10 & 11 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)} - 4(2)} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 41 & -45 \\ -3 & -10 & 11 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & -10 & 11 \\ 0 & 41 & -45 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 10 & -11 \\ 0 & 41 & -45 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 10 & -11 \\ 41 & -45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -135 \\ -123 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -135(10) - 123(-11) &= 3 \\ -135(41) - 123(-45) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Multiplicando la primera por  $-4$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -135(-40) - 123(44) &= -12 \\ -135(41t) - 123(-45t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-135 \underbrace{(41t - 40)}_x - 123 \underbrace{(-45t + 44)}_y = -12$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 41t - 40 \\ y &= -45t + 44 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 38.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$14x + 13y = 4$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 14 & 1 & 0 & & & \\ 13 & 0 & 1 & & & \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 14 & 1 & 0 & & & \\ 13 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} - 1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & & & \\ 13 & 0 & 1 & & & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - 13(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & -13 & 14 & & & \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -13 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 14(1) + 13(-1) &= 1 \\ 14(-13) + 13(14) &= 0 \end{aligned}$$


Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 14(4) + 13(-4) &= 4 \\ 14(-13t) + 13(14t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$14 \underbrace{(-13t + 4)}_x + 13 \underbrace{(14t - 4)}_y = 4$$



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$x = -13t + 4$$

$$y = 14t - 4$$

◇

**Ejercicio 39.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$70x - 93y = 2$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 70 & 1 & 0 & 0 \\ -93 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 70 & 1 & 0 & 0 \\ -93 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}+1(1)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 70 & 1 & 0 & 0 \\ -23 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}+3(2)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 3 \\ -23 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}+23(1)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 93 & 70 & 70 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 93 & 70 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 70 \\ -93 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$70(4) - 93(3) = 1$$

$$70(93) - 93(70) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$70(8) - 93(6) = 2$$

$$70(93t) - 93(70t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$70 \underbrace{(93t + 8)}_x - 93 \underbrace{(70t + 6)}_y = 2$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera


$$x = 93t + 8$$

$$y = 70t + 6$$

◇

**Ejercicio 40.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-15x - 33y = -15$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	Previo: 60 min.
	<b>Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas</b>	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} -15 & 1 & 0 \\ -33 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} -15 & 1 & 0 \\ -33 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -15 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}-5(2)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 11 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & -5 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 11 & -5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} -15 \\ -33 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -15(2) - 33(-1) &= 3 \\ -15(11) - 33(-5) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-5$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -15(-10) - 33(5) &= -15 \\ -15(11t) - 33(-5t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-15 \underbrace{(11t - 10)}_x - 33 \underbrace{(-5t + 5)}_y = -15$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 11t - 10 \\ y &= -5t + 5 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 41.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:


$$4x + 9y = 3$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}-4(2)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -4 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 4 \\ 9 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right],$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$4(-2) + 9(1) = 1$$

$$4(9) + 9(-4) = 0$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$4(-6) + 9(3) = 3$$

$$4(9t) + 9(-4t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$4 \underbrace{(9t - 6)}_x + 9 \underbrace{(-4t + 3)}_y = 3$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$x = 9t - 6$$

$$y = -4t + 3$$

◇

**Ejercicio 42.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$190x - 142y = 4$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} 190 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -142 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 190 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -142 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 48 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -142 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 48 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-24(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & -71 & -95 & -71 & -95 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -71 & -95 & -71 & -95 \end{array} \right].$$


A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ -71 & -95 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 190 \\ -142 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$190(3) - 142(4) = 2$$

$$190(-71) - 142(-95) = 0$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 190(6) - 142(8) &= 4 \\ 190(-71t) - 142(-95t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$190 \underbrace{(-71t + 6)}_x - 142 \underbrace{(-95t + 8)}_y = 4$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -71t + 6 \\ y &= -95t + 8 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 43.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-144x + 93y = -6$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} -144 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 93 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -144 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 93 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 42 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 93 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 42 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & -2 & -3 & -2 & -3 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -3 & 11 & 17 & 9 & 9 \\ 9 & -2 & -3 & -2 & -3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -3 & 11 & 17 & 9 & 9 \\ 0 & 31 & 48 & 27 & 27 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 3 & -11 & -17 & -9 & -9 \\ 0 & 31 & 48 & 27 & 27 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que


$$\left[ \begin{array}{cc} -11 & -17 \\ 31 & 48 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} -144 \\ 93 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -144(-11) + 93(-17) &= 3 \\ -144(31) + 93(48) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-2$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -144(22) + 93(34) &= -6 \\ -144(31t) + 93(48t) &= 0 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-144 \underbrace{(31t + 22)}_x + 93 \underbrace{(48t + 34)}_y = -6$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 31t + 22 \\ y &= 48t + 34 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 44.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$285x + 455y = 6$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 285 & 1 & 0 \\ 455 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{array}{c|cc} 285 & 1 & 0 \\ 455 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 285 & 1 & 0 \\ -115 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 55 & -3 & 2 \\ -115 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 55 & -3 & 2 \\ -5 & -8 & 5 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1)+11(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & -91 & 57 \\ -5 & -8 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} -5 & -8 & 5 \\ 0 & -91 & 57 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & 8 & -5 \\ 0 & -91 & 57 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 45.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-285x + 162y = -2$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} -285 & 1 & 0 \\ 162 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{array}{c|cc} -285 & 1 & 0 \\ 162 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 39 & 1 & 2 \\ 162 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 39 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-6(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 25 & 44 \\ 6 & -4 & -7 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 3 & 25 & 44 \\ 0 & -54 & -95 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 46.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$671x - 957y = 44$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 671 & 1 & 0 \\ -957 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 671 & 1 & 0 \\ -957 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 671 & 1 & 0 \\ -286 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 99 & 3 & 2 \\ -286 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 99 & 3 & 2 \\ 11 & 10 & 7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-9(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & -87 & -61 \\ 11 & 10 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 11 & 10 & 7 \\ 0 & -87 & -61 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -87 & -61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 671 \\ -957 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 671(10) - 957(7) &= 11 \\ 671(-87) - 957(-61) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 671(40) - 957(28) &= 44 \\ 671(-87t) - 957(-61t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$671 \underbrace{(-87t + 40)}_x - 957 \underbrace{(-61t + 28)}_y = 44$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -87t + 40 \\ y &= -61t + 28 \end{aligned}$$

◇


**Ejercicio 47.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$36x - 87y = 6$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 36 & 1 & 0 \\ -87 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 36 & 1 & 0 \\ -87 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 36 & 1 & 0 \\ -15 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 6 & 5 & 2 \\ -15 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 17 & 7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & -29 & -12 \\ 3 & 17 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 3 & 17 & 7 \\ 0 & -29 & -12 \end{array} \right].$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 17 & 7 \\ -29 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ -87 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 36(17) - 87(7) &= 3 \\ 36(-29) - 87(-12) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 36(34) - 87(14) &= 6 \\ 36(-29t) - 87(-12t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$36 \underbrace{(-29t + 34)}_x - 87 \underbrace{(-12t + 14)}_y = 6$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -29t + 34 \\ y &= -12t + 14 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 48.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$141x + 78y = 10$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 141 & 1 & 0 \\ 78 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} 141 & 1 & 0 \\ 78 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)} - 2(2)} \left[ \begin{array}{c|cc} -15 & 1 & -2 \\ 78 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} + 5(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} -15 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)} + 5(2)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 26 & -47 \\ 3 & 5 & -9 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 3 & 5 & -9 \\ 0 & 26 & -47 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 49.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$65x + 81y = 4$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 65 & 1 & 0 \\ 81 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 65 & 1 & 0 \\ 81 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-1(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 65 & 1 & 0 \\ 16 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}-4(2)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 5 & -4 \\ 16 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-16(1)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -81 & 65 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -81 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 65 \\ 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 65(5) + 81(-4) &= 1 \\ 65(-81) + 81(65) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 65(20) + 81(-16) &= 4 \\ 65(-81t) + 81(65t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$65 \underbrace{(-81t + 20)}_x + 81 \underbrace{(65t - 16)}_y = 4$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -81t + 20 \\ y &= 65t - 16 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 50.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$85x - 105y = 25$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 85 & 1 & 0 \\ -105 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 85 & 1 & 0 \\ -105 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}+1(1)} \left[ \begin{array}{c|cc} 85 & 1 & 0 \\ -20 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)}+4(2)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 5 & 5 & 4 \\ -20 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}+4(1)} \left[ \begin{array}{c|ccc} 5 & 5 & 4 \\ 0 & 21 & 17 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 21 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 \\ -105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned}85(5) - 105(4) &= 5 \\85(21) - 105(17) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned}85(25) - 105(20) &= 25 \\85(21t) - 105(17t) &= 0\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$85 \underbrace{(21t + 25)}_x - 105 \underbrace{(17t + 20)}_y = 25$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned}x &= 21t + 25 \\y &= 17t + 20\end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 51.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-170x + 42y = -8$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{ccc|cc} -170 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} -170 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+21(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 21 & 85 & 21 & 85 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 21 & 85 & 21 & 85 \end{array} \right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que


$$\left[ \begin{array}{cc} -1 & -4 \\ 21 & 85 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} -170 \\ 42 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned}-170(-1) + 42(-4) &= 2 \\-170(21) + 42(85) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-4$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned}-170(4) + 42(16) &= -8 \\-170(21t) + 42(85t) &= 0\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas	Clase: 30 min.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-170 \underbrace{(21t + 4)}_x + 42 \underbrace{(85t + 16)}_y = -8$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 21t + 4 \\ y &= 85t + 16 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 52.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$-48x + 117y = -9$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} -48 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} -48 & 1 & 0 & 0 \\ 117 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -48 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -6 & 5 & 2 & 0 \\ 21 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} -6 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 17 & 7 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 39 & 16 & 0 \\ 3 & 17 & 7 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 17 & 7 & 0 \\ 0 & 39 & 16 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 39 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -48 \\ 117 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} -48(17) + 117(7) &= 3 \\ -48(39) + 117(16) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por  $-3$  y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} -48(-51) + 117(-21) &= -9 \\ -48(39t) + 117(16t) &= 0 \end{aligned}$$


Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$-48 \underbrace{(39t - 51)}_x + 117 \underbrace{(16t - 21)}_y = -9$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 39t - 51 \\ y &= 16t - 21 \end{aligned}$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

**Ejercicio 53.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$46x - 3y = 5$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 46 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 46 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+15(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 15 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 46 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 46 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 46(1) - 3(15) &= 1 \\ 46(3) - 3(46) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 46(5) - 3(75) &= 5 \\ 46(3t) - 3(46t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$46 \underbrace{(3t + 5)}_x - 3 \underbrace{(46t + 75)}_y = 5$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 3t + 5 \\ y &= 46t + 75 \end{aligned}$$


◇

**Ejercicio 54.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$22x + 17y = 1$$

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 22 & 1 & 0 \\ 17 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|cc} 22 & 1 & 0 \\ 17 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & 1 & -1 \\ 17 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 7 & -9 \\ 2 & -3 & 4 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & 7 & -9 \\ 0 & -17 & 22 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -17 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 22(7) + 17(-9) &= 1 \\ 22(-17) + 17(22) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 22(7) + 17(-9) &= 1 \\ 22(-17t) + 17(22t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$22 \underbrace{(-17t + 7)}_x + 17 \underbrace{(22t - 9)}_y = 1$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -17t + 7 \\ y &= 22t - 9 \end{aligned}$$

◇

**Ejercicio 55.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$221x - 1222y = 53$$


*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 221 & & 1 & 0 \\ -1222 & & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 221 & & 1 & 0 \\ -1222 & & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+6(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 221 & & 1 & 0 \\ 104 & & 6 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 13 & -11 & -2 & \\ 104 & 6 & 1 & \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-8(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cc} 13 & -11 & -2 & \\ 0 & 94 & 17 & \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 13. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras. ◇

**Ejercicio 56.** Resuelve, si es posible, la siguiente ecuación diofántica:

$$25x - 245y = 15$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Máximo Común Divisor y Ecuaciones Diofánticas		Clase: 30 min.

*Solución:* Vamos a reducir la matriz  $\left[ \begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 0 \\ -245 & 0 & 1 \end{array} \right]$  para calcular el máximo común divisor extendido.

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 0 \\ -245 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+10(1)}} \left[ \begin{array}{c|cc} 25 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & -49 & -5 \\ 5 & 10 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccc} 5 & 10 & 1 \\ 0 & -49 & -5 \end{array} \right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[ \begin{array}{cc} 10 & 1 \\ -49 & -5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 25 \\ -245 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array} \right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 25(10) - 245(1) &= 5 \\ 25(-49) - 245(-5) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un  $t$  entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 25(30) - 245(3) &= 15 \\ 25(-49t) - 245(-5t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$25 \underbrace{(-49t + 30)}_x - 245 \underbrace{(-5t + 3)}_y = 15$$

Y las soluciones son las siguientes, donde  $t$  es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -49t + 30 \\ y &= -5t + 3 \end{aligned}$$

◇